**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

# APLICACIONES DEL MÉTODO DIDÁCTICO INDUCTIVO EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN EN LOS ESTUDIANTES DE LA UFA-ESPE-L Y SU INCIDENCIA EN LOSLOGROS DE APRENDIZAJE EN LA ASIGNATURA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

**AUTOR: WILSON PATRICIO REYES BEDOYA**

**Trabajo de titulación, presentado ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Matemática Básica.**

**RIOBAMBA - ECUADOR**
MAYO 2015

**CERTIFICACIÓN:**

EL TRIBUNAL DE TESIS CERTIFICA QUE:
El trabajo de titulación, titulado "Aplicaciones del método didáctico inductivo en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en los estudiantes de la UFA-ESPE-L y su incidencia en los logros de aprendizaje en la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias", de responsabilidad del Sr. Wilson Patricio Reyes Bedoya ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal de Tesis:

Dr. Mgs. Juan Vargas
PRESIDENTE — FIRMA

Ing. Mgs. Jorge Sanchez
DIRECTOR — FIRMA

Ing. Mgs. Marco Acurio
MIEMBRO — FIRMA

Ing. Mgs. Luis Basantes
MIEMBRO — FIRMA

COORDINADOR SISBIB ESPOCH — FIRMA

Riobamba, Mayo de 2015

## DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Wilson Patricio Reyes Bedoya, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el presente Proyecto de Investigación, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Ing. Wilson P. Reyes B.

C.C.: 180313563-9

## DEDICATORIA

Ésta investigación la dedico a mi familia, en especial a mi hijo Patricio, quien, sin saberlo, me enseñaron el verdadero significado de la vida.

**Ing. Wilson P. Reyes B.**

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, principio y fin.

A mis padres por siempre haberme mostrado el camino.

A mi esposa, por su paciencia infinita.

De manera especial al Ing. Jorge Sanchez, Ing. Marco Acurio e Ing. Luis Basantes, por ser quienes compartieron su experiencia en la elaboración de esta tesis.

A todas aquellas personas que de una u otra manera dieron un aliento en momentos de desmayo.

**Ing. Wilson P. Reyes B.**

ÍNDICE GENERAL

## CAPITULO 1: EL PROBLEMA



## CAPITULO 2: MARCO DE REFERENCIA

## CAPITULO 3: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN



## CAPITULO 4: MARCO METODOLÓGICO

## ÍNDICE DE FIGURAS

# ÍNDICE DE TABLAS

## RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito presentar un método educativo estandarizado para mejorar los logros de aprendizaje de los estudiantes en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE Extensión Latacunga, utilizando una guía de aprendizaje para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, elaborado siguiendo la estructura que propone el Método Inductivo. La necesidad de la investigación se determinó con la ayuda del programa estadístico SPSS y la verificación de resultados con el programa estadístico R, para ejecutar la propuesta se utilizó un sistema de preparación de documentos llamado Latex, el cual facilito la escritura de fórmulas matemáticas. Para validar la investigación se utilizó la prueba estadística "t-Student", con un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, mediante comparación de rendimiento académico final de dos grupos de estudio, se validó que el uso del Método Inductivo incide favorablemente en el proceso educativo y por consiguiente en los logros de aprendizaje, se refleja con el incremento de promedios finales de aprobación de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en el semestre octubre 2014 - marzo del 2015.

**PALABRAS CLAVES:** <MÉTODO INDUCTIVO>, <LOGROS DE APRENDIZAJE>, <ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS>, <UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE EXTENSIÓN LATACUNGA>, <RENDIMIENTO ACADÉMICO>, <GUÍA DE APRENDIZAJE>.

## ABSTRACT

The aim of the present search is to share a standardized methodology to Improve the students'learning achievements Who are studying differential equations in the Ecuadorian Army ESPE University - Extension Latacunga, it has used to guide revolve Differentials equation of first order, following some instructions according the Inductive Method. The need of the investigation was determinate With using SPPS and the verification of the results of the statistic program R, to implement this research, it has used LATEX (system of preparation of documents) which has facilitated the written mathematical formulas. To valid the investigation, it has used the statistic T-Student test, with a significance level of x: 0, 05, through the comparison of academic performance Between two groups of studies, validated by the Inductive Method that affects in a positive way in the learning process and the learning progress, because at the end of That, It has shown the accademic record and the students grew , and students were able to pass the subject in the semester between October 2014 - March 2015.

**KEYWORDS:** <INDUCTIVE METHOD>, <LEARNING GOALS>, <ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <Ecuadorian Army ESPE University - Extension Latacunga>, <ACADEMIC PERFORMANCE>, <GUIDE REVOLVE>.

# CAPÍTULO 1

## EL PROBLEMA

## 1. INTRODUCCIÓN

La búsqueda y aplicación de los diversos paradigmas educativos es un camino necesario para lograr un verdadero cambio en la Educación Superior, para que alcance las actuales exigencias entre las cuales se encuentran componentes de autoaprendizaje e investigación.

Se debe tener claro que ningún método por si solo tiene alto impacto en la formación académica, los docentes deben generar diversas herramientas que les permitan mejorar el proceso enseñanza aprendizaje de manera real y escalonada, de fácil aplicación y con resultados palpables y evidenciables.

La presente investigación, propone el uso del Método Inductivo en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden en la UFA-ESPE-L y su incidencia en los logros de aprendizaje, con el fin de estandarizar un método educativo probado que permita, entre otras cosas, elevar en el estudiante su interés por la asignatura de "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias".

### 1.1 Tema de investigación

Aplicaciones del método didáctico inductivo en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en los estudiantes de la UFA-ESPE-L y su incidencia en los logros de aprendizaje en la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 1.2 Planteamiento del problema

#### *1.2.1 Contexto macro*

En todos los países, la evaluación de los programas educativos como una forma de mejorar su calidad ha sido uno de los temas a debate desde finales del siglo XX e inicios del XXI. Más allá de las discrepancias en torno a sus resultados, la evaluación de los programas educativos es un método que ha comprobado su efectividad y eficiencia para conocer sus fortalezas y áreas de oportunidad, a partir de su vinculación con la universidad de la cual depende, así como con su infraestructura e incluso aspectos particulares como su desarrollo académico y el de su investigación, parte fundamental de esta evaluación es las evidencias mostradas de los procesos de aprendizaje, estos tienen que estar fundamentados en técnicas y métodos a ser desarrollados por los docentes para elevar la calidad de los logros de aprendizaje.

### *1.2.2 Contexto meso*

A nivel nacional, el sistema educativo ecuatoriano, durante cincuenta años y más ha venido experimentando reformas y contra reformas, buscando mejorar la calidad de la educación que se imparte en todos los niveles educativos, cada gobierno a su turno ha aplicado una sistematización tanto administrativa como académica, declarando que lo anterior era caduco y que lo aplicado a su turno iba a cambiar la imagen y la formación del ciudadano ecuatoriano con un perfil ideal a la ideología gubernamental y política del Estado sin logar tales cambios hasta el día de hoy, inculpando del fracaso a los maestros y a las instituciones de todos los niveles: inicial primario, secundario y superior, frustrando a autoridades y maestros que han procurado poner todo de su parte para poner sus realizaciones al criterio de los grupos de poder encargados de la organización y evaluación en nuestro caso de la educación superior en su momento histórico.

### *1.2.3 Contexto micro*

Las experiencias en la aplicación de un método de enseñanza- aprendizaje definido que se lo haya probado en el aula y al nivel del Área de Matemática para la formación técnica en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE extensión de Latacunga, para optimizar el aprendizaje de la Matemática en el nivel Superior y que haya dado confianza con los resultados esperados en la evaluación de los estudiantes de las ingenierías que se ofertan en esta institución Superior son escasas y carecen de un sustento evidenciable.

## 1.3 Formulación del problema

En la Universidad del Ejército, en el área de Matemática, asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, no se ha definido un método pedagógico probado, para mejorar los logros de aprendizajes.

## 1.4 Objetivos

### *1.4.1 General*

Aplicar el método didáctico inductivo en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en los estudiantes de la ufa-espe-l con el fin de incidir en los logros de aprendizaje en la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias

### *1.4.2 Específicos*

- Diagnosticar la metodología utilizada en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias verificando los logros de aprendizaje.
- Verificar el cumplimiento de los logros de aprendizaje en la primera unidad de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Analizar el Método Inductivo aplicándolo en las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

## 1.5 Hipótesis

La aplicación del método inductivo en la resolución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden en la asignatura "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias" en la UFA-ESPE-L ayudan en la incidencia de los logros de aprendizaje.

## 1.6 Variables de Investigación

### *1.6.1 Variable Independiente*

La aplicación del método inductivo en la resolución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

### *1.6.2 Variable dependiente*

Logros de aprendizaje.

## 1.7 Justificación

La optimización del Aprendizaje de la Matemática en el Nivel de Estudios Superior, implica la selección, el estudio y la aplicación de un método didáctico apropiado, que permita al maestro ser comprendido en forma integral en su acción formadora docente en el aula, haciendo parte de su conocimiento cuanto ya ha sido estudiado y dejado como herencia científica cultural, por famosos maestros como Aristóteles, Francis Bacón entre otros filósofos y pedagogos, que nos hablan del Método, en este caso del propuesto, el Método Didáctico Inductivo.

Considerando que la metodología actual (tradicional), que se enfoca en clases magistrales, muchas de las veces repeticiones de lo que el docente actual vivió como estudiante, y en algunos casos inclusive repitiendo los mismos ejercicios que el recibió en su vida estudiantil, si bien es cierto esto no se puede generalizar, más aún cuando en los actuales momentos la educación superior esta sufriendo una transformación que propende al mejoramiento de estas condiciones, sin embargo la falta de conocimientos educativos de los profesores del nivel superior, debido a circunstancias tales como tener títulos de profesiones técnicas y no pedagógicas, así en el caso de la Universidad de las Fuerzas Armadas y más específicamente en el departamento de Ciencia Exactas de los 40 profesores que forman parte de este, 3 tienen título de Doctores en Matemática, 2 Químicos, 2 Doctores en Física y 33 de Ingenieros en diferentes ramas, Electrónica, Eléctrica, Mecánica, Automotriz, Sistemas entre otros, con el problema de recibir cursos de planificación educativa que no están enfocados a enseñar de una forma eficiente y presuponen que los docentes tienen conocimientos de la rama de educación, el encontrar alguna manera de dirigir a los docentes en el inicio de una cultura educacional que brinde resultados visibles no solo dentro sino también fuera del aula se hace una necesidad imperiosa.

Con este trabajo se procurará orientar al maestro en el estudio y aplicación del método didáctico Inductivo en procura de alcanzar el objetivo general propuesto para optimizar el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

## 1.8 Prognosis

Es imprescindible establecer un método educativo para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ya que estas son la base para en el entendimiento de la aplicación practica que tienen, de este modo se dotara al estudiante de una herramienta valiosa en contexto, ya que si bien es cierto los procesos que encontrara en su vida profesional, solucionables con la aplicación de ecuaciones diferenciales, podrán ser realizados por sistemas computacionales, el tendrá el conocimiento de como fueron hechos y como interpretar los resultados.

## 1.9 Alcance de la investigación

La presente investigación pretende demostrar que mediante la aplicación de un método educativo específico aplicado en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y su uso en el material didáctico y ademas en aulas virtuales, sirva para mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje de los procesos matemáticos, al ser probado con los estudiantes de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.

# CAPÍTULO 2

## MARCO DE REFERENCIA

### 2.1 Antecedentes

La asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias ha llegado a consolidarse como una de las mas trascendentes en las facultades de la Universidad de las Fuerzas Armadas, esto debido en gran medida a que a permitido enlazar las materias de Ciencias Exactas con cada una de las Ingenierías Técnicas que oferta esta insigne institución.

La temática permite tratar los distintos tipos de ecuaciones y sus aplicaciones en diversos tópicos tales como, para los futuros Ingenieros Electrónicos, Electromecánicos y Mecatrónicos su aplicación en los circuitos eléctricos, y para estos últimos así como también para los futuros ingenieros automotrices, la aplicación a sistemas de amortiguación y sistemas de resorte, para los Ingenieros petroquímicos su aplicación en soluciones y para todas las carreras aplicaciones matemáticas y físicas.

El Departamento de Ciencias Exactas esta conformado por cuarenta docentes, de los cuales tres poseen título de tercer nivel en Matemática, dos en Química, dos en Física y treinta y tres poseen títulos de Ingeniería en diferentes ramas, solo cinco con postgrado en el área, este fenómeno provoca que la mayor parte de clases en los diferentes asignaturas se enfoquen en aprender la resolución de ejemplos de una forma mecánica, es evidenciable la falta de una formación pedagógica que permita aplicar metodologías educativas que permitan un aprendizaje significativo, reflejado en los logros de aprendizaje.

Esta investigación pretende mostrar la eficacia del método inductivo aplicado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pero, se debe tener presente que si se logran resultados favorables, se podrá concluir que es aplicable a las diferentes temáticas de la Matemática que se tratan en el sistema de educación superior.

El Método pedagógico didáctico, en este caso particular “INDUCTIVO” que se estudia y recomienda para esta investigación, tiene sus características y proceso, con esto el maestro no necesita mucho esfuerzo para establecer su dominio y utilizarlo en el aula para alcanzar el éxito en su cometido docente.

Así tenemos que para entrar en la inducción el maestro en el aula debe respetar ciertos pasos lógicos como son:

1. **Análisis y definición de requerimientos**. Que se refiere a las necesidades que se deberá cumplir para la aplicación de Proyecto Curricular Institucional (PCI): Planificación pedagógica, Organización institucional, Talento humano preparado al más alto nivel, infraestructura para el nivel de estudios, requerimientos didácticos completos.

2. **Análisis y definición de los objetivos institucionales**. Que son las metas que se han determinado para que se cumplan en la actividad institucional de formar profesionales con el perfil apropiado a la demanda social.

3. **Aprobación de los objetivos**. Es la aceptación y la aprobación de las autoridades institucionales, de las aspiraciones y actividades de cada área de estudios en la Universidad, propuestas para el desarrollo de los proyectos y módulos correspondientes a la malla curricular.

4. **Identificación del problema**. Que es la actividad de cada maestro en el estudio y determinación de los problemas a solucionar para mejorar la enseñanza de cada asignatura para conseguir la optimización de los aprendizajes, orientados a la formación de profesionales de alta aceptación social.

5. **Formulación del problema**. Que se refiere a la declaración definida de cada problema para el entendimiento y planeación de su solución, para luego dar paso a la aplicación del Método, en este caso propuesto para la asignatura seleccionada en esta investigación que es el Inductivo, que se da con el siguiente proceso:

**OBSERVACIÓN**. Con una actividad detenida y muy detallada del problema, ¿de qué se trata?, ¿dónde se da?, ¿a qué y cómo afecta?, ¿cuáles son sus características?.

**EXPERIMENTACIÓN**. Que es la acción de recoger los datos del problema, organizarlos para procesarlos estadisticamente o en un laboratorio de acuerdo a sus características.

**COMPROBACIÓN**. Que se da en el proceso investigativo, con los resultados matemáticos o del respectivo laboratorio y que nos permiten dar una definición para la remediación del problema.

**ABSTRACCIÓN**. Que es la conceptualización de la solución del problema particular a cada caso que se haya investigado, definiéndolo detalladamente para su comprensión y aplicación.

**GENERALIZACIÓN**. Que es la identificación en el medio social, de la enseñanza aprendizaje, de la producción, con la solución de un problema obtenido de una investigación, con las mismas características de otro problema y que se puede aplicar y solucionar con los mismos resultados obtenidos en una investigación.

## 2.2 Fundamentación de la investigación

### *2.2.1 Fundamentación Filosófica*

La filosofía,considerada la madre de las ciencias por la interpretación de nuestra existencia y que nos hace saber el por qué de cada cosa, todo estudio científico debe fundamentar su estudio para explicar su importancia.

Es vinculante el hablar de educación y filosofía pues todos los paradigmas y teorías educativas tienen un alto grado de filosofía en su propia concepción, así mismo el método inductivo, utilizado en la presente investigación a sido tratado por un sin numero de expertos pedagogos tales como Rousseau, Herbart, Dewey, Piaget, Maritain, y otros autores. "Filosofía de la educación es el conocimiento contemplativo, sistemático, universal y último de la educación, es decir, de los procesos de instrucción, personalización, socialización y moralización"[5] [FERMOSO 1985]. De esto se entiende que este componente filosófico este en todo el desarrollo de la investigación.

### 2.2.2 *Fundamentación Espistemológica*

Para abordar el tema propuesto, es necesario recordar interesantes conceptos afines, que forman parte de la formación docente y que los maestros deben estar familiarizados y conocerlos afondo para situarse con idoneidad en su tarea de profesores en cualesquiera que fuere su especialidad. La educación es la actividad humana que nos permite acceder a muchas aéreas del conocimiento que nos dan acceso a una gran gama de saberes los cuales nos posibilitan poder comprender mejor los fenómenos que ocurren en los medios sociales y naturales de nuestro medio y del mundo en general, por desgracia en nuestro país educación se ha convertido en un proceso monótono en el cual se ha perdido el verdadero sentido del mundo y de la vida, como lo dice filosofo alemán Edmund Husserl, es muy común ver como a los niños y jóvenes se les enseñan en las escuelas, colegios y universidades a mecanizar los conocimientos sin brindarles la oportunidad de que ellos puedan por medio de la práctica comprender el por qué y para qué se les obliga aprender algo y que muchas veces tienen que reprimir esas dudas dejando así muchos vacíos en sus aprendizajes.

Debido a estos problemas que estaban afectando la calidad de la educación en nuestro país surgen nuevos lineamientos curriculares los cuales son las directrices del currículo, es decir, las bases sobre las cuales se construyen las estrategias educativas con las que se imparte la educación. Los lineamientos curriculares son creados en base a una serie de interrogantes tales como ¿Qué y cómo enseñar? ¿Cuáles son las potencialidades que desarrolla el educador en el estudiante? ¿Cómo evaluar? ¿Qué estrategias didácticas se pueden utilizar y desarrollar en una asignatura? Son motivaciones entonces para realizar esta investigación, en la que el elemento humano del medio en la cual nos desenvolvemos sabrá responder para dar razón a la propuesta ha entregar como resultado, buscando crear herramientas que fomenten el aprendizaje de las áreas del conocimiento en nuestro caso la Matemática.

La educación proviene del latín educere 'sacar, extraeró educare 'formar, instruir', pudiendo definirse como:

Un proceso de vinculación y concienciación cultural, moral y conductual formal de los individuos de una sociedad mediante el cual se transmiten conocimientos, valores, costumbres y formas de actuar.

Así, a través de la educación, las nuevas generaciones asimilan y aprenden los conocimientos, normas de conducta, modos de ser y formas de ver el mundo de generaciones anteriores, creando además otros nuevos, con un avance permanente de refinamiento de la cultura y civilización de un pueblo

### *2.2.3 Fundamentación Axiológica*

La axiología o filosofía de los valores, es la rama de la filosofía que estudia la naturaleza de los valores y juicios valorativos. La axiología no sólo trata abordar los valores positivos, sino también los negativos, analizando los principios que permiten considerar que algo es o no valioso, y considerando los fundamentos de tal juicio.

Con estas concepciones hablaremos entonces de la docencia universitaria que cumple el papel tan fundamental tanto en facilitar el aprendizaje de las ciencias y en su aplicación práctica en la vida productiva como en la construcción de valores que permitan mejorar las condiciones de vida de los jóvenes que ingresan a la universidad tras la conquista de sus sueños, cual es la de obtener un título académico que les permita un mayor nivel de vida en una sociedad cada vez más exigente en los aspectos científico y tecnológico.

De aquí la verdadera importancia que tenemos los docentes como formadores, comunicadores de cultura y de los saberes sociales que intervienen en la sociedad como tal, y que también deben ser facilitadores en la adquisición de nuevos conocimientos y orientadores que ayuden a comprender las inquietudes que existen en su comportamiento.

El profesor universitario debe por esta razón reunir características especiales, como:

- Tener una formación académica de cuarto nivel en la especialidad requerida.
- Tener una formación académica básica en Pedagogía.
- Reunir cualidades vocacionales para ejercer la docencia y valores como la tolerancia, paciencia y calidez humana.
- Fomentar el lenguaje científico en sus enseñanzas

- Adoptar estrategias que nos facilita la Didáctica en las que mediante un trabajo progresivo, se entrelacen los conceptos cotidianos y científicos y se lleve a cabo la cientificidad del lenguaje; la experimentación en los laboratorios y la investigación implican generación de estrategias pedagógicas que faciliten e innoven el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Hacer atractiva la asignatura a su cargo frente a la atención del estudiante para que sientan satisfacción al aprender de ella.
- Cumplir con los objetivos planteados en las respectivas planificaciones, pues la verdad todavía en las instituciones educativas de nuestra nación se siguen encontrando docentes que imparten el conocimiento de una forma obsoleta y no formativa la cual lleva al estudiante al fracaso.

Estos lineamentos curriculares nos permitirán desarrollar los procesos que conlleva impartir el conocimiento, fomentando el pensamiento científico de nuestros educando, dando un buen uso a estas herramientas para elevar la calidad de los aprendizajes, fomentando el verdadero espíritu del mundo de la educación y la cultura.

### *2.2.4 Fundamentación Metodológica*

La Pedagogía, es la ciencia clave en la formación del docente de todo nivel educativo.

De acuerdo a los expertos, la Pedagogía se define como la ciencia que se ocupa de la educación y la enseñanza. Tiene como objetivo proporcionar guías para planificar, ejecutar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, aprovechando las aportaciones e influencias de diversas ciencias, como la psicología, la sociología, la antropología, la filosofía, la historia y la medicina, entre otras. Por lo tanto, el profesor con dominios pedagógicos, es el profesional que ayuda a organizar mejores sistemas y programas educativos, con el objeto de favorecer al máximo el desarrollo de las personas y las sociedades.

La Pedagogía estudia a la educación como fenómeno complejo y multirreferencial, lo que indica que existen conocimientos provenientes de diversas ciencias y disciplinas que le pueden ayudar a comprender lo que es la educación; ejemplos de ello son la historia, la sociología, la psicología y la política, entre otras. En este contexto, la educación tiene como propósito incorporar a los sujetos a una sociedad determinada que posee pautas culturales propias y características; es decir, la educación es una acción que lleva implícita la intencionalidad del mejoramiento social progresivo que permita que el ser humano desarrolle todas sus potencialidades.

La Didáctica está vinculada con otras disciplinas pedagógicas como, por ejemplo, la organización escolar y la orientación educativa, esta pretende fundamentar y regular los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La Metodología hace referencia al plan de investigación que permite cumplir ciertos objetivos en el marco de una ciencia. Cabe resaltar que la metodología también puede ser aplicada en el ámbito artístico, cuando se lleva a cabo una observación rigurosa. Por lo tanto, puede entenderse a la metodología como el conjunto de procedimientos que determinan una investigación de tipo científico o marcan el rumbo de una exposición doctrinal.

Dentro de una investigación pueden desarrollarse muchas metodologías, pero todas ellas pueden encasillarse en dos grandes grupos, la metodología de investigación cualitativa y cuantitativa. La primera es la que permite acceder a la información a través de la recolección de datos sobre variables, llegando a determinadas conclusiones al comparar estadísticas; la segunda, realiza registros narrativos sobre fenómenos investigados, dejando a un lado la cuantificación de datos y obteniéndolos a través de entrevistas o técnicas no-numéricas, estudiando la relación entre las variables que se obtuvieron a partir de la observación, teniendo en cuenta por sobre todo los contextos y las situaciones que giran en torno al problema estudiado.

El Método, también conocido como técnica de investigación, puede definirse como el camino para alcanzar a un fin; en relación con la metodología consiste en los procedimientos que deben llevarse a cabo para cumplir con lo estipulado por ella y obtener conclusiones verídicas sobre el fenómeno o problema que se analiza.

Las investigaciones científicas se rigen por el llamado método científico, basado en la observación y la experimentación, la recopilación de datos, la comprobación de las hipótesis de partida.

En este trabajo se utiliza para realizar la investigación propuesta la metodología de investigación cualitativa y el método científico, para explicar la importancia pedagógica didáctica de la eficiencia del maestro en el aula. En el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, en la temática que nos ocupa, se abordará, se explicará y se aplicará el método pedagógico Inductivo.

### *2.2.5 Fundamentación Legal*

Las actuales reformas de la Ley Orgánica de Educación Superior (LOES), tratan en varios de sus artículos sobre el rol del docente en el proceso educativo, así por ejemplo, el articulo 146 dice "En las universidades y escuelas politécnicas se garantiza la libertad de cátedra, en pleno ejercicio de su autonomía responsable, entendida como la facultad de la institución y sus profesores para exponer, con la orientación y herramientas pedagógicas que estimaren más adecuadas, los contenidos definidos en los programas de estudios"[1][Asamblea Nacional 2010], esto recae directamente en el docente que es el que debe buscar las herramientas pedagógicas que permitan el mejor entendimiento de los estudiantes a su cargo de los temas tratados.

Por otra parte, los manuales para acreditación publicados por el Concejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior, CEAACES, recalcan en varias de sus secciones, la necesidad de que el docente implemente metodologías de aprendizaje, las evalué y la retroalimente con el fin de obtener una mejora continua en los procesos de aprendizaje.

## 2.3 Fundamentación de variable independiente

### *2.3.1 Métodos de Enseñanza*

Son varias las clasificaciones que se dan a los métodos de enseñanza, debido a que según a pasado el tiempo, las teorías educativas se van adaptando a las estructuras sociales que se forman en determinado tiempo y región, sin embargo se puede percibir que estas teorías educativas tienen la flexibilidad para poder ser aplicadas en un sinnúmero de posibles escenarios, por lo que las teorías desarrolladas desde la época de los griegos, están todavía en pleno desarrollo, siempre centradas en las necesidades sociales de cada grupo humano.

En la tabla 2.1, se resume los métodos de enseñanza considerados los más relevantes para esta investigación.

**Cuadro 2.1:** Métodos de Enseñanza

| | |
|---|---|
| Métodos en cuanto a la forma de razonamiento. | Método deductivo.<br>Método inductivo.<br>Método analógico o comparativo. |
| Métodos en cuanto a la organización de la materia. | Método basado en la lógica de la tradición o de la disciplina científica.<br>Método basado en la psicología del alumno. |
| Métodos en cuanto a su relación con la realidad. | Método simbólico o verbalístico.<br>Método intuitivo. |
| Métodos en cuanto a las actividades externas del alumno. | Método pasivo.<br>Método activo. |
| Métodos en cuanto a sistematización de conocimientos. | Método globalizado.<br>Método especializado. |
| Métodos en cuanto a la aceptación de lo enseñado. | Dogmático.<br>Heurístico o de descubrimiento |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** [Titone y Navarro 1966] [9].

El método elegido para esta investigación es uno de los de la clasificación de los métodos en cuanto a la forma de razonamiento, evidentemente por ser un tema de Matemática, y fue el método inductivo.

## 2.4 Fundamentación de variable dependiente

### *2.4.1 Logros de aprendizaje*

Los logros de aprendizaje son los resultados finales, estos son planteados por el docente como una meta a ser alcanzada por los estudiantes,es el mínimo requisito que el un estudiante debe demostrar para que se pueda decir que alcanzo lo requerido para aprobar la asignatura, además es una evidencia de que el proceso de enseñanza - aprendizaje a sido exitoso.

#### Estructura de logros de aprendizaje

La estructura para formar un enunciado de un logro de aprendizaje debe contener al menos cinco elementos, los cuales se muestran en la figura 2.1 Si se percibe que el estudiante a alcanzado a dominar estos cinco elementos se puede considerar que el logro de aprendizaje a sido cumplido.

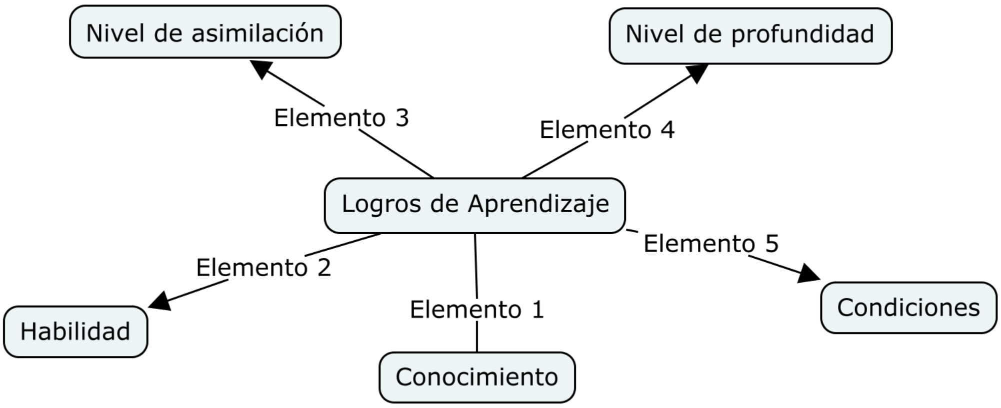


**Figura 2.1:** Estructura de logros de aprendizaje
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** [MASDEVALL, COSTA y PARETAS 1990] [8].

