



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

“Aplicación de software matemático interactivo a la enseñanza del tema de Triángulos de la Geometría Plana, como una herramienta de trabajo que le permita al Docente facilitar y mejorar el proceso educativo de los estudiantes, de acuerdo al programa de asignatura de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL”

Tesis presentada ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH,
como requisito parcial para la obtención del grado de:

MAGÍSTER EN MATEMÁTICA BÁSICA

AUTOR: Ing. Carlos Torres L.

TUTOR: Ing. Mg. César Castillo C.

RIOBAMBA - ECUADOR

2015

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN CERTIFICA QUE:

El trabajo de titulación, titulado “*Aplicación de software matemático interactivo a la enseñanza del tema de Triángulos de la Geometría Plana, como una herramienta de trabajo que le permita al Docente facilitar y mejorar el proceso educativo de los estudiantes, de acuerdo al programa de asignatura de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL*”, de responsabilidad del Sr CARLOS MIGUEL TORRES LASCANO ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal de Tesis:

Dr. Juan Vargas; Mgs.

PRESIDENTE

FIRMA

Ing. César Castillo; M.Sc.

DIRECTOR

FIRMA

Ing. Marco Acurio; M.Sc

MIEMBRO

FIRMA

Ing. Jorge Sánchez; Mg.

MIEMBRO

FIRMA

COORDINADOR SISBIB ESPOCH

FIRMA

Riobamba, 9 de mayo de 2015

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Carlos Miguel Torres Lascano, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en la presente Tesis y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

N°. CÉDULA: 170413688-4

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi familia, en especial a mi hijo Carlos Mauricio y mi hermana Maru quienes me sirvieron de inspiración para poder culminar con mis estudios y este trabajo de investigación. A mis padres quienes ya no están, pero que me dieron la vida y sus sabios consejos. A mis compañeros y colegas de estudio, a mis maestros, a mis amigos, y a todos quienes colaboraron desinteresadamente en la realización de este trabajo, puesto que sin su ayuda no hubiese sido posible la culminación de esta gran tarea.

Carlos Miguel

AGRADECIMIENTO

A los profesores de la Escuela de Postgrado por su gran esfuerzo formador y orientador dirigido a los profesionales de la educación.

Al Ing. Mg. César Castillo por su calidad humana y su valioso apoyo en la dirección y elaboración de la tesis.

A los señores profesionales miembros del Tribunal, Ing. Mg. Jorge Sánchez, Ing. Mg. Marco Acurio y Dr. Juan Vargas, por la revisión de la memoria y sus acertadas observaciones que me permitieron mejorar este trabajo.

A los colegas, compañeros y amigos y a todos los que de una u otra forma contribuyeron positivamente con mi persona en la realización de la Maestría.

Finalmente a mis familiares, en especial a mi hijo Carlos Mauricio y mi hermana Maru por el incondicional apoyo que me brindaron, para poder culminar con bien la Maestría.

A todos ellos mi inmensa y sincera gratitud.

Carlos Miguel

CONTENIDOS

ÍNDICE DE IMÁGENES	i
ÍNDICE DE TABLAS	iii
RESUMEN	iv
SUMMARY	v
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	3
1. PROBLEMATIZACIÓN Y MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	3
1.1 Formulación del problema	5
1.2 Objetivos	5
1.2.1 <i>Objetivo general</i>	5
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i>	5
1.3 Justificación	6
1.4 Revisión de la literatura	7
1.5 Fundamentación científica	9
1.5.1 <i>Fundamentación epistemológica</i>	9
1.5.2 <i>Fundamentación psicológica</i>	9
1.5.3 <i>Fundamentación pedagógica</i>	9
1.5.4 <i>Fundamentación legal</i>	9
1.6 Fundamentación teórica	10
1.6.1 <i>Críticos de la “teoría de la actividad” de leontiev</i>	12
1.6.2 <i>Software matemático interactivo</i>	17
1.6.3 <i>Características y clasificaciones de los software educativos</i>	17
1.6.4 <i>Software geométricos disponibles en la red o el mercado</i>	18
1.6.5 <i>Valoración cualitativa de softwares en la red</i>	20
1.6.6 <i>Selección del software interactivo geogebra</i>	21
1.6.7 <i>Partes y características de geogebra</i>	25
1.6.8 <i>Generalidades para la creación de objetos geométricos en geogebra</i>	26
1.6.9 <i>Ilustraciones gráficas de geogebra</i>	29
1.7 Conceptualizaciones	40

CAPÍTULO II	43
2. SISTEMA HIPOTÉTICO	43
2.1 Planteamiento de hipótesis y determinación de variables	43
2.1.1 <i>Hipótesis</i>	43
2.1.2 <i>Variable independiente</i>	44
2.1.3 <i>Variable dependiente</i>	44
2.2 Operacionalización conceptual de las variables	45
2.3 Operacionalización metodológica de las variables	46
CAPÍTULO III	48
3. MARCO METODOLÓGICO	48
3.1 Diseño y tipo de estudio	48
3.2 Determinación de la población	49
3.3 Muestra	49
3.4 Método, técnicas e instrumentos	49
3.4.1 <i>Método</i>	49
3.5 Materiales	51
CAPÍTULO IV	52
4. ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS. PROPUESTA	52
4.1 Resultado de encuestas a docentes	52
4.1.1 <i>Encuesta n° 1</i>	52
4.1.2 <i>Encuesta n° 2</i>	54
4.2 Resultado de encuesta a estudiantes	56
4.3 Estadística no paramétrica	57
4.3.1 <i>Dominio psicomotriz: momento diagnóstico</i>	57
4.3.2 <i>Dominio psicomotriz: momento primera evaluación</i>	61
4.3.3 <i>Dominio psicomotriz: momento evaluación final</i>	65
4.4 Estadística paramétrica	70

4.4.1	<i>Dominio cognitivo</i>	70
4.5	Validación de la hipótesis paramétrica	74
4.6	Propuesta	76
4.6.1	<i>Introducción</i>	76
4.6.2	<i>Justificación</i>	77
4.6.3	<i>Objetivo general</i>	77
4.6.4	<i>Objetivos específicos</i>	77
4.6.5	<i>Beneficiarios</i>	78
4.6.6	<i>Contenido</i>	78
4.6.7	<i>Recursos humanos, técnicos y didácticos</i>	78
4.6.8	<i>Guía para el profesor y el alumno</i>	78
CONCLUSIONES		81
RECOMENDACIONES		82
BIBLIOGRAFÍA		

ANEXOS:

ANEXO A

ANEXO B

ANEXO C

ANEXO D

ANEXO E

ANEXO F

ANEXO G

ANEXO H

ANEXO I

ANEXO J

ANEXO K

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1-1	Sistema teórico de la actividad	10
Imagen 2-1	Actividad: necesidad-motivo	15
Imagen 3-1	Partes del geogebra.....	25
Imagen4-1	Descargar geogebra.....	29
Imagen 5-1	Panel escritorio indicador.....	29
Imagen6-1	Panel de elección movimiento.....	30
Imagen7- 1	Panel vectores.....	30
Imagen8- 1	Panel rectas.....	31
Imagen 9-1	Panel polígonos.....	31
Imagen10-1	Panel circunferencias.....	32
Imagen11-1	Panel cónicas.....	32
Imagen12-1	Panel ángulos.....	33
Imagen13-1	Panel simetría.....	33
Imagen14-1	Panel texto y probabilidades.....	34
Imagen15-1	Panel deslizador.....	34
Imagen16-1	Panel desplazamiento.....	35

Imagen17-1	Panel archivo.....	35
Imagen18-1	Panel edición.....	36
Imagen19-1	Panel vista.....	36
Imagen20-1	Panel opciones.....	37
Imagen21-1	Panel herramientas.....	37
Imagen22-1	Panel ventajas.....	38
Imagen23-1	Panel ventana.....	38
Imagen24-1	Circunferencia circunscrita.....	39
Imagen25-1	Circunferencia dados sus centro y uno de sus puntos.....	39
Imagen 1-4	Prueba chi cuadrado 1.....	61
Imagen 2-4	Prueba chi cuadrado momento 2.....	65
Imagen 3-4	Prueba chi cuadrado.....	69
Imagen 4-4	Histograma grupo experimental.....	73
Imagen 5-4	Histograma grupo de control.....	73
Imagen 6-4	Prueba Z.....	75

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-1	Cuadro comparativo.....	20
Tabla 1-2	Operacionalización conceptual de las variables.....	45
Tabla 2-2	Operacionalización metodológica de las variables.....	46
Tabla 1-3	Diseño experimental.....	48
Tabla 2-3	Técnicas e instrumentos.....	51
Tabla 1- 4	Matriz de contingencia: encuesta a docentes 1.....	53
Tabla 2-4	Matriz de contingencia: encuesta a docentes 2.....	55
Tabla 3-4	Matriz de contingencia: encuesta a estudiantes.....	56
Tabla 4-4	Matriz: grupos – dominio psicomotriz.....	58
Tabla 5-4	Matriz de contingencia: momento diagnóstico.....	60
Tabla6-4	Matriz: momentos – dominio psicomotriz.....	63
Tabla7-4	Matriz de contingencia: momento primera evaluación.....	64
Tabla8-4	Matriz: grupos – dominio psicomotriz.....	67
Tabla 9-4	Matriz de contingencia: momento evaluación final.....	68
Tabla 10-4	Logros de rendimiento grupo experimental y control.....	70
Tabla 11-4	Estadísticos descriptivos.....	71
Tabla 12-4	Tabla de frecuencia grupo experimental.....	71
Tabla 13-4	Tabla de frecuencia grupo de control.....	72
Tabla 14-4	Medias y desviaciones muestrales.....	74

RESUMEN

La investigación tiene el propósito de ayudar a los estudiantes de nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas – Escuela Politécnica del Ejército – Extensión Latacunga, para que éstos alcancen el aprendizaje significativo en el tema triángulos usando un software geométrico adecuado. Eso motivó el desarrollo e implementación de este trabajo, seleccionando con todos los docentes de matemáticas, al GeoGebra como el software geométrico más pertinente para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El docente encuentra en el GeoGebra, un mediador de la enseñanza y aprendizaje, que le ayudará en la sistematización del proceso educativo de forma pertinente. Para el estudiante, la utilidad que encuentra, es una forma motivante de construir su propio aprendizaje de modo pragmático.

La metodología de trabajo se fundamentó en la elección de dos grupos de estudiantes: uno de control y otro de experimentación con idéntico número de alumnos. Se hizo un seguimiento del desempeño psicomotriz de los dos grupos a lo largo de la investigación y finalmente se comparó el desempeño académico estadístico numérico reductivo de ambos grupos.

Se usaron dos técnicas para la interpretación de resultados: Chi cuadrado para estadística no paramétrica y Z normalizado para estadística paramétrica. El rendimiento del grupo experimental fue mejor en un 17% que el de control, según la prueba de hipótesis con el zeta normalizado.

Se concluye que la aplicación metodológica del GeoGebra, propicia convenientemente el aprendizaje de geometría y mejora el rendimiento de los estudiantes.

Se recomienda el desarrollo de propuestas similares para todos los temas de la geometría y otras asignaturas, enfocándose en mejorar la interfaz de la herramienta.

Palabras clave:

<SOFTWARE GEOGEBRA>, < RECURSOS DIDÁCTICOS>, <RENDIMIENTO ACADÉMICO>, <HERRAMIENTA VIRTUAL>, <INVESTIGACIÓN>, <CHI CUADRADO>, <APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO>, <ENSEÑANZA PRAGMÁTICA>, <DOMINIO PSICOMOTRIZ>, <UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS>.

SUMMARY

The investigation has the aim to help the leveling students belonging to the University of the Armed Forces – Polytechnic School of the Army -, Extension Latacunga, in function that these achieve the meaningful learning in the topic: triangles by using a geometric adequate software.

This motivated the development and implementing of this work, selecting with all the teacher staff of Mathematics, to the GeoGebra as the geometric software more pertinent for the teaching and learning process.

The teacher found in GeoGebra, a mediator of the teaching and learning that will help in the systematization of the educational process in a pertinent way. For the student, the utility that finds it is a motivating form to build their own learning in a pragmatic form.

The methodology of work was based in the election of two groups of students: one of control and the other of experimentation with identical number of students. A monitoring of the psychomotor performance of both groups was made, and finally the reductive numeric statistical academic performance of both groups was compared.

Two techniques were used for the result interpretation: Chi-square for non-parametric statistics and normalized Z for parametric statistics. The efficiency of the experimental group was better in a 17% than the control group, according to the hypothesis test with the Z normalized.

It is concluded that the methodological application GeoGebra propitiates conveniently the learning of Geometry and improves the performance of students.

It is recommended the development of similar proposals for all the topics of Geometry and other subjects, by focusing in improving the interface of the tool.

Key words:

<SOFTWARE GEOGEBRA>, <DIDACTIC RESOURCES>, <ACADEMIC PERFORMANCE>, <VIRTUAL TOOLS>, <INVESTIGATION>, <CHI-SQUARE>, <MEANINGFUL LEARNING>, <PRAGMATIC TEACHING>, <PSYCOMOTOR DOMINANCE>, <UNIVERSITY OF THE ARMED FORCES>.

INTRODUCCIÓN

El problema que motivó esta investigación corresponde a la pregunta científica: ¿Se puede mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los dominios cognitivo y psicomotriz; en las temáticas relacionadas con la geometría de triángulos de estudiantes que apenas acaban de dejar la educación secundaria e ingresan a los cursos de nivelación de las ingenierías a través de mediadores didácticos como es el caso de GeoGebra?.

La investigación en la actualidad; hablando del uso de laboratorios virtuales trasciende el ambiente de aula para enfocarse en el ámbito de los campus virtuales y su impacto en la preparación de profesionales en educación a distancia. Un detalle de aquello se verá en la revisión bibliográfica de literatura del capítulo primero.

Una vez que el autor recibió en el programa de maestría instrucciones sobre las ventajas del uso de GeoGebra nació el interés de ayudar a los estudiantes de nivelación para que estos alcancen el aprendizaje significativo en el tema triángulos usando el software sencillo de instalar; fácil y gratuito para descargas desde el internet con lenguaje de alto nivel; actualizable directamente; intuitivo y amigable. Eso motivó el interés en implementar la propuesta del investigador.

La utilidad de la investigación para el maestro es que éste encuentra en el GeoGebra, a través de la guía didáctica con los contenidos del curso, un mediador de aprendizaje que le auxiliará en la sistematización del proceso educativo de forma pertinente. La utilidad para el estudiante es que encuentra en la propuesta una forma motivante y divertida de construir su propio aprendizaje profundizando y extendiendo sus reflexiones de modo pragmático.

Esta tesis se divide en los siguientes capítulos:

El primer capítulo describe el problema de la investigación; visto éste no como una carencia sino como una pregunta de orden científico que debe ser respondida en el marco epistemológico de las ciencias humanas en la enseñanza aprendizaje de las ciencias formales.

Incluye el marco teórico de las variables de la investigación; el aprendizaje activo desde el enfoque de Alexei Leontiev; una descripción general sobre el programa GeoGebra y el enfoque respectivo sobre lo que es el estudio sobre los triángulos; la fundamentación científica y teórica que da soporte al estudio así como la revisión bibliográfica que muestra el estado de la investigación en la producción científica internacional. Se incluye este apartado por el requerimiento del método científico de basar nuevas investigaciones en leyes generales.

El segundo capítulo describe el marco de hipótesis de la investigación; nuevamente el requerimiento parte de la condición epistemológica de la ciencia que propende al alejamiento del dogmatismo proponiendo el conocimiento relativo, hipotético y falsable.

El tercer capítulo corresponde a la metodología con la cual se realizó esta investigación; se incluye el diseño experimental que corresponde a un enfoque cualitativo cuantitativo de corte cuasi experimental; población, muestra, técnicas, instrumentos e hipótesis del estudio.

El cuarto capítulo registra los resultados de la investigación: Son 3 momentos los que se trabajaron; dos de ellos recogieron datos cualitativos basados no en encuestas de opinión a estudiantes por el peligro del sesgo que provocan sino de fichas de observación sobre los alcances del desempeño psicomotriz atribuido directamente al trabajo de geometría. Finalmente se incluye un análisis final de alcances de aprendizaje paramétrico, numérico entre los desempeños de los grupos de control y experimental.

Posteriormente a este último capítulo, se incluye las conclusiones a las que llegó este estudio; parten dichas conclusiones tanto de los objetivos e hipótesis del proyecto cuanto de los resultados cualitativo-cuantitativos del estudio. Se registran a continuación las recomendaciones desagregadas de las conclusiones descritas en este capítulo.

Se describe la propuesta mediante la cual se implementó este estudio; se registra la presentación; objetivos; operatividad, mecánica de implementación; descripción general de manera que los usuarios tengan una visión general del documento. Se incluye finalmente la guía didáctica.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMATIZACIÓN Y MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

La idea de los teoremas mecánicos puede remontarse a Leibniz en el siglo 17 y ha sido formulado en formas matemáticas precisas en este siglo por la escuela de Hilbert, así como a sus seguidores en la lógica matemática. El problema consiste en esencia en la sustitución de las dificultades cualitativas heredadas en pruebas matemáticas habituales por complejidades cuantitativas de cálculos en la estandarización de los procedimientos de prueba de manera algorítmica.

Estas complejidades cuantitativas de cálculos, anteriormente muy lejos del alcance de las capacidades humanas, se han vuelto más y más triviales debido a la aparición y el rápido desarrollo de las computadoras. A pesar de grandes esfuerzos, sin embargo, las investigaciones en esta dirección dan lugar a menudo resultados negativos en forma de teorías matemáticas indecidibles. Para citar un resultado positivo notable, podemos mencionar el método de demostración de teoremas en la geometría elemental (Wu, 1978).

En los últimos años el problema de la enseñanza fuera de foco se ha convertido en un tema prominente en el ámbito de la política y la reforma educativa, y los resultados de las investigaciones han sido ampliamente reportados por los medios de comunicación.

Análisis también han demostrado que la enseñanza fuera de foco varía mucho entre las universidades, los maestros y las aulas. La cuestión crucial, sin embargo, y la fuente de gran malentendido es por qué tantos maestros están enseñando materias para las que tienen poca profundización (Ingersson, 1999).

La metodología de la enseñanza en nuestro país debe ir de la mano con los avances tecnológicos contemporáneos en todos los ámbitos de la ciencia. Es por esto que se considera necesario hacer ajustes en el campo de la educación con miras a insertar dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje las diferentes herramientas tecnológicas que permitan facilitar al docente sus explicaciones y la captación de los conocimientos a los estudiantes.

La Matemática en general y en el caso en particular de la Geometría Plana, no pueden estar al margen de este proceso, al contrario, se ve la necesidad de la implementación de métodos

interactivos cada vez más sofisticados para asimilar por parte de los estudiantes y de mejor manera, las definiciones, postulados, axiomas, teoremas, corolarios, fundamentales en el estudio de la geometría.