### Matriz de logros de aprendizaje

Es una matriz que permite conocer, identificar y aplicar los logros de aprendizaje, tabla 2.2. Este elemento se encuentra anexado en todos los syllabus de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE en la sección "RESULTADOS Y CONTRIBUCIONES A LAS COMPETENCIAS PROFESIONALES".

### Formulación de logros de Aprendizaje

Para obtener resultados óptimos en el proceso enseñanza - aprendizaje uno de las primeras actividades a realizar en la planificación es el syllabus de la asignatura, este a su vez tiene que contener los logros de aprendizaje, estos darán la pauta para seleccionar las técnicas y las metodologías apropiadas para abarcar los contenidos de la asignatura de una forma ordenada y secuencial.

Los pasos para la formulación se resumen en la figura 2.2 :

### Inconvenientes en la obtención de Logros de Aprendizaje

Son varias las circunstancias que pueden presentarse para obtener logros de aprendizaje de un nivel aceptable, esto dependen tanto de la labor docente como del desempeño de los estudiantes, sin olvidar las condiciones en las que se da el proceso enseñanza - aprendizaje así con o el material que se usa.

**Cuadro 2.2:** Matriz de logros de aprendizaje

| LOGRO O RESULTADOS DE APRENDIZAJE | NIVELES DE LOGRO | | | El estudiante debe |
|---|---|---|---|---|
| | A Alta | B Media | C Baja | |
| Aplicar Conocimientos en matemáticas, ciencia e ingeniería. | X | | | Resolver E.D.O |
| Diseñar, conducir experimentos, analizar e interpretar datos. | X | | | Recolectar y analizar datos para tomar decisiones. |
| Diseñar sistemas, componentes o procesos bajo restricciones realistas. | X | | | Aplicar las conocimientos adquiridos en situaciones reales |
| Trabajar como un equipo multidisciplinario. | | X | | Dirigir y liderar un grupo. |
| Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería. | X | | | Resolver problemas de aplicaciones reales. |
| Comprender la responsabilidad ética y profesional. | X | | | Conocer el reglamento interno y manual de ética de la institución. |
| Comunicarse efectivamente. | | X | | Exponer oralmente temas de investigación asignados y presenta informes escritos de acuerdo al formato establecido. |
| Entender el impacto de la ingeniería en el contexto medioambiental, económico y global. | | | X | Elevar los conceptos aprendidos a una visión global, vinculándola con situaciones reales. |
| Comprometerse con el aprendizaje continuo. | X | | | Asistir puntualmente a la catedra, demostrando responsabilidad. |
| Conocer temas contemporáneos. | | X | | Entender y defender sus puntos de vista sobre temas diversos, con argumentos válidos y sostenibles. |
| Usar técnicas, habilidades y herramientas prácticas para la ingeniería. | X | | | Emplear derive, máxima u otros paquetes informáticos. |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Syllabus de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.

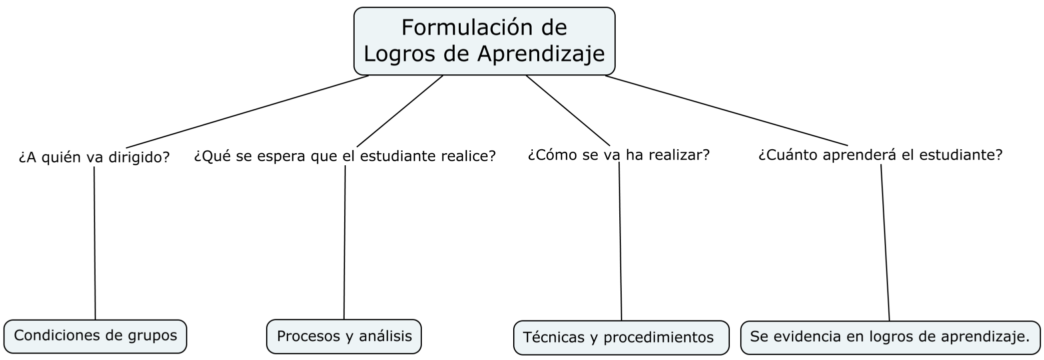


**Figura 2.2:** Formulación de logros de aprendizaje
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** [MASDEVALL y OTROS 1990] [8].

En la figura 2.3 se resume algunos aspectos que intervienen en la obtención de los Logros de Aprendizaje.

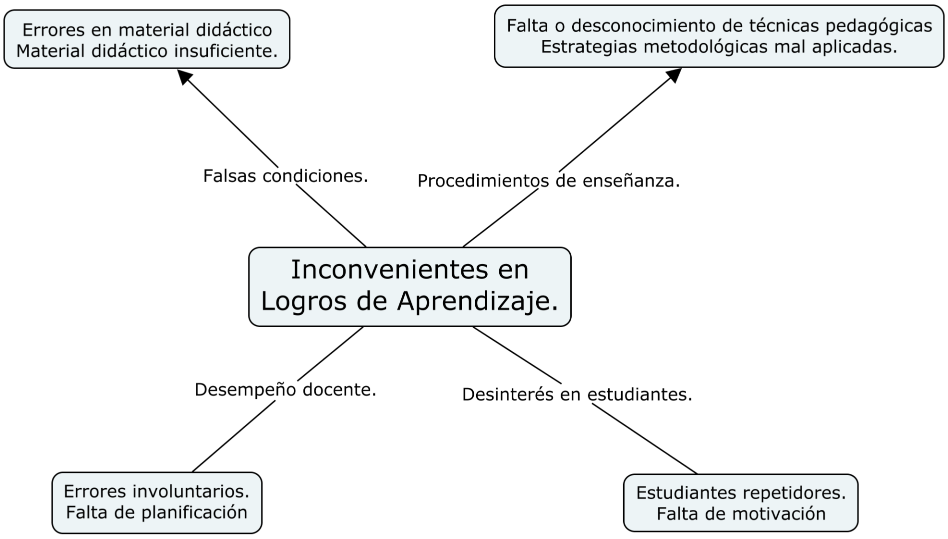


**Figura 2.3:** Inconvenientes en la obtención de logros de aprendizaje
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** [MASDEVALL y OTROS 1990] [8].

# CAPÍTULO 3

## DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1 Tipo de investigación

El presente estudio tiene un diseño:
Cuasiexperimental se trabajara con grupos intactos no elegidos al azar (Nivel II, Carrera de Electrónica y Nivel III, Carrera de Software y Carrera de Petroquímica) se analizara la equivalencia de los grupos participantes.

### 3.2 Metodología de Investigación

Para obtener los datos requeridos para la verificación metodológica en la materia Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y así poder obtener conclusiones, se utilizarán principalmente la observación personal por parte del investigador, las encuestas individuales y grupales y las evidencias obtenidas a través de los alumnos por medio del análisis estadístico de las notas obtenidas en la primera unidad de la materia de "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.Estos resultados se constituirán en el soporte para la investigación cuantitativa.

### 3.3 Diseño de la investigación

La investigación será:

- Descriptivo: Se hará una investigación tipo descriptiva debido a que se pretende conocer el grado de conocimientos de los estudiantes de las carreras en las que se aplique el método inductivo frente a los estudiantes de las carreras donde no se lo aplique.

- Correlacional: Se hará una investigación tipo correlacional con el propósito de conocer los logros de aprendizaje de los estudiantes en los que se utilice el método inductivo y en los que no se utilice el método.

## 3.4 Partcipantes

### *3.4.1 Docentes*

Los docentes que participaron proporcionando documentos pedagógicos pertinentes para esta investigación, dictan la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y tienen un aval de experiencia de varios años dictando la materia en el área de Ciencias Exactas.
Participaron en la entrevista a los docentes:

- Ing. Bastidas Jhony
- Ing. Bautista Víctor
- Ing.Ibeth Delgado

### *3.4.2 Estudiantes*

Se considero estudiantes en el periodo Octubre 2014 - Febrero 2015, del segundo nivel de carrera de Electrónica y tercer nivel de la carrera de Software y carrera de Petroquímica, haciendo un total de 80 estudiantes distribuidos en 4 paralelos.

Se debe acotar que la cantidad de estudiantes es la adecuada para garantizar los resultados de la investigación.

## 3.5 Población y muestra

### *3.5.1 Población*

#### Población docente

La Asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias está compuesta por 4 docentes.

#### Población Estudiantil

El sistema con el cual se va a trabajar tiene 80 elementos (Estudiantes de asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias periodo Octubre 2014 - Febrero 2015) con NRC: 2481 el NRC: 4566 con 20 y 21 estudiantes respectivamente de la carrera de

Electrónica e instrumentación, el NRC: 2494 con 21 estudiantes de la carrera de Petroquímica y el NRC: 2494 con 18 estudiantes de la carrera de Software.

### *3.5.2 Muestra*

El sistema con el cual se va a trabajar tiene 80 elementos (Estudiantes de asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias periodo Octubre 2014 - Febrero 2015) por la cual es un sistema finito y se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$n = \frac{N}{E^2(N-1)+1} \tag{3.1}$$

Donde:

n = tamaño de la muestra

N = tamaño de la población (80)

E = margen de error o precisión admisible con que se toma la muestra(0.05)

Donde se obtiene un valor de:

$$n = \frac{N}{ME^2(N-1)+1} = \frac{80}{0{,}05^2(80-1)+1} = 66{,}805 \simeq 67$$

## 3.6 Operacionalización de las variables.

**Cuadro 3.1:** Operacionalización de la variable independiente

| VARIABLES | DIMENSIONES | INDICADORES | ITEMS |
|---|---|---|---|
| VARIABLE INDEPENDIENTE:<br>La aplicación del método inductivo en la resolución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. | 1. Conocimientos de paradigmas educativos | 1. Conocimientos actualizados.<br>2. Conocimientos de profundidad.<br>3. Nivel de abstracción y generalización de los conocimientos. | ¿Qué método utiliza usted en el proceso enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales?.<br>¿Cuál es el rendimiento académico de sus estudiantes?<br>Excelente ( )<br>Muy bueno ( )<br>Bueno ( )<br>Regular ( ) |
| | 2. Habilidades matemáticas que ha adquirido el estudiante. | 1. Habilidades para analizar y sintetizar.<br>2. Habilidades para razonar y resolver problemas.<br>3. Habilidades para aplicar y crear. | |
| | 3. Tareas investigativas que realiza el estudiante. | 1. Habilidad para elaborar y exponer ensayos.<br>2. Habilidad para realizar investigaciones. | |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Ing. Wilson P. Reyes B.

Cuadro 3.2: Operacionalización de la variable dependiente

| VARIABLES | DIMENSIONES | INDICADORES | ITEMS |
|---|---|---|---|
| VARIABLE DEPENDIENTE: Logros de aprendizaje. | 1. Conocimientos matemáticos que posee el estudiante. | 1. Conocimientos actualizados. | ¿Piensa usted que un manual de aprendizaje propiciaría el sustento para alcanzar los objetivos planteados? ¿Los ejemplos indicados en el manual de aprendizaje deberían estar acorde a sus objetivos grupales y no personales? ¿Las clases presenciales se encontraban acorde a los requerimientos de la temática dada? |
| | | 2. Conocimientos de profundidad. | ¿Cree usted que el análisis de ejercicios aplicados en situaciones reales usted se interesa más en la asignatura? ¿Los ejercicios expuestos en clases presenciales deberían estar en relación de los que se encontraran en situaciones reales? |
| | | 3. Nivel de abstracción y generalización de los conocimientos. | ¿Estima qué su labor estudiantil mejoraría al trabajar con un manual que le ayude en sus obligaciones fuera del aula? ¿Considera qué los estudiantes deberían trabajar en grupo para realización de tarea y trabajos? |
| | 2. Habilidades lógicas y numéricas que ha adquirido el estudiante. | 1. Habilidades para analizar y sintetizar. | ¿El material didáctico suministrado por el docente debería permitirle ser más autónomo en la comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden? |
| | | 2. Habilidades para razonar y resolver problemas. | ¿Su docente utiliza una guía metodológica para docencia extra clase? |
| | | 3. Habilidades para aplicar y crear. | ¿Cree usted qué trabajando dentro y fuera del aula con recursos didácticos mejorarían sus trabajos individuales? |
| | 3. Tareas investigativas que realiza el estudiante. | 1. Habilidad para elaborar y exponer ensayos. | ¿Cree qué la elaboración de tareas y trabajos de los estudiantes está acorde al uso de metodologías educativas? |
| | | 2. Habilidad para realizar investigaciones. | ¿Cree usted qué se debería desarrollar las actividades programadas, con la ayuda de en un manual que ilustre la metodología a seguir? |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Ing. Wilson P. Reyes B.

### 3.7 Recolección de la información

Se recolectó información de fuentes primarias, a través de:

- **Observación simple:** Se realizó al observar la metodología empleada por los docentes, mientras se contrasta con la hoja de registro diaria.

- **La Encuesta:** Se usa para recoger información de los estudiantes. La identidad del encuestado es secreta, los tópicos en el cuestionario aportan datos utilizados para validar la propuesta. Este instrumento fue aplicado personalmente por el responsable de la investigación a la totalidad de estudiantes, de la siguiente manera:

- Se visitaba a cada docente que se encontraba en clase de la asignatura, pidiéndole de favor proporcionara unos minutos para aplicar la encuesta.
- Se entrega un cuestionario a cada estudiante, explicándoles los motivos que tiene y pidiéndoles lo llenen de la manera mas honesta.
- La encuesta tuvo una duración de 15 minutos, se aprovecho para entrevistar de forma abierta sobre algunos elementos requeridos.

La encuesta aplicada se encuentra en el Anexo: A

- **La entrevista Docente:** La entrevista aplicada fue del tipo semi-estructurada. Se recolectó información a través de un proceso verbal, por lo que el docente responde a preguntas, previamente diseñadas de acuerdo a las necesidades de la investigación. Esta técnica permite recavar información verbal formal e informal.

# CAPÍTULO 4

## MARCO METODOLÓGICO

### 4.1 Diseño de estudio.

El presente estudio tiene un diseño:

Cuasi experimental se trabajara con grupos intactos no elegidos al azar (Nivel II, Carrera de Electrónica y Nivel III de carreras de Software y Petroquímica) se analizara la equivalencia de los grupos participantes.

### 4.2 Tipo de estudio.

La investigación será del tipo:

Descriptivo: Se hará una investigación tipo descriptiva debido a que se pretende conocer la aplicación en los trabajos que los estudiantes de las carreras en las que se aplique el método inductivo frente a los estudiantes de las carreras donde no se lo aplique.

Correlacional: Se hará una investigación tipo correlacional con el propósito de conocer los logros de aprendizaje de los estudiantes en los que se aplique el método inductivo y en los que no se utilice el método.

### 4.3 Método, técnicas e instrumentos que se emplearán en la recolección de datos

#### *4.3.1 Método de investigación*

En esta investigación se utilizará EL MÉTODO CIENTÍFICO

Se explica este Método de investigación como un estudio sistemático de la fenomenología de la naturaleza que incluye reglas para el razonamiento y la predicción, con procedimientos lógicos para descubrir con la investigación las relaciones internas y externas de los procesos de la realidad natural y social.

El Método Científico es racional, por que se funda en la razón, es decir en la lógica, lo cual significa que parte de los conceptos, juicios razonamientos y vuelve a ellos.

Es analítico, por que descompone todo lo que trata en sus elementos, hace entender la situación total en términos de sus componentes. Permite descubrir los elementos que componen en totalidad y las interrelaciones que explican su integración.

Es objetivo, por que busca alcanzar la verdad mediante la adaptación de las ideas a los hechos, para lo cual emplea la observación y la experimentación. Parte de los hechos describiéndolos tales como son para llegar a formular los enunciados (datos empíricos) que se obtienen con ayuda de las teorías.

El Método Científico es verificable, por que la comprobación de sus hipótesis involucra la experiencia. La verificación empírica depende del objeto, del tipo de la hipótesis en cuestión y de los medios y procedimientos disponibles.

La verificabilidad determina la calidad de conocimiento científico; de lo contrario no puede hablarse de conocimiento objetivo.

Es explicativo, por que explica los hechos en término de leyes, y las leyes en términos de principios.

## 4.4 Análisis de encuesta aplicada a estudiantes

1. **¿Cree que la elaboración de tareas y trabajos de los estudiantes está acorde al uso de metodologías educativas?**

**Cuadro 4.1:** Datos Pregunta #1

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 1 | 4 | 16 | 46 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

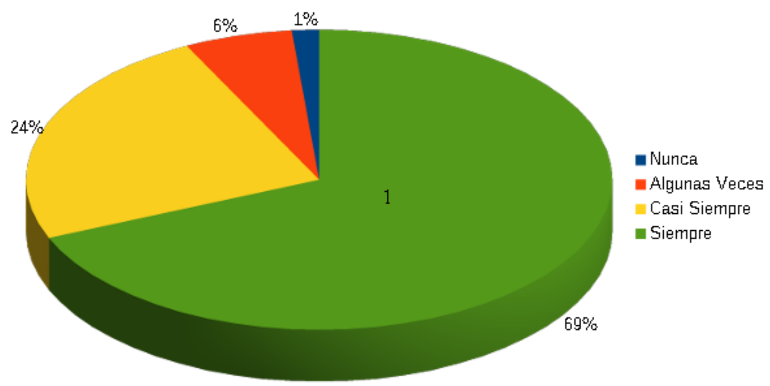


**Figura 4.1:** Análisis Pregunta #1
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 1 los estudiantes creen que la elaboración de tareas y trabajos de los estudiantes están acorde al uso de metodológicas educativas donde se indica lo siguiente: 1 % que nunca afectan en la elaboración de trabajos , el 6 % que afectaría, el 24 % que si incide la metodología y un 59 % que siempre afecta en su elaboración de trabajos y tareas utilizando una metodología educativa.

La mayor parte de estudiantes indican que las estrategias metodológicas tienen una relación directa en la elaboración de tareas y trabajos, por lo tanto se evidencia la necesidad de una implementación de estas para mejorar sus logros de aprendizaje.

2. **¿Estima que su labor estudiantil mejoraría al trabajar con un manual que le ayude en sus obligaciones fuera del aula?**

**Cuadro 4.2:** Datos Pregunta #2

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 2 | 17 | 20 | 28 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

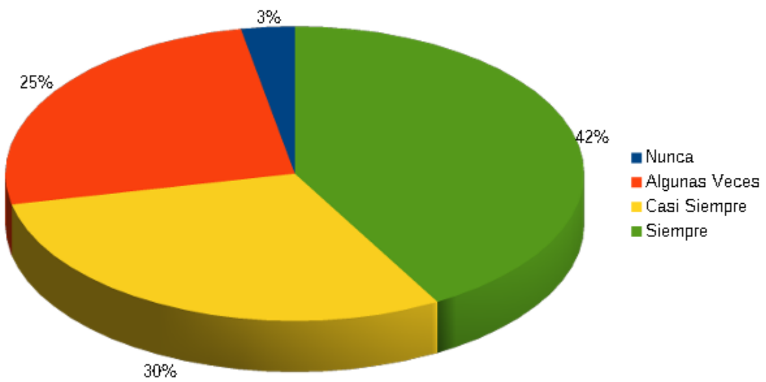


**Figura 4.2:** Análisis Pregunta #2
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 2 los estudiantes creen que su labor estudiantil mejoraría con un manual de ayuda: 3 % que nunca afecta el trabajo fuera del aula, el 25 % que afectaría en ciertas ocasiones, el 30 % que si incide en las obligaciones fuera del aula y un 42 %, que un manual ayuda a mejorar con sus obligaciones.

Se verifica que la mayor parte de estudiantes mejoraría su labor fuera del aula al realizar trabajos, tareas y otras obligaciones ya que tendrían un manual de procedimientos para ayudarlos en la resolución de ejercicios.

3. **¿Considera que los estudiantes deberían trabajar en grupo para realización de tarea y trabajos?**

**Cuadro 4.3:** Datos Pregunta #3

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 15 | 14 | 26 | 12 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

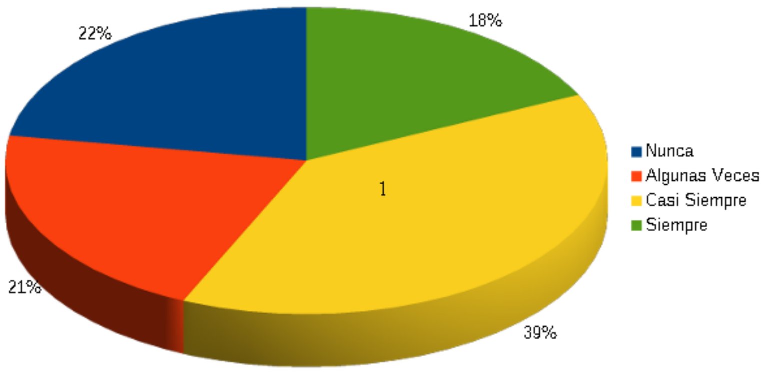


**Figura 4.3:** Análisis Pregunta #3
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 3 los estudiantes consideran que deberían trabajar en grupo para realización de proyectos individuales donde se verifican los siguientes valores: 18 % que no desean trabajar en grupo, el 22 % que el trabajo grupal debería ser ocasional, el 21 % que si le gustaría trabajar en grupo y un 39 %,que el trabajo en los grupo debe ser todo el tiempo.

Las estudiantes opinan que se deberían trabajar tanto individual como grupalmente para sus trabajos.

4. **¿Cree usted que el análisis de ejercicios aplicados en situaciones reales aumenta su interés en la asignatura?**

**Cuadro 4.4:** Datos Pregunta #4

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 2 | 18 | 15 | 32 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

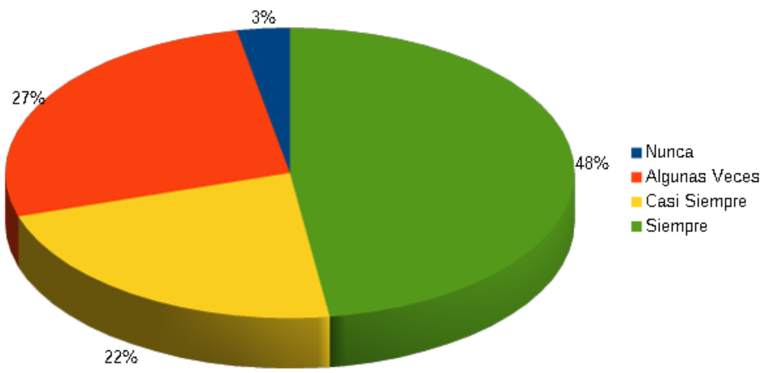


**Figura 4.4:** Análisis Pregunta #4
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 4 los estudiantes creen que cuando se realizan ejercicios de aplicación la asignatura seria mas llamativa, se observa que: 3 % indica que no, mientras que el 27 % que algunas veces les seria atractivo, el 22 % que si les interesa ejercicios aplicados y un 48 %,que los ejercicios aplicados les generaría gran interés.

La mayor parte de estudiantes indican que al tratar y resolver ejercicios aplicados en situaciones reales generaría en ellos mayor interés por la asignatura y con esto se mejoraría su asimilación de los contenidos.

5. **¿Cree usted que trabajando dentro y fuera del aula con recursos didácticos mejorarían sus trabajos individuales?**

**Cuadro 4.5:** Datos Pregunta #5

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 4 | 14 | 26 | 23 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

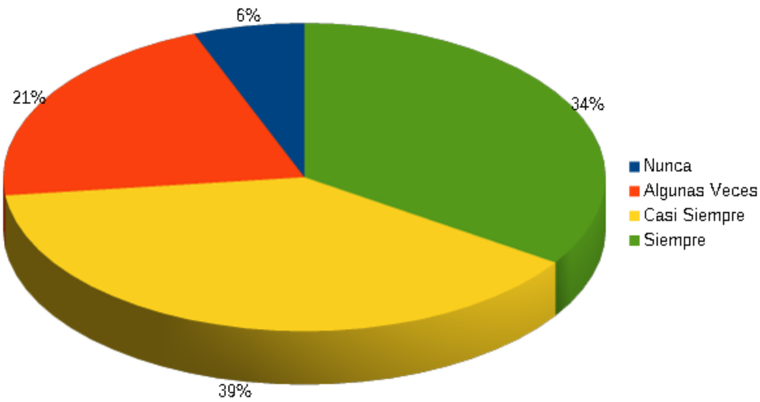


**Figura 4.5:** Análisis Pregunta #5
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 5 los estudiantes creen que trabajando en aula virtual y con todos los recursos informáticos mejorarían su trabajo individual, se observa que: 6 % dice que no les ayudaría, mientras que el 21 % que rara vez aprenderían de mejor manera, el 39 % que casi siempre mejorarían sus trabajos y un 34 %,que el aula virtual ayudaría con sus trabajos.

La mayor parte de estudiantes opinan que al trabajar en un aula virtual con herramientas, manuales, links entre otros podrían realizar un trabajo mas eficiente y los ayudarían con la resolución de su trabajo.

6. **¿Su docente utiliza una guía metodológica para docencia extra clase?**

**Cuadro 4.6:** Datos Pregunta #6

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 18 | 19 | 10 | 20 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

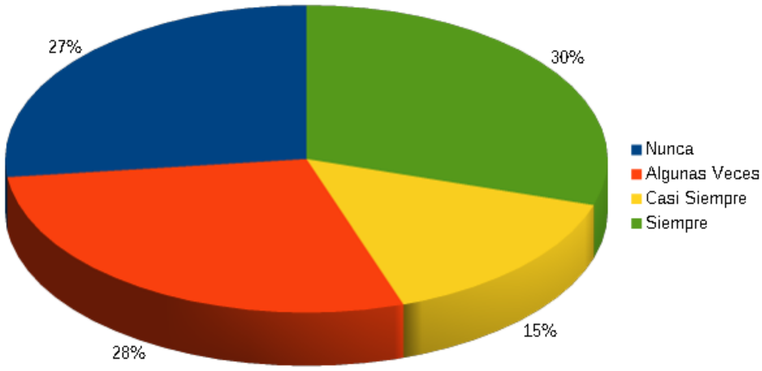


**Figura 4.6:** Análisis Pregunta #6

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 6 los estudiantes indican que el docente utiliza una guía metodológica para docencia : Un 27 % percibe que nunca han utilizado una guía metodológica 28 % que algunas veces los han utilizado , el 15 % que casi siempre utilizan una guía y un 30 %, que siempre utilizan una guía metodológica.

Los estudiantes indican que la utilización de una guía metodológica se dio en ciertos casos y en otros no, en los casos en que el estudiante percibe que si se utilizo, luego de una conversación con ellos, se noto que confunden las técnicas que los docentes utilizan en el dictado de sus cátedras con lo que es una guía metodológica.

7. **¿El material didáctico suministrado por el docente debería permitirle ser más autónomo en la comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden?**

**Cuadro 4.7:** Datos Pregunta #7

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 0 | 1 | 15 | 51 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

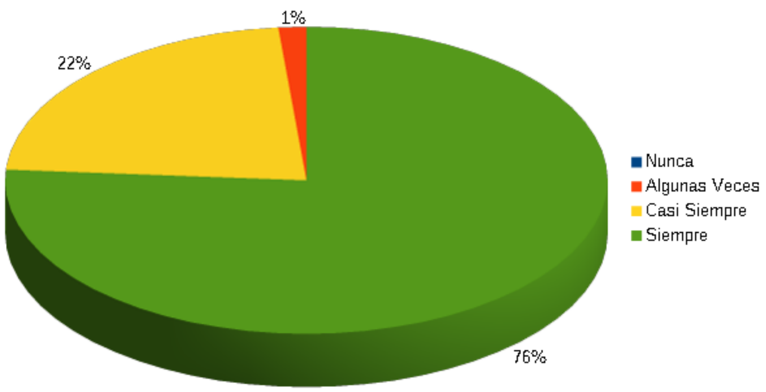


**Figura 4.7:** Análisis Pregunta #7

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

**Análisis e interpretación**

En la pregunta # 7 los estudiantes indican que el material didáctico suministrado en el aula debería permitirle ser más autónomo en la comprensión de la asignatura: 27 % dice que el docente no entrega material, el 28 % dice que el material algunas veces les permite ser autónomos, un 15 % que casi siempre les permite una autonomía, mientras que un 30 % indica que material didáctico les permite ser mas autónomos en su trabajo.

Los estudiantes solicitan que el material didáctico sea claro, sencillo y les permita aprender de forma autónoma.