Conforme los estudiantes van avanzando en el proceso educativo, sienten la necesidad imperiosa de entender de mejor manera los principios matemáticos que por lo general se transmiten mediante recursos técnicos como el pizarrón o los papelógrafos y eso es sólo algo particular de la problemática geométrica que se está planteando.

Hay que entender que el sistema educativo universitario con respecto al secundario, es más autónomo y menos conductista - paternalista, lo que hace que el estudiante que arriba a este nuevo sistema se distraiga de sus obligaciones estudiantiles como consecuencia de dicho cambio. Esta es la razón por la cual se hace muy necesaria la búsqueda de soluciones tecnológicas para la enseñanza, por parte de los docentes.

Un problema más que se puede citar tiene que ver con el currículo y es la desmotivación que se genera en el docente de geometría por el cambio repentino de asignatura de semestre a semestre. Cualquier soporte técnico o herramienta desarrollado por el profesor para afrontar pedagógicamente alguna materia, tarde o temprano se convierte en algo inútil.

Es un hecho que los docentes por diferentes circunstancias, no han incorporado formalmente a su metodología de enseñanza el uso de software matemático específico de Geometría, que aborde los contenidos establecidos de la asignatura por parte de la Senescyt, órgano rector éste de la educación a nivel nacional.

Sin embargo existe por parte de los educadores el interés y la preocupación por disponer de algo certero metodológicamente hablando, que vincule este tipo de tecnología al contexto educativo cotidiano, con programas geométricos específicos y orientados a los contenidos de la materia.

Para finalizar y con lo que quedaría planteado el problema; el docente de Geometría Plana de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas armadas ESPE-EL, en su práctica diaria necesita de la ayuda de herramientas tecnológicas interactivas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia, sin perjuicio de que pueda tener otros tipos de ayuda que coadyuven al fortalecimiento del quehacer académico del profesor dentro del aula.

1.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Se puede mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los dominios cognitivo y psicomotriz; en las temáticas relacionadas con la geometría de triángulos de estudiantes que apenas acaban de dejar la educación secundaria e ingresan a los cursos de nivelación de las ingenierías a través de mediadores didácticos como es el caso de GeoGebra?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Propiciar en los estudiantes la abstracción de los contenidos científicos mediante el software GeoGebra en las temáticas relacionadas con la geometría de triángulos que sirvan de fundamento para el abordaje de las disciplinas académicas básicas y profesionalizantes en el área de la ingeniería.

1.2.2 Objetivos específicos

Evaluar el uso de métodos interactivos en el proceso educativo, frente a los métodos convencionales utilizados por parte de los docentes de la asignatura de Geometría Plana.

- Analizar la pertinencia de la ejecución de este proyecto con propósitos académicos.
- Analizar los diferentes softwares que se disponen en la red y que sirvan para el propósito establecido.
- Establecer la mejor opción de software, para el desarrollo del tema sobre triángulos según el programa de asignatura de Nivelación.
- Desarrollar utilizando el software adecuado, una herramienta interactiva que facilite y mejore la enseñanza de la geometría en el tema de triángulos, la misma que debe constar de vistas: gráficas, algebraicas y textuales.
- Elaborar un instructivo para el profesor, de tal manera que éste tenga el conocimiento y la facilidad adecuada para el manejo del programa interactivo frente a los estudiantes.

- Contrastar la validez de la aplicación del programa interactivo geométrico desarrollado, en el proceso educativo.

1.3 JUSTIFICACIÓN

La inminente necesidad de mejorar la metodología de la enseñanza por parte del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL, debido a que los estudiantes de Nivelación que arriban al sistema de educación superior llegan con una serie de falencias, hizo que sea imperioso el desarrollo de este estudio y su correspondiente implementación.

El estudiante al ser promovido a niveles superiores, se da cuenta que conlleva una serie de vacíos y no puede afrontar eficientemente las nuevas exigencias académicas de las asignaturas de su pensum de estudio relacionados con la Geometría. Mediante la implementación de la metodología didáctica activa el estudiante es capaz de desenvolverse con facilidad y soltura al abordar contenidos abstractos con la ayuda de un mediador interesante y fácil de usar.

Es importante que el estudiante desde un inicio en Nivelación, tenga un conocimiento claro de todos los principios geométricos y qué mejor si se lo hace a través de métodos interactivos, porque eso le permite estar más relacionado con la realidad matemática y universal. Esto se propicia con la implementación del interfaz didáctico.

Al desarrollar esta aplicación interactiva se tiene una herramienta adicional de trabajo, permitiendo que el docente no derive tiempo ni esfuerzo a actividades que la presente propuesta ya ha realizado, por mediación del programa interactivo de aprendizaje activo denominado GeoGebra.

El problema que abordó esta investigación es un problema de actualidad y aunque aún no ha sido solucionado plenamente en la entidad educativa objeto de este estudio ha contribuido en paliar sus consecuencias. La Institución es la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL, el Departamento es el de Ciencias Exactas y el curso es el de Nivelación.

Justificó el desarrollo de esta investigación la demostración de que mediante el uso de paquetes interactivos e informáticos se facilitaron los procesos pedagógicos, métodos y modelos educativos, permitiendo que estos alcancen un alto grado de eficiencia y una optimización del sistema educativo y de los recursos tanto humanos como materiales empleados.

1.4 REVISIÓN DE LA LITERATURA

Responde a la pregunta: ¿Qué se investiga en la actualidad sobre los laboratorios virtuales como mediadores del aprendizaje abstracto?.

Herold, D. (2009) escribió su artículo “*Virtual education: Teaching media studies in SecondLife*” que tras la aprobación del mundo virtual por las instituciones de educación de tercer nivel en todo el mundo, un estudio limitado se llevó a cabo en la Universidad Politécnica de Hong Kong para probar la viabilidad y la conveniencia de emplear un entorno virtual para impartir clases.

Treinta tutoriales se celebraron en un período de cinco semanas en apoyo de un curso de Ciencias de la Comunicación con sesenta estudiantes. La información fue recogida continuamente con los estudiantes y el profesor, a través de entrevistas informales, formularios de contacto, y la observación participante.

Los resultados no apoyan la mayoría de las hipótesis, pero apoyaron el valor de la enseñanza virtual y el aprendizaje en un entorno institucional de apoyo. En el documento se hace hincapié a la necesidad de integrar los entornos virtuales en el marco educativo de cursos y por un examen cuidadoso de los objetivos educativos y el uso de los mundos virtuales en cursos específicos.

Anil Kumar et al (Kumar, A., Kumar, P., & Basu, S. C., 2001) de la Universidad de Wisconsin (2001) registran su investigación denominada “*Student perceptions of virtual education: An exploratory study*” en la cual afirma que con los años los instructores y administradores han trabajado juntos para proporcionar educación a los estudiantes en las instituciones académicas.

Los instructores y administradores son responsables de la difusión de los conocimientos y la metodología es simple: el instructor transfiere el conocimiento a los estudiantes. La fusión de la tecnología informática y las comunicaciones está transformando la forma en que enseñamos y aprendemos.

Las aulas físicas están siendo sustituidas por las aulas electrónicas. Los roles de los participantes se están redefiniendo en donde el instructor se convierte en un facilitador en el aula electrónica y los estudiantes participan en estas clases desde cualquier lugar y en cualquier momento.

Las preguntas que se plantean para las universidades incluyen: ¿Es este el futuro de la educación superior? ¿Los campus virtuales reemplazan las aulas tradicionales? En este estudio

se explora y se discuten las percepciones de los estudiantes de una universidad rural con respecto a la educación virtual. También se discuten las implicaciones para los participantes en el sistema educativo.

Starr, D. (1998) predecía en los 90s la evolución de la educación virtual sosteniendo que con las tecnologías informáticas avanzadas se ofrecen oportunidades para una mayor interactividad entre profesor y alumno desde el escritorio, las universidades públicas y privadas se están moviendo más allá de la conexión rural y mirando a la educación a distancia como un medio más eficiente y barato de educar a una población en la necesidad de la formación continua de un modo competente y competitivo en un mercado mundial en rápida evolución.

Cursos y programas de estudio proporcionados a través de Internet han dado una nueva dimensión a la educación virtual y planteado cuestiones filosóficas y prácticas únicas para el método de entrega, la interacción y la administración de la enseñanza virtual.

El avance de las tecnologías están cambiando las prácticas actuales en la educación a distancia y la ampliación de sus posibilidades para el futuro. Este artículo revisa algunos de los principios básicos para la práctica educativa que considere las tendencias actuales y las posibles direcciones futuras para la educación superior; se consideran Diseño y temas de instrucción para el desarrollo de la educación virtual.

1.5 FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA

1.5.1 Fundamentación epistemológica

La teoría de la actividad de Lev Vygotsky (Arboleda, 2007) es la base de esta investigación por cuanto establece que para que el estudiante produzca el conocimiento sobre triángulos se echa mano a intermediarios de aprendizaje como es el caso del programa interactivo GeoGebra cuyo lenguaje es de alto nivel.

1.5.2 Fundamentación psicológica

Esta importante orientación corresponde al trabajo de Jean Piaget (Piaget, J., & Petit, N., 1971) quien discrimina correctamente las diferentes etapas de desarrollo del ser humano respetando su edad cronológica; así, un niño no aprende como un hombre. Las herramientas de mediación en este caso no buscan entretener ni motivar el aprendizaje de matemáticas de hombres adultos de universidad sino traducir el lenguaje abstracto en concreto para la abstracción de las ciencias exactas a ser aplicadas en los conocimientos de ingeniería.

1.5.3 Fundamentación pedagógica

La realidad social en la que se desenvuelve el estudiante universitario han hecho posible la realización de este trabajo de investigación; a diferencia del paradigma cuantitativo frío del método cartesiano, este estudio ha tomado en cuenta la pedagogía del oprimido la cual busca la libertad interior del sujeto, que es lo que justamente pretende el investigador (Freire, 2005).

1.5.4 Fundamentación legal

La Constitución de la República del Ecuador (2008), el Plan Nacional del Buen Vivir, la Ley Orgánica de Educación Superior (Asamblea, 2010) y sus orientaciones referentes a la pertinencia de las universidades en el Ecuador forman la base del desarrollo de esta investigación que busca mejorar las capacidades de los ecuatorianos (PNBV, Objetivo 2, 2013) a través de la implementación de la tecnología en el proceso educativo.

1.6 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La teoría de la actividad de Leontiev; fundamento del aprendizaje a través de laboratorios reales y virtuales como GeoGebra.

La teoría de la actividad (Leontiev, 2014) del alumno de Vygotsky es el fundamento teórico en el cual se basa el desarrollo de esta tesis y propuesta complementaria: La teoría de la actividad orienta la participación involucrada del estudiante en su propio aprendizaje a través del uso de mediadores; como es el caso de GeoGebra y su interacción (ZDP) con los compañeros y el maestro como facilitador. La imagen siguiente muestra una secuencia sistemática de la operación de esta teoría.

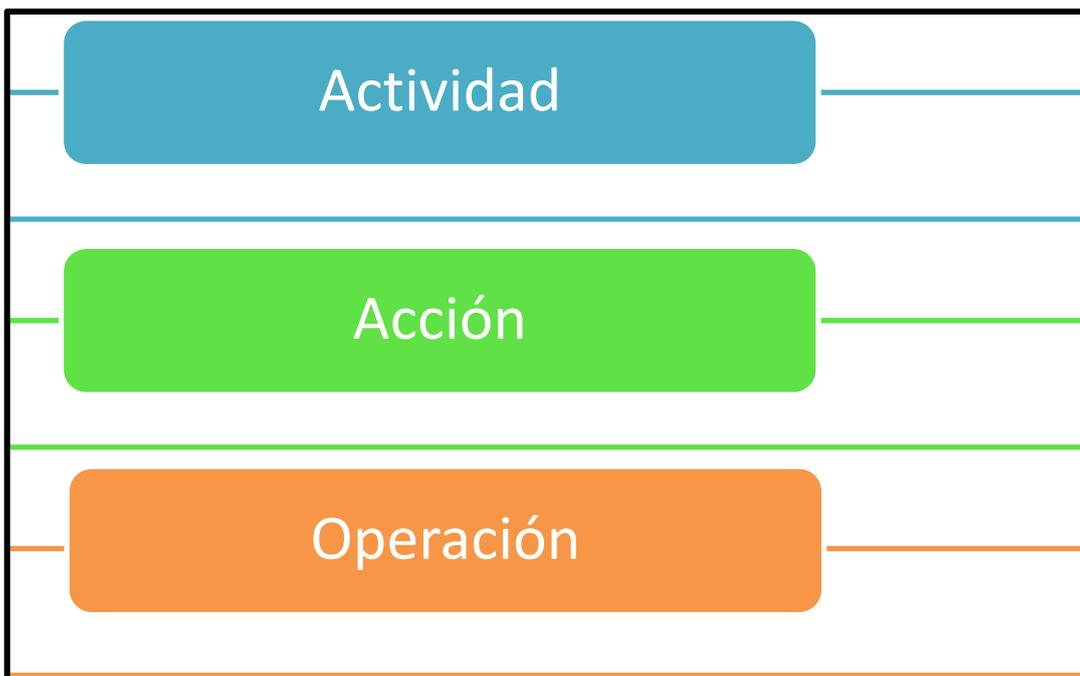


Imagen 1-1. Sistema teórico de la actividad

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Los desarrolladores contemporáneos de la teoría de la actividad de Leontiev reinterpretan, acomodan y actualizan la aplicación de esta teoría en el marco de la contemporaneidad; dando nueva vigencia a esta propuesta que vio la luz en los años 20 y 30 del siglo 20.

La teoría histórico-cultural de la actividad fue iniciada por un grupo de psicólogos rusos revolucionarios en los años 1920 y 1930. El enfoque era Lev Vygotsky (1896-1934) y sus colegas A. Leontiev y A. Luria. Ellos formularon un nuevo concepto teórico de trascender la comprensión dominante de la psicología que luego fue dominado por el psicoanálisis y el conductismo. Esta nueva orientación fue un modelo de artefacto mediado y la acción orientada a objetos (Ordóñez, 2004).

La relación entre el agente humano y los objetos del entorno está mediada por medios culturales, herramientas y signos. Leontiev introdujo un énfasis en la división del trabajo como un proceso histórico fundamental detrás de la evolución de las funciones mentales. Mediada por las herramientas, el trabajo también se lleva a cabo en condiciones de la actividad colectiva conjunta. La distinción entre la actividad, la acción y la operación se convirtió en la base del modelo de la actividad de Leontiev.

La teoría de la actividad fue principalmente el resultado de un esfuerzo mayor para desarrollar una nueva psicología basada en la filosofía marxista, un esfuerzo que comenzó poco después de la revolución rusa de 1917. Varios programas para la reestructuración de la psicología en una base marxista se formularon en los años 20 y 30, y debates muy acalorados entre los defensores de los distintos enfoques no eran infrecuentes en ese momento.

Uno de los primeros postulados de los psicólogos soviéticos fue el llamado "principio de unidad e inseparabilidad de la conciencia (es decir, la mente humana) y la actividad". El significado de este principio es que la mente humana llega a existir, se desarrolla, y sólo puede ser entendida en el contexto de la interacción significativa orientada a objetivos y socialmente determinada entre los seres humanos y su entorno material (Bannon, L. J., & Bødker, S, 1989).

La teoría de la actividad no es una "teoría" en la interpretación estricta del término. Se compone de un conjunto de principios básicos que constituyen un sistema conceptual general que puede ser utilizado como una base para las teorías más específicas. Estos principios básicos de la teoría de la actividad incluyen el objeto de orientación hacia los conceptos duales de internalización / externalización, la herramienta de mediación, la estructura jerárquica de la actividad, y el desarrollo continuo.

El principio de los objetos orientados es que los seres humanos viven en una realidad que es objetiva en un sentido amplio; las cosas que constituyen esta realidad no sólo tienen las propiedades que se consideran objetivo, de acuerdo con las ciencias, sino son socialmente propias en sí mismas.

La teoría de la actividad (Leontiev, 2014) diferencia entre las actividades internas y externas. La noción tradicional de los procesos mentales corresponde a las actividades internas. La teoría de la actividad hace hincapié en que las actividades internas no pueden entenderse si se analizan por separado, al margen de las actividades externas, porque hay transformaciones mutuas entre estos dos tipos de actividades: la internalización y la externalización; el contexto general de la actividad (que incluye tanto componentes externos como internos) que determinan cuándo y por qué las actividades se convierten de internas a externas y viceversa.

El énfasis de la teoría de la actividad actúa en los factores sociales y en la interacción entre los agentes y de sus entornos (Ausubel, 1980); explica por qué el principio de mediación juega un papel central dentro del enfoque. En primer lugar, las herramientas dan forma a la manera de cómo los seres humanos interactúan con la realidad. Y, de acuerdo con el principio anterior de internalización / externalización, dan forma a las actividades externas que en última instancia se traduce en la formación de los principios internos.

En segundo lugar, las herramientas suelen reflejar las experiencias de otras personas que han tratado de resolver problemas similares en un momento anterior y modificaron la herramienta para hacerla más eficiente. Esta experiencia se acumula en las propiedades estructurales de las herramientas (forma, material, etc.), así como en el conocimiento de cómo se debe utilizar la herramienta.

1.6.1 Críticas de la “teoría de la actividad” de Leontiev

A continuación los principales críticos de la “teoría de la actividad” de Leontiev, con sus correspondientes opiniones.

Liam Bannon & Susanne Bødker

En la teoría de la actividad humana, la unidad básica de análisis es la actividad o trabajo humano. Las actividades humanas son impulsadas por ciertas necesidades que las personas desean para alcanzar un fin determinado (Bertelsen, O. W., & Bødker, S, 2002). Esta actividad está mediada normalmente por uno o más instrumentos o herramientas (el concepto de mediación es fundamental para toda la teoría).

Por ejemplo el carpintero usa una sierra y un martillo para producir una casa de madera y similares; el maestro utiliza el lenguaje, libros, fotografías, mapas, etc. para enseñar a sus alumnos la matemática. Sin embargo, la construcción de una casa de carpintero no está sola en el mundo. El artesano de nuestra historia trabaja junto con otros carpinteros, así como con otros trabajadores de la construcción.

El conjunto de los carpinteros dividen su trabajo entre ellos. Las formas de hacer el trabajo, basadas en la tradición y compartidas por un grupo de carpinteros, enfermeras o similares se llama práctica o praxis. Al obtener una formación como carpintero o enfermero uno llega a compartir esta praxis. Al mismo tiempo que cada individuo que tiene una praxis él o ella cambian también, mediante la presentación de nuevas formas de hacer las cosas.

Los seres humanos median su actividad por los artefactos(Leontiev, 2014): el carpintero utiliza un martillo para clavar un clavo, las enfermeras utilizan el lenguaje y los registros para coordinar sus acciones hacia los pacientes y con los demás, etc. Las herramientas, las normas y el lenguaje puede ser vistos como artefactos para la actividad: se hacen por los seres humanos que median en las relaciones entre los seres humanos o entre las personas y el material o producto en diferentes etapas.

Una de las principales aportaciones de Vygotsky fue que él también vio sistemas de lenguaje y símbolos como herramientas psicológicas para el desarrollo de la condición humana(Vygotsky, 1987). Los artefactos no sólo están allí para nosotros cuando se nos presenta una determinada actividad, sino que también son un producto de nuestra actividad, y como tales se cambian constantemente a través de la actividad. Esta "mediación" es esencial en las formas en que podemos entender los artefactos a través de la teoría de la actividad.

Martin Ryder

En sus términos más simples, una actividad se define como la participación de un sujeto hacia una cierta meta u objetivo. En la naturaleza, una actividad es típicamente no mediada. Recogiendo una mora de un arbusto y comer es una actividad simple, sin mediación que implica la acción directa entre el sujeto y el objeto.

En la mayoría de los contextos humanos las actividades están mediadas a través de la utilización de instrumentos culturalmente establecidos, incluyendo el lenguaje, artefactos, y los procedimientos establecidos. La recolección de hongos en el bosque y comerlos es una actividad que está mal aconsejada sin alguna forma de mediación.

Es prudente apropiarse de un conocimiento previo, una guía de campo, la educación previa en micología, el asesoramiento directo de un recolector de hongos con experiencia, o alguna otra forma de realización de la experiencia humana con los hongos o setas(Wilson, B., & Ryder, M. , 1996).

Es necesario llevar la experiencia previa de la historia en la actividad actual. Los animales tienen un solo mundo, el mundo de los objetos y situaciones directas, mediadas sólo a través del

instinto. Los seres humanos tienen mundos ejecutivos de otros seres humanos que pueden invocar en el presente a través del uso del lenguaje y artefactos (Luria, 1981) como en el caso del GeoGebra.

Una actividad es realizada por un agente humano (sujeto) que está motivado hacia la solución de un problema o propósito (objeto), y mediada por instrumentos (artefactos) en colaboración con los demás (la comunidad). La estructura de la actividad está limitada por factores culturales, incluyendo convenciones (reglas) y estratos sociales (división del trabajo) en el contexto (Leontiev, 2014).

Engeström llama la atención sobre el papel de la mediación de la comunidad y el de las estructuras sociales, incluyendo la división del trabajo y los procedimientos establecidos. En el ejemplo de los hongos, un recolector con más conocimiento podría servir como capacitador, que dicta las reglas. Lo más probable, el experto podría servir en la capacitación como profesor o entrenador, explicando los criterios que utiliza para discriminar entre las setas comestibles y las venenosas.

Los conocimientos necesarios podrían venir en forma de un conjunto estructurado de reglas que especifican claramente los procedimientos detallados que se deben seguir en la selección de hongos comestibles. Es interesante hacer uso de algún instrumento exótico que puede probar una pieza de la seta y realizar análisis químico necesario para detectar sustancias venenosas. El conocimiento necesario para un sistema de actividad puede surgir en cualquiera mediante una combinación de instrumentos, artefactos y roles de mediación (Vygotsky, 1987).

Según Vygotsky, un individuo humano nunca reacciona sólo directamente al medio ambiente. La relación entre el agente humano y el objeto está mediada por medios culturales o artefactos. Los tipos básicos de estos medios son signos y herramientas. Durante la socialización, un individuo interioriza, mediante la participación en actividades comunes con otros seres humanos los medios de la cultura: el lenguaje, teorías, artefactos técnicos, así como las normas y modos de actuación (Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R. L., 1999).

La conciencia no existe, no está situada dentro de la cabeza del individuo, sino en la interacción realizada a través de la actividad material, entre las formas objetivas de la cultura creada por la mano de obra de la humanidad.

La teoría de la actividad desarrolló aún más las ideas de Vygotsky; A. Leontiev, discípulo de Vygotsky destacó que la actividad también está mediada socialmente: la conciencia y el significado siempre se forman en conjunto, la actividad colectiva (Leontiev, 2014). Como resultado, la unidad de análisis en el estudio de la actividad mediada es humana, es un sistema

de actividad, la comunidad de actores tiene un objeto común de la actividad (Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R. L. , 1999).

El modelo mediato social se caracteriza por la división del trabajo y las reglas de mediación de la interacción entre los individuos en el sistema de actividad. El sistema de actividad colectiva como unidad de análisis conecta el punto de vista psicológico, cultural e institucional para el análisis. El estudio de la actividad deja de ser la psicología de un individuo y se centra en la interacción entre un individuo, los sistemas de artefactos y otras personas en el desarrollo de marcos institucionales históricamente(Leontiev, 2014).

Maximina M. Freire

El intento de correlacionar el contexto, los participantes y los textos como interactuantes en eventos comunicativos sugiere la posibilidad de interpretar su interrelación mediante la aplicación del análisis de la triple estratigráfica de la actividad social (Leontiev, 2014). Este marco ayuda a entender las actividades, acciones y operaciones realizadas por los participantes y para revelar sus motivos, objetivos y condiciones instrumentales, respectivamente(Freire M. , 1995).

Para Leontiev, el concepto de actividad responde a una necesidad específica del agente activo: se mueve hacia el objeto de esta necesidad y termina cuando es satisfecho. En consecuencia, el concepto de actividad está necesariamente conectado con el concepto de motivo.

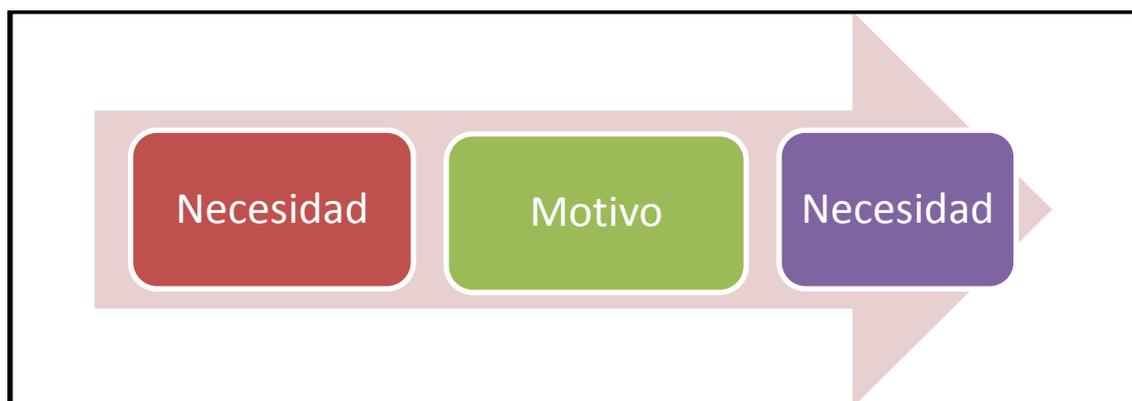


Imagen 2-1. Actividad: Necesidad-motivo

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Las actividades se traducen en la realidad a través de un específico conjunto de acciones que están subordinadas a la idea de tener un objetivo consciente. Comparativamente, las actividades y acciones son realmente diversas realidades que no coinciden: una acción puede ser decisiva en

la realización de diferentes actividades; por el contrario, uno de los motivos puede dar lugar a diferentes objetivos y, en consecuencia, puede producir diferentes acciones(Leontiev, 2014).

La distinción entre las acciones y operaciones emerge claramente en el caso de acciones que involucran herramientas: mientras que las acciones están conectadas a objetivos conscientes, las operaciones están relacionadas con comportamientos rutinarios realizados de forma automática, sin incluir el mismo nivel de conciencia.

Bonnie A. Nardi

La teoría de la actividad es una herramienta descriptiva poderosa, más que una teoría altamente predictiva. El objeto de la teoría de la actividad es comprender la unidad de la conciencia y de la actividad. La teoría de la actividad incorpora fuertes nociones de intencionalidad, la historia, la mediación, la colaboración y el desarrollo en la construcción de la conciencia(Nardi, B. A., Whittaker, S., & Bradner, E., 2000).

Los teóricos de la actividad argumentan que la conciencia no es un conjunto de actos discretos incorpóreos cognitivos (la toma de decisiones, la clasificación, el recuerdo) y desde luego no es el cerebro; más bien la conciencia que se encuentra en la práctica cotidiana: eres lo que haces.

Lo que se hace está bien e inexplicablemente incrustado en la matriz social de la que cada persona es una parte orgánica. La matriz social se compone de personas y objetos. Los artefactos pueden ser herramientas físicas o sistemas de signos como el lenguaje humano. La comprensión de la interpenetración de la persona, otras personas y artefactos en la actividad cotidiana es la teoría de la actividad(Leontiev, 2014); el reto que se ha establecido para sí mismo.

En la teoría de la actividad, los artefactos son mediadores del pensamiento y el comportamiento humano; no ocupan el mismo espacio ontológico. La gente no se reduce a "nodos" o "agentes" en un sistema; el "procesamiento de información" no se ve como algo a ser modelado de la misma manera para las personas y las máquinas.

La teoría de la actividad propone que la actividad no se puede entender sin comprender el papel de los artefactos en la existencia cotidiana, la teoría de la actividad tiene que ver con la práctica, es decir, hacer actividad, que implica significativamente "el dominio de los dispositivos y herramientas de la actividad laboral externos".

1.6.2 Software matemático interactivo

Los software matemáticos interactivos con fines educativos, forman parte de las TIC'S y su definición se le debe tomar en el sentido de que es cualquier paquete informático, que tiene como objetivo ser usado como herramienta y recurso didáctico para el proceso educativo de la matemática, con un aceptable grado de interacción entre el programa y el usuario.

1.6.3 Características y clasificaciones de los software educativos

En general, Los software de corte educativo tratan de temas relacionados a la matemática y a otras disciplinas como la física, la química, etc. Para Marquès (1996) todos estos software comparten cinco características fundamentales:

- Poseen un propósito didáctico desde el momento de su creación.
- Hacen uso de la computadora para el planteo de las actividades que los alumnos tienen que realizar.
- Son interactivos en mayor o menor grado, contestando oportunamente las acciones de los estudiantes. Permiten un diálogo y un intercambio de información entre el ordenador y los alumnos.
- Individualizan el trabajo de los estudiantes, adaptándose al ritmo de cada uno de ellos y modificando sus actividades según las respuestas dadas.
- Son fáciles de usar puesto que los conocimientos informáticos necesarios para utilizar la mayoría de estos programas son mínimos, aunque cada programa tiene sus propias reglas de funcionamiento que es necesario conocer.

En cuanto a una clasificación de los software educativos, los aspectos que se toman en cuenta para tal propósito son los siguientes (Marquès, 1996): los contenidos, destinatarios, estructura, posibilidad de modificar sus contenidos, bases de datos, medios que integra, inteligencia, objetivos educativos que pretende facilitar, procesos cognitivos que activa, función en el aprendizaje, tratamiento de los errores, función en la estrategia didáctica y diseño.

Mientras que Cataldi (2000) considera que uno de los aspectos claves que se debe tomar en cuenta en el desarrollo de software educativo, es el que se refiere a las características de la interface de comunicación, que a su vez deben coincidir con la teoría comunicacional aplicada y con las estrategias que se desarrollan para el logro de determinados procesos mentales. De

acuerdo a este criterio, su autora, hace la siguiente clasificación de los software educativos: tutoriales, simuladores, entornos de programación y herramientas de autor.

Por otro lado Galvis Panqueva (1992), piensa que una forma inicial de clasificar los software educativos, es dividirlos en algorítmicos y heurísticos.

Los **algorítmicos** son aquellos que hacen que el aprendizaje fluya desde quien enseña hacia el que aprende. Quien diseña el software planifica la secuencia de actividades que tiene que realizar el estudiante; el rol del alumno es asimilar la mayor cantidad de conocimientos posibles por medio de la utilización de la herramienta.

En los software de tipo **heurístico**, su característica fundamental, es que el aprendizaje se lleva a cabo por experimentación y descubrimiento. El diseñador del software crea ambientes, que el alumno debe explorar y llegar al conocimiento a partir de la experiencia. Estos conocimientos pueden someterse a prueba inmediatamente con la misma herramienta.

El autor antes mencionado, hace la siguiente clasificación para los software educativos: tutoriales, sistemas de ejercitación y práctica, simuladores, juegos educativos, sistemas expertos y sistemas inteligentes de enseñanza.

1.6.4 Software geométricos disponibles en la red o el mercado

Hay un sinnúmero de software geométricos interactivos en el mercado informático que se encuentran a las órdenes del público, como se mencionó en el capítulo 1. Los más importantes se detallan y se definen a continuación y de los cuales se seleccionará el más adecuado para la aplicación que se pretende hacer. La selección se hará en función de las necesidades académicas y pedagógicas del aula; y, también en función de las leyes ecuatorianas, las mismas que determinan que el software que se aplique a la educación tiene que ser libre.

The Geometer's Sketchpad: Es un programa comercial popular de geometría interactiva que sirve para explorar otras áreas de las matemáticas: geometría euclidiana, álgebra y cálculo. Fue creado por Nicholas Jackiw. Está diseñado para funcionar en Windows 95 o Windows NT 4.0 o posterior y Mac OS 8.6 o posterior (incluyendo Mac OS X). También funciona en Linux bajo Wine con algunos errores.

Sketchpad no sólo es uno de los primeros, sino que también es reconocido como uno de los más potentes procesadores geométricos. Las características que lo distinguen, dentro de la amplia gama de software de geometría dinámica, son principalmente las posibilidades que brinda para graficar ecuaciones, insertar botones para controlar animaciones (incluso opciones de visualización como ocultar/ mostrar objetos) y la elaboración de guiones de las construcciones

(The Geometer's Sketchpad, 2015).

GeoGebra: Es un software matemático interactivo libre, diseñado para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico; es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, cálculo y otras disciplinas.

Su categoría más cercana es software de geometría dinámica. Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica (Wikipedia 30-05-2014).

GeoEnzo: Es una herramienta de dibujo para pizarras digitales. Incluye herramientas virtuales, como un compás, una escuadra y una regla.

La interface gráfica de GeoEnzo es atractiva y fácil de utilizar, realmente simula un pizarrón y la utilización de herramientas de geometría para realizar trazos, por esta razón, este software es práctico y de gran utilidad para los docentes que imparten clases de matemáticas y/o geometría.

CabriGeometry Plus II: Es un software y una herramienta para la enseñanza - aprendizaje de Geometría, dirigido a profesores de matemática y alumnos de enseñanza media. Es un software comercial producido por la compañía francesa Cabrilog. Fue diseñado pensando en la facilidad de uso.

El programa permite al usuario animar las figuras geométricas, demostrando una considerable ventaja sobre aquellos que son dibujados en la pizarra. Las relaciones entre puntos de un objeto geométrico fácilmente pueden ser demostradas, que puede ser útil en el proceso de aprendizaje. También hay funciones gráficas y visualización que permiten la exploración de las conexiones entre álgebra y geometría. El programa puede ejecutarse bajo Windows o Mac OS.

Autocad: Es un software de diseño asistido por computadora para dibujo en dos y tres dimensiones. Actualmente es desarrollado y comercializado por la empresa Autodesk. El término AutoCAD surge como creación de la compañía Autodesk, teniendo su primera aparición en 1982.

AutoCAD es un software reconocido a nivel internacional por sus amplias capacidades de edición, que hacen posible el dibujo digital de planos de edificios o la recreación de imágenes

en 3D. AutoCAD es uno de los programas más usados; elegido por arquitectos, ingenieros y diseñadores industriales.

Desglosando su nombre, se encuentra que Auto hace referencia a la empresa creadora del software (Autodesk) y CAD a Diseño Asistido por Computadora (por sus siglas en inglés) (Wikipedia 30-05-2014).

Geometrycalculator: Permite calcular cuatro medidas distintas (circunferencia, área, superficie y volumen) de diversas figuras geométricas, aplicando las diferentes fórmulas adecuadas para cada cálculo junto con los valores proporcionados (Godino, 2004).

Geometrycalculator es un software que realiza operaciones básicas de cálculo de áreas. Esta aplicación no resuelve operaciones complejas, sin embargo el principal uso es para fines pedagógicos ya que permite que su uso sea práctico.

1.6.5 Valoración cualitativa de softwares en la red

Tabla 1-1. Cuadro comparativo

Parámetro a medir	GeoGebra	AUTOCAD	CabriGeometry plus II	GeometryCalculator	GeoEnzo	Geometer'sSketchpad
Licencia libre	X			X	X	
Gráficos algebraicos	X		X		X	X
Gráficos a mano alzada	X	X	X		X	X
Gráficos en 3D	X	X				
Gráficos en 2D	X	X	X	X	X	X
Gráficos fáciles de interpretar	X	X	X		X	X
Variedad de herramientas	X	X			X	X
						CONTINUA.....

					CONTINUACIÓN	
Interface atractiva	X	X	X		X	X
Fácil de utilizar	X	X	X	X	X	X
Variedad de idiomas	X	X	X		X	X
Variedad de sistemas operativos	X					
Exportación a otros formatos	X				X	X
PONDERACIÓN FINAL	12	8	7	3	10	9

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: REVISTA VÍNCULOS Vol 10

1.6.6 Selección del software interactivo GeoGebra

Una poderosa herramienta de enseñanza ha sido la integración y el uso de la tecnología mediante GeoGebra. Elegir GeoGebra como el software para ser utilizado en los estudios a nivel superior y para este trabajo tiene varias razones. En primer lugar, GeoGebra es un software libre, multiplataforma de código abierto de matemática dinámica (Hohenwarter, M., & Jones, K., 2007).

Debido a su naturaleza de código abierto no existen problemas de licencia asociados con su uso, permitiendo a los estudiantes y profesores la libertad de utilizarlo tanto dentro del aula como en casa. En segundo lugar, GeoGebra combina la geometría dinámica, álgebra, cálculo, hojas de cálculo y (que otros paquetes tratan por separado) en un solo paquete fácil de usar por lo que es adecuado para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas tanto desde la escuela primaria hasta la universidad (como en el caso de esta investigación).

En tercer lugar, GeoGebra tiene una gran cantidad internacional de usuarios y la comunidad de desarrolladores con los usuarios de 190 países el software se traduce en la actualidad a 55 idiomas y genera cerca de 300.000 descargas por meses. La característica más poderosa de GeoGebra es la conexión que establece entre la geometría, el Álgebra, cálculo y estadística (Losada, 2007).

GeoGebra es un sistema de geometría dinámica en la que se trabaja con puntos, vectores, segmentos, rectas y secciones cónicas. GeoGebra es también un sistema algebraico dinámico,

donde las ecuaciones y coordenadas se pueden introducir directamente. Las funciones pueden ser definidas algebraicamente y luego cambian dinámicamente después.

GeoGebra tiene una pantalla sencilla en el fondo, que tiene la capacidad de hacer frente a variables para los números, vectores y puntos, encontrar derivadas e integrales de funciones y ofrece comandos como raíz y extremos. Estos dos puntos de vista son característicos de GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica que corresponde a un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

La vista de hoja de cálculo se ha añadido recientemente por lo que es posible introducir datos en los gráficos de hojas de cálculo y ver en la ventana de geometría gráfica mientras mantiene su característica dinámica. Aunque GeoGebra ha tenido como objeto principal la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias, sin duda, tiene usos en la educación superior e incluso en los niveles de primaria (GeoGebra, 2014).