8. **¿Cree Usted que se debería desarrollar las actividades programadas, con la ayuda de un manual que ilustre la metodología a seguir?**

**Cuadro 4.8:** Datos Pregunta #8

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 3 | 6 | 19 | 39 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

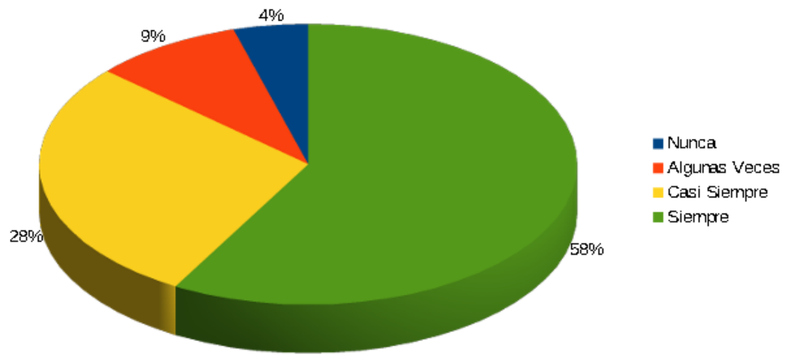


**Figura 4.8:** Análisis Pregunta #8

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 8 los estudiantes creen que se debería desarrollar las actividades programadas, con la ayuda de un manual que ilustre la metodología : Un 4 % dice que no le gustaría utilizar un manual, un 9 % que algunas veces se podría necesitar la ayuda, el 26 % que casi siempre se utilizaría el manual y el 58 %, que siempre se podría utilizar un manual para las actividades.

La mayor parte de estudiantes solicitan que se debería tener un manual para el trabajo programado.

9. **¿Piensa usted que un manual de aprendizaje proporcionaría el sustento para alcanzar los objetivos planteados?**

**Cuadro 4.9:** Datos Pregunta #9

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 5 | 14 | 20 | 28 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

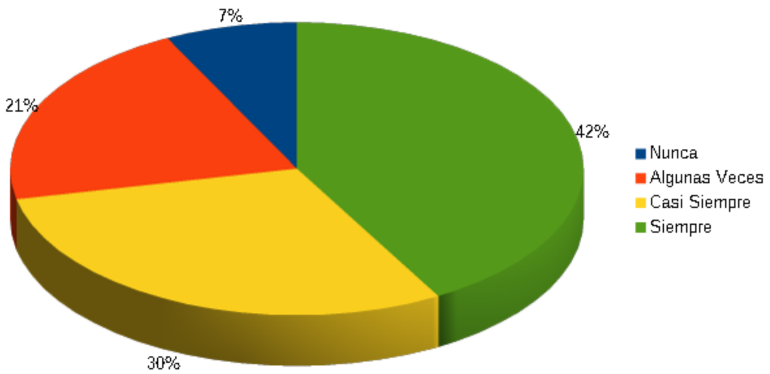


**Figura 4.9:** Análisis Pregunta #9

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 9 los estudiantes piensan que un manual de aprendizaje propiciaría el sustento para alcanzar sus objetivos planteados: Un 7 % no causaría ningún efecto al trabajar con un manual, un 21 % que algunas veces se propiciaría un cambio, el 30 % que casi siempre alcanzarían sus objetivos, mientras que un 42 % siempre les ayudaría a conseguir sus objetivos de estudió.

Los estudiantes en su mayoría están de acuerdo con la elaboración de un manual que les permita alcanzar los objetivos de estudio.

10. **¿Los ejemplos indicados en el manual de aprendizaje deberían estar acorde a sus objetivos grupales y no personales?**

**Cuadro 4.10:** Datos Pregunta #10

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 10 | 12 | 15 | 30 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

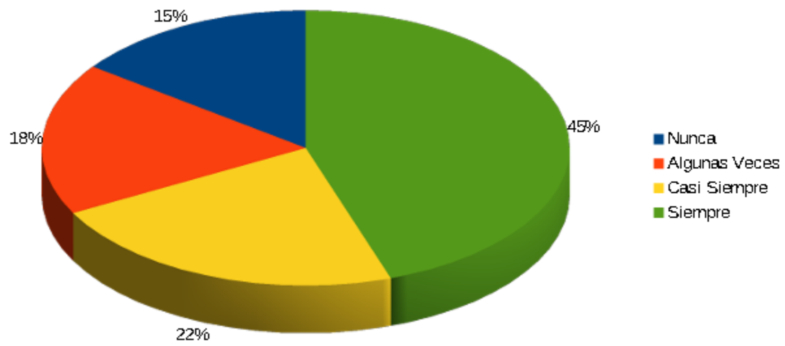


**Figura 4.10:** Análisis Pregunta #10

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 10 los estudiantes indican que los ejemplos en el manual deberían estar acorde a sus objetivos grupales y no personales : Un 15 % señala que deberían ser ejercicios personales un 18 % que algunas veces, el 22 % que casi siempre deberían atenerse a objetos grupales y un 45 %, siempre deberían estar acorde a los objetivos grupales.

Es criterio de los estudiantes que los ejercicios del manual deben estar acorde con el tema de clase, en especial de los ejercicios de aplicación.

11. **¿Las clases presenciales se encontraban acorde a los requerimientos de la temática dada?**

**Cuadro 4.11:** Datos Pregunta #11

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 0 | 15 | 22 | 30 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

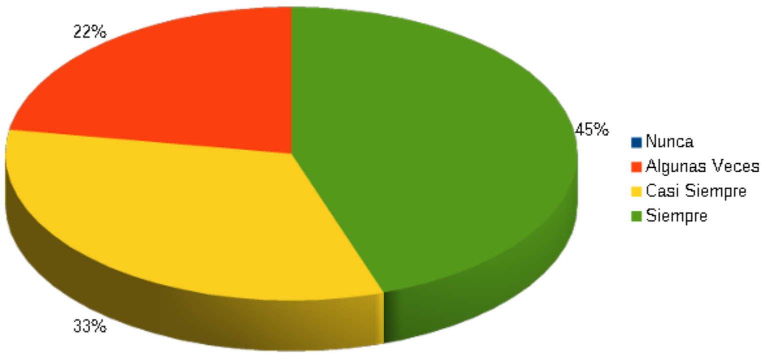


**Figura 4.11:** Análisis Pregunta #11

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 11 los estudiantes indican que las clases presenciales deberían estar acorde a los requerimientos de la temática: Un 22 % señala que deberían ser ejercicios mas fáciles un 33 % que casi siempre debería ser ejercicios acordes, el 45 % que siempre deberían ser mas complejos.

La mayor parte de estudiantes solicitan que los ejercicios que se resuelvan en las clases presenciales deben ser mas complejos que los presentados en las guías.

12. **¿Los ejercicios expuestos en clases presenciales deberían estar en relación de los que se encontraran en situaciones reales?**

**Cuadro 4.12:** Datos Pregunta #12

| **Respuestas** | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 0 | 0 | 10 | 57 | 67 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

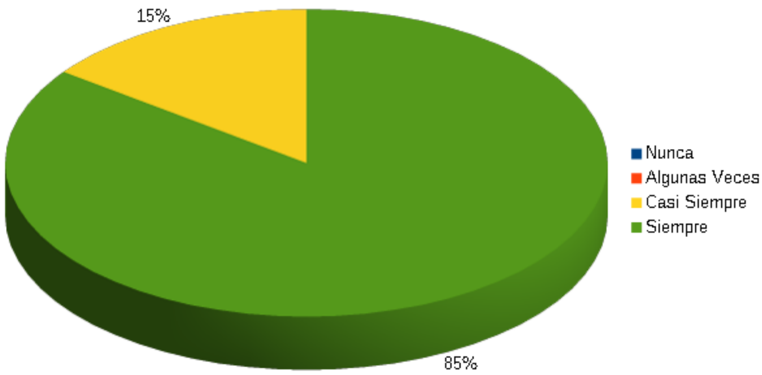


**Figura 4.12:** Análisis Pregunta #12

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software Calc.

### Análisis e interpretación

En la pregunta # 12 los estudiantes plantean que los ejercicios resueltos en clases presenciales deberían estar en relación a lo que van a encontrar en situaciones reales: Un 15 % señala que casi siempre debería estar acore y el 85 % indica que siempre de tratarse ejercicios acorde a las situaciones reales.

Casi la totalidad de estudiantes concuerda que los ejercicios tratados en clases deben propender a ser similares a los que encontraran en situaciones reales en su vida profesional

### *4.4.1 Entrevistas*

Después de aplicar la encuesta, se procedió a realizar una entrevista del tipo libre y del tipo relajada, se la aplicó tanto a los estudiantes como a los docentes, de la cual se puede resaltar los siguientes puntos:

- Se requiere un manual que exponga en forma clara y sencilla la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, como una guía para el trabajo autónomo.
- Se deberían contemplar ejercicios planteados que sean un reflejo de situaciones reales dependiendo de la carrera en que la materia sea dictada.
- Se debería tener acceso a material preparado por el docente de la asignatura, tomando en cuenta las necesidades de cada grupo de estudiantes.

## 4.5 Verificación de Hipótesis

### *4.5.1 Planteamiento de hipótesis*

- $H_0$: La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases no mejora los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.
- $H_1$: La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases mejora los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

### *4.5.2 Cálculo de frecuencias observadas $f_o$*

Las encuestas realizadas a los estudiantes arroja como resultado el siguiente cuadro de frecuencias observadas ($f_o$).

### *4.5.3 Cálculo de frecuencias esperadas $f_e$*

La finalidad de una prueba de k muestras es evaluar la aseveración que establece que todas las k muestras independientes provienen de poblaciones que presentan la

**Cuadro 4.13:** Frecuencias observadas $f_o$

| No | Nunca | Algunas Veces | Casi Siempre | Siempre | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 16 | 46 | 67 |
| 2 | 2 | 17 | 20 | 28 | 67 |
| 3 | 15 | 14 | 26 | 12 | 67 |
| 4 | 2 | 18 | 15 | 32 | 67 |
| 5 | 4 | 14 | 26 | 23 | 67 |
| 6 | 18 | 19 | 10 | 20 | 67 |
| 7 | 0 | 1 | 15 | 51 | 67 |
| 8 | 3 | 6 | 19 | 39 | 67 |
| 9 | 5 | 14 | 20 | 28 | 67 |
| 10 | 10 | 12 | 15 | 30 | 67 |
| 11 | 0 | 15 | 22 | 30 | 67 |
| 12 | 0 | 0 | 10 | 57 | 67 |
| Total | 60 | 134 | 214 | 396 | 804 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

misma proporción de algún elemento

Las frecuencias esperadas son calculadas en función de las frecuencias observadas, trabajando de forma individual con cada casillero de la tabla de frecuencias observadas, es así que para el casillero (n,m) se realiza la multiplicación del total de la fila n con el total de la columna m y dividido para la suma total del cuadro de frecuencias observadas. Por ejemplo:

$$Casillero_{2,2} = \frac{Total_{col2} * Total_{fil2}}{total_{suma}} = \frac{60 * 67}{804} = 5$$

### *4.5.4 Cálculo del estadístico de prueba*

El estadístico a ser utilizado es el Chi-cuadrado que, contrasta las frecuencias generadas con los datos de la muestra (frecuencias observadas $f_o$) con las frecuencias esperadas($f_e$), y se aplica la siguiente fórmula de cálculo:

$$x^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

El contraste de datos se la realiza con el cuadro de frecuencias esperadas respecto

**Cuadro 4.14:** Frecuencias esperadas ($f_e$)

| No | **Nunca** | **Algunas Veces** | **Casi Siempre** | **Siempre** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 2 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 3 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 4 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 5 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 6 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 7 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 8 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 9 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 10 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 11 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| 12 | 5 | 11.17 | 17.83 | 33 | 67 |
| Total | 60 | 134 | 214 | 396 | 804 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

a cada casillero de las mismas mas la sumatoria de todos estos valores, por lo tanto se encuentra el valor de Chi cuadrado calculado $x^2_{calc}$.

Para este caso, $x^2 = 199,83$ este es el valor estadístico de Chi cuadrado calculado ($x^2_{cal}$) este se comparará con un valor Chi cuadrado esperado ($x^2_{esp}$)en la tabla de probabilidades para Chi cuadrado ($x^2$).

### *4.5.5 Grados de libertad*

Los grados de libertad son una función del número de casillas en una tabla de $2 \cdot k$, donde k es el numero de casilleros, es decir, los grados de libertad reflejan el tamaño de la tabla. Los grados de libertad de la columna son el número de filas (”r” categorías) menos 1, o bien, $(r - 1)$.Los grados de libertad de cada fila es igual al número de columnas (”c” muestras) menos 1, o bien, $(c - 1)$. El efecto neto es que el número de grados de libertad para la tabla es el producto de (número de filas -1) por (número de columnas -1), o bien, $(r - 1)(c - 1)$, para este caso:

Grados de libertad (gl)=(nº de filas–1)x(nº de columnas–1)

$$gl = (12 - 1)x(4 - 1) = 33$$

Estos grados de libertad se revisan en la tabla Chi Cuadrado, en la primera columna con 33 grados de libertad y con una confiabilidad del 95 % ($\alpha = 0{,}05$).

Observando la tabla de Chi-cuadrado (Anexo:B)se obtiene un valor critico ($x^2_{critico}$) de 47.39.

| ν/p | 0,001 | 0,0025 | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 59,7022 | 56,3325 | 53,6719 | 50,8922 | 46,9792 | [illegible] | 40,2560 | 37,9902 | 36,2502 | 34,7997 | 33,5302 | 32,3815 | 31,3159 | 30,3073 | 29,3360 |
| 31 | 61,0980 | 57,6921 | 55,0025 | 52,1914 | 48,2319 | [illegible] | 41,4217 | 39,1244 | 37,3591 | 35,8871 | 34,5981 | 33,4314 | 32,3486 | 31,3235 | 30,3359 |
| 32 | 62,4873 | 59,0461 | 56,3280 | 53,4857 | 49,4804 | [illegible] | 42,5847 | 40,2563 | 38,4663 | 36,9730 | 35,6649 | 34,4804 | 33,3809 | 32,3394 | 31,3359 |
| 33 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 47,3999 | 43,7452 | 41,3861 | 39,5718 | 38,0575 | 36,7307 | 35,5287 | 34,4126 | 33,3551 | 32,3358 |
| 34 | 65,2471 | 61,7382 | 58,9637 | 56,0609 | 51,9660 | 48,6024 | 44,9032 | 42,5140 | 40,6756 | 39,1408 | 37,7954 | 36,5763 | 35,4438 | 34,3706 | 33,3357 |
| 35 | 66,6192 | 63,0760 | 60,2746 | 57,3420 | 53,2033 | 49,8018 | 46,0588 | 43,6399 | 41,7780 | 40,2228 | 38,8591 | 37,6231 | 36,4746 | 35,3858 | 34,3356 |
| 36 | 67,9850 | 64,4097 | 61,5811 | 58,6192 | 54,4373 | 50,9985 | 47,2122 | 44,7641 | 42,8788 | 41,3036 | 39,9220 | 38,6693 | 37,5049 | 36,4008 | 35,3356 |
| 37 | 69,3476 | 65,7384 | 62,8832 | 59,8926 | 55,6680 | 52,1923 | 48,3634 | 45,8864 | 43,9782 | 42,3833 | 40,9839 | 39,7148 | 38,5348 | 37,4156 | 36,3355 |
| 38 | 70,7039 | 67,0628 | 64,1812 | 61,1620 | 56,8955 | 53,3835 | 49,5126 | 47,0072 | 45,0763 | 43,4619 | 42,0450 | 40,7597 | 39,5643 | 38,4302 | 37,3354 |
| 39 | 72,0550 | 68,3830 | 65,4753 | 62,4281 | 58,1201 | 54,5722 | 50,6598 | 48,1263 | 46,1730 | 44,5395 | 43,1053 | 41,8040 | 40,5935 | 39,4446 | 38,3354 |
| 40 | 73,4029 | 69,6987 | 66,7660 | 63,6908 | 59,3417 | 55,7585 | 51,8050 | 49,2438 | 47,2685 | 45,6160 | 44,1649 | 42,8477 | 41,6222 | 40,4589 | 39,3353 |
| 45 | 80,0776 | 76,2229 | 73,1660 | 69,9569 | 65,4101 | 61,6562 | 57,5053 | 54,8105 | 52,7288 | 50,9849 | 49,4517 | 48,0584 | 46,7607 | 45,5274 | 44,3351 |
| 50 | 86,6603 | 82,6637 | 79,4898 | 76,1538 | 71,4202 | 67,5048 | 63,1671 | 60,3460 | 58,1638 | 56,3336 | 54,7228 | 53,2576 | 51,8916 | 50,5923 | 49,3349 |
| 55 | 93,1671 | 89,0344 | 85,7491 | 82,2920 | 77,3804 | 73,3115 | 68,7962 | 65,8550 | 63,5772 | 61,6650 | 59,9804 | 58,4469 | 57,0160 | 55,6539 | 54,3348 |
| 60 | 99,6078 | 95,3443 | 91,9518 | 88,3794 | 83,2977 | 79,0820 | 74,3970 | 71,3411 | 68,9721 | 66,9815 | 65,2265 | 63,6277 | 62,1348 | 60,7128 | 59,3347 |
| 70 | 112,3167 | 107,8079 | 104,2148 | 100,4251 | 95,0231 | 90,5313 | 85,5270 | 82,2553 | 79,7147 | 77,5766 | 75,6893 | 73,9677 | 72,3583 | 70,8236 | 69,3345 |
| 80 | 124,8389 | 120,1018 | 116,3209 | 112,3288 | 106,6285 | 101,8795 | 96,5782 | 93,1058 | 90,4053 | 88,1303 | 86,1197 | 84,2840 | 82,5663 | 80,9266 | 79,3343 |
| 90 | 137,2082 | 132,2554 | 128,2987 | 124,1162 | 118,1359 | 113,1452 | 107,5650 | 103,9040 | 101,0537 | 98,6499 | 96,5238 | 94,5809 | 92,7614 | 91,0234 | 89,3342 |
| 100 | 149,4488 | 144,2925 | 140,1697 | 135,8069 | 129,5613 | 124,3421 | 118,4980 | 114,6588 | 111,6667 | 109,1412 | 106,9058 | 104,8615 | 102,9459 | 101,1149 | 99,3341 |
| 120 | 173,6184 | 168,0814 | 163,6485 | 158,9500 | 152,2113 | 146,5673 | 140,2326 | 136,0620 | 132,8063 | 130,0546 | 127,6159 | 125,3833 | 123,2890 | 121,2850 | 119,3340 |

**Figura 4.13:** Extracto tabla Chi Cuadrado

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** [DE RIVERA 2000][2]

En la gráfica se muestra la intersección entre la fila que muestra los valores para 33 grados de libertad y la columna con los valores para el nivel de significación de 0.05.

Es pertinente indicar que los niveles de significación mas comunes son de $\alpha$ =0.05, 0.01 y 0.1, el nivel de significación tiene mas sentido cuando se lo expresa como percentil $1 - \alpha$, este valor representa al nivel de confianza que se desea que tenga los cálculos de la prueba, en el caso de esta investigación se ha considerado pertinente tener un nivel de confianza del 95 %, por tanto el valor de $\alpha$ debe ser 0.05 que corresponde al complemento porcentual de la confianza.

### *4.5.6 Decisión*

El valor percentil para la distribución del Chi-cuadrado con 33 grado de libertad y una confiabilidad del 95 % es 47.39, como se puede ver en la figura 4.14.

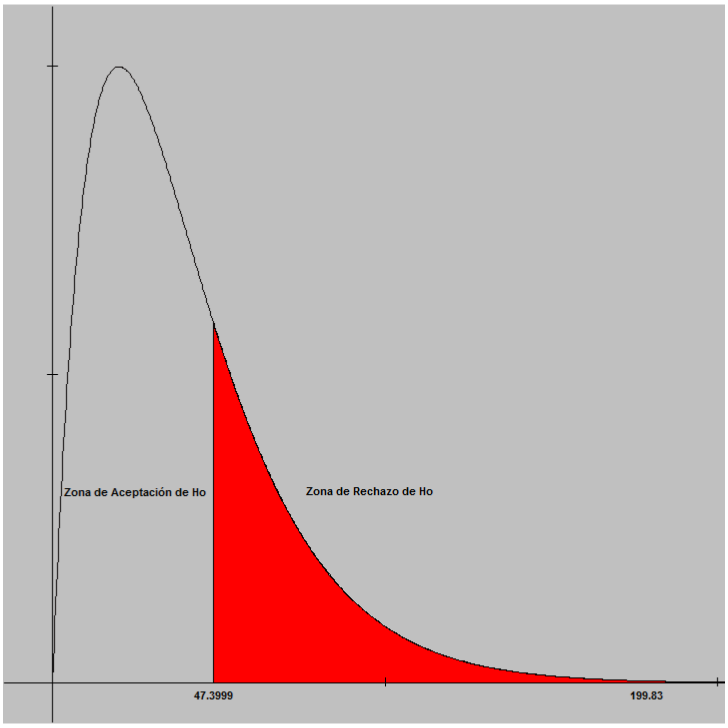


**Figura 4.14:** Curva Chi Cuadrado

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** WinStats.

El valor de $x^2_{critico} = 47{,}39 < x^2_{calc} = 199,83$
Esto indica que se rechaza la hipótesis nula $H_0$ y se acepta hipótesis alterna $H_1$, es decir: La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases permitirá mejorar los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

## 4.6 Validación de la Hipótesis

En la verificación de la hipótesis se determino la necesidad de implementar un manual guía aplicando el Método Inductivo para mejorar los logros de aprendizaje de los estudiantes, ahora se probara la hipótesis depués de haber utilizado el manual en las clases.

La prueba de hipótesis se hubiese generado a través de una encuesta aplicada a los docentes, los que son los directos evaluadores de los logros de aprendizaje de los estudiantes, sin embargo en este caso el universo consta de tres docentes, particular que impide implementar la prueba Chi cuadrado, ya que ésta, por el numérico de encuesta, tres, arrojaría una conclusión errónea.

En este caso un camino a seguir es utilizar el test exacto de Fisher, éste permite analizar si dos variables dicotómicas están asociadas, cuando la muestra a estudiar es demasiado pequeña y no se cumplen las condiciones necesarias para que la aplicación del test Chi cuadrado sea adecuada.

Una forma de plantear los resultados es su disposición en una tabla de contingencia de dos vías. Si las dos variables que se están considerando son dicotómicas, nos encontraremos con el caso de una tabla 2 x 2 como la que se muestra en la Tabla 4.15. El test exacto de Fisher se basa en evaluar la probabilidad asociada a cada una de las tablas 2 x 2 que se pueden formar manteniendo los mismos totales de filas y columnas que los de la tabla observada. Cada una de estas probabilidades se obtiene bajo la hipótesis nula de independencia de las dos variables que se están considerando.

**Cuadro 4.15:** Tabla de contingencia general para la comparación de dos variables dicotómicas en el caso de grupos independientes.

| | Característica A | | |
|---|---|---|---|
| Característica B | Presente | Ausente | Total |
| Presente | a | b | a + b |
| Ausente | c | d | c + d |
| Total | a + c | b + d | n |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** [INMAN 1994] [6].

La probabilidad exacta de observar un conjunto concreto de frecuencias a, b, c y d en una tabla 2 x 2 cuando se asume independencia y los totales de filas y columnas se consideran fijos viene dada por la distribución hipergeométrica:

$$p = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!b!c!d!} \tag{4.1}$$

Esta fórmula se obtiene calculando todas las posibles formas en las que podemos disponer n sujetos en una tabla 2 x 2 de modo que los totales de filas y columnas sean siempre los mismos, (a+b), (c+d), (a+c) y (b+d).

La probabilidad anterior deberá calcularse para todas las tablas de contingencia que puedan formarse con los mismos totales marginales que la tabla observada. Posteriormente, estas probabilidades se usan para calcular valor de la p asociado al test exacto de Fisher. Este valor de p indicará la probabilidad de obtener una diferencia entre los grupos mayor o igual a la observada, bajo la hipótesis nula de independencia. Si esta probabilidad es pequeña ($p < 0{,}05$) se deberá rechazar la hipótesis de partida y deberemos asumir que las dos variables no son independientes, sino que están asociadas. En caso contrario, se dirá que no existe evidencia estadística de asociación entre ambas variables.

Hay que acotar que las hipótesis con la que estamos trabajando son las mismas, es decir:

- $H_0$: La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases no mejora los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.
- $H_1$: La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases mejora los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

## 4.7 Aplicación del test de Fisher utilizando el software estadístico R

El software R, según [KINDT, 2005] [7], es un programa diseñado para tratamientos estadísticos tanto básicos como complejos, nos permite obtener resultados de diversa índole estadística con tan solo unas pocas lineas de comandos establecidos.

Para la aplicación de la prueba de Fisher se considero dos paralelos, el de segundo nivel de ingeniera electrónica y el de tercer nivel de ingeniería petroquímica, en el primero se aplico el manual y en el segundo no, ademas los dos poseen el mismo numérico de estudiantes, veintiuno, y en ambos dicta la materia el mismo docente.

Con ayuda del criterio del docente a cargo de estos dos grupos se pudo realizar la siguiente tabla 4.16.

**Cuadro 4.16:** Tabla de datos

| | Logros de Aprendizaje | | Total |
|---|---|---|---|
| | No hubo mejora | Si hubo mejora | |
| Grupo 1 (No se aplico el manual guía) | 21 | 0 | 21 |
| Grupo 2 (Se aplico el manual guía) | 3 | 18 | 21 |
| Total | 24 | 18 | 42 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

Una vez identificados los valores que se asignan a la tabla, se procede a verificar la hipótesis en el software estadístico R.

Los pasos que se siguieron fueron:

1. Se asignan a dos variables los valores de la tabla y se crea esta, esto mediante los siguientes comandos.

```
> estudiantes<-c(rep("Si",21),rep("No",21))

> mejoro_logro<-c(rep("No",21),rep("Si",0),rep("No",3),rep("Si",18))

> Table_est<-table(estudiantes, mejoro_logro)

> Table_est
```

Estas instrucciones dan como resultado la tabla que se muestra en la figura 4.15

```
            mejoro_logro
estudiantes No Si
         G1 21  0
         G2  3 18
```

**Figura 4.15:** Tabla generada en software R

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software estadístico R

2. Para aplicar la prueba de Fisher y que los resultados se almacenen en una variable, se utiliza el siguiente comando.

```
> fisher<-fisher.test(Table_est)
```

3. Y por último para desplegar la información resultado del análisis se utiliza el comando.

```
> unclass(fisher)
```

En la figura 4.16, se muestra la pantalla de datos que se genera como resultado de la prueba

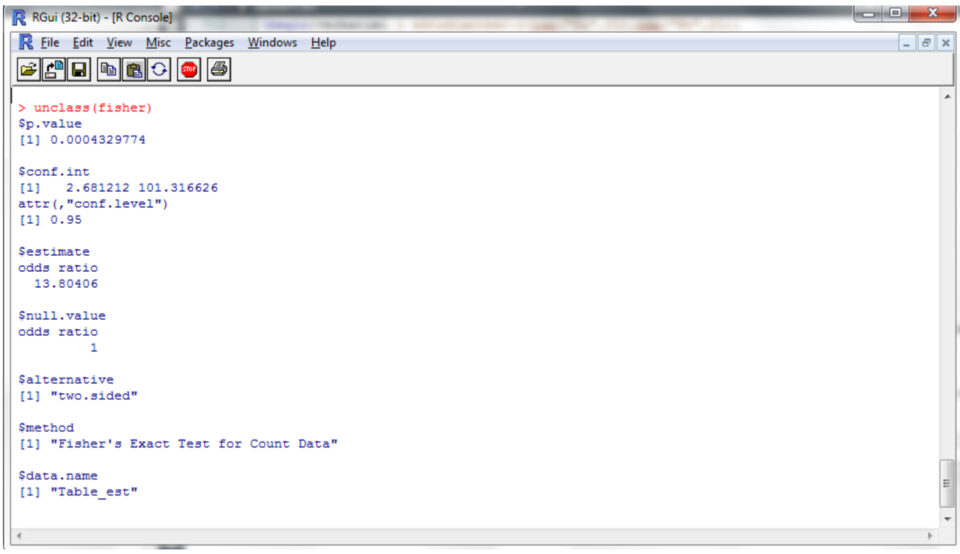


**Figura 4.16:** Datos de la prueba Fisher obtenidos en el software R
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software estadístico R

4. Lo que más interesa de los datos obtenidos es el valor de p ya que este valor es el que nos dará la decisión estadística. Para conseguir este valor se utiliza la instrucción.

```
> fisher$p.value
```

Que arroja el resultado mostrado en la figura 4.17

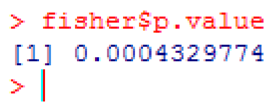


**Figura 4.17:** Valor p obtenido de la prueba Fisher utilizando software R
**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software estadístico R.