La necesidad de hacer que los profesores competentes usen la tecnología en el aula aumenta rápidamente. Sin embargo, el conocimiento de la tecnología no garantiza un buen uso de la tecnología en el aula. La cuestión de lo que los profesores necesitan saber para poder incorporar la tecnología en su enseñanza ha recibido una gran atención en la última década.

(Mishra, P., & Koehler, M., 2006) han introducido el término 'Conocimiento didáctico del contenido tecnológico' para describir un marco de conocimientos necesarios del maestro para integrar la tecnología en el aula. El conocimiento de la tecnología no puede aislarse de los contenidos y la enseñanza de las buenas matemáticas, lo que requiere una comprensión sobre cómo la tecnología está relacionada con la pedagogía y las matemáticas (Hughes, 2005).

En el instituto, GeoGebra se ha integrado en todos los cursos el entrelazado de las tres principales fuentes de conocimiento: la tecnología, la pedagogía y las matemáticas. Los siguientes son ejemplos que ilustran algunos de los conceptos presentados en los cursos y cómo GeoGebra ayudó a los maestros en servicio la exploración matemática, el descubrir y comprender algunos conceptos matemáticos muy abstractos.

Fraciones continuas

Euler demostró en 1737 que cada número racional podría expresarse como una fracción continua simple. El GeoGebra permite a los profesores hacer el mismo descubrimiento de una manera gráfica y dinámica. Con GeoGebra es muy fácil crear rectángulos con longitudes racionales (GeoGebra, 2014).

Después de crear rectángulos, se puede proceder a dividir el rectángulo en cuadrados de una manera muy sistemática. Después de que el rectángulo se llena con plazas más grandes posibles que caben dentro de las dimensiones del rectángulo se pueden escribir como fracción propia y se transforman en una fracción continua.

La conexión entre el álgebra y la representación geométrica de la fracción continua es inmediata y poderosa. La representación geométrica de fracciones continuas de finitos de GeoGebra ofrece a los profesores la oportunidad de descubrir una representación de números racionales que es directamente conectado al algoritmo de Euclides.

Este elegante, pero muy abstracto algoritmo que encuentra el máximo común denominador se hace transparente a los profesores una vez que vean la representación geométrica en GeoGebra. La siguiente pregunta natural es ¿qué pasa si los números no son racionales; una investigación en GeoGebra con el rectángulo de oro ayuda a los maestros a descubrir que algunos tipos de números irracionales tienen un patrón interesante en su fracción continua de expansión al infinito.

El rectángulo de oro es uno de los mejores ejemplos a utilizar y la representación de la proporción áurea como fracción continua es hermosa en sí misma. La convergencia de la proporción áurea se puede explorar desde la expansión en fracciones continuas y la conexión entre la proporción áurea y los números de Fibonacci que se muestran de forma natural.

La investigación adicional en GeoGebra ayuda a los maestros para que reconozcan que sólo los números son soluciones de ecuaciones de segundo grado que tienen una fracción periódica de expansión continua. En GeoGebra es crucial el descubrimiento de la relación entre la similitud en la representación geométrica y la periodicidad en la expansión de fracciones continuas.

Lagrange utilizando fracciones continuas para encontrar el valor de las raíces irracionales, demostró que una raíz real cuadrática irracional es una fracción periódica continua. Los maestros y estudiantes pueden hacer el mismo descubrimiento gracias al uso de GeoGebra. El tema de las fracciones continuas es una rica temática de matemáticas con muchas conexiones con el currículo escolar(Escuder, 2011).

Con este tema no sólo los maestros aprenden contenido matemático sino también tecnología, ya que tienen que construir representaciones geométricas en GeoGebra, así como la pedagogía permite a los maestros experimentar una hermosa lección sobre la base de la investigación y el descubrimiento durante la construcción de su propia comprensión matemática. Otro ejemplo del uso de GeoGebra son las espirales.

Estas construcciones sencillas en GeoGebra puede explorarse geoméricamente y su relación con el infinito geométrico, series y patrones se convierten en un tema de importancia crucial en la matemáticas a nivel superior. Matemáticamente, la espiral Baravelle es una ilustración geométrica de una básica concepción de cálculo; la suma de una serie geométrica infinita(GeoGebra, 2014).

Las espirales Baravelle se definen como espirales de anidación, que se forman marcando el punto central de los lados de un polígono y luego uniendo los puntos de los lados adyacentes para formar un triángulo isósceles en el interior del polígono original.

La evidencia de los efectos de GeoGebra a lo largo de los últimos años

Los estudios anuales repetidos han demostrado que los maestros participantes han aumentado su capacidad de dominio espacial. La información se obtiene mediante diversos estudios que incluyen varios instrumentos como encuestas, observaciones en el aula y entrevistas dadas a todos los participantes en diferentes partes alrededor del mundo(GeoGebra, 2014).

GeoGebra fue preparado para elevar el entusiasmo en la aplicación efectiva y prudente de la tecnología para la educación. GeoGebra también influye en el cambio de los hábitos de los maestros. Dos características son específicamente mencionadas como causantes de este cambio:

1. Software ganador de premios por su innovación **2.** Proporciona un modelo pedagógico eficaz para los maestros(Escuder, 2011).

Los aspectos de GeoGebra que lo hacen ganador de premios, es la medida en que dichos aspectos son relacionados con los cambios de hábitos de los maestros. El apoyo a las demostraciones del maestro, lo que permite que los estudiantes tengan oportunidades de exploración en tiempo real, y que, incluso si el software que se usa es GeoGebra se propondrán muchas expectativas de mejoramiento en los docentes en cuanto a normas para el futuro uso de la tecnología.

GeoGebra también proporciona un modelo pedagógico eficaz para los maestros. Lo hace, modelando las normas asignadas para la Educación Superior. Las demostraciones de GeoGebra se explican como una contribución a la modelización de una pedagogía eficaz para los profesores(GeoGebra, 2014).

1.6.7 Partes y características de GeoGebra

Barra de herramientas: Mediante la cual se pueden dibujar las diferentes formas geométricas.

Barra de menú de órdenes: A través de la cual se seleccionan alternativas de dibujo y de edición.

Vista algebraica: En esta parte se encuentran las expresiones algebraicas de todos los objetos geométricos dibujados y definidos. Se clasifican en expresiones de objetos libres y objetos dependientes.

Vista gráfica: En esta zona se visualizan las formas geométricas establecidas.

Línea de comandos: Llamada también barra de entrada, permite ingresar los comandos para crear objetos geométricos.

Hoja de cálculo: Hace las mismas funciones de Microsoft Excel (GeoGebra, 2015).

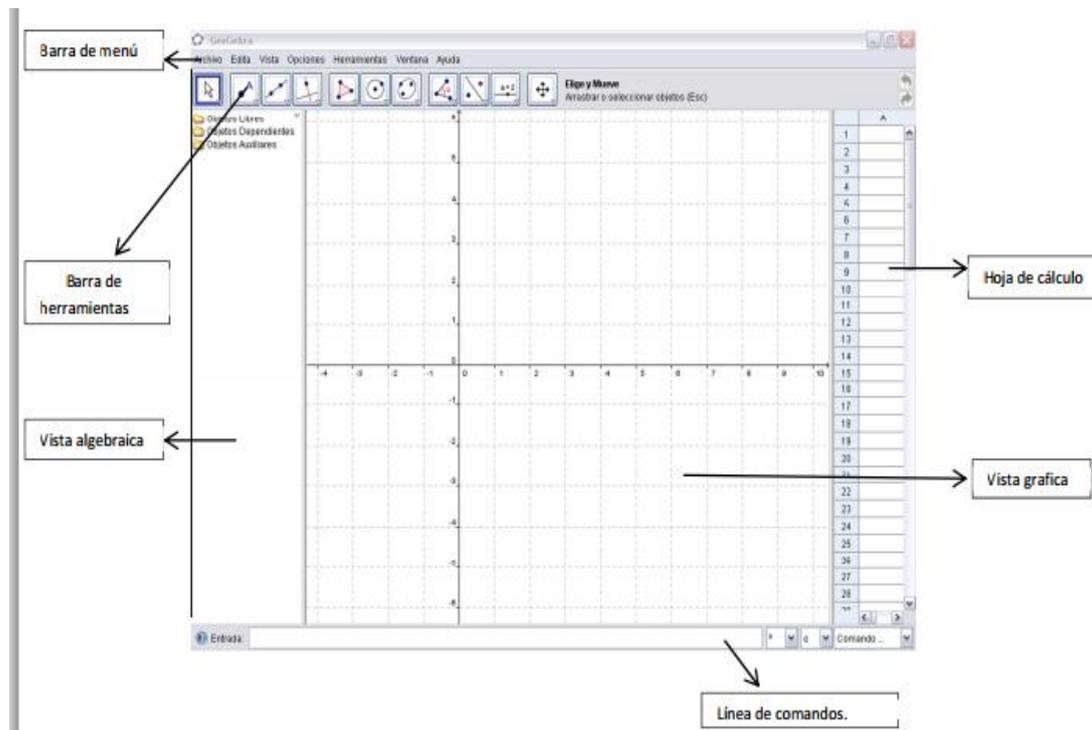


Imagen 3-1. Partes del GeoGebra

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra.org

1.6.8 Generalidades para la creación de objetos geométricos en GeoGebra

Se introduce información en el GeoGebra para dibujar, principalmente con la **barra de herramientas** o por la **barra de entrada**. Hay que tener en cuenta que GeoGebra por defecto rotula y pone nombre a todo cuanto objeto geométrico creamos. Se puede modificar a gusto del usuario, pero por omisión lo hará alfabéticamente utilizando mayúsculas para PUNTOS y minúsculas para CURVAS.

El menú de órdenes (barra de herramientas) se compone de una serie de iconos muy descriptivos de la función que realizan. Pinchando en el pequeño triángulito que tienen en su esquina inferior derecha, se obtiene un menú desplegable con diferentes posibilidades. Cuando se selecciona una de ellas, a la derecha de los iconos un breve texto explica de manera precisa cómo usar la herramienta seleccionada (GeoGebra, 2015).

Barra de entrada o línea de comandos

Cualquier acción hecha a través de la barra de herramientas puede introducirse a través de esta línea de entrada. Sin embargo eso requiere conocer el correspondiente comando. Esto es más incómodo, aunque da mayor versatilidad.

Si se quiere utilizar como ejemplo el comando *Curva*, que sirve para dibujar una gráfica a partir de sus ecuaciones paramétricas, una vez que se comienza a escribir la palabra, el editor de textos completa automáticamente el nombre del comando que se va introduciendo.

A la derecha de la barra de entrada, existe un menú desplegable con la lista de comandos del cual se puede seleccionar el que el usuario desee (GeoGebra, 2015).

Graficación de puntos

La actividad más repetida al hacer una determinada construcción es colocar un punto. Al hacerlo a través de la barra de herramientas se debe utilizar el ícono que representa un *punto* y es el que se encuentra en segunda posición. Luego basta mover el puntero a la posición deseada y pinchar, según la característica deseada por el usuario. Conviene tener en cuenta que si se coloca un punto sobre una determinada recta o curva, GeoGebra sólo permitirá desplazarlo sobre esa recta o curva.

Como ejemplo; si se coloca un punto sobre la intersección de los ejes coordenados, GeoGebra considerará que siempre debe de pertenecer al mismo tiempo a ambas rectas y por tanto será un punto fijo. Puede evitarse esto introduciendo las coordenadas del punto $A = (0,0)$ directamente a

través de la línea de comandos y el objeto creado de esta manera, ahora es un **objeto libre** y se lo puede desplazar por la ventana gráfica a gusto del usuario (GeoGebra, 2015).

Graficaciones varias

En la barra de herramientas se puede seleccionar con el puntero del **mouse** el gráfico geométrico que se quiere realizar. Luego a la derecha de la barra, aparecen las instrucciones a ejecutarse para alcanzar el objetivo planteado.

Así por ejemplo, si se quiere construir una circunferencia de una cierta medida de radio y centro en un determinado punto; en la barra de herramientas y en el sexto casillero a través del puntero se selecciona la opción ***Circunferencia dados su Centro y Radio***, luego se pincha en la pantalla gráfica en el sitio que se quiere que sea el centro de la circunferencia y a continuación se despliega una ventana donde se solicita la dimensión del radio; se ingresa dicha medida e inmediatamente aparece la circunferencia esperada.

Para cualquier gráfico a realizarse, es importante seguir las instrucciones que aparecen al costado derecho de la barra de herramientas.

Para salir de la acción de cualquier comando en ejecución, se pincha el primer ícono de la barra de herramientas en la opción ***Elige y Mueve***, el cual solamente permite desplazar los trazos geométricos. Posteriormente se puede seleccionar cualquier otra opción o acción.

Modificación de características de objetos creados

Pulsando con el botón derecho sobre cualquier objeto, tanto en la ventana gráfica como en la algebraica, aparece un menú desplegable que permite modificar las características de dicho objeto. Los más usuales a continuación:

- ***Muestra objeto***: Permite ocultar o mostrar el objeto. Es muy común que al finalizar alguna construcción geométrica, se quiera ocultar determinados objetos, que sólo fueron usados de manera auxiliar para el trabajo.
- ***Muestra rótulo***: Permite que en la ventana gráfica aparezca el nombre del objeto.
- ***Activa rastro***: Permite que el objeto deje o no ***rastro*** al desplazarlo. Por defecto está desactivado, pero puede ser útil por ejemplo, para estudiar lugares geométricos.
- ***Borra***: Sirve para eliminar objetos. Hay que tener en cuenta que cuando se borra un objeto, también se eliminan todos los objetos dependientes de él.

- **Propiedades:** Se visualiza un menú más amplio que controla en detalle absolutamente todos los aspectos del objeto que se ha elegido. Por ejemplo, se puede convertirlo en objeto fijo si no se quiere que se mueva; también se puede modificar el color, grosor del trazo, estilo, la expresión algebraica, etc. (GeoGebra, 2015).

Desplazamiento de objetos con el puntero:

Cuando el primer botón de la barra de herramientas está activado en ***Elige y Mueve***, se pueden mover los objetos (los que no hayan sido fijados) manteniendo pulsado sobre ellos el botón izquierdo del ratón. Es una característica muy potente del GeoGebra, porque todos los objetos dependientes se modificarán respecto al que hemos movido respetando las reglas de construcción (GeoGebra, 2015).

Grabación del trabajo

Se puede guardar el trabajo realizado en archivo ***.ggb***, seleccionando la opción ***Guarda*** en la sección Archivo de los menús desplegados o a través del teclado (Ctrl+S).

En la opción ***Archivo - Exporta***, se puede grabar el gráfico en otros formatos de imagen; copiar al portapapeles; o incluso incluirlo, con todas sus opciones interactivas intactas, en alguna página web (GeoGebra, 2015).

Proceso de construcción

En la sección ***Vista*** de los menús desplegados, se tiene la opción ***Protocolo de Construcción***. Aquí se puede reproducir y estudiar los distintos pasos que se han seguido para hacer una determinada construcción. Esto es una gran herramienta para aprender de lo que han hecho los demás (GeoGebra, 2015).

Modalidades de uso del GeoGebra

Existen diferentes modalidades de uso; una de ellas es instalando el programa en el computador y se podrá utilizar cada vez que se abra la aplicación en el mismo ordenador, independiente de si tiene o no acceso a internet. La otra modalidad es simplemente operando el programa desde la misma página web.

Para descargar este programa se ingresa a: <http://www.geogebra.org/cms/es>. El software pide la descarga de JAVA; este es un programa gratuito el cual te dejara utilizar el software sin ningún problema (GeoGebra, 2015).

1.6.9 Ilustraciones gráficas de GeoGebra

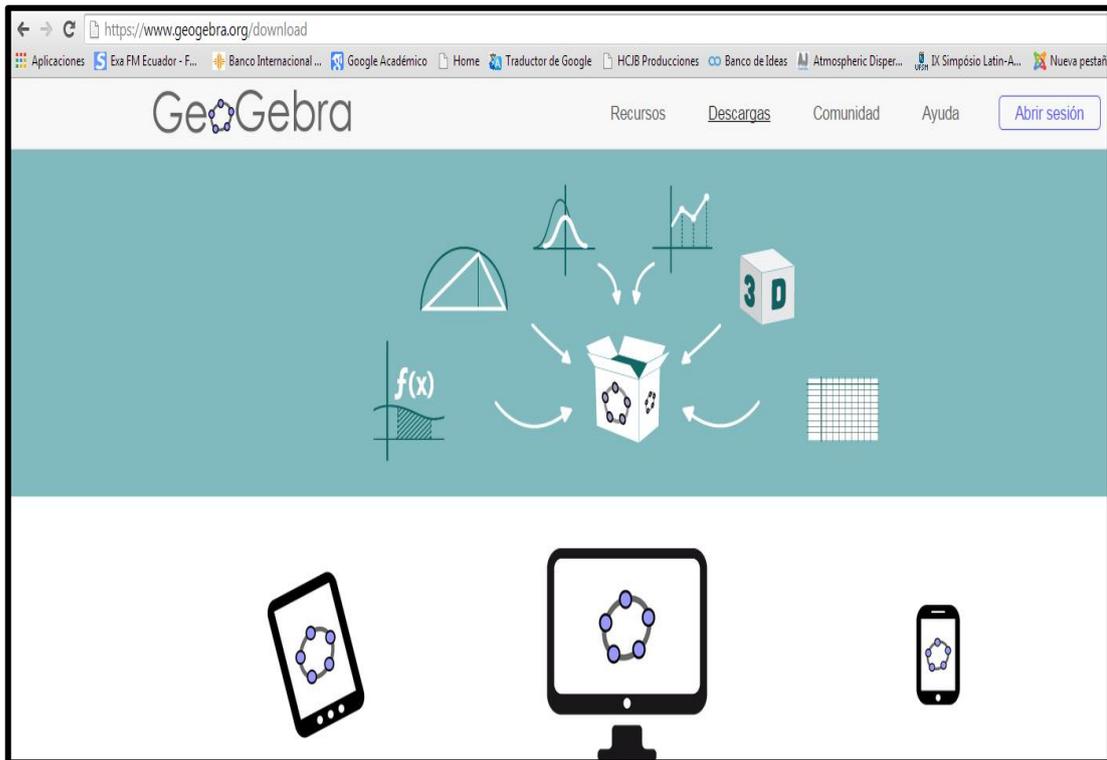


Imagen 4-1. Descargar GeoGebra

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra.org

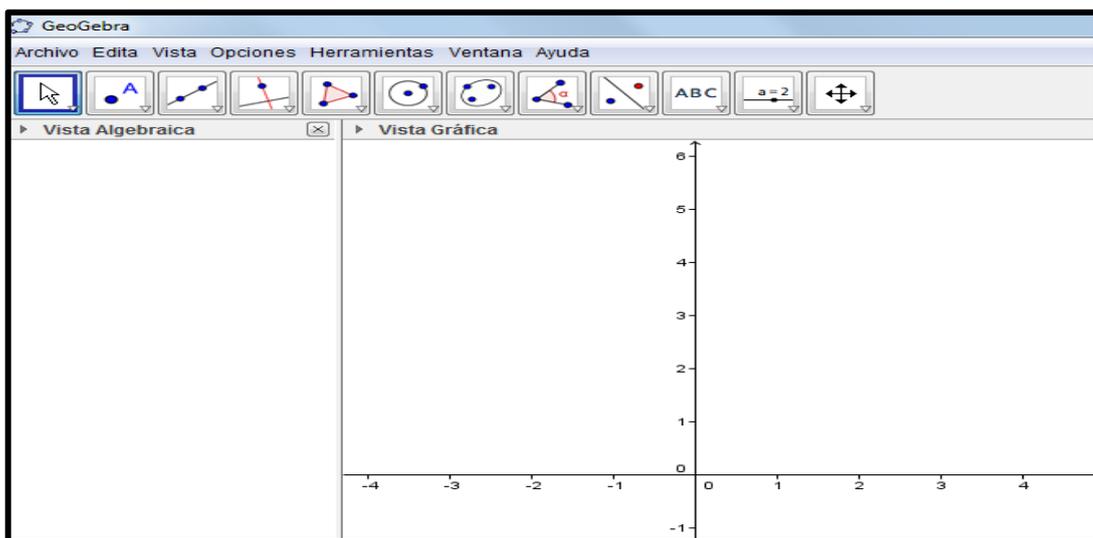


Imagen 5-1. Panel escritorio indicador

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

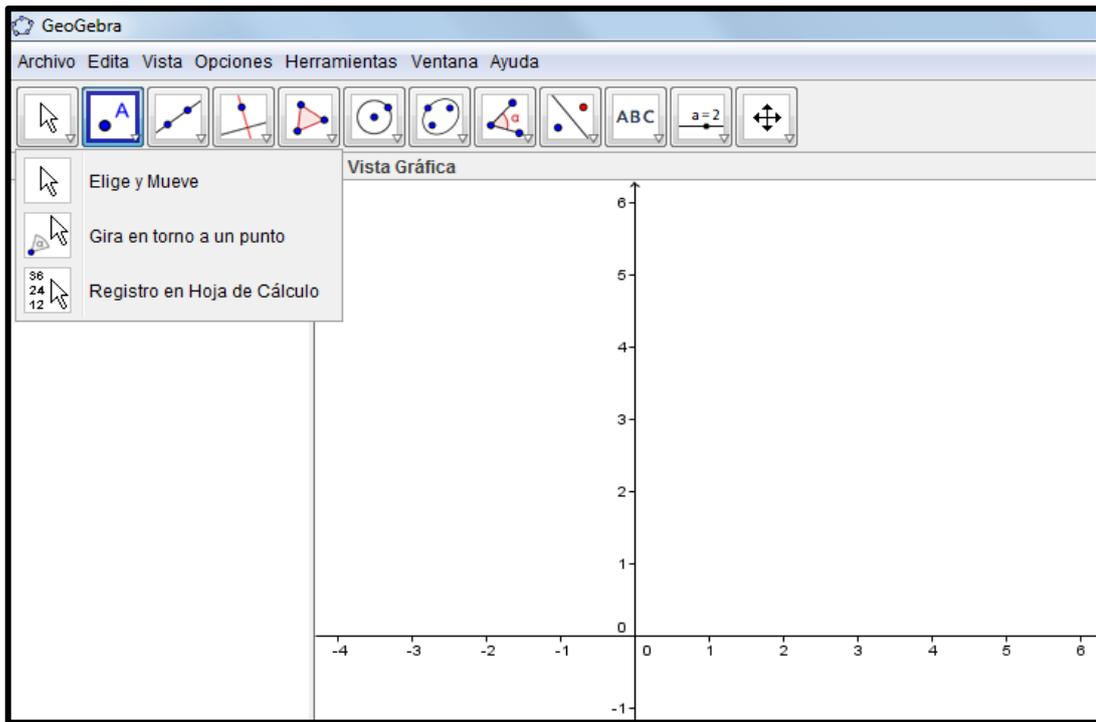


Imagen 6-1. Panel de elección de movimiento

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

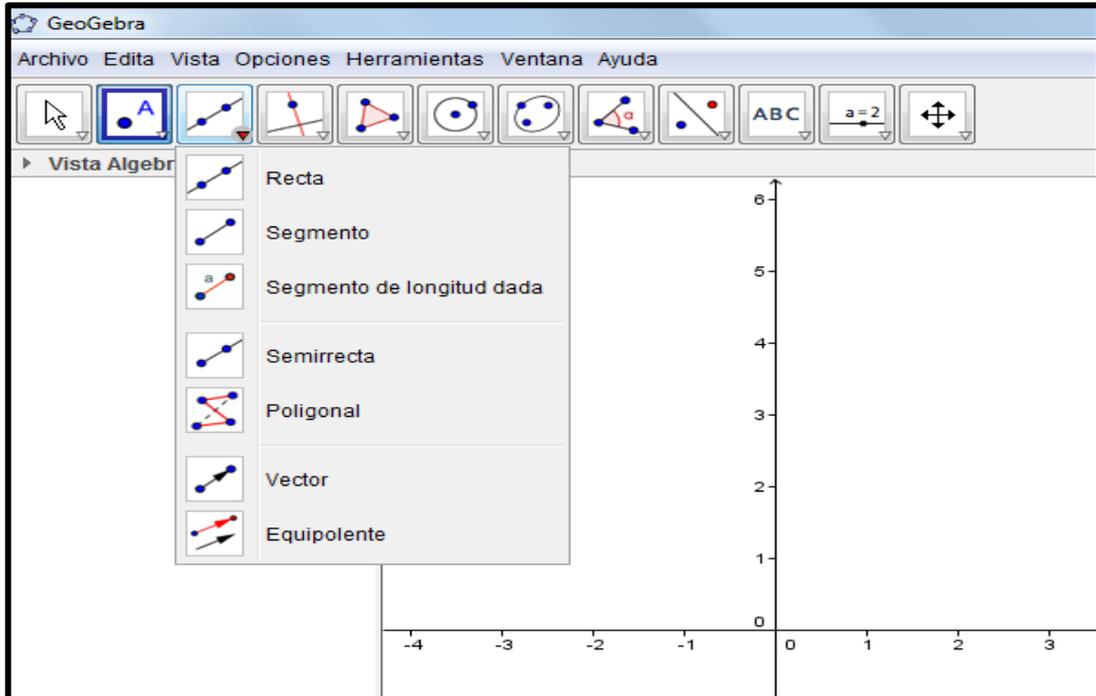


Imagen 7-1. Panel rectas, segmentos y vectores

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

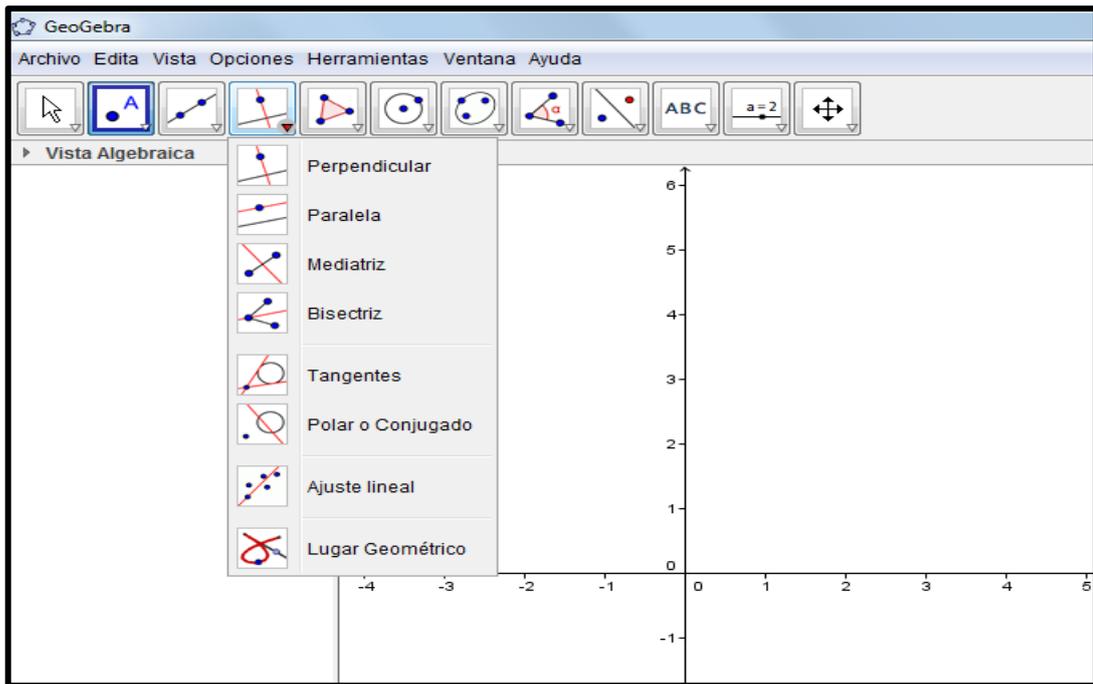


Imagen 8-1. Panel construcciones con rectas

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

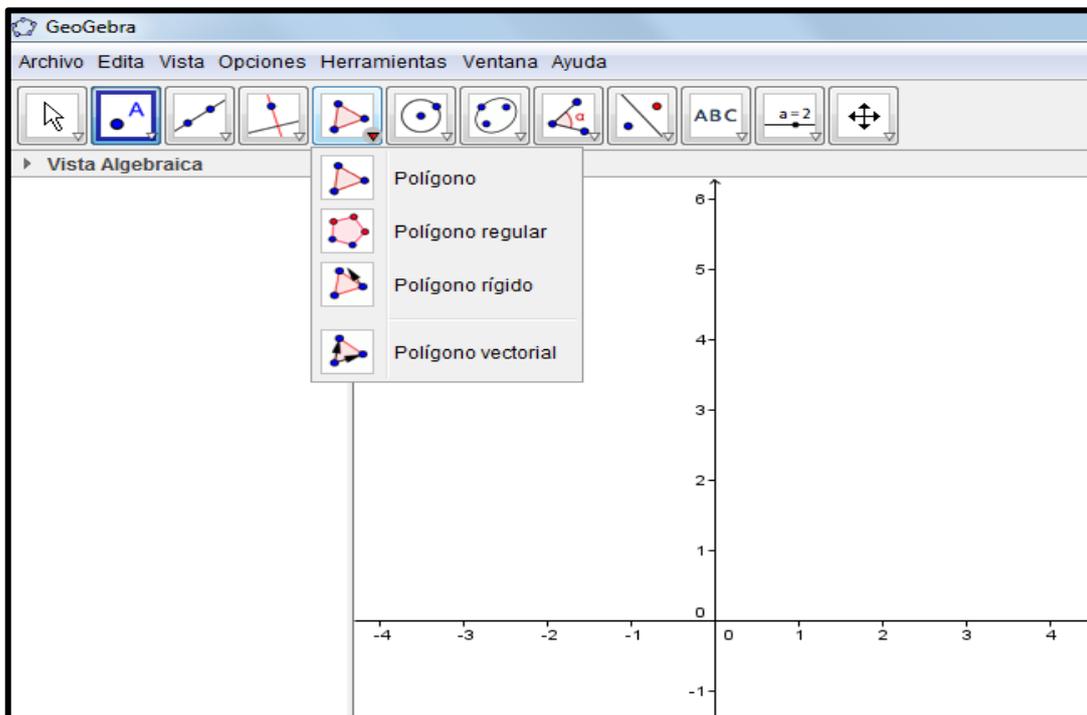


Imagen 9-1. Panel polígonos

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

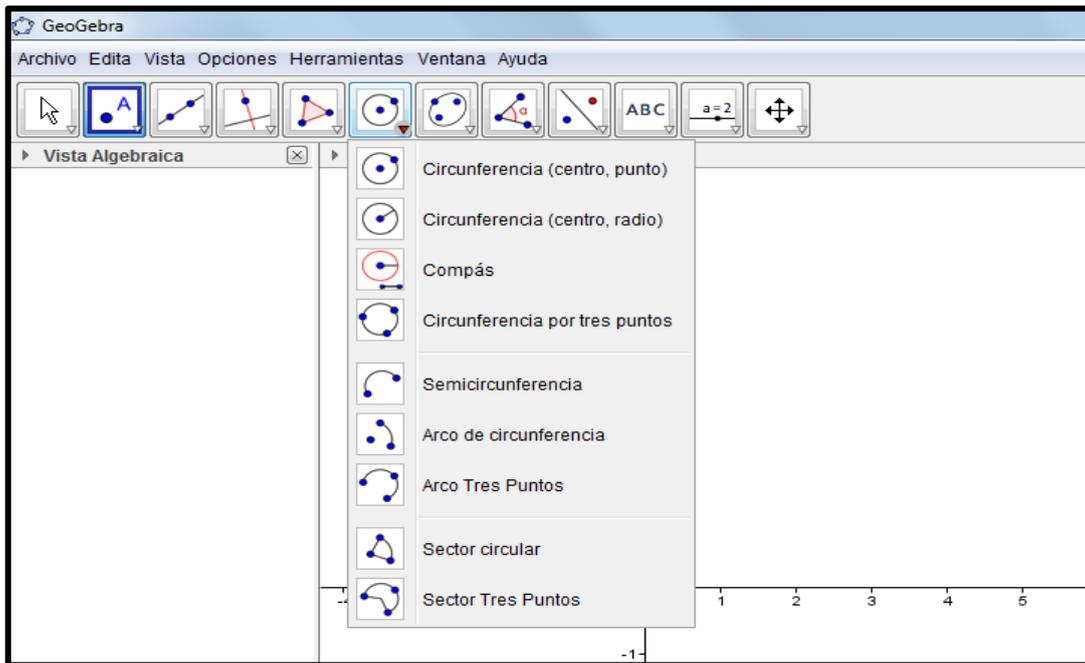


Imagen 10-1. Panel circunferencias

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

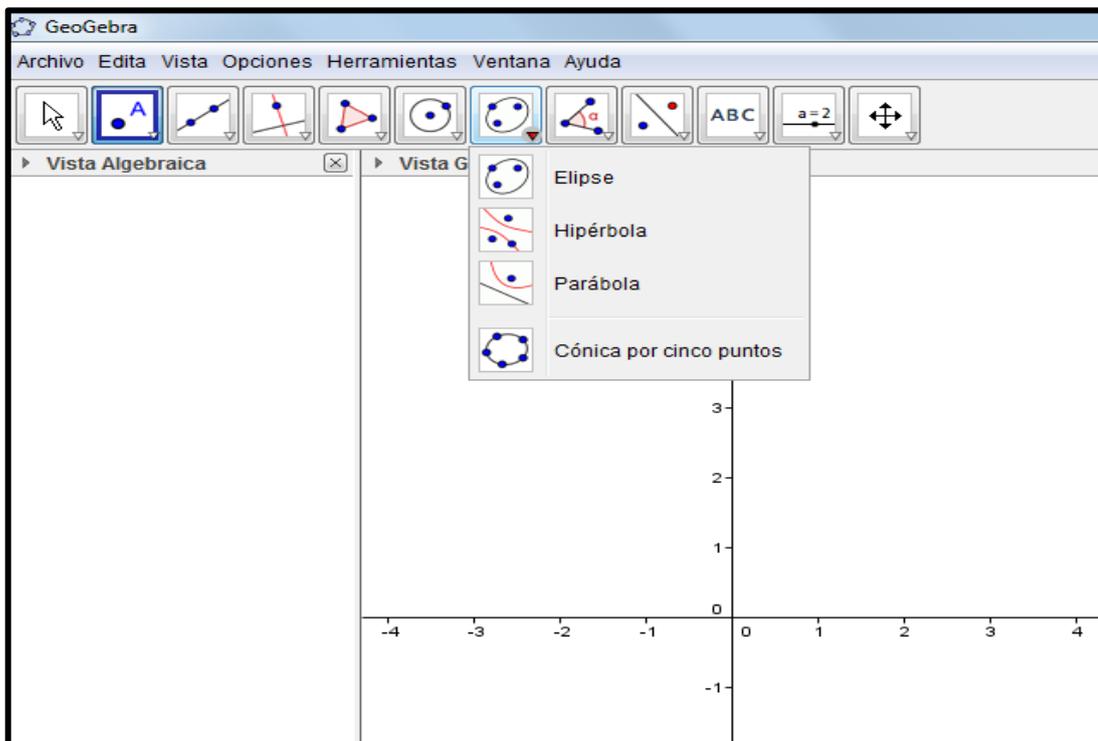


Imagen 11-1. Panel cónicas

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

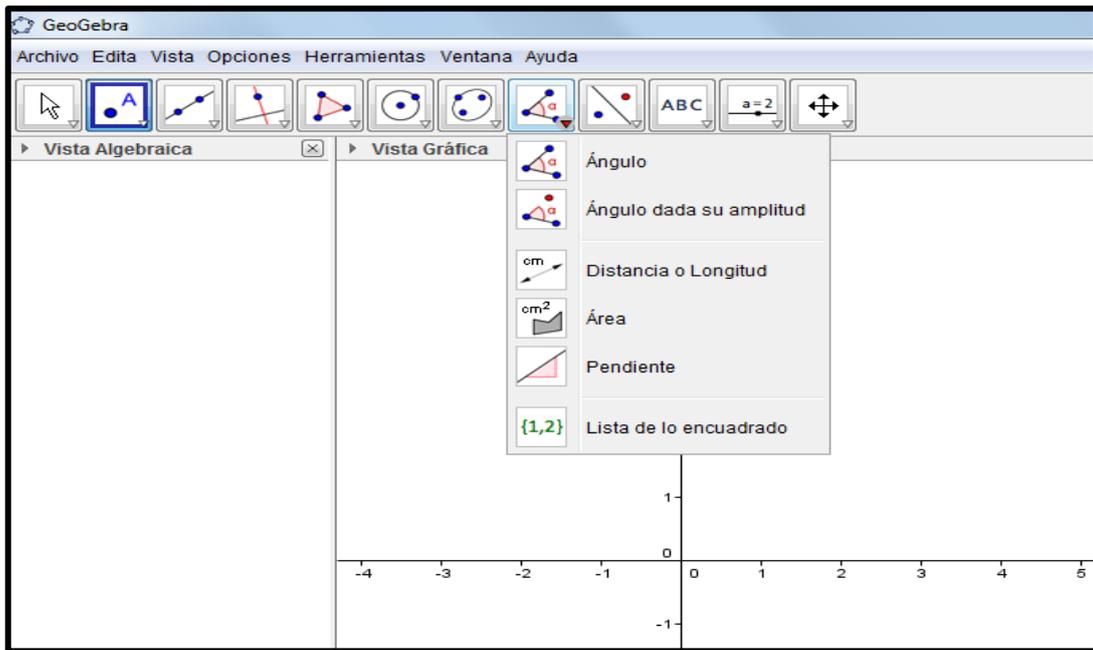


Imagen 12-1. Panel ángulos y medidas varias

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

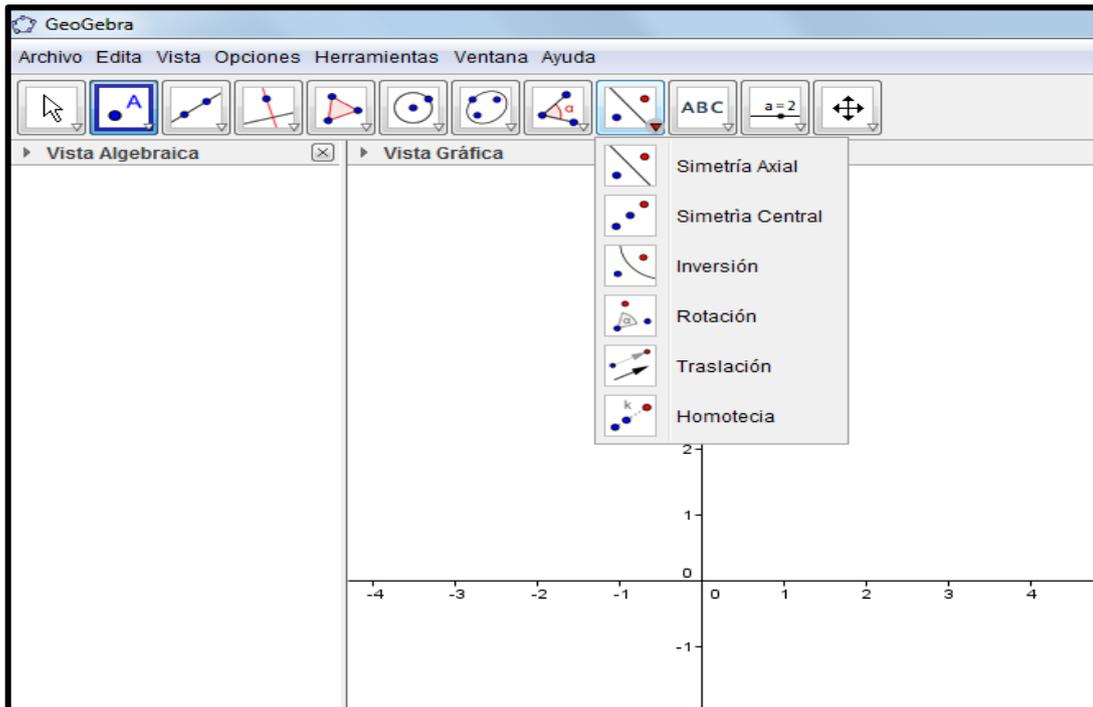


Imagen 13-1. Panel simetría

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

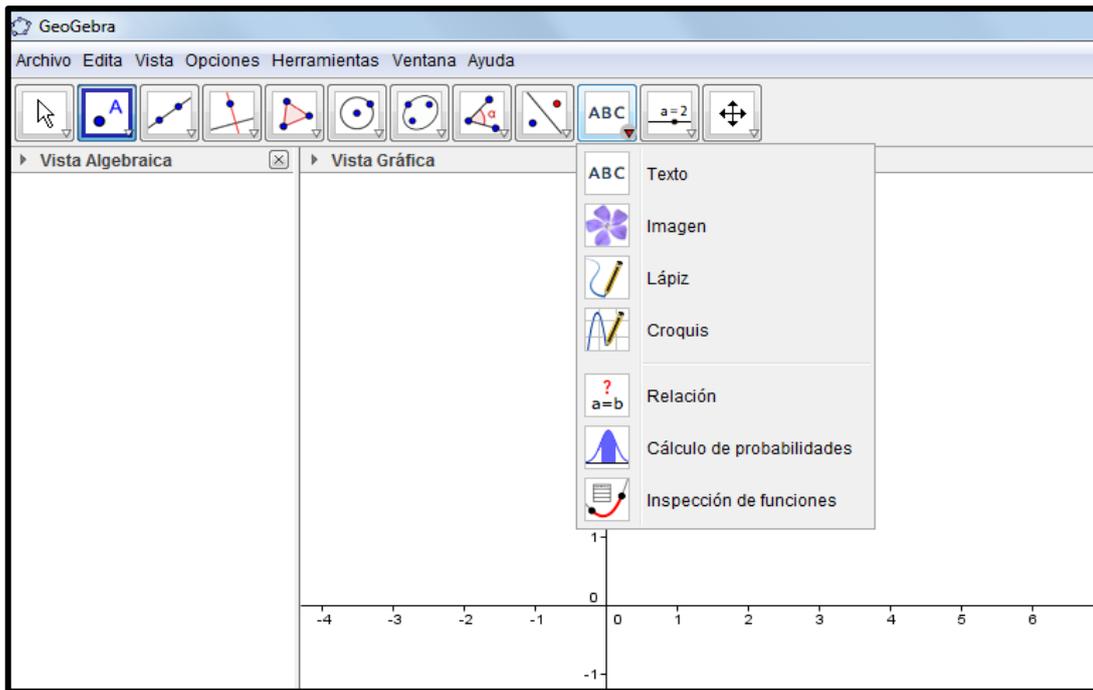


Imagen 14-1. Panel texto y probabilidades

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

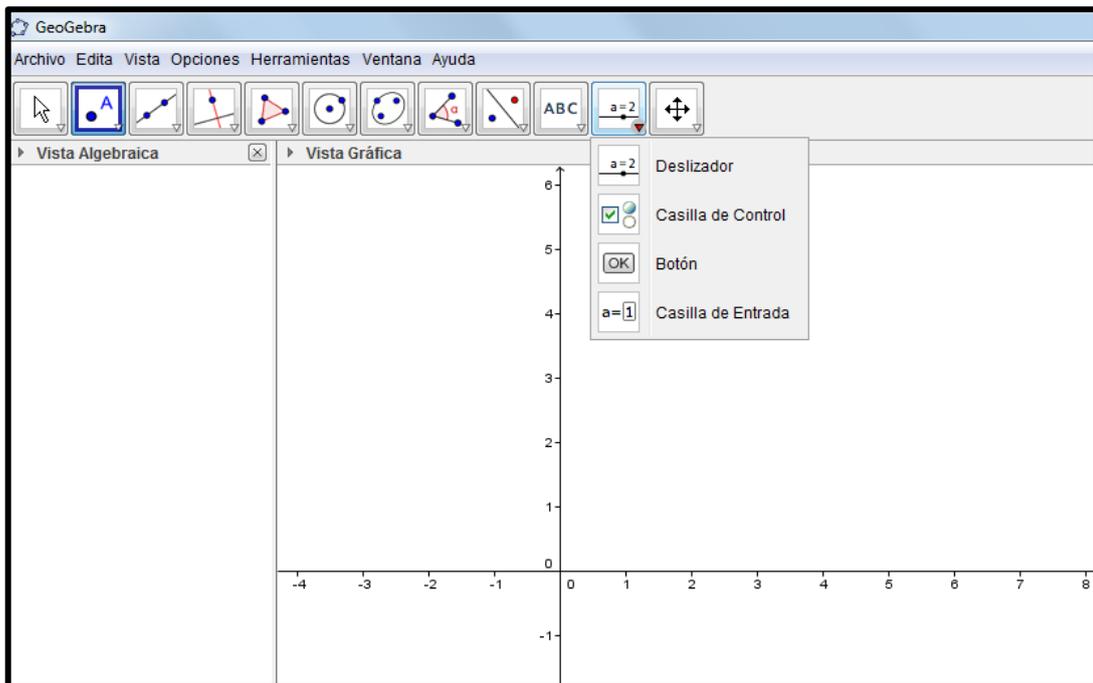


Imagen 15-1. Panel deslizador y botones

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

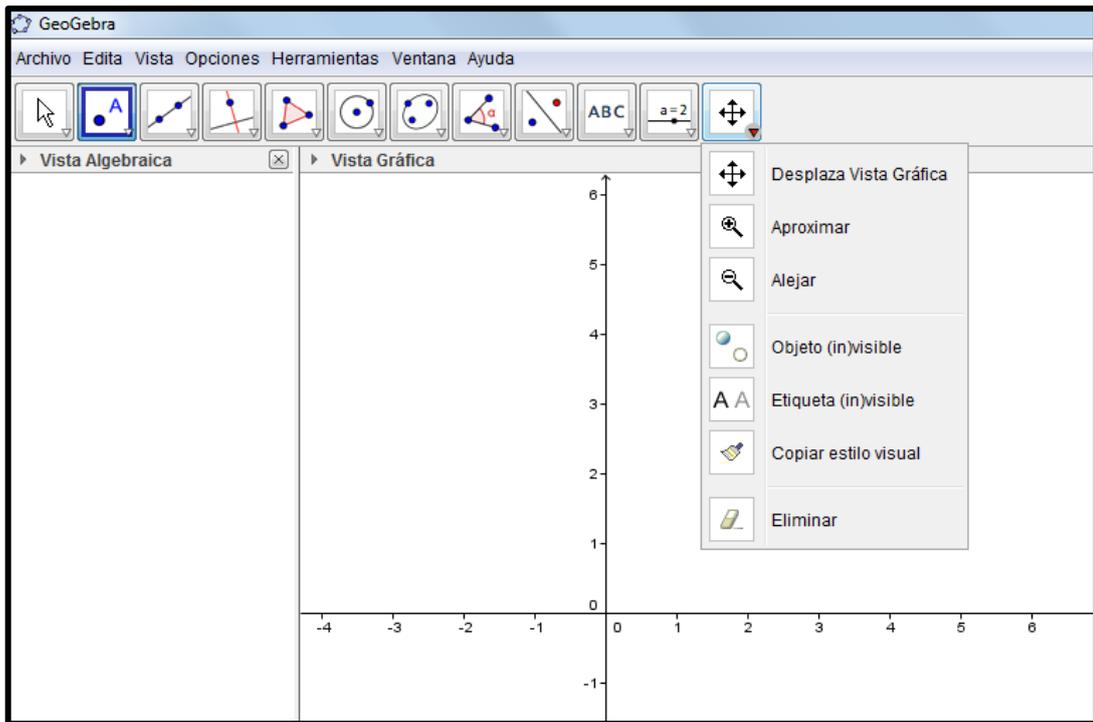


Imagen 16-1. Panel desplazamiento y ocultamientos

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

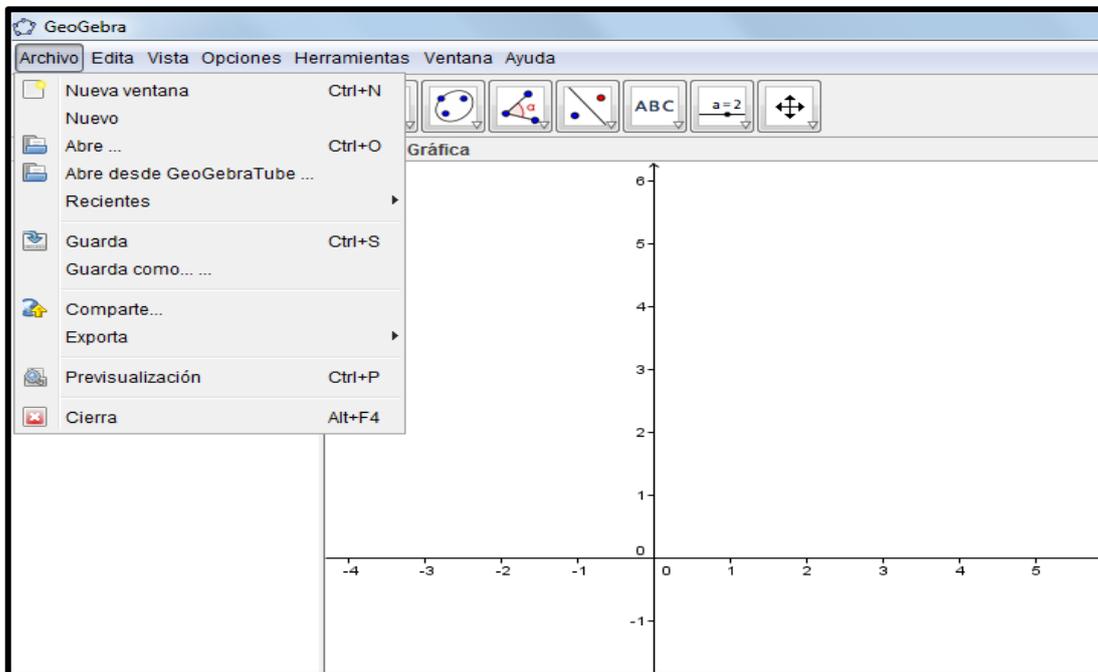


Imagen 17-1. Panel Archivo

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

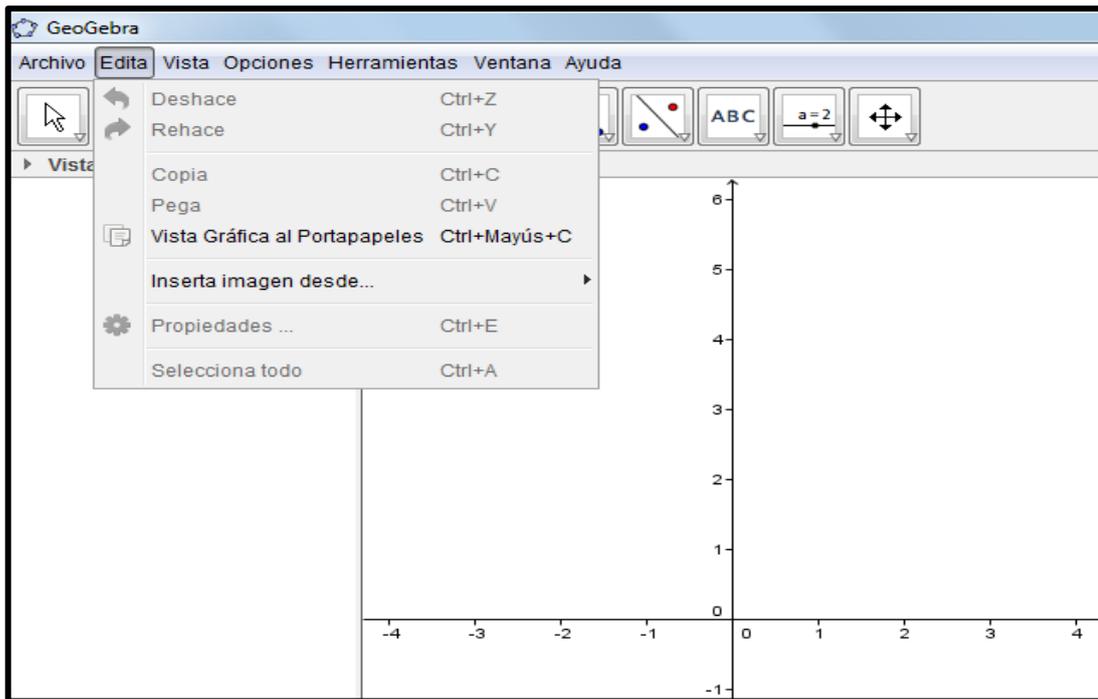


Imagen 18-1. Panel Edita

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

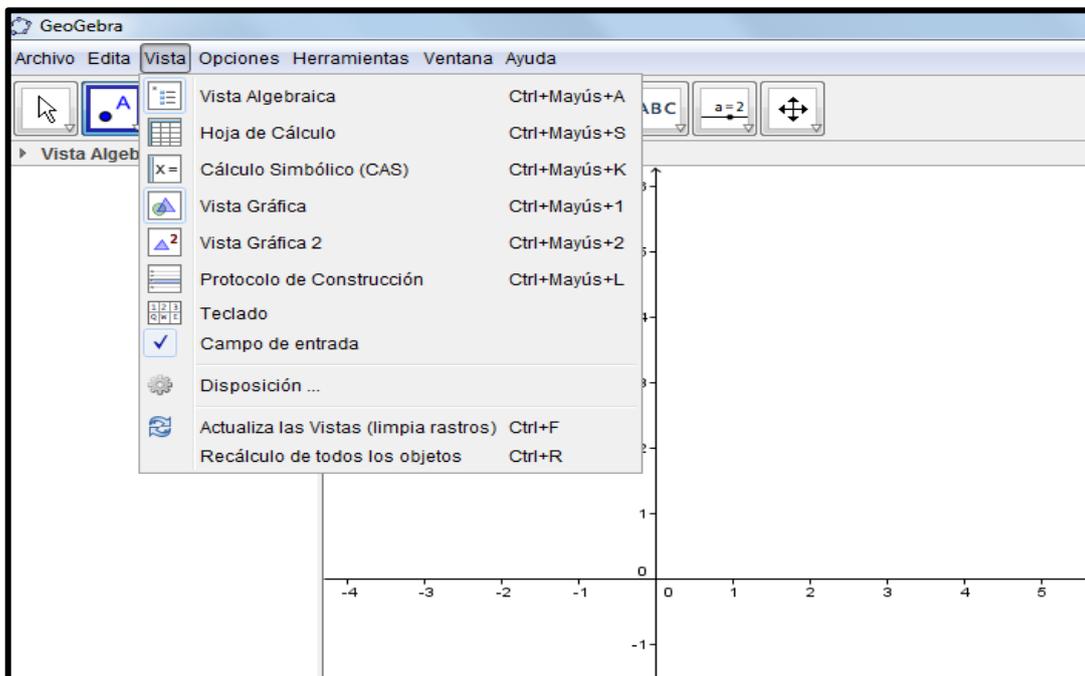


Imagen 19-1. Panel Vista

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

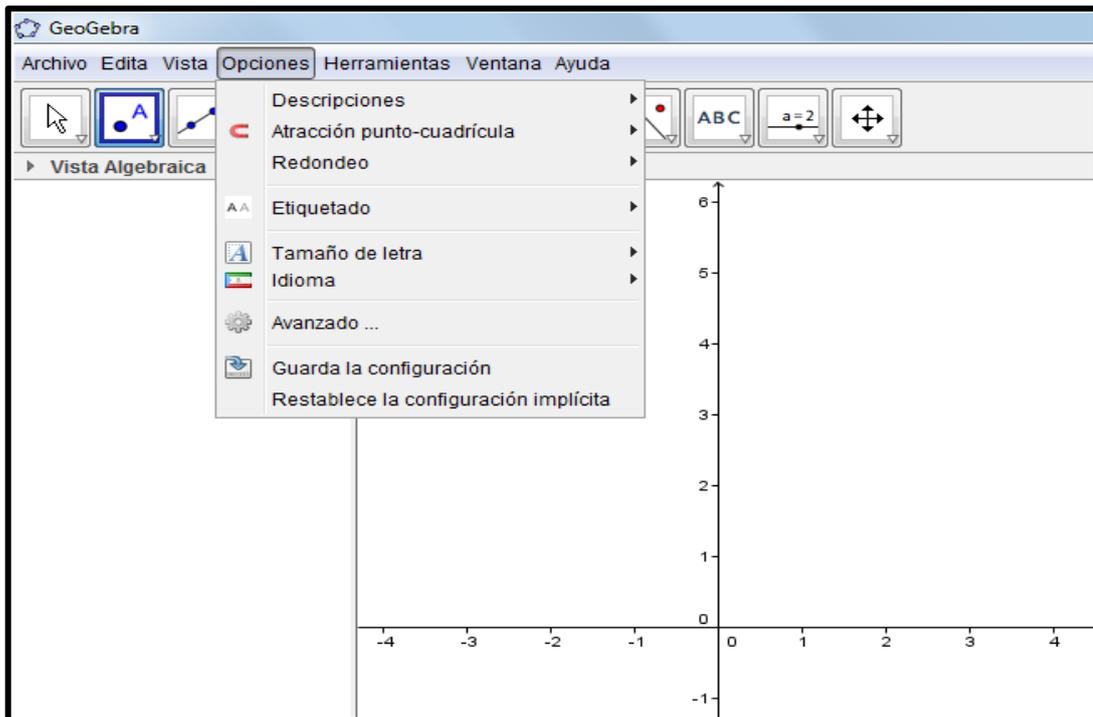


Imagen 20-1. Panel Opciones

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

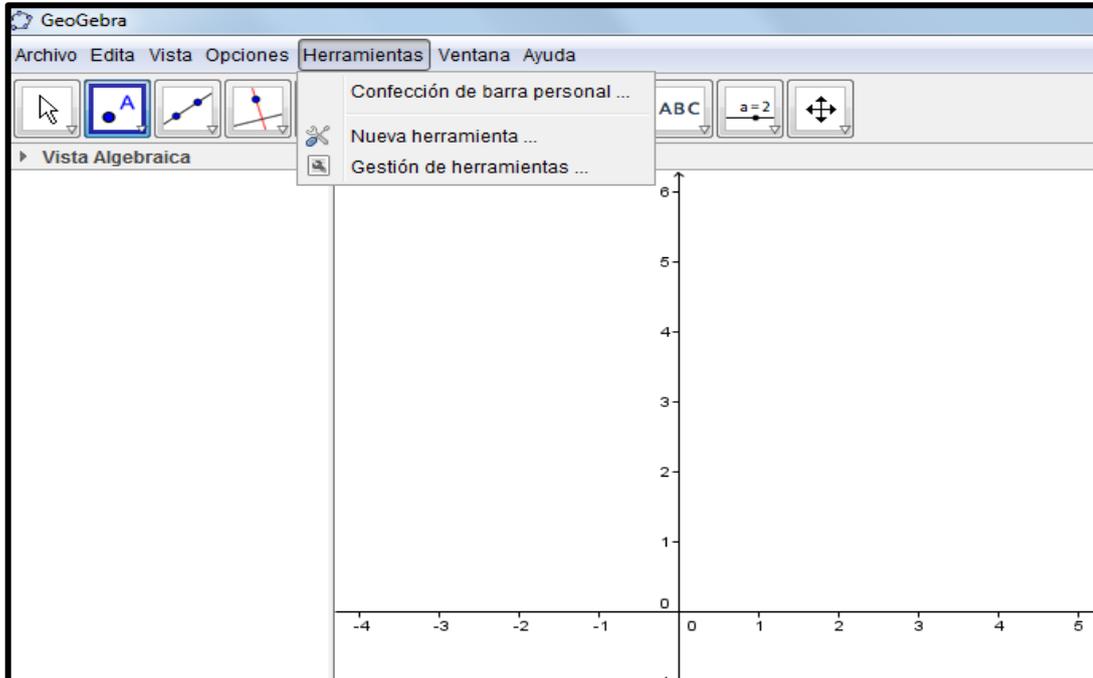


Imagen 21-1. Panel Herramientas

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

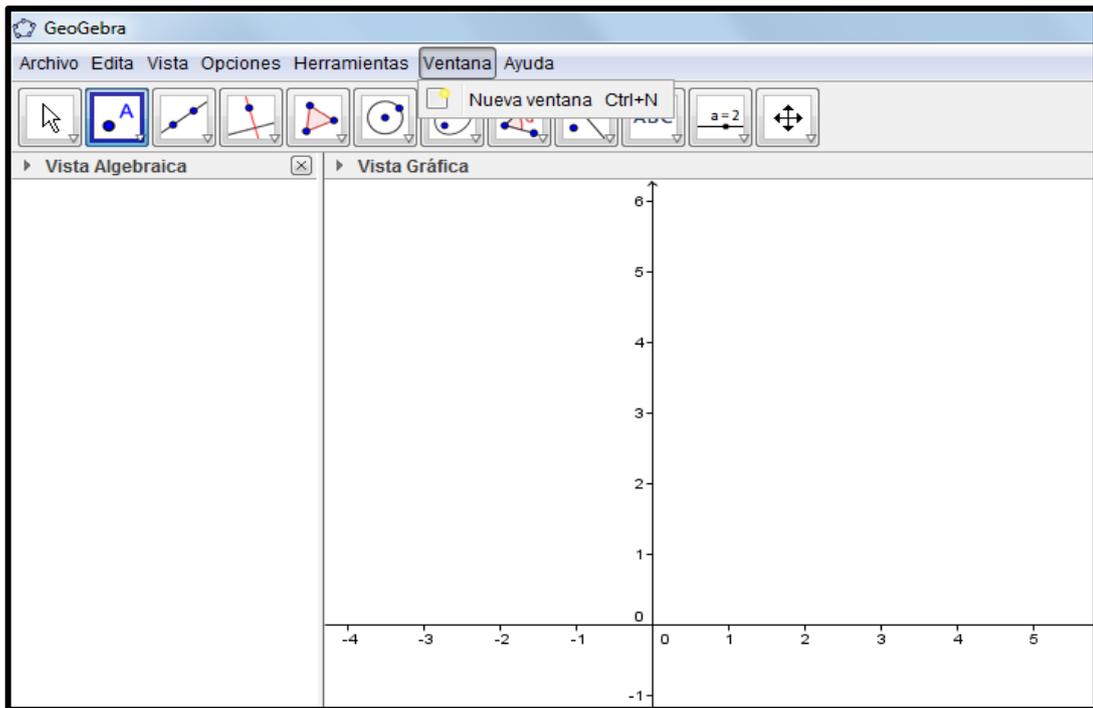


Imagen 22-1. Panel ventana

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

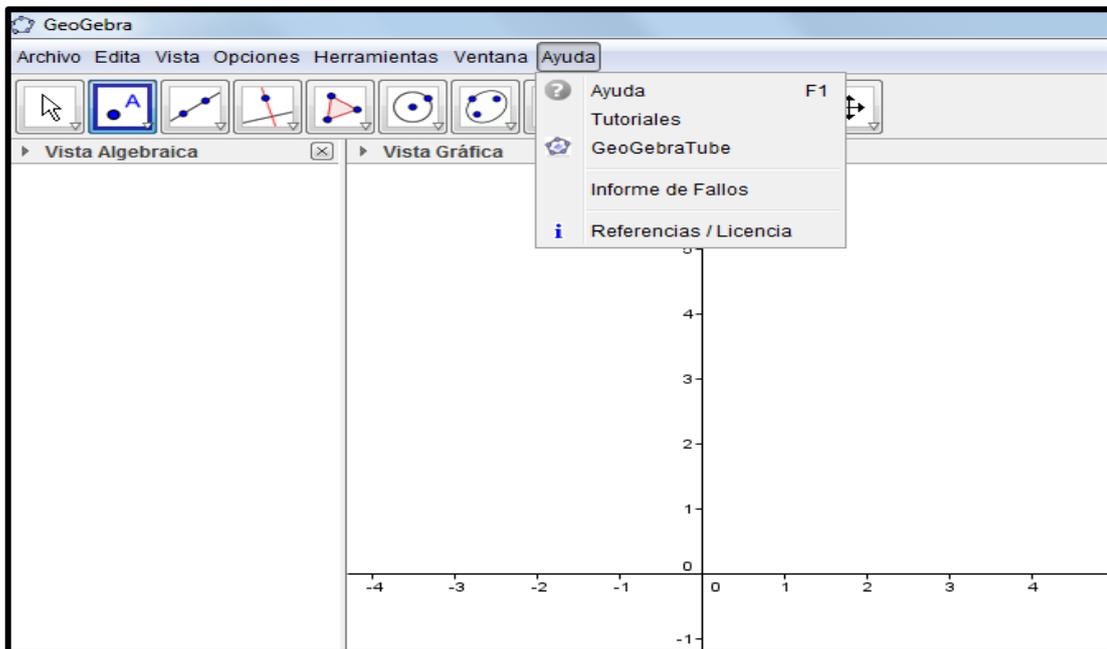


Imagen 23-1. Panel Ayuda

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

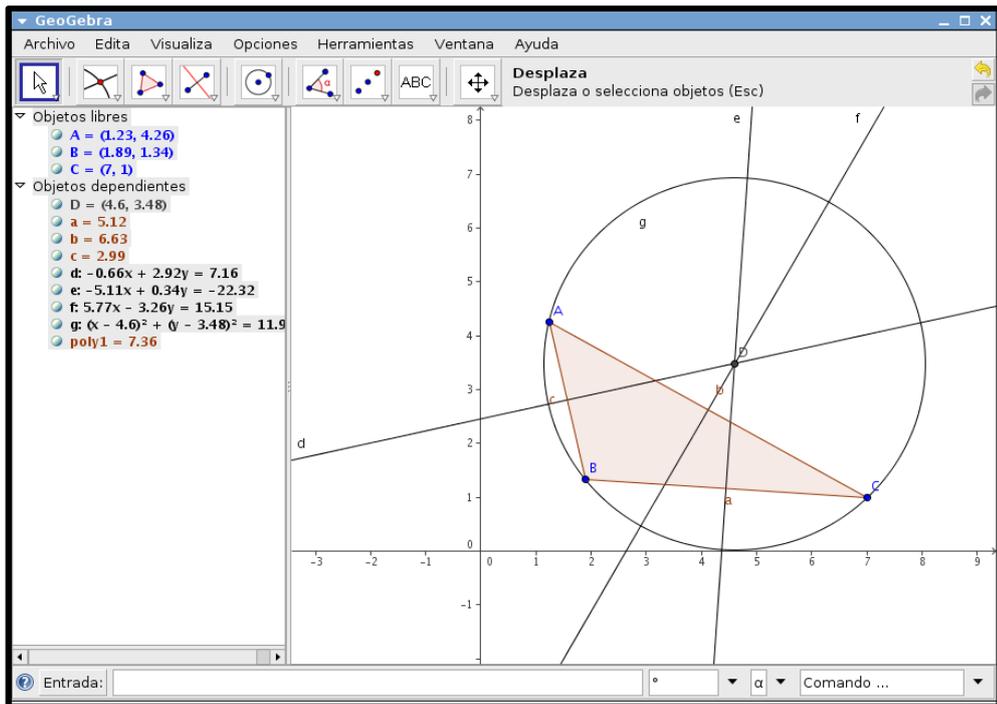


Imagen 24-1. Construcción de circunferencia circunscrita

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

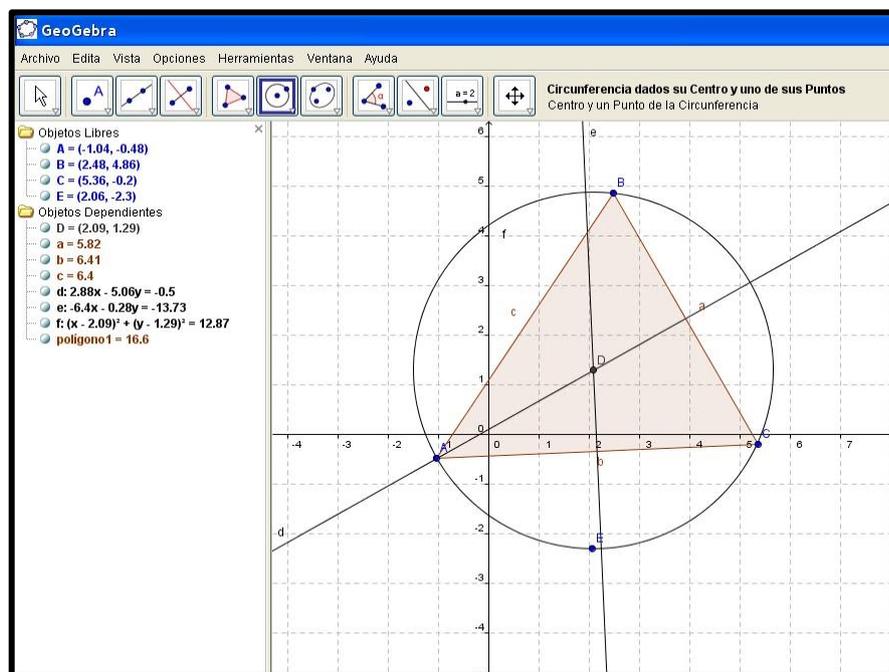


Imagen 25-1. Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: GeoGebra

1.7 CONCEPTUALIZACIONES

El presente trabajo tiene la finalidad de aplicar un software matemático interactivo, a la enseñanza de un tema específico de la Geometría Plana que se imparte en Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL; por lo tanto es menester hacer ciertas definiciones sobre conceptos que se están manejando en el desarrollo de este trabajo.