## 4.8 Interpretación

En vista de que el valor de p es menos a 0.05, $0{,}00043 < 0{,}05$, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación, es decir:

La aplicación del Método Didáctico Inductivo comparada con la actual forma de impartir clases permitirá mejorar los logros de aprendizaje en los estudiantes de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

## 4.9 Prueba post test

Para comprobar si existe una diferencia significativa entre el paralelo en donde se aplico el método y otro en el que no se aplicó, se utilizara la prueba T de student para muestras independientes, esta nos permitirá sacra conclusiones acerca de la validez del método para mejorar los logros de aprendizaje.

### *4.9.1 Prueba de hipótesis*

**PASO 1 Redacción de la Hipótesis**

**Hipótesis**

El promedio de calificaciones de la primera unidad de los estudiantes del curso 1 en donde se aplico el método inductivo es mayor que el de los estudiantes del curso 2 en donde se siguió el método tradicional.

$H_1 =$ **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones del grupo del curso 1 y la media de calificaciones del grupo del curso 2.

$H_0$ = **No existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones del grupo del curso 1 y la media de calificaciones del grupo del curso 2.

**PASO 2 Determinación de $\alpha$**

Se elige $\alpha = 5\,\% = 0{,}05$.

**PASO 3. Elección de la prueba estadística.**

Debido a que la variable fija son dos grupos, cuyas muestras son independientes y la variable aleatoria es numéricas, se elige la prueba t de student para muestras independientes.

**PASO 4. Lectura de P-Valor.**

Para el caso de la prueba de t de student para dos muestras independientes se tiene que antes de calcular la significación de la prueba t de student, se debe corroborar dos supuestos, el de normalidad, en el cual se debe probar que la variable aleatoria en ambos grupos se distribuye normalmente, y también el supuesto de igualdad de varianza.

Para corroborar la normalidad, en este caso por ser el grupo total mayor a treinta, se utiliza la prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S), el criterio para determinar si la variable aleatoria se distribuye normalmente es:

- $P - Valor \geq \alpha$, Aceptar $H_0$ = Los datos provienen de una distribución normal.
- $P - Valor \leq \alpha$, Aceptar $H_1$ = Los datos no provienen de una distribución normal.

Para corroborar la igualdad de varianzas entre los dos grupos, se utiliza la prueba de Levene, cuyo criterio se determina:

- $P - Valor \geq \alpha$, Aceptar $H_0$ = Las varianzas son iguales.
- $P - Valor \leq \alpha$, Aceptar $H_1$ = Existe diferencia significativa entre las varianzas.

Después de pasar estas dos pruebas, se podrá dar paso al calculo de P-Valor de la prueba T de student muestras independientes.

Se introduce los datos a SPSS quedando una tabla como se muestra en la figura 4.18

| | |
|---|---|
| 1 | 15,45 |
| 1 | 14,55 |
| 1 | 14,60 |
| 1 | 17,10 |
| 1 | 12,85 |
| 1 | 16,20 |
| 1 | 15,40 |
| 1 | 15,55 |
| 1 | 17,55 |
| 1 | 14,05 |
| 1 | 17,85 |
| 1 | 17,05 |
| 1 | 14,80 |
| 1 | 13,25 |
| 1 | 14,25 |
| 1 | 16,60 |
| 1 | 16,10 |
| 1 | 13,70 |
| 1 | 15,20 |
| 1 | 16,15 |
| 1 | 19,05 |
| 2 | 11,20 |
| 2 | 14,95 |
| 2 | 15,45 |
| 2 | 12,80 |
| 2 | 13,50 |
| 2 | 14,50 |
| 2 | 16,75 |
| 2 | 12,95 |
| 2 | 17,25 |
| 2 | 15,45 |
| 2 | 15,25 |
| 2 | 14,95 |
| 2 | 16,55 |
| 2 | 13,50 |
| 2 | 8,55 |
| 2 | 14,50 |
| 2 | 13,20 |
| 2 | 19,05 |
| 2 | 11,50 |
| 2 | 13,25 |
| 2 | 12,25 |

**Figura 4.18:** Tabla de datos ingresados en SPSS

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software estadístico SPSS

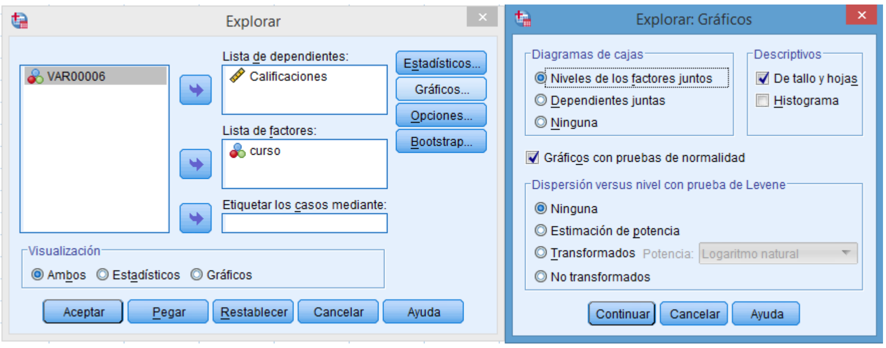


**Figura 4.19:** Cuadro de análisis la distribución normal de datos en SPSS

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software estadístico SPSS.

Donde 1 representa al curso 1 en donde se aplico el Método Inductivo y el 2 represente al curso 2 donde no se aplico el método, ambos cursos están acompañados de sus respectivas notas, por cada individuo de estudio, en este caso 21 para cada curso.

Para realizar la prueba de normalidad se recurre a las funciones del programa, se introduce los datos como se muestra en la figura 4.19

Arrojando el resultado mostrado en la figura 4.20

Los valores que interesan son los de la prueba de normalidad, específicamente la significación de la prueba (K-S), y se la contrasta en una plantilla de prueba de hipótesis, representada en la tabla 4.17.

**Cuadro 4.17:** Criterio para determinar Normalidad

| **NORMALIDAD Calificaciones** | |
|---|---|
| **P-Valor (Curso 1)=0,200** | $\alpha = 0{,}05$ |
| **P-Valor (Curso 2)=0,200** | $\alpha = 0{,}05$ |
| **Conclusión:** $P - Valor \geq \alpha$, Aceptar $H_0$ = Los datos provienen de una distribución normal. | |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Programa SPSS.

Ahora se debe corroborar el supuesto de igualdad de varianza, esto SPSS lo calcula junto con la prueba t de student.

**Resumen de procesamiento de casos**

| curso | | Casos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Válido | | Perdidos | | Total | |
| | | N | Porcentaje | N | Porcentaje | N | Porcentaje |
| Calificaciones | 1 | 21 | 100,0% | 0 | 0,0% | 21 | 100,0% |
| | 2 | 21 | 100,0% | 0 | 0,0% | 21 | 100,0% |

**Descriptivos**

| curso | | | | Estadístico | Error estándar |
|---|---|---|---|---|---|
| Calificaciones | 1 | Media | | 15,5857 | ,34818 |
| | | 95% de intervalo de confianza para la media | Límite inferior | 14,8594 | |
| | | | Límite superior | 16,3120 | |
| | | Media recortada al 5% | | 15,5474 | |
| | | Mediana | | 15,4500 | |
| | | Varianza | | 2,546 | |
| | | Desviación estándar | | 1,59555 | |
| | | Mínimo | | 12,85 | |
| | | Máximo | | 19,05 | |
| | | Rango | | 6,20 | |
| | | Rango intercuartil | | 2,43 | |
| | | Asimetría | | ,278 | ,501 |
| | | Curtosis | | -,319 | ,972 |
| | 2 | Media | | 14,1595 | ,50889 |
| | | 95% de intervalo de confianza para la media | Límite inferior | 13,0980 | |
| | | | Límite superior | 15,2211 | |
| | | Media recortada al 5% | | 14,1972 | |
| | | Mediana | | 14,5000 | |
| | | Varianza | | 5,438 | |
| | | Desviación estándar | | 2,33204 | |
| | | Mínimo | | 8,55 | |
| | | Máximo | | 19,05 | |
| | | Rango | | 10,50 | |
| | | Rango intercuartil | | 2,58 | |
| | | Asimetría | | -,220 | ,501 |
| | | Curtosis | | ,799 | ,972 |

**Pruebas de normalidad**

| curso | | Kolmogorov-Smirnov[a] | | | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Estadístico | gl | Sig. | Estadístico | gl | Sig. |
| Calificaciones | 1 | ,080 | 21 | ,200* | ,987 | 21 | ,989 |
| | 2 | ,100 | 21 | ,200* | ,984 | 21 | ,967 |

**Figura 4.20:** Análisis la distribución normal de datos en SPSS

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Software estadístico SPSS.

Se ingresan los datos en el programa, como se lo muestra en la figura 4.18

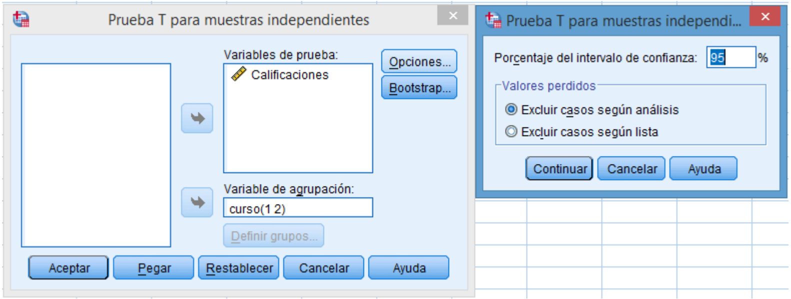


**Figura 4.21:** Análisis de las varianzas

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software estadístico SPSS.

Esto da como resultado el análisis tanto de la varianza como la prueba T de student, tal como se lo muestra en la figura 4.22

**Prueba T**

**Estadísticas de grupo**

| | curso | N | Media | Desviación estándar | Media de error estándar |
|---|---|---|---|---|---|
| Calificaciones | 1 | 21 | 15,5857 | 1,59555 | ,34818 |
| | 2 | 21 | 14,1595 | 2,33204 | ,50889 |

**Prueba de muestras independientes**

| | | Prueba de Levene de calidad de varianzas | | prueba t para la igualdad de medias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% de intervalo de confianza de la diferencia | |
| | | F | Sig. | t | gl | Sig. (bilateral) | Diferencia de medias | Diferencia de error estándar | Inferior | Superior |
| Calificaciones | Se asumen varianzas iguales | 2,013 | ,164 | 2,313 | 40 | ,026 | 1,42619 | ,61660 | ,17999 | 2,67239 |
| | No se asumen varianzas iguales | | | 2,313 | 35,359 | ,027 | 1,42619 | ,61660 | ,17487 | 2,67751 |

**Figura 4.22:** Resultado T de student en SPSS

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.

**Fuente:** Software estadístico SPSS.

Para verificar la igualdad de varianza el valor que interesa es la significación de la prueba de Levene, y se l analiza con la tabla 4.18

Una vez probado que se cumplen con los dos requerimientos, el de normalidad y el de varianza se puede analizar el P-Valor de la prueba T de student.

No se necesita ningún otro comando en el SPSS ya que en el ultimo paso y se

**Cuadro 4.18:** Criterio para determinar la igualdad de varianzas

| IGUALDAD DE VARIANZAS | | |
|---|---|---|
| **P-Valor=0,164** | $>$ | $\alpha = 0{,}05$ |
| **Conclusión:** $P - Valor \geq \alpha$, Aceptar $H_0$ = Las varianzas son iguales. | | |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Programa SPSS.

reflejaron los valores, analizando estos se tiene que:

**Cuadro 4.19:** Prueba T de student

| Prueba T de student | | |
|---|---|---|
| **P-Valor=0,026** | $<$ | $\alpha = 0{,}05$ |
| **Conclusión:** Existe una diferencia significativa entre la media de calificaciones del grupo del curso 1 y la media de calificaciones del grupo del curso 2. | | |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Programa SPSS.

### *4.9.2 Interpretación*

Al evidenciar una diferencia significativa entre las calificaciones de los dos grupos, se puede concluir que el grupo en que fue utilizado el Método Inductivo mejoro su rendimiento y con esto sus logros de aprendizaje.

# CAPÍTULO 5

## PROPUESTA

### 5.1 Datos informativos

**Tema:**Elaboración de una guía de ejercicios para la enseñanza de la Matemática (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden) para incidir en los logros aprendizaje.

**Nombre de Institución:** Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extension Latacunga

**Provincia:** Cotopaxi

**Cantón:** Latacunga

**Dirección:**Av. Quijano y Ordoñez y Hermanas Páez

**email:** espe-el@espe.edu.ec

### 5.2 Antecedentes

No existe un método de enseñanza- aprendizaje definido que se lo haya probado en el aula y al nivel del Área de Matemática para la formación técnica en la Universidad de las Fuerzas Armadas -ESPE extensión Latacunga, para optimizar el aprendizaje de la Matemática en el nivel Superior, en este caso particular para establecer dominios en el aprendizaje de las ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS y que haya dado confianza con los resultados esperados en la evaluación de los estudiantes de las ingenierías que se ofertan en esta institución Superior. A nivel nacional, el sistema educativo ecuatoriano, durante cincuenta años y más ha vivido experimentando reformas y contra reformas, buscando mejorar la calidad de la educación que se imparte en todos los niveles educativos, cada gobierno a su turno ha aplicado una sistematización tanto administrativa como académica, declarando que lo anterior era caduco y que lo aplicado a su turno iba a cambiar la imagen y la formación del ciudadano ecuatoriano con un perfil ideal a la ideología gubernamental y política del Estado sin logar tales cambios hasta el día de hoy, inculpando del fracaso a los maestros y a las instituciones de todos los niveles: inicial primario, secundario y superior, frustrando a autoridades y maestros que han procurado poner todo de su parte para poner sus realizaciones al criterio de los grupos de poder encargados de la organización y evaluación en nuestro caso de la educación superior en su momento histórico.

Es posible que en algo haya habido fallas para que se ponga en el tapete social la profesionalidad en todas las carreras del nivel superior, analizando el ¿por qué de las falencias que se inculpan en la educación y formación ciudadana?, de la que todos los responsables del actual gobierno: asambleístas, ministros, directivos y hasta el propio Presidente de la República son su producto. Los maestros antiguos ya jubilados y otros en función que desean irse tempano del magisterio fiscal por las incomprensiones, inculpaciones, descrédito de su labor docente, exigencias incomprensibles de una labor exagerada de planificación que les resta las horas su tarea de enseñanza-aprendizaje en el aula, he podido llegar a la conclusión de que hay algo que no se tomado en cuenta ni en la formación de los maestros peor en la capacitación pedagógica de los mismos, que es el conocimiento a profundidad y la aplicación en el aula de los métodos pedagógicos para optimizar el aprendizaje en todos los niveles de estudios, y en este caso específico de la educación superior.

De ninguna manera se quiere decir que los maestros de los diferentes niveles de educación en las diferentes áreas de estudios, no han utilizado el método para su acción docente en el aula, lo que se dice en esta investigación, es que no han especificado, ni seleccionado, ni aplicado un método definido como ideal para cada asignatura, a fin de optimizar el aprendizaje de los contenidos científicos de cada una, en este caso particular, de la Matemática, especialmente de las ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS de primer orden que es una parte de especial importancia de la formación profesional al nivel universitario.

## 5.3 Justificación

Como se puede deducir, la optimización del Aprendizaje de la Matemática en el Nivel de Estudios Superior, implica la selección, el estudio y la aplicación de un método didáctico apropiado, que permita al maestro ser comprendido en forma integral en su acción formadora docente en el aula, haciendo parte de su conocimiento cuanto ya ha sido estudiado y dejado como herencia científica cultural, por famosos maestros actuales y del pasado como Aristóteles, Francis Bacón entre otros filósofos y pedagogos, que nos hablan del Método, en este caso del propuesto, el Método didáctico Inductivo.

Durante los últimos cincuenta años, los gobiernos del Ecuador a través del Ministerio de Educación han aplicado reformas y contra reformas curriculares en sus niveles educativos: básico, bachillerato y post-bachillerato, buscando optimizar la formación ideal del ciudadano ecuatoriano para una vida social de vasta cultura y una vida productiva en el comercio, la artesanía y la industria, sin encontrar la fórmula para alcanzar sus logros, paralelo al Ministerio de Educación las universidades estatales y particulares han propendido a la formación de profesionales de alto nivel técnico científico, habiendo logrado en parte pero sin alcanzar el nivel de la excelencia exigido por la sociedad.

Sin lugar a dudas las universidades cumplieron con las exigencias de equiparse adecuadamente con espacios físicos, aulas, laboratorios, material pedagógico, talento humano preparado científicamente y pedagógicamente, presupuestos económicos paralelos a sus necesidades aunque no exactamente lo suficiente, habiendo cubierto un alto porcentaje de sus necesidades, pero subsistiendo una falla en los diferentes niveles educativos, el cuál es no lograr el espectro formativo de la demanda social. He aquí una simple respuesta que nunca tomó en cuenta el maestro, ni el sistema educativo en sus diferentes subsistemas y que es el uso y el desarrollo del método apropiado para cada asignatura en el aula, en su procesamiento para optimizar la enseñanza aprendizaje de los contenidos curriculares, que siempre presentaron vacíos en el paso de un nivel educativo a otro, porque de las falencias existentes, el nivel medio inculpaba al nivel primario y a su vez el post-bachillerato al nivel medio y por ende la Universidad, que era obligada a recibir a bachilleres con conocimientos incompletos en las diferentes especialidades y que entregó al país profesionales de media aceptación, pero que nunca desarrollaron la gran empresa y la industria, por no tener una tecnología propia para ubicar al Ecuador en una posición privilegiada, como lo harían profesionales de excelencia en su formación académica, como lo han hecho en los países industrializados o los llamados del primer mundo por sus características socioeconómicas y productivas con la utilización práctica de la ciencia, la técnica y la tecnología.

## 5.4 Objetivos

### *5.4.1 General*

- Elaborar una guía de ejercicios para la enseñanza de la Matemática (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden) para incidir en los logros aprendizaje.

### *5.4.2 Específico*

- Reforzamiento del conocimiento de la simbología básica y superior de las matemáticas.
- Optimizar la comprensión, proceso y aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en problemas comunes.
- Práctica de la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Elaborar un manual guía con demostraciones de la eficacia de la aplicación del Método Inductivo en la enseñanza de la Matemática (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden) para incidir en los logros aprendizaje.

## 5.5 Análisis de factibilidad

### *5.5.1 Factibilidad académica*

Los docentes de la universidad están altamente calificados ademas de poseer una buena predisposición para implementar en sus respectivos cursos propuestas metodológicas que se encaminen a mejorar los logros de aprendizaje.

### *5.5.2 Factibilidad Institucional*

La institución esta abierta a las propuesta que se encaminen a mejorar las condiciones del proceso enseñanza-aprendizaje, prueba de esto es que a dado carta abierta a todos los maestrantes que deseen realizar su investigación en la institución, como lo demuestra el anexo C.

### *5.5.3 Factibilidad Técnica*

Parte de la filosofía de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE es: “La formación consciente, participativa y crítica con libertad académica y rigor científico, que comprenda y respete los derechos fundamentales del ser humano y de la comunidad.”Lo que garantiza la aplicación de nuevas estrategias metodológicas.

### *5.5.4 Fundamentación teórica*

**Método Inductivo**

El Método pedagógico didáctico, en este caso particular “INDUCTIVO”que se estudia y se recomienda para la enseñanza aprendizaje de la Matemática, tiene sus características y proceso que el maestro no necesita mucho esfuerzo para establecer su dominio y utilizarlo en el aula para alcanzar el éxito en su cometido docente.

Así tenemos que para entrar en la inducción el maestro en el aula debe respetar ciertos pasos lógicos como son:

1. **Análisis y definición de requerimientos.** Que se refiere a las necesidades que se deberá cumplir para la aplicación de Proyecto Curricular Institucional (PCI): Planificación pedagógica, Organización institucional, Talento humano preparado al más alto nivel, infraestructura para el nivel de estudios, requerimientos didácticos completos.

2. **Análisis y definición de los objetivos institucionales.** Que son las metas que se han determinado para que se cumplan en la actividad institucional de formar profesionales con el perfil apropiado a la demanda social.

3. **Aprobación de los objetivos.** Es la aceptación y la aprobación de las autoridades institucionales, de las aspiraciones y actividades de cada área de estudios en la Universidad, propuestas para el desarrollo de los proyectos y módulos correspondientes a la malla curricular.

4. **Identificación del problema.**Que es la actividad de cada maestro en el estudio y determinación de los problemas a solucionar para mejorar la enseñanza de cada asignatura para conseguir la optimización de los aprendizajes, orientados a la formación de profesionales de alta aceptación social.

5. **Formulación del problema.** Que se refiere a la declaración definida de cada problema para el entendimiento y planeación de su solución, para luego dar paso a la aplicación del Método, en este caso propuesto para la asignatura seleccionada en esta investigación que es el Inductivo, que se da con el siguiente proceso:

- **OBSERVACIÓN.** Con una actividad detenida y muy detallada del problema, De qué se trata, dónde se da, a qué y cómo afecta, cuáles son sus características.

- **EXPERIMENTACIÓN.** Que es la acción de recoger los datos del problema, organizarlos para procesarlos estadísticamente o en un laboratorio de acuerdo a sus características.

- **COMPROBACIÓN.** Que se da en el proceso investigativo, con los resultados matemáticos o del respectivo laboratorio y que nos permiten dar una definición para la remediación del problema.

- **ABSTRACCIÓN.** Que es la conceptualización de la solución del problema particular a cada caso que se haya investigado, definiéndolo detalladamente para su comprensión y aplicación.

- **GENERALIZACIÓN.** Que es la identificación en el medio social, de la enseñanza aprendizaje, de la producción, con la solución de un problema obtenido de una investigación, con las mismas características de otro problema y que se puede aplicar y solucionar con los mismos resultados obtenidos en una investigación.

## 5.6 Descripción de la propuesta

La aplicación de esta propuesta debe seguir los pasos enunciados en el Método Inductivo, los cuales son sistemáticos y ordenados y nos levaran a la generalización del conocimiento a ser tratado.

Es evidente que dos factores claves para que cualquier propuesta de tipo pedagógica sea aplicada con exitoso son:

- Interés de los estudiantes.
- Compromiso docente.

La primera se debe lograr con el incentivo constante a los estudiantes, haciéndoles notar las ventajas que la metodología les da para el estudio de la asignatura.

La segunda, en apariencia, no debería ser complicada de conseguir, pero si ponemos en el tapete que el talento humano es uno de los componentes institucionales más difíciles de manejar, debido a que cualquier desatino por parte de las autoridades puede ocasionar un malestar generalizado, lo cual conlleva al desinterés de los docentes por el mejoramiento institucional.

**Cuadro 5.1:** Modelo Operativo.

| FASES | METAS | ACTIVIDADES | RECURSOS | TIEMPO | RESPONSABLES | RESULTADOS | EVIDENCIAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Diagnostico | Determinar si los docentes de ”Ecuaciones Diferenciales Ordinarias” aplican un método educativo. | Aplicación de encuesta, tabulación de datos, Análisis estadístico. | Humano, Material escrito y Bibliográfico | Primera semana, periodo Octubre 2014 Febrero 2015 | Docentes y estudiantes | Escasa aplicación de estrategias metodológicas | Análisis e interpretación de datos. Sección 4.4 |
| Planificación | Elaborar una guía con una selección de ejercicios tipo desarrollados con el método seleccionado | Consulta bibliográfica, [EDWARDS y PENNEY 2001], [ESPINOZA 2007], [SPIEGEL 1983], Transcripción en LaTeX | Humano, Materiales computacionales | Segunda semana, periodo Octubre 2014 Febrero 2015 | Docente | Guía de aprendizaje | Anexo D |
| Ejecución | Aplicación de la guía de aprendizaje en los estudiantes | Proporcionar a los estudiantes la guía y solicitar su aplicación en sus trabajos autónomos. | Humano, Material Computacional y Bibliográfico | Tercera semana, periodo Octubre 2014 Febrero 2015 | Estudiantes | Docentes aplicando el Método Inductivo. | Anexo D y Anexo C. |
| Evaluación | Conseguir logros de aprendizaje tangibles por parte de los estudiantes | Observación y análisis estadístico de las metas cumplidas | Humanos. Materiales. | Cuarta semana, periodo Octubre 2014 Febrero 2015 | Docente | Verificación de hipótesis utilizando notas de la primera unidad. | Análisis e interpretación de datos. Sección 4.4 |

**Elaborado por:** Ing. Wilson P. Reyes B.
**Fuente:** Estudiantes de Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga.

### Evaluación de procesos

Son instrumentos enfocados en medir el avance del aprendizaje en los estudiantes, también sirven como medio de acreditación cuantitativa y lo principal sirven como fuente de retro-alimentación de los temas tratados.

## 5.7 Planificación del desarrollo de clase

En cada clase se tratara un tipo de Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden, el estudiante tendrá que realizar las siguientes actividades.

1. Resolverá por lo menos un ejercicio del tema tratado.
2. Buscara una aplicación real que involucre ecuaciones de la forma tratada en clase y la resolverá.
3. Compararara la resolución de los ejercicios dados con la de la aplicación.
4. Redactara en sus palabras un método general para solucionar las ecuaciones vistas en clase.

## CONCLUSIONES

Como resultado de la investigación se ha llegado a las siguientes conclusiones:

1. Se ha probado con una confiabilidad del 95 % que los estudiantes de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE Extensión Latacunga, no conocen el método pedagógico que aplican sus docentes, incluso varios dudan que trabajen con alguno,esto reviste una situación de alto interés para los estudios en general, parte de la pedagogía y didáctica que permite una mayor comprensión para aprender e interiorizar los contenidos de las ciencias que son de nuestro interés en la formación superior.

2. La población estudiantil de este centro de educación superior, no conoce lo que es el método pedagógico inductivo, que de acuerdo a sus características pedagógico-didácticas, permite al estudiante una mayor comprensión y aprendizaje de las ciencias que estudian, especialmente en el nivel universitario, para elevar el éxito en su carrera y la eficiencia de su profesionalización.

3. Los estudiantes de esta extensión universitaria dejan entrever que los maestros han descuidado la parte pedagógica en su tarea docente, con seguridad se podría decir que por falta de tiempo en su programación de los contenidos temáticos.

4. La aplicación de una guía elaborada con base a la estructura planteada por el Método Inductivo fue de agrado para los estudiantes, llegando a mejorar el rendimiento, probado de forma estadística con un grado de confiabilidad del 95 %, evidenciado en la estructura de los trabajos enviados.

**RECOMENDACIONES**

1. La primera actividad docente de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE Extensión Latacunga, sería la de hacer conocer a sus estudiantes sobre lo que es la Pedagogía, la Didáctica y los métodos pedagógicos, una vez que esto reviste una situación de alto interés para los estudios en general, que permite una mayor comprensión para aprender e interiorizar los contenidos de las ciencias que son de interés en la formación superior.

2. La población estudiantil debe conocer al inicio de sus estudios lo que es el método pedagógico inductivo, propuesto en esta investigación, que de acuerdo a sus características pedagógico- didácticas, permite al estudiante una mayor comprensión y aprendizaje de las ciencias que estudian, en este caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

3. Los maestros deben programar los contenidos de sus asignaturas tomando en consideración la Pedagogía, Didáctica y Metodología para elevar la eficacia de su tarea docente, que con seguridad elevaría el éxito de su trabajo y el de la promoción altamente satisfactoria estudiantil.

4. Como un primer avance permitir iniciar a los estudiantes con el conocimiento de lo qué es el Método Inductivo para el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con la preparación de un Manual Instructivo Metodológico para lograr su Aprendizaje.

## BIBLIOGRAFÍA


[1] **ASAMBLEA NACIONAL,** República del Ecuador. (2010) *Ley Orgánica de Educación Superior*, Ecuador, Quito, (53)

[2] **DE RIVERA,** Daniel (2000). *Estadística, modelos y métodos.*, Alianza Editorial, Madrid - España, (223-245).

[3] **EDWARDS,** Henry, & **PENNEY,** David (2001). *Ecuaciones diferenciales.* Pearson Educación.

[4] **ESPINOZA**, Eduardo. (2007). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.* Editorial Servicios Gráficos JJ., Lima - Perú, (25-189).

[5] **FERMOSO,** Paciano, (1985). *Teoría de la educación. Una interpretación antropológica*, Mexico D.F., Mexico (29).

[6] **INMAN**, Henry, (1994). Karl Pearson and RA Fisher on statistical tests: a 1935 exchange from Nature. The American Statistician, 48(1), 2-11.

[7] **Kindt,** Roeland, (2005). Tree diversity analysis: a manual and software for common statistical methods for ecological and biodiversity studies. World Agroforestry Centre.

[8] **MASDEVALL**, María, **COSTA,** Victoria, & **PARETAS,** María (1990). *Propuestas de intervención en el aula: técnicas para lograr un clima favorable en la clase* (Vol. 119). Narcea Ediciones., Madrid - España.

[9] **TITONE,** Renzo, **NAVARRO,** Manuel (1966). *Metodología didáctica.*, Madrid, España.