Para comenzar, hay que decir que cuando se habla de software matemático interactivo con fines académicos, entonces se está hablando de **software educativo** pero con un enfoque matemático, que es justamente el concepto que se va a comenzar a definir en principio, según el criterio que tienen varios autores importantes sobre este tema, basados en sus investigaciones y los trabajos realizados por ellos, a lo largo del tiempo. Estas definiciones son las que siguen:

Marquès (1996) considera que dentro de la expresión “software educativo” se está englobando a “todos los programas educativos y didácticos creados para computadoras con fines específicos de ser utilizados como medio didáctico, para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje”.

Según McFarlane y De Rijcke (1999) es el software que se utiliza en un contexto educativo y que abarca una variedad amplia y ecléctica de herramientas y recursos. “De hecho, engloba un conjunto de entidades tan variables que el hecho de depender de un entorno informatizado crea una impresión de homogeneidad que no resiste un análisis metódico” (p.103).

Para Cataldi (2000) “Se define como software educativo a “los programas de computación realizados con la finalidad de ser utilizados como facilitadores del proceso de enseñanza” y consecuentemente de aprendizaje, con algunas características particulares tales como: la facilidad de uso, la interactividad y la posibilidad de personalización de la velocidad de los aprendizajes” (p.14).

Careaga Butter (2001) establece que: “Es un programa o conjunto de programas computacionales que se ejecutan dinámicamente según un propósito determinado. Se habla de software educativo cuando los programas incorporan una intencionalidad pedagógica, incluyendo uno o varios objetivos de aprendizaje.”

Labañino (2005) lo define como una aplicación informática concebida especialmente como medio, integrado al proceso de enseñanza aprendizaje.

De las definiciones realizadas por los autores anteriores, importantes por cierto, se puede decir que en general son bastante parecidas con las consabidas diferencias que existen entre una y otra persona. Es necesario entonces hacer una definición que sea más concreta y que abarque a todas ellas.

En función de esto, se define como **software educativo** al conjunto de todos los programas computacionales que tienen propósitos de enseñanza aprendizaje de temas concernientes a una determinada asignatura de enseñanza, los mismos que pretenden imitar la labor tutorial personalizada que realizan los profesores y presentan modelos de representación del conocimiento en consonancia con los procesos cognitivos que desarrollan los alumnos. Esta es la definición que se utilizará durante esta investigación, de aquí en adelante.

Otros conceptos que se necesitan definir son los relacionados con la palabra **interactivo**. Con la ayuda de la Wikipedia se han recabado las definiciones que están a continuación y que también serán utilizados en el transcurso de este trabajo.

Interactividad: La interactividad es un concepto ampliamente utilizado en las ciencias de la comunicación, la informática, el diseño multimedia y el diseño industrial.

Interactivo: Dícese de un programa que permite una interacción a modo de diálogo entre ordenador y usuario. En su campo de aplicación suele hablarse de tres niveles de comunicación:

No interactiva, cuando un mensaje no se relaciona con otro previo.

Reactiva, cuando un mensaje se relaciona únicamente con el previo inmediato.

Interactiva, cuando un mensaje se relaciona con una serie de elementos previos.

Rafaeli(1988) ha definido a la interactividad como "una expresión extensiva que en una serie de intercambios comunicacionales implica que el último mensaje se relaciona con mensajes anteriores a su vez relativos a otros previos" (p.111).

La interactividad es similar al nivel de respuesta, y se estudia como un proceso de comunicación en el que cada mensaje se relaciona con el previo, y con la relación entre éste y los precedentes.

En el contexto de la comunicación entre ser humano y máquina, el concepto se refiere al comportamiento interactivo del aparato tal como lo experimente el primero. Esto difiere de otros aspectos de la máquina tales como su apariencia visual, su forma de trabajo interna, o el significado de los signos que transmita.

Por ejemplo, la interactividad de un walkman no reside en su forma física o color, su habilidad para reproducir música, o su capacidad de almacenamiento: es en cambio el comportamiento de su interfaz de usuario tal como éste la experimenta. Esto incluye la forma en que debe moverse el dedo sobre el comando, la forma en que éste permite seleccionar una canción para reproducirla, y la manera en que uno controla el volumen.

CAPÍTULO II

2. SISTEMA HIPOTÉTICO

2.1 PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS Y DETERMINACIÓN DE VARIABLES

Los medios tecnológicos digitales se constituyen en herramientas importantes del conocimiento en la etapa actual del desarrollo de la humanidad y en todos los ámbitos existentes. La computadora y las telecomunicaciones potencian su gran versatilidad y campo de acción.

En diversas partes del planeta la computadora se aplica de manera muy variada, en los procesos de enseñanza-aprendizaje, tanto de manera presencial como a distancia, y sin lugar a dudas se vislumbra un enorme potencial, sobre todo con el desarrollo tan impresionante del Internet y de diversas tecnologías accesorias en permanente desarrollo, como lo son las tablets y los pizarrones electrónicos.

Una vez desarrollada la parte teórica del presente trabajo, se plantea la siguiente hipótesis:

2.1.1 Hipótesis

La aplicación de software matemático interactivo Geogebra a la enseñanza del tema de Triángulos de la Geometría Plana como una herramienta de trabajo, le permite al Docente facilitar y mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el tema triángulos, de acuerdo al programa de asignatura de nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.

¿Ayuda realmente al proceso educativo de los estudiantes de Nivelación, la aplicación de software matemático en forma interactiva a la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Plana, frente a los métodos convencionales utilizados por los docentes?

La respuesta es que en el campo de las Matemáticas ya se cuenta con diversos softwares, que posibilitan un mejor aprovechamiento de la creatividad, sensibilidad, experiencia, madurez y conocimiento matemático por parte de quien lo usa y que además, entre otras cosas, *facilita*

construir material interactivo para poder inducir el descubrimiento y ayudar a visualizar de muchas maneras resultados complicados, dejando así más tiempo para el análisis y la profundización de los conceptos.