[10] **SPIEGEL,** Murray., (1983)., *Ecuaciones diferenciales aplicadas.*, Cuarta Edición, Prentice Hall.

## ANEXOS

### Anexo A: Encuesta aplicada en los estudiantes de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE extensión Latacunga

Estimado estudiante: Lea detenidamente cada pregunta y señale con una (x) en el recuadro la respuesta que usted elija.

| No | Pregunta | Nunca | Algunas veces | Casi siempre | Siempre |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ¿Cree que la elaboración de tareas y trabajos de los estudiantes está acorde al uso de metodologías educativas? | | | | |
| 2 | ¿Estima que su labor estudiantil mejoraría al trabajar con un manual que le ayude en sus obligaciones fuera del aula? | | | | |
| 3 | ¿Considera que los estudiantes deberían trabajar en grupo para realización de tarea y trabajos? | | | | |
| 4 | ¿Cree usted que el análisis de ejercicios aplicados en situaciones reales aumenta su interés en la asignatura? | | | | |
| 5 | ¿Cree usted que trabajando dentro y fuera del aula con recursos didácticos mejorarían sus trabajos individuales? | | | | |
| 6 | ¿Su docente utiliza una guía metodológica para docencia extra clase? | | | | |
| 7 | ¿El material didáctico suministrado por el docente debería permitirle ser más autónomo en la comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden? | | | | |
| 8 | ¿Cree Usted que se debería desarrollar las actividades programadas, con la ayuda de un manual que ilustre la metodología a seguir? | | | | |
| 9 | ¿Piensa usted que un manual de aprendizaje proporcionaría el sustento para alcanzar los objetivos planteados? | | | | |
| 10 | ¿Los ejemplos indicados en el manual de aprendizaje deberían estar acorde a sus objetivos grupales y no personales? | | | | |
| 11 | ¿Las clases presenciales se encontraban acorde a los requerimientos de la temática dada? | | | | |
| 12 | ¿Los ejercicios expuestos en clases presenciales deberían estar en relación de los que se encontraran en situaciones reales? | | | | |

## Anexo B: Tabla Chi Cuadrado

| ν/p | 0,001 | 0,0025 | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 59,7022 | 56,3325 | 53,6719 | 50,8922 | 46,9792 | 43,7730 | 40,2560 | 37,9902 | 36,2502 | 34,7997 | 33,5302 | 32,3815 | 31,3159 | 30,3073 | 29,3360 |
| 31 | 61,0980 | 57,6921 | 55,0025 | 52,1914 | 48,2319 | 44,9853 | 41,4217 | 39,1244 | 37,3591 | 35,8871 | 34,5981 | 33,4314 | 32,3486 | 31,3235 | 30,3359 |
| 32 | 62,4873 | 59,0461 | 56,3280 | 53,4857 | 49,4804 | 46,1942 | 42,5847 | 40,2563 | 38,4663 | 36,9730 | 35,6649 | 34,4804 | 33,3809 | 32,3394 | 31,3359 |
| 33 | 63,8694 | 60,3953 | 57,6483 | 54,7754 | 50,7251 | 47,3999 | 43,7452 | 41,3861 | 39,5718 | 38,0575 | 36,7307 | 35,5287 | 34,4126 | 33,3551 | 32,3358 |
| 34 | 65,2471 | 61,7382 | 58,9637 | 56,0609 | 51,9660 | 48,6024 | 44,9032 | 42,5140 | 40,6756 | 39,1408 | 37,7954 | 36,5763 | 35,4438 | 34,3706 | 33,3357 |
| 35 | 66,6192 | 63,0760 | 60,2746 | 57,3420 | 53,2033 | 49,8018 | 46,0588 | 43,6399 | 41,7780 | 40,2228 | 38,8591 | 37,6231 | 36,4746 | 35,3858 | 34,3356 |
| 36 | 67,9850 | 64,4097 | 61,5811 | 58,6192 | 54,4373 | 50,9985 | 47,2122 | 44,7641 | 42,8788 | 41,3036 | 39,9220 | 38,6693 | 37,5049 | 36,4008 | 35,3356 |
| 37 | 69,3476 | 65,7384 | 62,8832 | 59,8926 | 55,6680 | 52,1923 | 48,3634 | 45,8864 | 43,9782 | 42,3833 | 40,9839 | 39,7148 | 38,5348 | 37,4156 | 36,3355 |
| 38 | 70,7039 | 67,0628 | 64,1812 | 61,1620 | 56,8955 | 53,3835 | 49,5126 | 47,0072 | 45,0763 | 43,4619 | 42,0450 | 40,7597 | 39,5643 | 38,4302 | 37,3354 |
| 39 | 72,0550 | 68,3830 | 65,4753 | 62,4281 | 58,1201 | 54,5722 | 50,6598 | 48,1263 | 46,1730 | 44,5395 | 43,1053 | 41,8040 | 40,5935 | 39,4446 | 38,3354 |
| 40 | 73,4029 | 69,6987 | 66,7660 | 63,6908 | 59,3417 | 55,7585 | 51,8050 | 49,2438 | 47,2685 | 45,6160 | 44,1649 | 42,8477 | 41,6222 | 40,4589 | 39,3353 |
| 45 | 80,0776 | 76,2229 | 73,1660 | 69,9569 | 65,4101 | 61,6562 | 57,5053 | 54,8105 | 52,7288 | 50,9849 | 49,4517 | 48,0584 | 46,7607 | 45,5274 | 44,3351 |
| 50 | 86,6603 | 82,6637 | 79,4898 | 76,1538 | 71,4202 | 67,5048 | 63,1671 | 60,3460 | 58,1638 | 56,3336 | 54,7228 | 53,2576 | 51,8916 | 50,5923 | 49,3349 |
| 55 | 93,1671 | 89,0344 | 85,7491 | 82,2920 | 77,3804 | 73,3115 | 68,7962 | 65,8550 | 63,5772 | 61,6650 | 59,9804 | 58,4469 | 57,0160 | 55,6539 | 54,3348 |
| 60 | 99,6078 | 95,3443 | 91,9518 | 88,3794 | 83,2977 | 79,0820 | 74,3970 | 71,3411 | 68,9721 | 66,9815 | 65,2265 | 63,6277 | 62,1348 | 60,7128 | 59,3347 |
| 70 | 112,3167 | 107,8079 | 104,2148 | 100,4251 | 95,0231 | 90,5313 | 85,5270 | 82,2553 | 79,7147 | 77,5766 | 75,6893 | 73,9677 | 72,3583 | 70,8236 | 69,3345 |
| 80 | 124,8389 | 120,1018 | 116,3209 | 112,3288 | 106,6285 | 101,8795 | 96,5782 | 93,1058 | 90,4053 | 88,1303 | 86,1197 | 84,2840 | 82,5663 | 80,9266 | 79,3343 |
| 90 | 137,2082 | 132,2554 | 128,2987 | 124,1162 | 118,1359 | 113,1452 | 107,5650 | 103,9040 | 101,0537 | 98,6499 | 96,5238 | 94,5809 | 92,7614 | 91,0234 | 89,3342 |
| 100 | 149,4488 | 144,2925 | 140,1697 | 135,8069 | 129,5613 | 124,3421 | 118,4980 | 114,6588 | 111,6667 | 109,1412 | 106,9058 | 104,8615 | 102,9459 | 101,1149 | 99,3341 |
| 120 | 173,6184 | 168,0814 | 163,6485 | 158,9500 | 152,2113 | 146,5673 | 140,2326 | 136,0620 | 132,8063 | 130,0546 | 127,6159 | 125,3833 | 123,2890 | 121,2850 | 119,3340 |

**Anexo C: Logros de aprendizaje de los estudiantes.**

# Variables separables

- Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad\qquad y(0) = 2$$

**Observación**

la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, claro esta que en este caso $y(0) = 2$, es decir la forma en la que la ecuación, debe ser tratadas algebraicamente para poder generalizarla.

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Multiplicando a los dos miembros de la ecuación de $dx$ y simplificando se obtendrá.

$$y\ dy = x\ dx$$

Aplicando integrales queda de la forma:

$$\int ydy = \int xdx.$$

Y da como resultado:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k_1$$

$$y^2 = x^2 + 2k_1$$

Donde $2k_1 = k$, la suma de constantes va a dar otra constante como resultado.

$$y = \sqrt{x^2 + k}$$

Esta sería la solución general, que refleja una familia de parábolas, pero al existir la condición auxiliar $y(0) = 2$, nos sa:

$$2 = 0 + k$$
$$k = 2$$

Y la solución es la función:

$$y = x + 2$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, en el campo de la estadística.

► La razón de crecimiento del volumen de ventas $y$ a medida que el precio $x$ decrece, es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia entre el precio $x$ y una constante $b$. Halle la relación entre el volumen de ventas $y$ y el precio $x$, es decir la relación general.

**Formulación matemática**

Primero intercambiamos los términos de $x$ y $y$ de cada lado con su respectivo diferencial.

$$\tfrac{dy}{y} = \tfrac{-a}{(x-b)}dx$$

$$\int \tfrac{dy}{y} = -a \int \tfrac{dx}{(x-b)}$$

$$ln|y| = -a\ ln|x-b| + C$$

$$ln|y| + a\ ln|x-b| = C$$

$$y(x-b)_a = e^c$$

$$y = \tfrac{c_1}{(x-b)_a}$$

Para comprobar la ecuación simplemente hay que volverla a derivar y si nos queda el resultado original nuestro resultado es correcto:

$$\tfrac{dy}{dx} = c_1(-a)(x-b) - a - 1$$

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{-ac_1}{(x-b)a}$$

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{-ay}{(x-b)}$$

Nuestra ecuación ya está acomodada de tal forma que satisface las condiciones planteadas de nuestro problema, sobra decir que solo hay que sustituir las variables de nuestro problema para obtener los resultados requeridos.

**Abstracción**

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir a la forma general $f(y)dy = f(x)dx$.

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son de variables separables cuando a través de operaciones algebraicas se la puede representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$.

- Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 0 \qquad\qquad y(0) = 3$$

**Observación**

La ecuación $\frac{dy}{dx} = -4xy$, se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, claro esta que en este caso $y(0) = 3$, es decir la forma en la que se da la ecuación, debe ser tratada algebraicamente para poder generalizada.

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -4xy$$

Multiplicando a los dos miembros de la ecuación por $dx$, y simplificando se obtendrá:

$$dy = -4xy\ dx$$

Aplicando integrales queda de la forma:

$$\int dy = \int -4xy\ dx$$

Procedemos a integrar ambos lados y tendremos como resultado:

$$y = -2x^2y + k$$

Esta sería la solución general, que refleja una familia de parábolas, pero al existir la condición auxiliar $y(0) = 3$, nos queda.

$$3 = 0 + k$$
$$k = 3$$

Y finalmente la solución de la función será:

$$y = -2x^2y + 3$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, en el campo de la física.

► Si la vida media de una sustancia reactiva es de 32, días. Determinemos el tiempo $t$, en que 24, kilos se convierte en 3, kilómetros.

**Formulación matemática**

Tenemos:

$$x(0) = 24 \text{ y } \ 32 = T = \frac{ln(2)}{k} \qquad\qquad \Longrightarrow k = \frac{ln(2)}{32}$$

Entonces debemos tener:

$$3 = x(t) = 24e^{-kt} \qquad \Longrightarrow \frac{1}{8} = e^{-kt} \qquad \Longrightarrow kt = ln|8|)$$

Lo que implica:

$$t = \frac{3ln|2|}{k} = 3{,}32 = 96 \text{ Días.}$$

**Abstracción**

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir ala forma general $f(y)dy = f(x)dx$.

**Generalización**

La ecuación diferencial ordinaria sin de variables separables cuando a través de operaciones algebraicas se la pueda representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$.

- Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - e^{2x} = 0 \qquad y(0) = \frac{5}{2}$$

**Observación**

la ecuación $\frac{dy}{dx} - e^{2x} = 0$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, en este caso $y(0) = \frac{5}{2}$, es decir la forma en que la ecuación, debe ser tratadas algebraicamente para poder generalizarla.

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} - e^{2x} = 0$$

Despejamos $e^{2x}$ y multiplicamos ambos miembros por $dx$ así obtendremos:

$$dy = e^{2x}dx$$

A continuación integramos a cada lado:

$$\int dy = \int e^{2x}dx$$

Así la familia de soluciones será la siguiente, sin olvidar de añadir la constante $c$.

$$y = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

Ahora consideramos la condición inicial $y(0) = \frac{5}{2}$, e interpretamos que $y = \frac{5}{2}$ cuando $x = 0$, y al reemplazar valores tendremos.

$$\frac{5}{2} = \frac{e^{0}}{2} + c$$

De donde el valor de $c$ es el siguiente:

$$c = 2$$

Entonces la solución particular quedará dado de la siguiente forma:

$$y = \frac{e^{2x}}{2} + 2$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, aplicado en un problema de desintegración radiactiva.

▶ Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas su masa disminuyo en un 3 %. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Determinar la cantidad que queda después de 24 horas.

**Formulación matemática**

Inicialmente tenemos 100 $mg$ de sustancia radiactiva. Si $C_{(t)}$ denota la cantidad de sustancia radiactiva en el instante $t$, sabemos que al cabo de $t = 6h$ queda:

$$C(6) = 100 - 3$$
$$C(6) = 97\ gr$$

De esta sustancia, la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, esto queda de la siguiente forma:

$$\frac{dc}{dt} = kC$$

Multiplicamos ambos términos por $dt$ y dividimos para $c$ quedando de esta forma:

$$\frac{dc}{c} = kdt$$

Ahora procedemos a integral ambos miembros:

$$\int \frac{dc}{c} = \int kdt$$

Resolviendo la integración tendremos lo siguiente:

$$ln(c) = kt$$

Como $c$ está dentro de un $ln$ realizaremos el siguiente despeje:

$$c = e^{kt}$$

Siendo $k$ la constante de proporcionalidad, como se ve en el desarrollo teórico, tal ecuación admite por solución:

$$C(t) = Ae^{kt}$$

Donde $A$ y $k$ son constantes a determinar.

Puesto que en el instante inicial $t = 0$ contamos con 100 $mg$ de sustancia $A$ tendrá el siguiente valor.

$$C(0) = Ae^0 = 100 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 100$$

En el instante $t = 6$ quedan 97 $gr$ luego:

$$C(6) = 100e^{6k} = 97$$

$$e^{6k} = \frac{97}{100}$$

$$6k = ln(\frac{97}{100})$$

$$k = \frac{1}{6}ln(\frac{97}{100})$$

En conclusión, la cantidad de sustancia radiactiva en el instante $t$ es:

$$C(t) = 100e^{\frac{1}{6}ln(\frac{97}{100})}$$

Por lo tanto, la cantidad remanente transcurridas 24 horas es:

$$C(24) = 100e^{\frac{1}{6}ln(\frac{97}{100})}$$

$$C(24) = 100e^{-0.12}$$

$$C(24) = 88.55\ mg$$

**Abstracción**

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir a la forma general $f(y)dy = f(x)dx$.

**Generalización**

La ecuación diferencial ordinaria sin de variables separables cuando a través de operaciones algebraicas se la pueda representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$.

## Homogéneas

- Resolver la ecuación diferencial:

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

**Observación**

La ecuación $(x+y)dx + xdy = 0$ puede ser generalizada como una ecuación diferencial de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

Al proponer el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ y $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, una ecuación homogénea se reduce a una ecuación separable.

Entonces se tiene la ecuación $(x+y)dx + xdy = 0$ dada que es homogénea de primer grado. Con base al teorema anterior, reescribimos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x} \qquad \text{resolvemos para } \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+\frac{y}{x})}{x} = -(1+\frac{y}{x}) \qquad \text{factorizamos } x.$$

Al proponer $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ y $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ Sustituimos:

$$u + x\frac{du}{dx} = -(u-1)$$

Separamos e integramos.

$$-\int \frac{du}{2u+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Agregamos constante de integración $-\frac{1}{2}ln(c)$.

$$-\frac{1}{2}ln(2u+1) = ln(x) - \frac{1}{2}ln(c)$$

Multiplicamos ambos miembros por $-2$.

$$ln(2u+1) = -2ln(x) + ln(c)$$

Ahora por propiedades de logaritmos se obtendrá lo siguiente:

$$ln\ x^2\ (2u+1) = ln(c)$$

Tomamos exponencial y sustituimos $u = \frac{y}{x}$.

$$x^2(2\frac{y}{x}+1) = c$$

Por último simplificamos y obtendremos el resultado final siguiente:

$$2xy + x^2 = c$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones homogéneas de la forma $a_n(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)y(x) = 0$, aplicado en trayectorias ortogonales.

► Aplicando ecuaciones diferenciales ordinarias encuentre las diferentes trayectorias ortogonales que produce la siguiente función.

$$x^2 + y^2 = cx$$

**Formulación matemática**

Hay dos maneras de determinar la ecuación diferencial de la familia.

Primera manera. De la ecuación inicial despejamos $c$ entonces tendremos.

$$c = \frac{(x^2+y^2)}{x}$$

Ahora pues derivando ambos lados con respecto a $x$, tenemos:

$$\frac{x(2x+2yy')-(x^2+y^2)(1)}{x^2} = 0$$

De donde despejando $y'$ se obtiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

Segunda manera. Derivando $x^2 + y^2 = cx$ con respecto a $x$ encontramos.

$$2x + 2yy' = c$$

Eliminando centre la última la ecuación y dada, encontramos la ecuación como antes.

La familia de las trayectorias ortogonales tiene así la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Resultado una ecuación diferencial homogénea utilizando $y = ux$ se puede demostrar que:

$$x^2 + y^2 = c_1 y$$

**Abstracción**

En un curso de álgebra se aprende que si una función polimonial en dos variables tiene todos sus términos del mismo grado, entonces la función se denomina homogénea. Este concepto puede extenderse a cualquier tipo de función en dos variables, y nos permitirá resolver una ecuación diferencial que no puede ser separable.

**Generalización**

Entonces $z = f(x,y)$ se denomina homogénea de grado $n$ si satisface $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para alguna $n \ni \mathbb{R}$.

- Resolver la ecuación diferencial con valor inicial:

$$y(ln(y^2) - ln(x^2) + 1)dx - xdy = 0 \qquad\qquad y(1) = e^{\pi}$$

**Observación**

La ecuación $y(ln(y^2) - ln(x^2) + 1)dx - xdy = 0$ se puede generalizar como una ecuación diferencial homogénea de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, en este caso $y(1) = e^{\pi}$, es decir la ecuación diferencial, debe ser tratada algebraicamente para poder generalizarla.

**Experimentación**

Se verifica que la ecuación dada es homogénea de grado 1. En base al teorema anterior podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma, resolviendo para $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(2ln(\frac{y}{x} + 1))$$

Al proponer $u = \frac{y}{x}$, y $y = ux$ y $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ sustituimos y tendremos.

$$u + x\frac{du}{dx} = u(2ln(u + 1))$$

Separamos e integramos por cambio de variables.

$$\int \frac{du}{2uln(u)} = \int \frac{dx}{x}$$

Agregamos constante $\frac{1}{2}ln(c)$

$$\frac{1}{2}ln.ln(u) = ln(x) + \frac{1}{2}ln(c)$$

Aplicando propiedades de logaritmos se tendrá.

$$ln(u) = cx^2$$

Al sustituir $u = \frac{y}{x}$.

$$ln(\frac{y}{x} = cx^2)$$

Finalmente evaluamos en las condiciones $y(1) = e^{\pi}$, tenemos.

$$ln(\frac{e^{\pi}}{1}) = c(1)^2$$

$$c = \pi \qquad\qquad \text{Simplificando.}$$

$$y = xe^{\pi x^2} \qquad\qquad \text{Familia de soluciones.}$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones homogéneas de la forma $a_n(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)y(x) = 0$, aplicado al campo de la Química.

► En una solución hay $16gr$ de un químico 45 minutos después hay $25gr$ del químico.Si la tasa de incremento es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo que a estado en la solución.

A ¿Cuántos gr hay en 2 horas?

B Calcule el tiempo en horas y en minutos en que habrá 100 $gr$.

**Formulación matemática**

Sea $x$ la variación de los $gr$ respecto a $t$ tendremos la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{t}$$

Multiplicamos ambos lados por $dx$.

$$dx = k\sqrt{t}dt$$

Luego integramos ambos miembros:

$$\int dx = \int k\sqrt{t}dt$$
$$x = k\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

Finalmente tendremos esta ecuación.

$$x = \frac{2k}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$$

Ahora reemplazaremos con los datos que nos da el ejercicio $t = 0$,y $x = 16$ $gr$ lo cual implica:

$$16 = \frac{2k}{3}(o)^{\frac{3}{3}} + c$$
$$c = 16$$

Luego utilizamos $t = \frac{3}{4}$, y $x = 25$.

$$25 = \frac{2k}{3}.\frac{3^{\frac{3}{2}}}{4} + 16$$

despejamos $k$ de manera que:

$$\frac{25-16}{(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{3}$$
$$9\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2k}{3}$$
$$k = 12\sqrt{3}$$

Finalmente reescribimos la ecuación:

$$x = 8\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}} + 16$$

Entonces la primera parte dice. ¿Cuántos gramos habrá en 2 horas?

$$x = 8\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}} + 16$$

$x = 55.16$ $gr$ entonces en 2 horas habrá $x = 55.16$ $gr$.

La segunda parte. Calcule el tiempo en horas y minutos, en que habrá 100 $gr$.

$$x = 8\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}} + 16$$

$$100 = 8\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}} + 16$$ Despejamos $t$. y tendremos:

$$\frac{100-16}{8\sqrt{3}} = t^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{21}{2\sqrt{3}} = t^{\frac{3}{2}}$$

$$t = 3.32$$

De tal manera habrá 100 $gr$ en 3 horas, 19 minutos, y 12 segundos.

**Abstracción**

En un curso de álgebra se aprende que si una función polimonial en dos variables tiene todos sus términos del mismo grado, entonces la función se denomina homogénea. Este concepto puede extenderse a cualquier tipo de función en dos variables, y nos permitirá resolver una ecuación diferencial que no puede ser separable.

**Generalización**

Una función polinomial en dos variables $p(x, y)$ es homogénea de grado $n$ si todos sus términos son del mismo grado.

- Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

**Observación**

La ecuación $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ puede ser generalizada como una ecuación diferencial de segundo grado de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

Al proponer el cambio de variable $dy = udx + xdu$, $y = ux$ en la ecuación $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$tenemos.

Sustituimos $y = ux$,$dy = udx + xdu$

$$(x^2 + (ux)^2)dx - x(ux)(udx + xdu) = 0$$

Factorizamos $x^2$.

$$x^2(1 + u^2)dx - x^2u(udx + xdu) = 0$$

Cancelamos $x^2$ y agrupamos.

$$(\frac{(1+u^2)}{u} - u)dx - xdu = 0$$

Separamos e integramos.

$$\int \frac{1}{x}dx - \int udu = 0$$

Agregamos la constante $\frac{1}{2}ln(c)$.

$$ln(x) - \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}ln(c)$$

Sustituimos $u = \frac{y}{x}$

$$ln(x^2) - (\frac{y}{x})^2 = ln(c)$$

Familia de soluciones.

$$x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} = c$$

**Comparación**

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de las ecuaciones homogéneas de la forma $a_n(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)y(x) = 0$, este en particular de un problema de mezclas.

► Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se ha disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal que da en cada instante. ¿Se vaciará totalmente el tanque?

**Formulación matemática**

Conforme a la notación utilizada en ecuaciones homogéneas el problema arrojará los siguientes datos.

$$A = 20kg \qquad a = \frac{1}{L}kg$$

$$v_0 = 100L \qquad v_1 = \frac{7L}{min} \qquad v_2 = \frac{8L}{min}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante viene dada por:

$$y'(t) + \frac{8}{100+(7-8)t}y(t) = 7.1$$

Operando algebraicamente se obtiene:

$$y'(t) + \frac{8}{100-t}y(t) = 7$$

La ecuación anterior admite como factor integrante:

$$e^{\int \frac{8}{100-t}dt} = e^{-8\int \frac{-1}{100-t}dt} = e^{-8ln(100-t)} = e^{ln(100-t)^{-8}} = \frac{1}{(100-t)^8}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante:

$$\frac{1}{(100-t)^8}y'(t) + \frac{8}{(100-t)^9}y(t) = \frac{7}{(100-t)^8}$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{(100-t)^8}y(t)] = \frac{7}{(100-t)^8}$$

Si integramos la expresión anterior tendremos.

$$\frac{1}{(100-t)^8}y(t) = \int \frac{7}{(100-t)^8}dt$$

$$(-7)\int \frac{-1}{(100-t)^8}dt$$

$$\frac{1}{(100-t)^7} + c$$

De modo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = (100-t) + (100-t)^8 c$$

$$(100-t) + 100^8(1-\frac{t}{100})^8 c$$

Para hallar $c$ tenemos en cuenta que la concentración inicial es $A = 20$:

$$A = y(0) = 20 \quad \Rightarrow \; 20 = 100 + 100^8 c \; \Rightarrow \; 100^8 c = -80$$

En conclusión, la cantidad de sal presente en el tanque en cada instante es:

$$y(t) = (100-t) - 80(1-\frac{t}{100})^8$$

Para averiguar si el tanque se vaciará totalmente, determinaremos el tiempo en que la concentración se anula, esto es:

$$y(t) = 0 \quad (100-t) - 80(1-\frac{t}{100})^8 = 0 \Rightarrow \; (100-t)[1-80\frac{(100-t)^7}{100^8}] = 0$$

Entonces la ecuación anterior admite dos soluciones:

$$100 - t = 0 \;\Rightarrow\; t = 100\text{min.}$$

$$1 - 80\frac{(100-t)^7}{100^8} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{100^8}{80} = (100-t)^7$$

$$\sqrt[7]{\frac{100^8}{80}} = 100 - t \;\Rightarrow t = -3.23\text{min.}$$

La solución negativa carece de sentido en el contexto del problema. Por lo tanto, la concentración es cero para $t = 100$min, que es cuando se vaciará el tanque:
Nótese que aunque éste se vacíe siempre seguirá entrando agua salada, de manera que a partir del instante $t = 100$min la concentración de sal en cada instante será la de la mezcla entrante, a saber , $\frac{1kg}{L}$

**Abstracción**

Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se denomina una ecuación diferencial homogénea de grado $n$ si las funciones $M(x,y)$y$N(x,y)$son ambas funciones homogéneas de grado $n$.

**Generalización**

Una función polinomial en dos variables $p(x, y)$ es homogénea de grado $n$ si todos sus términos son del mismo grado.

# Exactas

- Resolver la ecuación diferencial:

$$8xy^3dx + 12x^2y^2dy = 0$$

**Observación**

La ecuación $8xy^3dx+12x^2y^2dy = 0$ puede ser generalizada como una ecuación diferencial exacta de la forma $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$, como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

Dado que $\frac{d}{dy}(8xy^3) = 24xy^2$y que $\frac{d}{dx}(12x^2y^2) = 24xy^2$, concluimos que la ecuación diferencial en cuestión es exacta.

Des esta manera, y con base en la demostración del teorema $I$ de esta sección, tenemos

$$\frac{df}{dx} = 8xy^3$$

$$df = 8xy^3dx$$

Integramos parcialmente con respecto a $x$.

$$\int df = \int 8xy^3dx$$

Agregamos una constante $c_1(y)$

$$f = 4x^2y^3 + c_1(y)$$

Continuando con el procedimiento, dado que la integral anterior se realizó respecto a la variable $x$, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable $y$:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(4x^2y^2 + c_1(y)$$

$$\frac{df}{dy} = 12x^2y^2 + c_1'(y)$$

Derivamos respecto a $y$.

$$\frac{df}{dy} = 12x^2y^2 + c_1'(y) = 12x^2y^2$$

Despejamos $c_1'(y)$ de donde tendremos lo siguiente:

$$c_1'(y) = 0$$

De esta manera, al integrar respecto a $y$, tenemos $c_1 = c_0$, por lo que la familia de soluciones buscada es $f = 4x^2y^3 + c_0$ =constante, es decir $4x^2y^3 = c$.

**Comparación**

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de ecuaciones diferenciales exactas de la forma,$M(x, y)dx+$

$N(x,y)dy$ enfocándose básicamente a un problema de temperatura.

► Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20°C$, se deja caer desde un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los $90°C$, si se sabe que su temperatura aumentó $2°C$ en un segundo ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los $98°C$?.

**Formulación matemática**

La Ley de Newton expresa que la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente. La ecuación diferencial que modela dicho fenómeno es $T'(t) = K[T(t) - T_a]$, cuya solución general es.

$$T(t) = T_a + Ce^{kt}$$

La temperatura ambiente en este caso es $T_a = 100$,mientras que la temperatura inicial es $T(0) = 20$. Por tanto.

$$T(0) = 100 + Ce^{k0}$$

$$100 + C = 20$$

$$C = -80$$

Como la temperatura aumentó $2°C$ en 1 segundo encontramos que $T(1) = 22$. Así:

$$T(1) = 100 - 80e^{k} = 22$$

$$78 = 80e^{k}$$

$$k = ln(\tfrac{78}{80})$$

Por tanto, la temperatura en cualquier instante $t$ es:

$$T(t) = 100 - 80e^{tln(\frac{78}{80})}$$

Para calcular el tiempo que tarda la barra en alcanzar $90°C$ resolvemos la ecuación $T(t) = 90$:

$$100 - 80e^{tln(\frac{78}{80})} = 90$$

$$10 = 80e^{tln(\frac{78}{80})}$$

$$\tfrac{1}{8} = e^{tln(\frac{78}{80})}$$

$$t = \frac{ln(\frac{1}{8})}{ln(\frac{78}{80})} = 82.1\text{s}.$$

Similar, para calcular el tiempo que tarda en alcanzar $98°C$ resolvemos la ecuación $T(t) = 98$:

$$100-80e^{tln(\frac{78}{80})}=98$$

$$2=80e^{tln(\frac{78}{80})}$$

$$\frac{1}{40}=e^{tln(\frac{78}{80})}$$

$$t=\frac{ln(\frac{1}{40})}{ln(\frac{78}{80})}=145.7\text{s.}$$

**Abstracción**

Una ecuación diferencial ordinaria es exacta solo cuando se puede reducir ala forma general $M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son exactas cuando a través de operaciones algebraicas se a puede representar de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

- Resolver la ecuación diferencial con valor inicial:

$$(2x+\frac{y}{x})dx+(4y+ln(x))dy=0 \qquad\qquad y(1)=2$$

**Observación**

La ecuación $(2x+\frac{y}{x})dx+(4y+ln(x))dy=0$ puede ser generalizada como una ecuación diferencial exacta de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, ademas tenemos la condición para $y(1)=2$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

Como $\frac{d}{dy}(2x+\frac{y}{x})=\frac{1}{x}$ y además $\frac{d}{dx}(4y+ln(x))=\frac{1}{x}$, concluimos que la ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta, entonces su resolución quedará descrito como.

$$\frac{df}{dx}=2x+\frac{y}{x}$$

Resolvemos para $df$.

$$df=(2x+\frac{y}{x})dx$$

Integramos parcialmente respecto a $x$.

$$\int df=\int(2x+\frac{y}{x})dx$$

Agregamos la constante $c_1(y)$.

$$f=x^3+yln(x)+c_1(y)$$

Como la integral anterior se realizó con respecto a la variable $x$, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable $y$.

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2 + yln(x) + c_1(y))$$

$$\frac{df}{dy} = ln(x) + c_1(y))$$

$$c_1(y)) = 4y$$

$$c_1(y)) = 2y^2$$

Por lo que la familia de soluciones buscada es $x^2 + yln(x) + 2y^2 = c$. Al evaluar la condición $y(1) = 2$, tenemos $c = (1)^2 + (2)ln(1) + 2(2)^2 = 9$, de manera que la solución particular al problema de valor inicial es $x^2 + yln(x) + 2y^2 = 9$.

**Comparación**

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de ecuaciones diferenciales exactas de la forma,$M(x, y)dx+ N(x, y)dy$ este en particular es de la ley de enfriamiento de Newton.

► Si servimos una taza de café a una temperatura de $95°C$ y al minuto está en $85°C$ y suponiendo que la habitación está a $20°C$ ¿Cuándo podremos tomar el café si la temperatura idónea para tomarlo es de $65°C$?

**Fórmula matemática**

Para responder a esta pregunta, basta con resolver el problema de condiciones iniciales

$$y' = k(20 - y)$$
$$y(0) = 95$$

Obtenemos la solución de la ecuación diferencial, que es de variables separadas calculando:

$$\int \frac{y'(t)}{20-y(t)} dt = \int k\ dt$$

Que nos proporciona la solución:

$$y(t) = Ce^{-kt} + 20$$

Donde $k$ K es una constante proveniente de la integración. Imponiendo ahora que $y(0) = 95$ calculamos dicha constante resolviendo la ecuación.

$$95 = y(0) = c + 20$$

Con lo que $c = 75$Por otra parte, como al minuto de haber servido el café la temperatura de éste había descendido hasta los $85°C$ tenemos que:

$$85 = y(1) = 75e^{-k} + 20$$

Que permite obtener el valor de la constante $k = log(\frac{13}{15})$ la función.

$$y(t) = 75e^{tlog(\frac{13}{15})} + 20$$

Define entonces la evolución de la temperatura de la taza de café con el tiempo. Para averiguar el momento en el cual la temperatura de dicha taza es de $65°C$ basta resolver la ecuación:

$$65 = 75e^{tlog(\frac{13}{15})} + 20$$

Que da la solución:

$$t = \frac{log(\frac{9}{15})}{log(\frac{13}{15})}$$

$$t = 3.57 \text{ minutos.}$$

Es decir, aproximadamente unos tres minutos y medio después de haber servido el café.

**Abstracción**

La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y) = 0$ es exactas si existe una función $z = f(x,y)$ tal que $dz = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

**Generalización**

Se dice que la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ es exacta si la expresión $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es diferencial total de alguna función $z = f(x,y)$.

- Resolver la ecuación diferencial con valor inicial:

$$(3x^2y^2 + cos(y) + x)dx + (2x^3y - xsen(y) + y)dy = 0 \qquad\qquad y(1) = 0$$

**Observación**

La ecuación $(3x^2y^2+cos(y)+x)dx+(2x^3y-xsen(y)+y)dy = 0$ puede ser generalizada como una ecuación diferencial exacta de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy$, ademas tenemos la condición para $y(1) = 0$, por lo tanto a través de procesos algebráicos se obtendrá lo siguiente.

**Experimentación**

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(3x^2y^2 + cos(y) + x) = 6x^2y - sen(y)$ y además $\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - xsen(y) + y) = 6x^2y - sen(y,$ concluimos que la ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta, entonces su resolución quedará descrito como.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + cos(y) + x$$

Integramos parcialmente respecto a $x$.

$$\int \partial f = \int (3x^2y^2 + cos(y)\partial x$$

Agragamos finalmente una constante $c_1(y)$.

$$f = x^3y^2 + xcos(y) + \frac{1}{2}x^2 + c_1(y)$$

Como la integral anterior se realizó con respecto a la variable $x$, derivamos esta última expresión obtenida respecto a la variable $y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + xcos(y) + \frac{1}{2}x^2 + c_1(y))$$

Derivamos con respecto a $y$ y obtendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - xsen(y) + c_1'(y)$$

Igualamos $\frac{df}{dx} = 2x^3y - xsen(y) + y$.

$$c_1'(y) = y$$

$$c_1(y) = \frac{1}{2}y^2$$

Por lo tanto que la familia de soluciones buscada es $x^3y^2 + xcos(y) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$. Al evaluar la condición $y(1) = 0$, tenemos $c = \frac{3}{2}$, de manera que la solución particular al problema de valor inicial es $2x^3y^2 + 2xcos(y) + x^2 + y^2 = 3$.

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra un aplicación de ecuaciones diferenciales exactas de la forma $M(x, y)dx+$ $N(x, y)dy$ este en particular aplicada a la biología.

► Las ecuaciones Exactas por su facilidad en cuanto a seguir una regla matemática pueden ser usadas para obtener ecuaciones generales de crecimiento de tasa, por ejemplo, esto lo podemos aplicar en biología para medir la tasa de crecimiento en determinada población mediante la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dt} = y$$

Con solución:

$$y = ce$$

Donde c es una constante arbitraria. De esto vemos que el crecimiento ocurre si $> 0$ mientras que el decaimiento (o encogimiento) ocurre sí $< 0$.

Supongamos que $'y'$ denota la altura de un ser humano (aunque como ya se ha mencionado. tenemos entonces que:

$$\frac{dy}{dx} = F(y)y$$

$$Y_0 \text{ para } t = 0$$

Donde $Y_0$ representa la altura en algún tiempo especificado $t = 0$, y donde $F$ es una función apropiada pero aun desconocida. Puesto que la función lineal $F(y) = y$ y no es apropiada, ensayemos como una aproximación de orden superior dada por la función cuadrática $F(y) = y - y^2$, $y = Y_0$, para $t = 0$. Puesto que la ecuación $F(y) = y - y^2$ es de variables separables, tenemos:

$$\frac{dy}{y-y^2} = dt$$

$$\frac{1}{[\frac{1}{y} + \frac{1}{-y}} = t + c$$

$$\frac{1}{[ln(y)-ln(-y)]} = t + c$$

Usando la condición y resolviendo en $y = Y_o$ en $t = 0$ se obtiene que:

$$1 + \frac{a}{Y_0 - 1} e$$

Si tomamos el limite de la ecuación anterior tenemos que: Cuando $t!$, vemos ya que $> 0$ que:

$$Xmax = lim(Y)$$

**Abstracción**

Se dice que la función $u(x, y)$ es factor integrante de la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ si tiene la propiedad de que la ecuación diferencial $u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$ sea exacta:

**Generalización**

Se dice que la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si la expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es diferencial total de alguna función $z = f(x, y)$.

## Inexactas o Factor integrante

- Resolver la ecuación diferencial:

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

**Observación**

La ecuación $xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$ es no exacta. Identificando $M = xy$,$N = 2x^2 + 3y^2 - 20$ encontramos que las derivadas parciales son $M_y = xy$ y $N_x = 4x$ nuestro objetivo es llegar a $f(y)dy = f(x)dx$,y como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

El primer coeficiente de la ecuación, no nos conduce a nada ya que:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x + 3y^2 - 20}$$

Depende de $x$ y de $y$. Sin embargo, la ecuación produce un coeficiente que depende solo de $y$.

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$$

El factor integrante es entonces $e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3ln(y)} = e^{(3ln(y))^3} = y^3$. Después de multiplicar la E.D. dada por $u(y) = y^3$, la ecuación resultante es:

$$xy^4dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)dy = 0$$

Usted debería comprobar que la última ecuación es ahora exacta así como mostrar, usando el método que se presentó en esta sección, que una familia de soluciones es

$$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de ecuaciones por medio de factor integrante $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}}$ para llegar a la forma $u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$, la cual ya es una ecuación exacta, enfocado a variación de temperatura.

► Supongamos una mañana de sábado caluroso que en una tienda, mientras las personas están trabajando el aire acondicionado mantiene la temperatura de la tienda a $20°C$ A medio día se apaga el aparato de aire acondicionado y la gente se va a sus casas. La temperatura exterior permanece constante a $35°C$ Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas. ¿Cuál será la temperatura del edificio a las 2 de la tarde?.¿En que momento la temperatura en el interior será de $27°C$?.

**Formulación matemática**

En primer lugar se plantea la ecuación diferencial:

$$T'(t) = \frac{1}{4}(35 - T(t))$$

Dado que $H(t) = U(t) = 0$,junto con la condición inicial $T(0) = 20$ que se corresponde con la temperatura al mediodía. La solución de la ecuación diferencial será:

$$T(t) = ce^{-\frac{t}{4}} + 35$$

Y con la condición inicial obtenemos c que nos proporciona la solución:

$$T(t) = -15e^{-\frac{t}{4}+35}$$

Así a las dos de la tarde la temperatura será de:

$$T(2) = \frac{-15}{\sqrt{e}} + 35 = 225.9°C$$

El momento $t_0$ en que la temperatura será de $27°C$ se obtendrá al resolver la ecuación:

$$27 = -15ee^{\frac{-t_o}{4}} + 35$$

Que nos da:

$$t_0 = -4log(\tfrac{8}{15}) = 2.51 \text{ horas.}$$

Es decir, aproximadamente a la 2 horas y media.

**Abstracción**

Si una ecuación diferencial no es exacta, podría llegar a serlo si se multiplica por una función especial $u(x, y)$ llamada factor integrante, tal que: $u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$ sea exacta.

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales son inexactas cuando a través de de un factor integrante $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ llegamos a una ecuación exacta de la forma $u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$.

- Resolver la ecuación diferencial:

$$(3xy + 2cos(y))dx + (x^2 - xsen(y)dy = 0)$$

**Observación**

Dado que $\frac{\partial}{\partial y}(3xy + 2cos(y)) = 3x - 2sen(y)$ y $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xsen(y)) = 2x - sen(y)$, se encuentra que la ecuación no es exacta.Así que por medio de un factor integrante $u(x, y)$ nuestro objetivo es llegar a $f(y)dy = f(x)dx$,y como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente de la siguiente manera.

**Experimentación**

Al considerar $M(x, y) = 3xy + 2cos(y)$ y $N(x, y) = x^2 - xsen(y)$ se, tiene $M_y(x, y) = 3x - 2sen(y)$ y $N_x(x, y) = 2x - sen(y)$,tenemos:

$$u(y) = e^{\int \frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{M(x,y)}dy}$$

$$e^{\int \frac{2x-sen(y=-(3x-2sen(y))}{3xy+2cos(y)}dy}$$

$$e^{\int \frac{sen(y)-x}{3xy+2cos(y)}dy}$$

Podemos observar que la expresión anterior no está bien definida, dado que el factor integrante no depende únicamente de la variable $y$, de manera que:

$$u(x) = e^{\int \frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)}}$$

$$e^{\int \frac{3x-2sen(y)-(2x-sen(y))}{x^2-xsen(y)}dx}$$

$$e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

Se verifica que el factor integrante solo depende de $x$, de manera que la aplicación del caso 1 en esta ecuación es correcta luego:

$$(3xy + 2cos(y))dx + (x^2 - xsen(y))dy = 0$$

Multiplicamos por $u(x) = x$ y tenemos.

$$(3x^2y + 2xcos(y))dx + (x^3 - x^2sen(y))dy = 0$$

Donde $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2xcos(y)) = \frac{\partial}{\partial x} = 3x^2 - 2xsen(y)$, es decir la ecuación obtenida es exacta. Luego al considerar $(3x^2y + 2xcos(y))dx + (x^3 - x^2sen(y))dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x^2y + 2xcos(y))$$

Integramos con respecto a $x$.

$$\int \partial f = \int (3x^2y + 2xcos(y))dx$$

Agregamos una constante $c_1(y)$

$$f = x^3 + x^2cos(y) + c_1(y)$$

Derivamos con respecto a $y$ y obtenemos.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^3 - x^2sen(y) + c_1')$$

Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x^2sen(y)$

$$x^3 - x^2sen(y) + c_1'(y) = x^3 - x^2sen(y)$$

Resolvemos para $c_1'(y)$.

$$c_1'(y) = 0$$

Por lo que la familia de soluciones buscadas es $x^3y + x^2cos(y) = c$.

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de ecuaciones diferenciales con factor de integración para llegar a una ecuación diferencial exacta de la forma $u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0$, este en particular aplicado al crecimiento poblacional:

► El crecimiento de una ciudad, es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera. Si la población inicial es de 400000, y al cabo de 3 años es de 450000.¿Cuánto tardará en duplicarse?.¿Qué población habrá en 10 años?

**Formulación matemática**

Sea $P$ la proporcionalidad de variación del número de habitantes en un ciudad en un determinado tiempo entonces la ecuación diferencial queda dada de la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Donde $k$ es una constante. Y como se trata de un crecimiento poblacional la solución vendrá dado de la forma:

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

Donde la constante $k$, tiene que ser obligatoriamente positiva ya se está hablando de un crecimiento o incremento poblacional, caso contrario fuera negativo si se tratara de un decrecimiento.

Entonces se tienen los siguientes datos.

$$P_0 = 400000 \text{ habitantes.}$$

$$t = 3 \text{ años} \quad \Rightarrow \quad P = 450000 \text{ habitantes.}$$

$$t =? \quad \Rightarrow \quad P = 8000000$$

$$P =? \quad \Rightarrow \quad t = 10\text{años.}$$

Reemplazamos datos y despejamos el valor de $k$ como se muestra a continuación:

$$\frac{450000}{4000000} = e^{k(3)}$$

$$\frac{9}{8} = e^{k(3)}$$

Aplicamos $ln$ ambos lados y obtenemos:

$$ln(\frac{9}{8}) = ln(e^{3k})$$

$$ln(1.12) = 3k$$

$$k = \frac{ln(1.12)}{3}$$

$$k = 0.035$$

***Parte A*** La ecuación diferencial que describe el incremento poblacional, para este problema nos queda de la siguiente forma:

$$P(t) = 4000000e^{0.035t}$$

Así para doblar la cantidad de población la nueva ecuación quedará de la siguiente forma:

$$8000000 = 400000e^{0.035t}$$

Despejando $t$ y aplicando $ln$:

$$ln(2) = ln(e^{0.035t})$$

$$ln(2) = 0.035t$$

$$t = \frac{ln(2)}{0.035}$$

$t = 17.65$años es el tiempo que se requiere para doblar la población.

***Parte B*** Tenemos la ecuación solución que es:

$$P(t) = 400000e^{0.035t}$$

En donde en este caso $t = 10$ años que es el tiempo para el cual pide l ejercicio determinar cuanta población existe:

$$P(10) = 400000e^{0.035(10)}$$

$$P = 400000(1.48)$$

$P = 592330$ Habitantes es la población que alcanza al transcurrir 10 años

**Abstracción**

Si una ecuación diferencial no es exacta, podría llegar a serlo si se multiplica por una función especial $u(x,y)$ llamada factor integrante, tal que: $u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0$ sea exacta.

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales son inexactas cuando a través de de un factor integrante $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ llegamos a una ecuación exacta de la forma $u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0$.

- Resolver la ecuación diferencial:

$$(\frac{y}{x^2})dx + \frac{1}{x}(1 + ln(xy))dy = 0$$

**Observación**

Dado que $(\frac{y}{x^2})dx + \frac{1}{x}(1 + ln(xy))dy = 0$ ,es una ecuación no es exacta. Así por medio de un factor integrante $u(x,y)$ nuestro objetivo es llegar a $f(y)dy = f(x)dx$,y como no tenemos ninguna condición para $f(y)$, procedemos a resolver algebraicamente.

**Experimentación**

Tenemos que:

$$M(x,y) = \frac{y}{x^2+2} \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = \frac{1+ln(xy)}{x}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-ln(xy)}{x^2}$$

De modo que no es una ecuación diferencial exacta. Ahora veamos $M$ y $N$ Cumplen la condición de ecuación exacta.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{ln(xy)}{x^2}}{\frac{1+ln(xy)}{x}}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}$$

Como la función es exclusivamente función de $x$, y su factor integrante es:

$$u(x) = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$e^{ln(x)}$$

Multiplicando por $u(x)$ obtenemos la ecuación:

$$(\frac{y}{x} + 2x)dx + (1 + ln(xy))dy = 0$$

La cual es una ecuación diferencial exacta que tiene la siguiente solución, definida implícitamente en la ecuación:

$$yln(xy) + x^2 = c$$

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de ecuaciones diferenciales inexactas de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ a través de un factor integrante, para encontrar un incremento celular. En un laboratorio la cantidad de células madre en un cultivo crece a razón proporcional del tiempo $t$. Al cabo de 6 horas se observa que hay 400 células madre.¿Cúal es la cantidad de células a las 12 horas?

**Formulación matemática**

Entonces hablamos de un modelo matemático que interpreta el crecimiento población el cual viene expresado por:

$$\frac{dP}{Dt} = 0.3P$$

Donde $P$ es la población que varía de valor con respecto al tiempo $t$, despejando $\frac{dP}{p}$ entonces tenemos:

$$dP = 0.3Pdt$$

$$\frac{dP}{p} = 0.3dt$$

Integrando ambos miembros de la ecuación desde un $P_0$ hasta $P$ y desde $t = 0$ hasta un determinado tiempo $t$.

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{o}^{t} 0.3dt$$

$$ln(P) \int_{P_0}^{P} = 0{,}3t \int_{0}^{t}$$

Evaluando la integral en puntos iniciales y finales tenemos:

$$ln(p) - ln(p_0) = 0.3t$$

$$ln(\frac{p}{p_0}) = 0.3t$$

Aplicando teoría de exponentes:

$$e^{\frac{p}{p_0}} = e^{0.3t}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{0.3}$$

Despejando $P(t)$ y nos dará la solución del problema en función de una ecuación diferencial:

$$p(y) = e^{0.3t}$$

Reemplazando los datos $t = 6$horas y $P = 400$ y despejamos $P_0$:

$$400 = P_0 e^{0.3(6)}$$

$P0 = 66$ $\Rightarrow$ Valor aproximado de células madre al inicio.

Ahora bien el problema decía calcular la población cuando han transcurrido 12 horas entonces tendremos:

$$p(12) = 66e^{0.3(12)}$$

$p(12) = 2415$ $\Rightarrow$ La cantidad de células madre a las 12 horas es aproximadamente 2415

**Abstracción**

Si la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ no es exacta, pero existe una función $u(x, y)$ tal que al multiplicar por la función queda $u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy$ es exacta entonces $u(x, y)$es un factor de integración.

**Generalización**

La ecuaciones diferenciales inexactas necesitan de un factor integrante $u(x, y)$ que multiplique a $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ para así llegar a una ecuación exacta.

**Anexo D: MANUAL INSTRUCTIVO**

# Escuela Politécnica de Chimborazo

Instituto de Postgrado y Educación Continua

Maestría en Matemática Básica

Propuesta

---

## GUÍA DE EJERCICIOS PARA LOGRAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN UTILIZANDO EL MÉTODO INDUCTIVO.

---

Autor: Ing. Wilson Patricio Reyes Bedoya

2015

# Índice general

## Conceptualización de la ciencia motivo de este estudio

### ¿Qué es el Cálculo?

A finales del siglo diecisiete dos pensadores, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, ambos por separado desarrollaron la teoría de lo que hoy se conoce como calculo diferencial e integral.
El cálculo trata de entender el comportamiento de funciones, estas funciones no son mas que la representación de la variación de una variable que depende de la variación de otra.

### ¿Qué son las ecuaciones diferenciales ordinarias.?

Las ecuaciones diferenciales son parecidas a las ecuaciones entre variables que se aprenden en secundaria, con la diferencia que la incógnita no es un numero sino es una función.

### Selección de Problemas

Los siguientes ejercicios siguen la estructura que debe tener la resolución de los ejemplos propuestos en clase, siguiendo la estructura que el Método Inductivo propone.
Se debe tomar en cuenta que el desarrollo de cada uno de estos ejercicios de la forma en que se los propone, no se contrapone a que el docente utilice otras técnicas de motivación para interesar al estudiante en el tema tratado, mas bien es un complemento para llevar en orden el desarrollo de un tema especifico, relacionándolo con aplicaciones de la vida real, aporte que resulta de interés para los estudiantes de cualquier materia de las ciencias exactas.

# Ecuaciones Diferenciales a Variables Separables

Una ecuación diferencial de primer orden a variables separables es cuando está representada de la forma: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)y$. Su solución general es $\phi(y) = \psi(x) + C$.

**Ejemplo 1**

Resolver la ecuación diferencial:

$$\tfrac{dy}{dx} = (x+1)$$

Observación

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (x+1)$se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $f\,(x)\,dx = f\,(y)\,dy$ , claro esta que en su caso $f\,(y) = 1$ es decir la forma en la que la ecuación, debe ser tratada algebraicamente para poder generalizarla.

Experimentación

Se tiene la ecuación:

$$\tfrac{dy}{dx} = (x+1)$$

Multiplicando a los dos miembros de la ecuación por dx y simplificando se obtendrá.

$$dy = (x+1)^2 dx$$

Aplicando integrales queda de la forma:

$$\int dy = \int (x+1)^2 dx$$

Y da como resultado

$$y = \tfrac{1}{3}(x+1)^2 + c$$

Al existir la condición auxiliar $y(0) = 1$, se tiene:

$$1 = \tfrac{1}{3}(0+1)^2 + c$$
$$c = \tfrac{2}{3}$$

Y la solución de la función es:

$$y = \frac{1}{3}(x+1)^2 + \frac{2}{3}$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, este en particular en una razon de crecimiento.

**Aplicación**

La razón de crecimiento del volumen de ventas y a medida que el precio x decrece, es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia del precio x y una constante b.

- Exprese matemáticamente el problema planteado. Interprete el parámetro de la constante b.
- Halle la relación entre el volumen de ventas $y$ y el precio $x$, es decir la relación general.

**Formulación matemática.**
Sea y el volumen de ventas luego $\frac{dy}{dx}$ la relación entre el volumen de ventas y y el precio, sea x el precio.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ay}{x-b}$$

Primero intercambiamos los términos x y y de cada lado con su respectivo diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{(x-b)dx}$$

Realizamos la integración de cada lado respectivamente

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int \frac{dx}{(x-b)}$$

Resolviendo la integral

$$\ln[y] = -a \ln[x-b] + c$$

Despejamos la constante

$$\ln[y].a \ln[x-b] = +c$$

$$\ln[y(x-b)_a] = c$$

$$y = \frac{c_1}{(x-b)_a}$$

Nuestra ecuación ya esta acomodada de la forma que satisface las condiciones planteadas de nuestro problema, sobra decir que solo hay que sustituir las variables de nuestro problema para obtener nuestros resultados numéricos.

Abstracción:

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir a la forma general $f(y)dy = f(x)dx$ .

Generalización

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son a variables separable cuando a través de operaciones algebraicas se la puede representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$ .

**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+6}{x+1} \quad ; \quad y(1) = 0$$

**Observación**

La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x+6}{x+1} \quad ; \quad y(1) = 0$ se puede generalizar como una ecuación de la forma $f(y)dy = f(x)dx$ , claro esta que en este caso $y(0) = 0$, es decir la forma en la que se da la ecuación, debe ser tratada algebraicamente para poder generalizarla.

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+6}{x+1} \quad ; \quad y(1) = 0$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por dx y simplificando se obtendrá:

$$dy = \frac{x+6}{x+1}dx$$

Aplicando integrales queda dela forma

$$\int dy = \int \frac{x+6}{x+1}dx$$

y da como resultado

$$y = x + 5\ln[x+1] + c$$

Al existir la condición auxiliar $y(1) = 0$, nos queda:

$$0 = 1 + 5\ln[1+1] + c$$

$$c = 0,66$$

Y la solución de la función es:

$$y = x + 5\ln[x+1] + 0,66$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, este en particular es de j.

**Aplicación**

Sin considerar la resistencia del aire, si se deja caer un objeto que vuela horizontalmente a una altura de $30000 pies$ sobre el océano.

1. ¿Cuánto tardará el objeto en llagar al agua?
2. ¿Con qué rapidez chocará e objeto el agua?!

Formulación matemática.
Sea la altura del avión de $30000 pies$ y su aceleración viene dada por:

$$a = g = \frac{dv}{dt}$$

Puesto que inicialmente la partícula se encuentra a una aceleración igual a la gravedad se puede considerar:

$$\frac{dv}{dt} = 32$$

Así, la formulación matemática completa es:

$$dv = 32dtcont = 0yv = 0$$

Usando el método de separación de variables, se tiene:

$$\int dv = \int 32dt$$

$$v = 32t + C$$

Puesto que

$$t = 0yv = 0$$

Se obtiene $C = 0$ dando la ecuación siguiente:

$$v = 32t$$

Conociendo la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo, ahora se puede hallar la ecuación de la velocidad con respecto a la distancia:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Comparación

Así, la formulación matemática completa es:

$$vdt = ds$$

$$32tdt = ds$$

Usando el método de separación de variables también en esta ecuación, se tiene:

$$\int 32tdt = \int ds$$

$$16t^2 + C = s$$

$$16t^2 = s$$

Remplazando los valores iniciales de $s$ se encuentra el tiempo:

$$16t^2 = 30000$$

$$t = \sqrt{\frac{30000}{16}}$$

$$t = 43{,}3seg$$

Para encontrar la velocidad se remplaza el valor de t obtenido en la ecuación general de la velocidad con respecto al tiempo:

$$v = 32t$$

$$v = 32(43{,}3)$$

$$v = 13385{,}6ft/seg$$

Resolviendo de esta manera el ejercicio se hallan los valores pedidos anteriormente en el enunciado.

1. El tiempo que se tarda el objeto en llegar al agua es de $43segundos$
2. La rapidez con la que choca el objeto el agua es de $1400pies/seg$

Abstracción

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir a la forma general $f(y)dy = f(x)dx$ .

Generalización

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son de de variables separable cuando a través de operaciones algebraicas se la puede representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$ .

**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial:

$$\tfrac{dy}{dx} = -e^{-3x} \quad ; \quad y(1) = 2$$

Observación

La ecuación $\frac{dy}{dx} = -e^{-3x} \quad ; \quad y(1) = 2$ se puede generalizar como una ecuación de la forma $f(y)dy = f(x)dx$ , claro esta que en este caso $y(1) = 2$, es decir la forma en la que se da la ecuación, debe ser tratada algebraicamente para poder generalizarla.

Experimentación

Se tiene la ecuación:

$$\tfrac{dy}{dx} = -e^{-3x} \quad ; \quad y(1) = 2$$

Multiplicando a los miembros de la ecuación por dx y simplificando se obtendrá.

$$dy = -e^{-3x}dx$$

Aplicando integrales queda de la forma:

$$\int dy = \int -e^{-3x}dx$$

Y da como resultado

$$y = -(-\frac{1}{3}e^{-3x} + c)$$

$$y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

Al existir la condición auxiliar $y(1) = 2$, se tiene:

$$1 = \frac{1}{3}e^{-3(2)} + c$$

$$c = 0,7$$

Y la solución de la función es:

$$1 = \frac{1}{3}e^{-3x} + 0,7$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $f(y)dy = f(x)dx$, este en particular de un problema de estadística.

**Aplicación**

Cierta cuidad tenia una población de 25000 habitantes en 1960 y una población de 30000 habitantes en 1970 suponiendo que su población continúe creciendo exponencialmente con un indice constante. Que población espera los urbanistas que tenga en el año 2011.

Podemos representar así:

$$\frac{dx}{dy} = kx$$

Separando variables

$$dx = kxdy$$

Integrando ambos lados

$$\int dx = \int kxdy$$

## Comparación

Obtenemos

$$\ln(x) = kt + c$$

Aplicamos logaritmos

$$x = ce^{kt}$$

Tenemos $t_0$ en 1960 de tal modo que

$$25000 = x(0)$$

Sustituyendo se obtiene

$$25000 = ce^{kt(0)}$$

$$c = 25000$$

Sustituyendo

$$x = 25000e^{kt}$$

De 1970 a 1960 ha transcurrido 10 años y la población ha aumentado 30000 $x(10) = 30000$

$$30000 = 25000e^{k(10)}$$

$$\frac{6}{5} = e^{k(10)}$$

$$10k = \frac{ln(1,2)}{10} = 0,18292$$

Al sustituir la formula que nos permite calcular el tamaño dela población en función del tiempo donde$x(10)e^{0,018232t}$.

Del año 1960 al año 2010 han transcurrido 51 años entonces esa población actualmente tiene.

$$x(51) = e^{0,18232(51)}$$

$$x(51) = 62207,5157 \quad personas$$

## Abstracción

Una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables cuando se puede reducir a la forma general $f(y)dy = f(x)dx$ .

## Generalización

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son de de variables separable cuando a través de operaciones algebraicas se la puede representar de la forma $f(y)dy = f(x)dx$ .

# Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Una ecuación diferencial puede ser expresada de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ , y para encontrar su solución se realiza el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$,para convertirla en una ecuación donde se pueda separar sus variables.

**Ejemplo 1**

resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

Observación

Cuando hablamos de ecuaciones diferenciales homogéneas en la mayoría de ocasiones por no decir casi siempre pueden ser transformadas a ecuaciones diferenciales con variables separables.

Experimentación

Puede expresarse la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

En la cual el lado derecho es una función de $\frac{y}{x}$,así que la ecuación homogénea.Haciendo $y = vx$,tenemos:

$$y + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-y}{1+y}$$

$$x\frac{dv}{dz} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\frac{dv}{x} = \frac{(1+v)dv}{1-2v-v^2}$$

Así $lnx = \frac{1}{2}ln(1-2v-v^2) + C1$ de modo que $x^2(1-2v-v^2) = c$ ;Reemplazando $v$ por $\frac{y}{x}$ y simplificando encontramos :

$$x^2 - 2xy - y^2 = C$$

Comparación

**Aplicación**

Un cable flexible de poco peso (despreciable) soporta un puente uniforme. Determine la forma del cable en un puente colgante el cual es de gran uso en la construcción moderna de puentes.

**Formulación matemática**

La ecuación se cumple aquí y nos resta determinar $\frac{dw}{dx}$.La carga por unidad de incremento en la dirección horizontal.En este caso $\frac{dw}{dx}$ es una constante,llamada peso por unidad de longitud del puente llamando esta constante $w$,tenemos:

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} = \frac{w}{H}$$

Denotando por b la distancia del puente tenemos:

$$y = b, \text{ donde } x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ , donde } x = 0$$

La segunda condición debido a que el punto donde $x = 0$ es un punto mínimo ,integrando dos veces y haciendo uso de las condiciones dadas encontramos que:

$$y = \frac{wx^2}{2H} + b$$

El cable asume así la forma de una parábola

Abstracción

Las ecuaciones Diferenciales Homogéneas son de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$ , para su resolución se hace el cambio de la función $y(x)$ por $x(x)$ mediante $y = vx$,transformándola así a una ecuación diferencial por variables separables.

Generalización

Al igual que todas las formas de resolución de una ecuación diferencial de primer orden, no siempre se presenta el ejercicio en la forma general de cada ecuación diferencial , mediante procesos algebraicos debemos lograr establecer la ecuación de la forma general.

**Ejemplo 2**

Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{y/x} + y}{x}$

Observación

El lado derecho puede escribirse como $(\frac{y}{x}e^{y/x})+(y/x)$,es una función de $\frac{y}{x}$,de modo que la ecuación es homogénea,haciendo $y=vx$,Obtenemos:

$$v+x\frac{dv}{dx}=ve^{v}+v \text{ ó}$$

$$\frac{e^{-v}dv}{v}=\frac{dx}{x}$$

De donde:

$$\int\frac{e^{-v}}{v}=ln(x)+C$$

La integración no puede desarrollarse en forma cerrada.

El estudiante debería notar que una ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, es homogénea si al colocar $y=vx$, en el lado derecho de la ecuación se convierte en una función solo de v.

Comparación

**Aplicación**

Encuentre las trayectorias ortogonales de $x^2+y^2=Cx$

**Formulación Matemática**

Existen dos maneras de determinar la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales.

*PRIMERA MANERA:*

Resuelvo C para obtener $C=x^2+y^2/x$ y derivando con respecto a $x$ tenemos:

$$\frac{x(2x+2ydy/dx)-(x^2+y^2)(1)}{x^2}=0$$

*SEGUNDA MANERA:*

Derivando $x^2+y^2=Cx$,con respecto a x encontramos:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=C$$

Eliminando entre esta ultima ecuación y la dada ,encontramos la ecuación como antes.

La familia de las trayectorias Ortogonales tiene así la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Para resolver se nota que la ultima ecuación expuesta es homogénea ,haciendo $y=vx$, el estudiante puede mostrar que $x^2+y^2=Cy$

## Abstracción

Las ecuaciones Diferenciales Homogéneas son de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$ , para su resolución se hace el cambio de la función $y(x)$ por $x(x)$ mediante $y = vx$,transformándola así a una ecuación diferencial por variables separables.

## Generalización

Al igual que todas las formas de resolución de una ecuación diferencial de primer orden, no siempre se presenta el ejercicio en la forma general de cada ecuación diferencial , mediante procesos algebraicos debemos lograr establecer la ecuación de la forma general.

## Ejemplo 3

Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$$

## Observación

La ecuación no es separable.Sin embargo ,la presencia de x+y sugiere que pudiéramos tratar de cambiar la variable dependiente de $y$ a $v$ dada por:

$$x + y = v^2$$

## Experimentación

y así obtenemos después del reemplazo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(v^2 - x)}{dx}$$

$$2v\frac{dv}{dx} - 1$$

Así la ecuación se convierte en:

$$2v\frac{dv}{dx} - 1 = v$$

Y esto lo podemos escribir en forma de variables separables como

$$\frac{2vdv}{v+1} = dx \text{ ó } \int 2v/(v+1)dv = \int dx$$

Desarrollando la integración tenemos:

$$\int \frac{2vdv}{v+1} = 2\int \frac{(v+1)-1}{v+1}dx$$

$$2\int(1 - \frac{1}{v+1})dv = 2v - 2ln(v+1)$$

Así que la solución general es: $2v - 2ln(v + 1) = x + C$, y reemplazando v por $\sqrt{x+y}$ obtenemos ahora la ecuación general requerida de la ecuación dada.

$$2\sqrt{x+y} - 2ln(\sqrt{x+y} + 1) = x + C$$

## Comparación

**Aplicación**

Al abrir sus paracaídas un paracaidista esta cayendo con una velocidad de $176ft/s$ , si la fuerza de resistencia del aire es $wv^2/256lb$,donde $w$ es el peso total del hombre y del paracaídas y v la velocidad con la que va cayendo , hallar la velocidad en cualquier tiempo después de abierto el paracaídas.

De la segunda ley de Newton usando $w = mg$ y $g = 32ft/s$, tenemos que:

$$m\frac{dv}{dt} = Ftotal$$

$$m\frac{dv}{dt} = w - F_1$$

$$m\frac{dv}{dt} = w - \frac{wv^2}{256}$$

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{(256 - v^2)mg}{256}$$

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{m(256 - v^2)}{8}$$

O equivalente :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{256 - v^2}{8}$$

La ecuación diferencial es separable, resolviéndola y cuando la condición inicial $v(0) = 176$, tenemos:

$$v(t) = 16 * \frac{6 + 5e^{-4t}}{6 - 5e^{-4t}}$$

De donde se observa que para un t muy grande $v(t)$ tiende al valor de $16ft/s$,esta es la llamada velocidad terminal y es la velocidad con la que el cuerpo llega al suelo.

## Abstracción

Las ecuaciones Diferenciales Homogéneas son de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$ , para su resolución se hace el cambio de la función $y(x)$ por $x(x)$ mediante $y = vx$,transformándola así a una ecuación diferencial por variables separables, en el caso de la comparación con una aplicación podemos observar lo fácil que resulta resolver ejercicios de física con ecuaciones diferenciales.

## Generalización

Al igual que todas las formas de resolución de una ecuación diferencial de primer orden, no siempre se presenta el ejercicio en la forma general de cada ecuación diferencial , mediante procesos algebraicos debemos lograr establecer la ecuación de la forma general.

# Ecuaciones Diferenciales Exactas

**Ejemplo 1**

Resolver la ecuación diferencial:

$$(2x-1)dx + (3y+7)dy = o$$

Observación

La ecuación $(2x-1)dx + (3y+7)dy = o$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Experimentación

Se tiene la ecuación:

$$(2x-1)dx + (3y+7)dy = o$$

La podemos expresar como su experimentación generalizada

$$M(x,y) = 2x-1 \quad y \qquad N(x,y) = 3y+7$$

Con esta expresión

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(2x-1)}{dy} = 0$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(3y+7)}{dx} = 0$$

Luego de derivar con respecto a dy la expresión M y con respecto a dx la expresión N, lo que nos queda, igualando las expresiones derivadas.

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Podemos decir que es una ecuación exacta por la igualdad anterior
Como determinamos que es exacta decimos que existe una función f(x,y)para la que:

$$\frac{df}{dx} = 2x-1 \qquad y \qquad \frac{df}{dy} = 3y+7$$

Integramos la ecuación respecto a x y obtenemos:

$$f(x,y) = x^2 - x + g(y)$$

$$\frac{df}{dy} = g^{'}(y)$$

Igualamos con $N(x,y) = 3y+7$

$$g^{'}(y) = 3y+7$$

$$g(y) = \frac{3}{2}y^2 + 7y$$

$$f(x,y) = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y$$

La solucion general es:

$$x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$$

Comparacion

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, en este caso aplicamos para la determinación de un dato desconocido.

**Aplicación**

Un profesor escribe los apuntes de su asignatura con una rapidez proporcional al numero de hojas escritas. Por otra parte uno de sus alumnos es capaz de leer estos apuntes con una rapidez constante.Al comenzar el curso ( que es de carácter anual), el profesor entrega 10 hojas a sus alumnos y posteriormente se las va proporcionando a medida que las escribe.Si este alumno en particular, al final del tercer mes llevaba un atraso en la lectura de los apuntes de 20 páginas y a finalizar el sexto mes llevaba un atraso de 70 páginas.
a.) Determine el número de páginas que entrego el profesor al finalizar el noveno mes.

**Generalización matemática:**
Sea $H(t)$ el numero de hojas escritas por el profesor en el instante t, entonces :

$$\tfrac{dH(t)}{dt} = kH(t) \quad \Longrightarrow H(t) = ce^{kt}$$

La condicion inicial $H(0) = 10$ implica que $c = 10$ por lo tanto:

$$H(t) = 10e^{kt}$$

Por otra parte,si $L(t)$ es el numero de hojas leídas por el alumno, como la rapidez de lectura es constante,digamos $m$, entonces:

$$\tfrac{dL(t)}{dt} = m \quad \Longrightarrow L(t) = mt + c_1$$

Como $L(0) = 0$, entonces $c_1 00$ .Asi $L(t) = mt$.

Ademas las relaciones:

$$H(3) = L(3) + 20$$

$$H(6) = L(6) + 70$$

Implican:

$$10e^{3k} = 3m + 20$$

$$10e^{6k} = 6m + 70$$

Resolviendo el sistema tenemos que $k = \frac{\ln 3}{3}$, de donde :

$$H(t) = 10e^{\frac{\ln 3}{3}t}$$

Luego la cantidad de páginas que entrego el profesor al noveno mes es :

$$H(9) = 10e^{\frac{\ln 3}{3}9}$$

$$H(9) = 270$$

Abstraccion

Una ecuación diferencial ordinaria es exacta cuando se presenta de la siguiente manera $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$.

**Generalización**

Las ecuaciones ordinarias son exactas cuando presenta la siguiente condición $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación diferencial:

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

**Observación**

La ecuación $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

Verificamos que sea una ecuación exacta, derivando

$$M(x, y) = 5x + 4y \qquad y \qquad N(x, y) = 4x - 8y^3$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(5x + 4y)}{dy} = 4$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(4x - 8y^3)}{dx} = 4$$

Esto es

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad ; \quad es \quad exacta$$

Existe una función f(x,y)para la que:

$$\frac{df}{dx} = 5x + 4y \qquad y \qquad \frac{df}{dy} = 4x - 8y^3$$

Integramos la primera ecuación con respecto a x, se obtiene

$$f(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + g\left(y\right)$$

Experimentación

La podemos expresar como su experimentación generalizada

$$M(x,y) = 2x - 1 \quad y \qquad N(x,y) = 3y + 7$$

$$\frac{df}{dy} = g^{'}(x)$$

Igualamos con $N(x,y) = 4x - 8y^3$

$$g^{'}(x) = 4x - 8y^3$$

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4$$

La solución general es:

$$c = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4$$

Comparacion

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, en este caso aplicamos para la determinación de un dato desconocido

**Aplicación**

Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5. Mientras se encontraba realizando una autopsia de la victima de un asesinato,el propio forense es asesinado,y el cuerpo de la victima,robado.A las 9:00 AM el ayudante descubre su cadáver a una temperatura de 21. A mediodía, su temperatura es de 13.Suponiendo que el forense tenia en vida una temperatura normal de 37.
a.)A que hora fue asesinado

**Formulación Matemática**
Fijemos $t = 0$ a las $9:00$ horas.
Sean $T(t)$ la temperatura del cuerpo en un instante $t$, y $A$ la temperatura ambiente.
Entonces $T(0) = 21$,$T(3) = 13$ y $A = 5$.

Queremos encontrar $t$ tal que $T(t) = 37$.

Sea $\Delta T = T - A$. Por la ley de enfriamiento de Newton.

$$\tfrac{d\Delta T}{dt} = k\Delta T \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = Ce^{kt}$$

Luego,$T(t) = Ce^{kt} + A = Ce^{kt} + 5$.

Reemplazado en las condiciones iniciales: $T(0) = C + 5$, de donde $C = 16$.

Ahora, $T(3) = 13 = 16e^{3k} + 5$, es decir $-\ln 2 = 3k$, de donde $k = -\frac{1}{3}\ln 2$.

Así,$T(t) = 16e^{-\frac{t}{3}\ln 2} + 5 = 16(2)^{-\frac{1}{3}} + 5$.

Ahora, $37 = 16(2)^{-\frac{1}{3}} + 5 \quad \Longrightarrow \quad 2 = (2)^{-\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad t = -3$.

Por lo tanto el forense fue asesinado tres horas antes que se encontrara el cuerpo, es decir, a las $6:00$ de la manana.

**Abstracción**

Una ecuación diferencial ordinaria es exacta cuando se presenta de la siguiente manera $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$.

**Generalización**

as ecuaciones ordinarias son exactas cuando presenta la siguiente condición $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial:

$$\left(3x^2y + e^y\right) dx \quad + \quad \left(x^3 + xe^y - 2y\right) dy = 0$$

**Observación**

La ecuación $\left(3x^2y + e^y\right) dx \quad + \quad \left(x^3 + xe^y - 2y\right) dy = 0$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ , podemos verificar que una ecuación sea exacta al verificar si $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

**Experimentación**

Comprobamos que la ecuación sea exacta : $\frac{dM}{dy} = 3x^2 + e^y \quad \longrightarrow \quad \frac{dN}{dx} = 3x^2 + e^y$
Son iguales, por lo tanto la ecuación es exacta .
Ahora tomamos una función $f_x(x,y) = M(x,y)$

$$f_x(x,y) = \left(3x^2y + e^y\right) dx$$

Integramos respecto a $x$ y la constante de integración sera una función $g(y)$

$$f(x,y) = \int \left(3x^2y + e^y\right) dx$$

$$f(x,y) = x^3y + xe^y + g(y) \ldots (1))$$

Esta función la derivamos con respecto de y :

$$f_y^{'}(x,y) = x^3 + xe^y + g^{'}(y)$$

Igualamos con $N(x,y)$ :

$$g^{'}(x) = -2y$$

Integramos respecto a y :

$$\int g^{'}(x) = -2\int ydy + \int dy + c$$

$$g(y) = -y^2 + c$$

Sustituimos con la función (1)

$$x^3y + xe^y - y^2 - c = 0$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, en este caso aplicamos para la determinación de un dato desconocido.

**Ejemplo 3**

Según la Ley de Torricelli,la rapidez con que baja el agua en un tanque en forma de cilindro vertical que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua en el tanque.Inicialmente, el agua tiene una profundidad de 9 pies y un tapón es retirado en el tiempo $t = 0$ (horas).Después de una hora la profundidad ha descendido a 4 pies.

a.)Cuanto tiempo tardara el agua en salir del tanque.

**Formulación Matemática**
Sea $h(t)$ la altura del agua en el tanque en el instante $t$.

Entonces, $h^{'} = -k\sqrt{h}$, de donde $2\sqrt{h} = -kt + C$.

Como $h(0) = 9$, tenemos que $C = 6$ y como $h(1) = 4$,$k = 2$.

Así, $h(t) = \frac{1}{2}(6 - 2t)^2 = 2(3 - t)^2$

Finalmente, $h(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t =$

Por lo tanto, el tanque demorara 3 horas en vaciarse.

Abstracion

Una ecuación diferencial ordinaria es exacta cuando se presenta de la siguiene manera $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$.

Generalización

Las ecuaciones ordinarias son exactas cuando presenta la sigueinte condicion $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

## Ecuaciones Diferenciales Inexactas

**Ejemplo 1**

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+xy^2}{y+x^2y} \qquad si\ y(1) = 3$$

**Observación**

Si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, esto es, si $\frac{M(x,y)}{dy} = \frac{N(x,y)}{dx}$ podemos resolver utilizando el método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias exactas, caso contrario la tendremos que resolver multiplicando por un factor integrante $u$ apropiado y así convertirla en exacta y resolverla.

**Experimentación**

Reescribimos la ecuación $(3x + xy^2)dx - (y + x^2y)dy = 0$

Separando y derivando obtenemos:

$M(x,y) = 3x + xy^2$ $\qquad$ $N(x,y) = -y - x^2y$

$\frac{M(x,y)}{dy} = 2xy$ $\qquad$ $\frac{N(x,y)}{dx} = -2xy$

De modo que la ecuación no es exacta. Notando que $M$ y $N$ cada una puede ser factorizada en un producto de una función de x y una función de y, esto es:

$$x(3 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0 \qquad (1)$$

Un factor integrante es:

$$u = \frac{1}{(3-y^2)(1+x^2)}$$

Multiplicando (1) por este factor integrante se tiene:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{3+y^2}dy = 0$$

La cual es separable y la ecuación es exacta. La integración de la ecuación anterior produce entonces:

$$\frac{1}{2}ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}ln(3 + y^2) = C$$

O en su defecto:

$$(1 + x^2) = A(3 + y^2)$$

Puesto que $y = 3$ cuando $x = 1$ , encontramos A=$\frac{1}{6}$

Así, la solución requerida es: $(1 + x^2) = \frac{1}{6}(3 + y^2)$ ó $\boxed{y^2 - 6x^2 = 3}$

**Comparación**

### Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Inexactas

Las ecuaciones diferenciales inexactas se deben transformar en ecuaciones diferenciales exactas, por lo que, no tienen una aplicación directa.

### Abstracción

La aplicación y el uso primordial de la Ecuaciones Diferenciales Inexactas se sustenta en la búsqueda del factor de integración, que se lo obtiene mediante fórmula.

### Generalización

Se debe calcular un factor de integración, que permita pasar de ser una ecuación diferencial ordinaria inexacta a exacta y a partir de esto resolverla sin ningún inconveniente como una EDO Exacta con todos sus pasos y procedimientos.

**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0$$

### Observación

Observando el ejercicio podemos deducir lo mismo del anterior ejemplo ya resuelto por lo que procederemos a comprobar si la ecuación planteada es exacta y si no lo es buscaremos el factor integrante que la convierta de inexacta a exacta.

### Experimentación

$M(x, y) = (x^2 + y)$ $\qquad$ $N(x, y) = -x$

$\frac{M(x,y)}{dy} = 1$ $\qquad$ $\frac{N(x,y)}{dx} = -1$

Como vemos sus derivadas no son iguales por lo que procedemos a encontrar el factor integrante.

Con la siguiente fórmula encontramos una expresión $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{dM(x,y)}{dy} - \frac{dN(x,y)}{dx}\right)$$

Entonces reemplazando obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{-x}(1+1) \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{2}{x}$$

Una vez obtenida nuestra $f(x)$ encontramos nuestro factor integrante $u(x)$ de la siguiente forma:

$$u(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Experimentación

Operando obtenemos que nuestro factor integrante es:

$$u(x) = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando por la expresión original ya tenemos una ecuación diferencial exacta, y nuestra nueva expresión es:

$$\frac{(x^2+y)}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

Bien ahora operamos tal y como se lo hace para obtener la solución de una ecuación diferencial exacta.

Utilizamos nuestra nueva $N(x, y)$ que es $-\frac{1}{x}$ y utilizamos el siguiente reemplazo:

$$f(x, y) = \int N(x, y)dy + g(x) \;\Rightarrow\; f(x, y) = -\frac{1}{x}\int dy + g(x) \;\Rightarrow$$

$$f(x, y) = -\frac{y}{x} + g(x)$$

Ahora derivando esta expresión $\frac{df}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{y}{x^2} + g'(x)$$

A esta última expresión la igualamos a $M(x, y)$

$$\frac{y}{x^2} + g'(x) = 1 + \frac{y}{x^2}$$

Ahora la integramos para obtener nuestra $g(x)$ que es parte de nuestra solución.

$$g(x) = \int dx \;\Rightarrow\; g(x) = x + C$$

Y nuestra solución final será:

$$\boxed{xC = x^2 - y}$$

Comparación

## Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Inexactas

Las ecuaciones diferenciales inexactas se deben transformar en ecuaciones diferenciales exactas, por lo que, no tienen una aplicación directa.

Abstracción

La aplicación y el uso primordial de la Ecuaciones Diferenciales Inexactas se sustenta en la búsqueda del factor de integración, que se lo obtiene mediante fórmula.

Generalización

Se debe calcular un factor de integración, que permita pasar de ser una ecuación diferencial ordinaria inexacta a exacta y a partir de esto resolverla sin ningún inconveniente como una EDO Exacta con todos sus pasos y procedimientos.

**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial:

$$(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

Observación

El ejercicio planteado es una ecuación diferencial ordinaria inexacta.

Experimentación

Comprobamos si lo dicho anteriormente es cierto.

$M(x,y) = 5x^3 + 3xy + 3y^2$ $\quad$ $N(x,y) = x^2 + 2xy$

$\frac{M(x,y)}{dy} = 3x + 4y$ $\quad$ $\frac{N(x,y)}{dx} = 2x + 2y$

Sus derivadas no son iguales por lo que procedemos a encontrar el factor integrante.

Encontramos nuestra $f(x)$.

$$f(x) = \frac{3x+4y-2x-2y}{x^2+2xy} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{x+2y}{x^2+2xy}$$

Una vez obtenida nuestra $f(x)$ encontramos nuestro factor integrante $u(x)$ de la siguiente forma:

$$u(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Operando:

$$u(x) = e^{\int \frac{x+2y}{x^2+2xy}dx} \;\Rightarrow\; u(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} \;\Rightarrow$$

$$u(x) = e^{lnx}$$

Entonces nuestro $u(x)$ es:

$$u(x) = x$$

Multiplicando por la expresión original ya tenemos una ecuación diferencial exacta, y nuestra nueva expresión es:

$$(5x^4 + 3x^2y + 2xy^2)dx + (x^3 + 2x^2y)dy = 0$$

Bien ahora operamos tal y como se lo hace para obtener la solución de una ecuación diferencial exacta.

Utilizamos nuestra nueva $N(x,y)$ que es $x^3 + 2x^2y$ y utilizamos el siguiente reemplazo:

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + g(x) \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int (x^3 + 2x^2y)dy + g(x) \;\Rightarrow$$

$$f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + g(x)$$

Ahora derivando esta expresión $\frac{df}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 3x^2y + 2xy^2 + g'(x)$$

A esta última expresión la igualamos a $M(x,y)$

$$3x^2y + 2xy^2 + g'(x) = 5x^4 + 3x^2y + 2xy^2$$

Ahora la integramos para obtener nuestra $g(x)$ que es parte de nuetsra solución.

$$g(x) = 5\int x^4dx \;\Rightarrow\; g(x) = x^5 + C$$

Y nuestra solución final será:

$$\boxed{C = x^3y + x^2y^2 + x^5}$$

Comparación

### Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Inexactas

Las ecuaciones diferenciales inexactas se deben transformar en ecuaciones diferenciales exactas, por lo que, no tienen una aplicación directa.

Abstracción

La aplicación y el uso primordial de la Ecuaciones Diferenciales Inexactas se sustenta en la búsqueda del factor de integración, que se lo obtiene mediante fórmula.

Generalización

Se debe calcular un factor de integración, que permita pasar de ser una ecuación diferencial ordinaria inexacta a exacta y a partir de esto resolverla sin ningún inconveniente como una EDO Exacta con todos sus pasos y procedimientos.

# Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

y al dividir toda la ecuación para el coeficiente $a_1(x)$ ,se obtiene la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

La solución general viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\{\int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + C\}$$

**Ejemplo 1**

Encontrar la solución general para $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

**Observación**

La ecuación $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ es una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Ecuación general de las Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales; Para la resolución de este ejercicio sabemos que $p(x) = -2x$ y $g(x) = x$

**Experimentación**

se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = x$$

Y para su resolución calculamos primero:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}$$

Utilizando la formula para la solución general:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\{\int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + C\} \text{ ,resulta:}$$

$$y = \frac{1}{e^{-x^2}}\{\int e^{-x^2}xdx + C\}$$

aplicando las integrales da como resultado:

$$y = e^{x^2}\{-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\}$$

Y la solución general es:

$$y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$$

Comparación

**Aplicación**

Una solución de salmuera de sal fluye a razón constante de $4L/mmin$, hacia el interior de un deposito que inicialmente contiene 100L de agua.La solución contenida en el deposito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a razón de $3L/min$, Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el deposito es de $0{,}2kg/L$, determinar la cantidad de sal presente en el deposito al cabo de t minutos.¿ En que momento la concentración de sal contenida en el deposito sera de 0.1Kg/L?

**Formulación Matemática**

$$x(t) = Kg.desaldentrodeldepositoenelinstantet$$

$$\text{Cuando } x = 0, \frac{dx}{dt} = 4(0{,}2) - 3\frac{x}{100+t}$$

y obtenemos la ecuación general de ED. Lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{100+t}x = 0{,}8$$

$$u(t) = e^{\int 3/100+tdt} = (100+t)^3$$

$$(100+t)^3 x(t) = 0{,}8\int(100+t)^3 dt + C = 0{,}8 * \frac{(100+t)^4}{4} + C$$

$$x(t) = 0{,}2(100+t) + \frac{C}{(100+t)^3}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 20 + \frac{C}{100^3} \Rightarrow C = -20 * 100^3 = -2 * 10^7$$

$$x(t) = 0{,}2(100+t) - \frac{2 * 10^7}{(100+t)^3}$$

$$C(t) = \frac{x(t)}{100+t} = 0{,}2 - \frac{2 * 10^7}{(100+t)^4}$$

$$0{,}1 = 0{,}2 - \frac{2 - 10^7}{(100+t)^4} \Rightarrow 0{,}1 = \frac{2 * 10^7}{(100+t)^4}$$

$$(100+t)^4 = 2 * 10^8$$

$$t = 100(2^{1/4} - 1)$$

Abstracción

Una ecuación diferencial lineal de primer orden no siempre vendrá expresada por la forma general ,por lo que mediante operaciones algebraicas debemos llegar a la forma general que viene dada por: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$, y una vez teniéndola así podremos comenzar con la resolución de la misma.

Generalización

La solución general de las ecuaciones diferenciales Lineales de primer viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\{\int e^{\int p(x)dx} g(x)dx + C\}$$

Para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales en primera instancia hay que identificar $p(x)$ y también definir el factor de integración $e^{\int p(x)dx}$

**Ejemplo 2**

Encontrar la solución particular de: $x\frac{dy}{dy} + 2y = 4x^2$ si $y(1) = 2$.

Observación

La ecuación $x\frac{dy}{dy} + 2y = 4x^2$ como podemos observar que no está expresada de la forma general, por lo que debemos expresarla de la forma:$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

Experimentación

Para la resolución de este problema primero dividimos para $x$,obteniendo:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x$$

Entonces: $p(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 4x$
Por lo tanto:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2ln(x)} = e^{lnx^2} = x^2$$
$$y = \frac{1}{x^2}(\int x^2 4xdx + C)$$
$$y = \frac{1}{x^2}(x^4 + C)$$

y como solución general tenemos:

$y = x^2 + \frac{C}{x^2}$

Con la condición $y = 2$ y $x = 1$ se obtiene:
$2 = 1 + \frac{C}{1}$

entonces $C = 1$

y Finalmente como solución particular se obtiene:

$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

**Comparación:**

Comparación

**Apicación**

Una alberca cuyo volumen es de $10{,}000L$ contiene agua con el $0{,}01 prociento$ de cloro.Empezando en $t = 0$, desde la ciudad se bombea agua que contiene $0{,}001 porciento$ de cloro,hacia el interior de la alberca a razón de $5L/min$, y el agua de la alberca fluye hacia el exterior a la misma velocidad. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca al cabo de 1 hora?,¿Cuánto tendrá el agua de la alberca $0{,}002 porciento$ de cloro?

**Formulación Matemática:**

$$x(t) = Litrosdecolorodentrodelaalbercaenelinstantet$$

Obteniendo la ecuación diferencial lineal tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 5 * \frac{10^{-3}}{100} - 5\frac{x}{10{,}000}$$

$$x(0) = \frac{0{,}01}{100} * 10{,}000 = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5 - 50x}{100{,}000} \Rightarrow \frac{dx}{5 - 50x} = \frac{dt}{100{,}000}$$

$$-\frac{1}{50} ln(5 - 50x) = \frac{t}{100{,}000} + C$$

$$ln(5 - 50x) = -\frac{t}{2000} + C \Rightarrow 5 - 50x = Ce^{-t/2000}$$

$$x(t) = 0{,}1Ce^{-t/2{,}000}$$

considerando la condición inicial tenemos:

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0{,}1 + C \Rightarrow C = 0{,}9$$

$$x(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-t/2{,}000}$$

Al cabo de una hora se tiene:

$$x(60) = 0{,}9731 \Rightarrow 0{,}0097 porciento$$

El $0{,}002 prociento$ de cloro es igual a 0.2 litros, que se alcanzará cuando:

$$0{,}2 = 0{,}1 + 0{,}9e^{-t/2{,}000} \Rightarrow e^{-t/2{,}000} = 1/9$$

$$t = 2{,}000 ln(9) = 4394{,}45 minutos = 73 horas$$

Abstracción

Una ecuación diferencial lineal de primer orden no siempre vendrá expresada por la forma general como en el caso de este ejercicio ,por lo que mediante operaciones algebraicas es decir cuando dividimos toda la ecuación para $x$ debemos llegar a la forma general que viene dada por: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$, y una vez teniéndola así podremos comenzar con la resolución de la misma.

Generalización

La solución general de las ecuaciones diferenciales Lineales de primer viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\{\int e^{\int p(x)dx} g(x)dx + C\}$$

Para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales en primera instancia hay que identificar $p(x)$ y también definir el factor de integración $e^{\int p(x)dx}$

**Ejemplo 3**

Hallar la solución de la ecuación diferencial:

$(6-2uv)\frac{du}{dv} + v^2 = 0$

Observación

La ecuación $(6-2uv)\frac{du}{dv} + v^2 = 0$,como podemos observar,no está expresada de la forma general,y mediante operaciones algebraicas debemos conseguirlo de la siguiente manera:

Observación

Aplicando álgebra procedemos a conseguir que la ecuación se exprese de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

resolución:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v^2}{6-2uv}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{6}{v^2} + \frac{2u}{v}$$

$$\frac{dv}{du} - \frac{2u}{v} = -\frac{6}{v^2}$$

Ahora es lineal en $u$,por lo tanto:

$$p(v) = -\frac{2}{v}\ ,\ q(v) = -\frac{6}{v^2}$$

Se encuentra el factor integrante:

$$\text{F.I}=e^{\int p(v)dv} = e^{\int 2/v} dv = e^{-2ln(v)} = v^{-2} = \frac{1}{v^2}$$

Y la solución general es:

$$\frac{1}{v^2}u = \int \frac{1}{v^2}(-\frac{6}{v^2})dv + C$$

$$\frac{1}{v^2}u = -6\int v^{-4}dv + C = -6\frac{v^{-3}}{-3} + c$$

y finalmente

$$\frac{u}{v^2} = \frac{2}{v^3} + C$$

$$u = \frac{2}{v} + Cv^2$$

Comparación

**Aplicación**

El aire al interior de un pequeño cuarto con dimensiones $10x8x8 metros contiene el 3\,\%$ de monóxido de carbono.Empezando en t=0,se sopla aire fresco que no contiene monóxido de carbono ,hacia el interior del cuarto a razón de $100m^3/min$. Si el aire del cuarto sale al exterior a través de una abertura a la misma velocidad,¿Cuándo tendrá el aire del interior del cuarto 0.01 porciento de monóxido de carbono?

**Formulación Matemática:**

$x(t) = m^3 demonoxidodearbonoenelintantet$

$$V = 12X8X8 = 768m^3$$

Formulando nuestra ecuación diferencial lineal tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = -100\frac{x}{768}$$

$$x(0) = \frac{3}{100} * 768 = 23{,}04$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{100}{768}dt \Rightarrow ln(x) = \frac{-25}{192}t + C \Rightarrow x(t) = Ce^{-25t/192}$$

$$x(0) = 23{,}04 \Rightarrow C = 23{,}04 \Rightarrow x(t) = 23{,}04e^{-25t/192}$$

Calculamos el 0.01 % $x(t) = 768 * 10^{-4}$, así pues el tiempo transcurrido será:

$$0{,}0768 = 23{,}04e^{-25t/192} \Rightarrow e^{-25t/192} = \frac{1}{300}$$

$$t = 43minutos$$

Abstracción

Una ecuación diferencial lineal de primer orden no siempre vendrá expresada por la forma general como en el caso de este ejercicio ,por lo que mediante operaciones algebraicas es decir cuando dividimos toda la ecuación para $x$ debemos llegar a la forma general que viene dada por: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$, y una vez teniéndola así podremos comenzar con la resolución de la misma.

Generalización

La solución general de las ecuaciones diferenciales Lineales de primer viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\{\int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + C\}$$

## ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

**Ejemplo 1:**

**Ejemplo 1**

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$$

Observación

La ecuación $2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$ se puede realizar por ecuaciones de Bernoulli ya que tienen la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ cuando $n = 0$ la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación separable y cuando $n = 1$ se trata de una ecuación lineal, casos ya estudiados.

Experimentación

Se tiene la ecuación:

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$$

Para obtener la ecuación de la forma de Bernoulli le dividimos para $2x$ a los dos miembros y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{y^3}{2}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se le multiplica a los dos miembros por $y^3$

$$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{1}{2}$$

Seguido de esto se Multiplica por (1 - n) y se obtiene:

$$-2y^3\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^{-2} = -1 \qquad (1)$$

Reemplazamos variables:

$$z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

### Experimentación

Reemplazando en la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -1$$

Esta ecuación resulta una ecuación lineal en z, y la solución general es:

$$z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}[\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}(-1)dx + C]$$

Resolviendo la integral:

$$z = e^{2lnx}[-\int e^{-2lnx}dx + C]$$

Y la solución de la ecuación es:

$$y^{-2} = x + cx^2$$

### Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$, este en particular es un proceso Físico.

**Aplicación**

Se ha determinado experimentalmente que la variación de peso de un tipo de pez varia según la ley:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p$$

Donde $p = p(t)$ representa el peso del pez y $\alpha$, $\beta$ son constantes positivas que caracterizan la especie. Si el pez está maduro para su captura cuando tiene un peso de $\frac{3}{4}(\frac{a}{b})^3$ Calcule el tiempo que se demora en obtener ese peso.

**Formulación Matemática**

Se trata de una ecuación de Bernoulli.

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \Leftrightarrow p\frac{-2}{3}p' + \beta p\frac{1}{3} = \alpha$$

### Comparación

Haciendo cambios de variables se obtiene:

$$z = p^{1-\frac{2}{3}} = p^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}p^{\frac{-2}{3}}\frac{dp}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación se tiene:

$$3z' + \beta z = \alpha \Leftrightarrow z' + \frac{\beta}{3}z = \frac{\alpha}{3}$$

La cual es una ecuación lineal. Se tiene:

$$z = e^{-\int \frac{\beta}{3}dt}[\int e^{-\int \frac{\beta}{3}dt}\frac{\alpha}{3}dt + C]$$

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}$$

De donde:

$$p = \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}$$

Evaluando en $t = 0$ y asumiendo que en $t = 0$, $p(0) = 0$, se tiene que $C = -\frac{\alpha}{\beta}$ Por lo tanto

$$p(t) = (\frac{\alpha}{\beta})^3[1 - e - \frac{\beta t}{3}]^3$$

Igualando con $\frac{3}{4}(\frac{\alpha}{\beta})^3$ se tiene el resultado:

$$t = -\frac{3}{\alpha}ln[1 - (\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}]$$

### Abstracción

Una ecuación diferencial es de Bernoulli cuando se puede reducir de la forma general $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

### Observación

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

**Ejemplo 2**

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$$

**Observación**

Para obtener la ecuación de la forma de Bernoulli primero se le invierte de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y + y^3}{x}$$

Ahora se le separa las fracciones y se obtiene la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - xy = y^3x^{-1}$$

**Experimentación**

Multiplicando a los dos miembros por $x$ se obtiene:

$$x\frac{dy}{dx} - yx^2 = y^3$$

Seguido de esto se Multiplica por (1 - n) y se obtiene:

$$2x\frac{dy}{dx} - 2yx^2 = 2y^3 \tag{2}$$

Reemplazamos variables:

$$z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

Experimentación

Reemplazando en la ecuación (2) se obtiene:

$$z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x\frac{dx}{dy}$$

Esta ecuación resulta una ecuación lineal en z, y la solución general es:

$$z = e^{-\int -2ydy}[\int e^{-2ydy}(2y^3)dy + C]$$

Resolviendo la integral por partes:

$$z = e^{y^2}[-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + C]$$

La solución de la ecuación es:

$$(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$, este en particular es un proceso estadístico.

**Aplicación**

El ritmo que se propaga el rumor en un país es conjuntamente proporcional a la cantidad de personas que se han enterado del rumor y el numero de personas y el numero de las personas que no se han enterado del rumor:
a) Plantee la ecuación diferencial que describe el modelo.
b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial planteada.

Sea:
Q: Cantidad de personas enteradas del rumor.
B: Población Total.
B-Q: Cantidad de personas que no se han enterado del rumor.
K: Constante de proporcionalidad.

**Formulación Matemática**

a) La ecuación de modelo seria

$$\frac{dq}{dt} = kQ(B - Q)$$

Como la ecuación:

$$\frac{dq}{dt} - kBQ = -kQ^2$$

**Comparación**

b) Es de la forma de Bernoulli entonces, la solución seria dividiendo para $Q^2$ :

$$\frac{Q'}{Q^2} - \frac{kBQ}{Q^2} = \frac{-kQ^2}{Q^2}$$

$$Q'Q^{-2} - kBQ^{-1} = -k$$

Realizando un cambio de variable obtenemos:

$$z = Q^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -Q^{-2}Q$$

$$z' - kBz = -k$$

$$z' + kBz = k$$

Encontrando $z(t)$ tenemos:

$$z(t) = \frac{1}{e^{\int kBdt}}[\int ke^{\int kBdt}dt + C]$$

$$z(t) = \frac{1}{e^{tkB}}[\int ke^{tkB}dt + C]$$

$$z(t) = \frac{1}{e^{tkB}}[\frac{ke^{tkB}}{kB} + C]$$

$$z(t) = \frac{1}{B} + Ce^{-kBt}$$

Encontrando $Q(t)$ tenemos:

$$z(t) = \frac{1}{B} + Ce^{-kBt}$$

Realizando las operaciones algebraicas:

$$Q^{-1} = \frac{1}{B} + Ce^{-kBt}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1 + BCe^{-kBt}}{B}$$

Y como resultado tenemos:

$$Q(t) = \frac{\substack{\text{c} \\ B}}{1 + BCe^{-kBt}}$$

Abstracción

Una ecuación diferencial es de Bernoulli cuando se puede reducir de la forma general $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

Generalización

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

**Ejemplo 3**

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y^2(y^6 - x^2)y' = 2x$$

Observación

Realizando despejes se obtiene:

$$2x\frac{dx}{dy} = y^2(y^6 - x^2)$$

Se le divide para 2x para formar la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x = \frac{y^8}{2}x^{-1}$$

Experimentación

Para resolver este tipo de ecuaciones se le multiplica a los dos miembros por $x$

$$x\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x^2 = \frac{y^8}{2}$$

Seguido de esto se Multiplica por (1 - n) y se obtiene:

$$2x\frac{dx}{dy} + y^2x^2 = y^8 \tag{3}$$

Reemplazamos variables:

$$z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -2x\frac{dx}{dy}$$

Reemplazando en la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{dz}{dy} + y^2z = y^{^8}$$

Esta ecuación resulta una ecuación lineal en z, y la solución general es:

$$z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}[\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}(-1)dx + C]$$

Resolviendo la integral:

$$z = e^{-\int y^2dy}[e^{\int y^2dy}y^8dy + C]$$

Integrando se tiene:

$$z = e^{\frac{y^3}{3}}[\int e^{\frac{y^3}{3}}y^8dy + C]$$

Integrando por partes se tiene:

$$z = e^{\frac{y^3}{3}}[9(\frac{y^6}{9} - \frac{2y^3}{3} + 2)e^{\frac{y^3}{3}} + C]$$

La solución de la ecuación es:

$$x^2 = y^6 - 6y^3 + 18 + ce^{-\frac{y^3}{3}}$$

Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$, este en particular es de física.

**Aplicación**

Dos corrientes están conectados mediante una cañería, tal como se muestra en la figura adjunta. Cada uno contiene $50lts$ de solución, con $10gr$. No, 1 y 5 grs. al tanque No. 2. Se abren las tres cañerías, haciéndose entrar agua a través de A. Por A, B y C circula líquido a razón de 2 litros/min. Encontrar la cantidad de soluto de ambos recipiente después de 30 minutos.

**Formulación Matemática**

Antes de proceder a resolver el problema consideremos el caso más simple de un sólo recipiente de v litros de agua en el que se encuentra una mezcla de agua y sal (soluto). Se accionan simultáneamente las llaves de A y B haciéndose ingresar agua pura por A a razón de 5 litros/min. y se extrae solución por B en la misma proporción, para describir la cantidad de sal (soluto) x en función del tiempo se razona del modo siguiente:
Consideremos un intervalo de tiempo muy pequeño $\triangle t$ minutos, entonces:
S $\triangle t$ =cantidad de solución que sale por B en $\triangle t$ minutos.

$\frac{X}{V}$=concentración uniforme de sal en la solución (gr/lts)

$\frac{X}{V} S \triangle t$=cantidad de sal que sale por B en t minutos por tanto la variación de sal el recipiente $\triangle x$ durante el $\triangle t$ esta dado por

$$\triangle x = -(\frac{S}{V})X \triangle t$$

Luego

$$\frac{x}{t} = -(\frac{S}{V})X$$

Y en el limite en que $\triangle t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = -(\frac{S}{V})X$$

Que sera que será la ecuación que gobierna X en el recipiente:
Si en el lugar de agua pura entra una solución salina con una concentración, constante de c gr/lts por B, un análisis similar conduce fácilmente a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = SC - (\frac{S}{V})X \tag{4}$$

Comparación

Usando estas ideas es inmediato plantear el problema dado:
Llamemos:
$V_1$=volumen del recipiente No. 1
$X_1$=Cantidad de soluto del recipiente No. 1 en el instante t.
$X_2$= Cantidad de soluto del recipiente No. 2 en el instante t.
$V_2$= Volumen del recipiente No. 2
Entonces se cumple:

$$\frac{dx_1}{dt} = (\frac{S}{V_1})X_1 \tag{5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\frac{S}{V_1})X_1 - (\frac{S}{V_2})X_2 \tag{6}$$

La ecuación (5) se puede integrar directamente reemplazando:

$$\frac{S}{V_1} = 0{,}004\frac{1}{min}$$

Y usando la condición inicial que para $t = 0$, $X_1 = X_{01} = 10grs.$ de soluto. Luego:

$$X_1 = 10e^{-0{,}04t}gr \tag{7}$$

Reemplazando (6) en (7) con:

$$\frac{S}{V_2} = 0{,}004\frac{1}{min}$$

$$\frac{dx_2}{dt} + 0{,}04x_2 = 0{,}4e^{-0{,}04t}$$

De donde la solución es:

$$x_2 = 0{,}4e^{-0{,}04t}[\int(e^{-0{,}04t})(0{,}4e^{-0{,}04t})dt + C]$$

Donde C es una constante de integración, integrando esta ecuación, usando la condición inicial de que para $t = 0$, $x_2 = x_{02} = 5grs$ se tiene:

$$X_2 = (0{,}4t + 5)e^{-0{,}04t} \tag{8}$$

Finalmente reemplazando en la (7) y (8) $t = 30$ minutos se encuentra:

$$x_1 = 3{,}01gr.$$

$$x_1 = 5{,}12gr.$$

c

**Abstracción**

Una ecuación diferencial es de Bernoulli cuando se puede reducir de la forma general $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

# Ecuaciones Diferenciales de Riccati

**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial, donde una solución $y = \psi(x) = x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2 - 1 \tag{9}$$

**Observación**

La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2 - 1$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$ , donde P(x), Q(x) y R(x) son funciones solo de x. Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver si se conoce una solución particular suponiendo que $y = \psi(x)$ y así la solución de la ecuación diferencial será $y = \psi(x) + z$.

**Comparación**

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$

Una aplicación a la Biología: Crecimiento de Poblaciones
Se propone a estudiar el fenómeno de crecimiento de la población

En una primera aproximación al problema podríamos suponer que la población crece proporcionalmente al número de individuos. Por tanto si llamamos, p(t) al número de individuos que viven en el instante t, p(t) vendría dado por la ecuación:

$$p^{'} = ap$$

luego

$$p(t) = ce^{at}$$

para ciertas constantes positivas a (la tasa de crecimiento) y c.
Este modelo comporta un crecimiento exponencial de la población y se conoce como ley malthusiana de crecimiento de población.

### Comparación

Se ha aplicado el modelo a la evolución demográfica de los Estados Unidos en los últimos 200 años.Sabiendo que en 1790 y 1890 la población era respectivamente de 3.93 y 62.95 millones de habitantes, podemos usar estos datos para despejar la fórmula de arriba c y a, obteniéndose

$$p(t) = 3{,}93e^{0{,}028(t-1790)}$$

El modelo malthusiano sólo resulta adecuado para predicciones a crto plazo, lo que por otra parte era previsible (un modelo que propone un crecimiento ilimitado de la población parece poco realista).
En 1838 el matemático belga Verhulst propuso el modelo más plausible

$$p^{'} = a\left(1 - \frac{p}{b}\right)p$$

(conocido modelo logístico). Debemos entender b como un indicador de la capacidad máxima del medio en el que vive la población; conforme nos acerquemos a ella la tasa de crecimiento de la población estuviera por encima de ella tendería entonces a disminuir.

La ecuación de Verhulst es de las del tipo de Bernoulli( o Riccati). Tras el cambio de variable

$$v(t) = \frac{1}{p\,(t)}$$

se transforma en

$$v^{'} + ap = \frac{a}{b}$$

cuya solución general es:

$$v\,(t) = ce^{-at} + \frac{1}{b}$$

y por tanto

$$p\,(t) = \frac{b}{1 + ke^{-at}}$$

con k=cb.Apréciese que con el tiempo la población tiende a estabilizarse alrededor de su cota máxima b.
Contrastemos esta fórmula con los datos demográficos, resultando:

$$p(t) = \frac{250}{1 + 62{,}5e^{0{,}03(1790-t)}}$$

### Abstracción

Una ecuación diferencial es de Riccati cuando se puede reducir de la forma general $\dfrac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$

**Generalización**

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$.

**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación diferencial, donde una solución $\psi(x) = \frac{1}{2x} + tan(x)$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2} \tag{10}$$

**Observación**

La ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$ , donde P(x), Q(x) y R(x) son funciones solo de x. Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver si se conoce una solución particular suponiendo que $y = \psi(x)$ y así la solución de la ecuación diferencial será $y = \psi(x) + z$.

**Experimentación**

Se tiene la ecuación:
$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$
Partiendo de la solución particular:

$$\psi(x) = \frac{1}{2x} + tan(x)$$

Reemplazamos los datos obteniendo:

$$y = \psi(x) + z$$

$$y = \frac{1}{2x} + tan(x) + z$$

Derivamos la igualdad con respecto a la variable x:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + sec^2(x) + \frac{dz}{dx}$$

Remplazamos con el valor de la derivada de y con respecto a x en la función original:

$$-\frac{1}{2x^2} + sec^2(x) + \frac{dz}{dx} = \frac{1}{4x^2} + tan^2(x) + z^2 + \frac{tanx}{x} + \frac{z}{x} + 2tan(x)z$$

Experimentación

Reducimos los términos comunes:

$$-\frac{1}{2x^2} - \frac{tan(x)}{x} - \frac{z}{x} + 1 - \frac{1}{4x^2} = 0$$

Ordenando los términos de la forma

$$z^{'} + P(x)z = Q(x)z^n$$

$$\frac{dz}{dx} - 2(tanx)z = z^2$$

Resolvemos la ecuación de Bernoulli

$$m = z^{1-n}$$

$$n = 2$$

$$m^{'} + (1-2)(-2tanx)m = (1-2)$$

Resolvemos mediante el tercer caso

$$m^{'} + (2tanx)m = -1$$

$$m = \varrho^{-\int(2tanx)dx}\left[c + \varrho^{\int(2tanx)dx}\left(-1|\right)dx\right]$$

$$m = \varrho^{-2Ln(secx)}\left[c + \varrho^{2Ln(secx)}\left(-1\right)dx\right]$$

$$m = \frac{1}{sec^2(x)}\left[c + \int\left(-sec^2(x)\right)dx\right]$$

$$m = \frac{c}{sec^2(x)} - \frac{tan(x)}{sec^2(x)}$$

$$m = \frac{c - tanx}{sec^2x}$$

Experimentación

$$z = \frac{sec^2(x)}{c - tan(x)}$$

$$z = \frac{1}{cosx\,(c.cosx - senx)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + tan\,(x) + z$$

Y la solución es la función:

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{c.senx + cosx}{c.cosx - senx}$$

### Comparación

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$

Un tanque con 100 l de agua destilada comienza a recibir el aporte de una solución de ácido al 10 por ciento a una velocidad de 2 l/min a la vez que se extraen otros 2 l/min del mismo. Se remueve continuamente el contenido del tanque para asegurar una mezcla perfecta. ¿Tras cuánto tiempo la mezcla será una solución al 5 por ciento?. Hallar una fórmula que indique la cantidad de ácido y(t), expresada en litros averiguar cual es la proporción de la solución tras 1h15min. Justificar que la proporción límite es del 10 por ciento.

El porcentaje de ácido existente en el tanque en el instante t es

$$\frac{y(t)}{100}$$

por lo que instantáneamente salen

$$2\frac{y(t)}{100}$$

litros de ácido por minuto a la vez que entran 0.2 litros (10 por ciento de 2 litros). La ecuación que indica la razón de cambio por unidad de tiempo es (entrada- salida):

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}2 - \frac{y}{50} \mapsto \frac{50dy}{10-y} = dt \mapsto -50ln(10-y) = t + C$$

Notemos que este caso es

$$y \leqslant 10,$$

por lo que

$$10 - y \geqslant 0.$$

Como:

$$y(0) = 0 \mapsto (-50ln10) = C \mapsto t = (50ln)\,\frac{10}{10-y}$$

Para tener una solución del 5 por ciento y debe ser igual a 5, lo cual requiere

$$t = 50ln\frac{10}{10-5} = 50ln2 = 34{,}657min$$

Para obtener la fórmula que exprese la cantidad de ácido, despejamos y

$$\frac{t}{50} = ln\frac{10}{10-y} \mapsto 10 - y = 10e^{-\frac{t}{50}} \mapsto y = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right) = 10{,}1$$

### Abstracción

Una ecuación diferencial es de Riccati cuando se puede reducir de la forma general $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$

Generalización

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$.

**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial, donde una solución $y = \psi(x) = x - 1$

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 - xy^2 + 2x^2y - x^3 \tag{11}$$

Observación

La ecuación $\frac{dy}{dx} = x+1-xy^2+2x^2y-x^3$ se puede generalizar como una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$ , donde P(x), Q(x) y R(x) son funciones solo de x. Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver si se conoce una solución particular suponiendo que $y = \psi(x)$ y así la solución de la ecuación diferencial será $y = \psi(x) + z$.

Experimentación

Se tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 - xy^2 + 2x^2y - x^3$$

Partiendo de la solución particular:

$$y = \psi(x) = x - 1$$

Reemplazamos los datos obteniendo:

$$y = \psi(x) + z$$

$$y = x - 1 + z$$

Derivamos la igualdad con respecto a la variable x:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dz}{dx}$$

Experimentación

Remplazamos con el valor de la derivada de y con respecto a x en la función original:

$$1 + \frac{dz}{dx} = x + 1 - x(x - 1 + z)^2 + 2x^2(x - 1 + z) - x^3$$

Reducimos los términos comunes:

$$\frac{dz}{dx} = 2xz - xz^2 + 1 - 1$$

Ordenando los términos de la forma

$$z^{'} + P(x)z = Q(x)z^n$$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -xz^2$$

Resolvemos la ecuación de Bernoulli

$$m = z^{1-n}$$

$$n = 2$$

$$m^{'} + (1 - 2)(-2x)m = (1 - 2)(-x)$$

Resolvemos mediante el tercer caso

$$m^{'} + (2x)m = x$$

$$m = \varrho^{-\int(2x)dx}\left[c + \varrho^{\int(\frac{2}{x})dx}(-x)\,dx\right]$$

$$m = \varrho^{-x^2}\left[c + \varrho^{x^2)}(x)\,dx\right]$$

$$m = \frac{c}{ex^2 + \frac{1}{2}}$$

$$z = \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

Y la solución es la función:

$$y = x - 1 + \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

### Comparación

Para determinar las relaciones de carga, deformación y resistencia en vigas y estructuras.
Para determinar las relaciones entre corriente, voltaje y potencia en elementos distintos en un circuito eléctrico.
En química, para definir la relación de velocidad de descomposición de una sustancia para convertirse en otra en reacciones químicas.
En Biología: para determinar la rapidez de crecimiento de un cultivo celular o la rapidez de contagio de un determinado virus en una población determinada.
En Aeronáutica, para definir las relaciones entre potencia, fuerza de sustentación y velocidad y estabilidad de vuelo de los aviones.
En fin, aquí solo he delineado algunas aplicaciones, pero dado que casi todos los fenómenos de nuestro universo se pueden explicar (al menos en parte o muy aproximadamente) por ecuaciones diferenciales,pues las aplicaciones prácticamente son infinitas.
Matemáticamente se agrupan en dos grandes tipos: Ordinarias y Parciales.
Cada una de ellas tiene aplicaciones practicas bien definidas. Dentro de las ordinarias un grupo muy importante que se tiene muchas aplicaciones es el de la ecuaciones diferenciales lineales, las cuales pueden ser resueltas por variación de parámetros o por transformada de Laplace.
Una vez mas debido al numero importante de diferentes tipos de ecuaciones los métodos de solución también son muy variados.

### Abstracción

Una ecuación diferencial es de Riccati cuando se puede reducir de la forma general $\dfrac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$

### Generalización

Las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli cuando a través de operaciones algebraicas se puede representar de la forma $\dfrac{dy}{dx} = P(x).y + Q(x).y^2 + R(x)$.