Muy especialmente para la Geometría, el uso del software proporciona amplias posibilidades para visualizar, explorar, analizar y conjeturar resultados. Existen softwares que le proporcionan al usuario la posibilidad de colocar las construcciones geométricas en diversas situaciones, a diferencia de los dibujos estáticos y casi únicos de un libro, o lo que se puede hacer en un pizarrón tradicional.

Al usar softwares para realizar construcciones geométricas, otra ventaja aunque parezca simple, es el hecho de poder borrar y hacer trazos, cuantas veces sea necesario y hacerlo con extrema pulcritud.

2.1.2 Variable independiente

Aplicación de software matemático interactivo Geogebra a la enseñanza del tema de Triángulos de la Geometría Plana como una herramienta de trabajo del Docente.

En realidad existe una amplia gama de softwares matemáticos, que permitirían realizar una aplicación geométrica interactiva a la enseñanza del tema de triángulos, correspondiente al programa de asignatura de Nivelación. Cada uno de estos softwares matemáticos, con sus propias características y posibilidades de desarrollo de construcciones geométricas dinámicas e interactivas, ayudarían de alguna manera apoyar la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia matemática en mención.

Algunos de ellos ya descritos anteriormente y de los cuales se seleccionó al Geogebra como el software más adecuado para este trabajo, son: The Geometer's Sketchpad, GeoLab, Geogebra, Cabri Geometry Plus II, Cinderella, Autocad, entre otros.

2.1.3 Variable dependiente

Rendimiento académico de los estudiantes en el tema triángulos, de acuerdo al programa de asignatura de nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.

Finalmente, lo que se pretende alcanzar con este proyecto que a la postre se convierte en la variable dependiente, es la ayuda que recibe el docente del paquete interactivo, para mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje de los estudiantes de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL, de la Geometría Plana.

2.2 OPERACIONALIZACIÓN CONCEPTUAL DE LAS VARIABLES

Tabla 1-2. Operacionalización conceptual de las variables

VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL
<p>Variable Independiente:</p> <p>Aplicación de software matemático interactivo Geogebra a la enseñanza del tema de triángulos de la Geometría Plana como una herramienta de trabajo del Docente.</p>	<p>Desarrollo del soporte lógico de un sistema informático que haga posible la realización de tareas específicas como es la enseñanza de la Geometría Plana, el mismo que será aplicado en forma interactiva y orientado hacia el tema de Triángulos correspondiente al programa de asignatura de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.</p>
<p>Variable Dependiente:</p> <p>Rendimiento académico de los estudiantes en el tema triángulos, de acuerdo al programa de asignatura de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.</p>	<p>Logros académicos cuantitativos de abstracción científica que se obtienen por la aplicación del software matemático interactivo, en la enseñanza-aprendizaje del tema de triángulos de la Geometría Plana de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL, correspondiente al programa de asignatura.</p>

Elaborado por: Carlos Torres 2014

2.3 OPERACIONALIZACIÓN METODOLÓGICA DE LAS VARIABLES

Tabla 2-2. Operacionalización metodológica de las variables

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	ITEMS
<p>Variable Independiente:</p> <p>Aplicación de software matemático interactivo Geogebra a la enseñanza del tema de triángulos de la Geometría Plana como una herramienta de trabajo del Docente.</p>	<p>Psicomotriz:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Imitación • Seguimiento de instrucciones • Independencia • Precisión. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ El estudiante sigue visualmente y realiza las construcciones que el profesor hace en el pizarrón(Grupo de control) o en la ventana gráfica del GeoGebra(Grupo experimental), sin preguntar nada. ➤ El estudiante sigue instrucciones dadas textualmente y construye lo solicitado por el profesor de manera adecuada. ➤ El estudiante crea soluciones propias a construcciones planteadas por el profesor en GeoGebra. ➤ El estudiante crea soluciones propias y prácticas a construcciones planteadas por el profesor en GeoGebra, con precisión. 	<p>Prueba diagnóstica: Aplicada al grupo experimental y de control ANEXO 1</p> <p>Prueba primera evaluación: Aplicada al grupo experimental ANEXO 2</p> <p>Prueba final: Aplicada al grupo experimental y de control ANEXO 3</p>
		CONTINÚA....	

		CONTINUACIÓN	
<p>Variable Dependiente:</p> <p>Rendimiento académico de los estudiantes en el tema triángulos, de acuerdo al programa de asignatura de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.</p>	<p>Cognitivo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comprensión • Análisis • Síntesis • Aplicación 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ El estudiante comprende conceptos y definiciones fundamentales sobre triángulos. ➤ El estudiante analiza sistemáticamente la estructura de problemas planteados sobre triángulos. ➤ El estudiante sintetiza elementos científicos del problema planteado, en la búsqueda de estrategias de solución al problema. ➤ El estudiante aplica teoremas en la resolución de problemas que involucran triángulos. 	<p>Prueba cognitiva:</p> <p>Aplicada al grupo experimental y de control</p> <p>ANEXO 4</p>

Elaborado por: Carlos Torres 2014

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 DISEÑO Y TIPO DE ESTUDIO

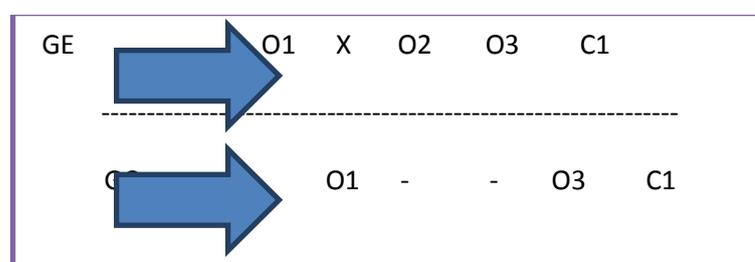
La investigación objeto de este estudio es de corte cuasi experimental y sus tipos de estudio correlacionales y explicativos, puesto que se requiere saber el comportamiento de la variable de salida versus la variable de entrada, buscando en lo posible las razones o causas que lo provocan.

Se eligieron 2 grupos de investigación: uno experimental y el otro de control.

Con el grupo experimental se hizo un seguimiento longitudinal; es decir, estudio de las características de abstracción de aprendizajes a lo largo de 3 evaluaciones psicomotrices (O1,O2,O3) y una evaluación cognitiva (C1), mientras que con el grupo de control se aplicaron 2 evaluaciones psicomotrices (O1,O3) y una evaluación cognitiva (C1).

Las pruebas O1, O3 y C1 son exactamente iguales tanto para el grupo de control así como experimental. El diseño descrito se puede apreciar en la tabla 1-3.

Tabla 1-3. Diseño Experimental



Elaborado por: Carlos Torres 2014

Donde:

GE: Grupo experimental **GC:** Grupo de control

O1: Prueba diagnóstico **O2:** Prueba primera evaluación

O3: Prueba evaluación final **C1:** Prueba Cognitiva

X: Aplicación de la Propuesta

3.2 DETERMINACIÓN DE LA POBLACIÓN

La población equivale a 60 estudiantes de nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.

3.3 MUESTRA

La muestra equivale a los 60 estudiantes de la población; dividida en 2 grupos: uno experimental y otro de control. Se buscaron 2 paralelos homogéneos para poder aplicar la correlación respectiva.

3.4 MÉTODO, TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

3.4.1 Método

Los métodos usados en el desarrollo de este estudio fueron:

- Método hipotético-deductivo.- Propone conclusiones hipotéticas y no dogmáticas.
- *Método inductivo.*- Parte metodológicamente de principios basados en indagaciones para llegar a leyes hipotéticas empíricas generales.

• **Método científico.**- Se basa en la elaboración de trabajos científicos cuyas partes son las siguientes:

- ✓ Planteamiento del Problema
- ✓ Planteamiento de la hipótesis
- ✓ Experimentación
- ✓ Validación de la hipótesis
- ✓ Divulgación científica (informe de tesis)

• **Método Estadístico.**-Al ser las distribuciones no paramétricas por el uso de instrumentos cuyos datos son no numéricos, en el primer caso se recurrió a la prueba Chi cuadrado para validación de la hipótesis en el ámbito psicomotriz y z normalizado para el dominio cognitivo en el segundo, por ser la muestra mayor a 30 individuos y suponerse la distribución normal (al ser numérica excepcionalmente).El nivel de significación correspondiente fue de 0,05 que es el apropiado para este tipo de estudios basados en el aprendizaje.

• **Método Empírico.**-Clases expositivas durante 2 semanas en ambos grupos de investigación para evitar sesgos de historia o maduración científica (los grupos debían ser iguales).Aplicación de GeoGebra de las clases de geometría en el grupo experimental mientras que en el grupo de control se continuó con las clases expositivas.

Se realizaron sendas evaluaciones en cada uno de los momentos de la investigación; en cada grupo.

Se recogieron datos a través de listas de cotejos en los dominios psicomotriz (observación) y cognitivo (matriz de logros de aprendizaje).

Se tabularon datos para obtener correlaciones entre método y logros psicomotrices además de cognitivos.

Tabla 2-3. Técnicas e instrumentos

Estadística	Técnica	Instrumento	Prueba
No paramétrica	Observación estructurada	Lista de cotejos	Chi cuadrado
Paramétrica	Hoja de registro	Matriz de logros	Zeta normalizada

Elaborado por: Carlos Torres 2014

3.5 MATERIALES

Los materiales y recursos necesarios que fueron utilizados en la elaboración de esta tesis son los siguientes:

- Recursos informáticos.
- Tecnológicos
- Programas informáticos y estadísticos
- Matrices de registro y encuestas

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS. PROPUESTA

4.1 RESULTADO DE ENCUESTAS A DOCENTES

4.1.1 Encuesta N° 1

Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L, está constituido por 9 docentes de matemáticas, quienes imparten la asignatura de geometría con el tema triángulos. Para medir el grado de aceptación que tiene el Docente por la enseñanza de la geometría con un software matemático interactivo, se procedió a elaborar una encuesta cuyo formato se encuentra establecido en el ANEXO 5 como encuesta N° 1 y con la cual se encuestó a los 9 profesores.

Esta misma encuesta permitió definir por parte de los docentes al software Geogebra, como la herramienta más adecuada en nuestro medio para enseñar la geometría, por una serie de virtudes que tiene sobre los otros software que se encuentran en la red, concordando de esta forma con la tabla 1 de esta investigación, que establece dichas ventajas, según la revista VÍNCULOS Vol10 (2015).

En la tabla 1-4 se tienen los resultados de la primera encuesta a los docentes, donde que se pueden apreciar las frecuencias con las que los encuestados respondieron a cada una de las proposiciones planteadas. También se puede apreciar el valor total alcanzado por cada proposición, dando una ponderación de 0,25,50,75 y 100 a los casilleros de respuesta 1, 2,3,4 y 5 respectivamente y multiplicados por su frecuencia. Finalmente se tienen las valoraciones porcentuales correspondientes a los totales de cada proposición.

Según los resultados de aceptación alcanzadas por las proposiciones del 1al 7, se ve claramente que los docentes están de acuerdo en que la geometría en Nivelación debe enseñarse con un software geométrico; y según los resultados de aceptación de las proposiciones del 8 al 11, se ve

también que están de acuerdo en que el software seleccionado y más adecuado es el GeoGebra. El porcentaje de aceptación es del 85%.

Por lo tanto la parte geométrica de la propuesta de esta investigación, será desarrollada en GeoGebra.

Tabla 1-4. Matriz de Contingencia: Encuesta a docentes 1

	1	2	3	4	5
PROPOSICIONES	0	25	50	75	100
1. Enseñar Geometría con la ayuda de softwares geométricos interactivos, es mejor que enseñar sólo con tiza y pizarrón.	0	0	0	1	8
	875		97,22%		
2. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, los gráficos que se realizan en él, son a escala y la realidad geométrica no se distorciona.	0	0	0	3	6
	825		91,67%		
3. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, el estudiante tiene la posibilidad de aprender y hacer sus propios trazos y gráficos a escala.	0	0	0	4	5
	800		88,89%		
4. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, las propiedades de los postulados, axiomas, teoremas y otros, pueden verificarse dinámicamente con este programa.	0	0	0	7	2
	725		80,56%		
5. Al no tener que dibujar los gráficos en el pizarrón, se gana tiempo con los dibujos que ya se tienen dibujados en el software geométrico.	0	0	3	0	6
	750		83,33%		
6. Los trabajos con softwares geométricos son ordenados y pulcros.	0	0	0	8	1
	700		77,78%		
7. Me gustaría que la institución para la que yo trabajo, me proporcione en forma digital, la asignatura de Geometría desarrollada de acuerdo a los contenidos establecidos por la Senescyt y con el soporte de un software geométrico interactivo.	0	0	2	5	2
	675		75,00%		
8. El software geométrico interactivo que más conocen y han utilizado los estudiantes que llegan a nivelación es el GEOGEBRA.	0	0	0	0	9
	900		100,00%		
CONTINÚA.....					

		CONTINUACIÓN				
9. Los estudiantes que no conocen GEOGEBRA, rápidamente lo asimilan del profesor o de sus compañeros que si conocen este software.	0	0	0	9	0	
	675		75,00%			
10. Los principales softwares geométricos que conozco y se encuentran en la Web son: Autocad, Geometer'sSketchPad, CabriGeometry Plus II, Geogebra, GeoEnzo, GeometryCalculator.	0	0	1	2	6	
	800		88,89%			
11. Me gustaría que en nivelación se enseñe Geometría con GeoGebra puesto que es: software libre; conocido en la comunidad educativa de nuestro país; versátil y fácil de aprender.	0	0	0	8	1	
	700		77,78%			
Elaborado por: Carlos Torres 2014					85%	

•

4.1.2 Encuesta N° 2

Una vez desarrollada la PROPUESTA en base al GeoGebra, se puso ésta a consideración de los docentes de Nivelación para que sea validada por ellos, a través de la segunda encuesta la misma que se encuentra su formato en el ANEXO 6 como encuesta N° 2.

En la tabla 2-4 de abajo, se tiene un resumen de los resultados de la segunda encuesta a los docentes, donde que se pueden apreciar las frecuencias con las que los encuestados respondieron a cada una de las proposiciones planteadas.

De idéntica manera a la encuesta N°1, también se puede apreciar el valor total alcanzado por cada proposición, dando una ponderación de 0, 25, 50, 75 y 100 a los casilleros de respuesta 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente y multiplicados por su frecuencia. Se obtienen las valoraciones porcentuales correspondientes a los totales de cada proposición.

Finalmente, dándole un peso igual a todas las proposiciones, se calcula el porcentaje general de la encuesta y se obtiene como resultado de aceptación de la PROPUESTA por parte de los profesores de un 98%, valor éste que permite validar el trabajo desarrollado por el tesista.

Tabla 2-4. Matriz de Contingencia: Encuesta a docentes 20

	1	2	3	4	5
PROPOSICIONES	0	25	50	75	100
1. El desarrollo de la teoría sobre triángulos está desarrollado totalmente en digital.	0	0	0	2	7
	850		94%		
2. El contenido de la teoría sobre triángulos está compuesto por conceptos, definiciones, postulados, teoremas, propiedades, etc.	0	0	0	0	9
	900		100%		
3. Los teoremas están respaldados por su correspondiente demostración.	0	0	0	0	9
	900		100%		
4. El desarrollo del contenido del tema sobre triángulos, está respaldado por la correspondiente teoría, problemas resueltos y problemas planteados.	0	0	0	2	7
	850		94%		
5. Los Teoremas y propiedades geométricas demostradas se pueden verificar en forma dinámica a través del Geogebra, por medio de un enlace.	0	0	0	0	9
	900		100%		
6. El material desarrollado teóricamente contiene gráficos y dibujos estáticos, estructurados adecuadamente para la enseñanza.	0	0	0	0	9
	900		100%		
7. Los teoremas y propiedades geométricas, están respaldados con gráficos y dibujos, con su correspondiente demostración matemática y la verificación de las propiedades en Geogebra y en forma dinámica.	0	0	0	0	9
	900		100%		
8. Me gustaría disponer de este material interactivo sobre triángulos, para mis clases de geometría.	0	0	0	1	8
	875		97%		
9. Los estudiantes se van a sentir motivados puesto que van a poder verificar dinámicamente las propiedades geométricas y teoremas demostrados, a través del Geogebra.	0	0	0	3	6
	825		92%		
10. Este trabajo dispone de enlaces con internet para poder hacer cualquier consulta sobre geometría.	0	0	0	1	8
	875		97%		
11. Este trabajo también me da la posibilidad de editarlo, en el supuesto caso que quiera mejorarlo o hacer otras modificaciones y presentaciones.	0	0	0	0	9
	900		100%		
12. Este material me motiva y me mantiene con la actitud de siempre estar mejorando en todo, como profesor de geometría.	0	0	0	1	8
	875		97%		
Elaborado por: Carlos Torres 2014	98%				

4.2 RESULTADO DE ENCUESTA A ESTUDIANTES

Para medir el grado de aceptación y afinidad (parte afectiva) que tiene el estudiante por el aprendizaje de la geometría con un software matemático interactivo, se procedió a elaborar una encuesta cuyo formato se encuentra establecido en el ANEXO 7 como encuesta N° 3 y con la cual se encuestó a un paralelo de Nivelación de 30 estudiantes escogido al azar, luego de haberseles impartido una clase con la PROPUESTA desarrollada.

Los resultados fueron halagadores, puesto que hubo una aceptación por parte de los estudiantes, de un 85% a las proposiciones planteadas y que demuestran su afinidad por el aprendizaje de la geometría a través de un software matemático interactivo como es el GeoGebra, según se establece en la tabla 3-4 donde se resumen los resultados. El 85% calculado es tomando en cuenta que el peso de cada proposición son iguales.

Tabla 3-4. Matriz de Contingencia: Encuesta a estudiantes

	1	2	3	4	5
PROPOSICIONES	0	25	50	75	100
1. Aprender Geometría con la ayuda de software geométrico interactivo GEOGEBRA, es mejor que aprender sólo con tiza y pizarrón.	0	1	2	11	16
	2550		85%		
2. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, los gráficos son a escala y la realidad geométrica no se distorsiona.	0	0	0	6	24
	2850		95%		
3. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, tengo la posibilidad de hacer mis propios trazos y gráficos a escala.	0	0	1	9	20
	2725		91%		
4. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, las propiedades de los postulados, axiomas, teoremas y otros, se pueden verificar dinámicamente con este programa.	0	0	1	8	21
	2750		92%		
5. Los resultados numéricos de problemas planteados y resueltos, se pueden verificar con el software GEOGEBRA.	0	0	3	9	18
	2625		88%		
CONTINÚA...					

						CONTINUACIÓN				
6. Al no tener que dibujar el docente los gráficos en el pizarrón, se gana tiempo con los dibujos que él ya tiene dibujado en el software GEOGEBRA.	0	2	0	8	20					
	2650		88%							
7. Los trabajos con software GEOGEBRA son ordenados y pulcros.	0	0	2	12	16					
	2600		87%							
8. Me gustaría que me enseñen Geometría en forma digital, asistido por el software geométrico interactivo GEOGEBRA.	0	1	2	9	18					
	2600		87%							
9. El software geométrico interactivo que más conocen y han utilizado mis compañeros que llegan a nivelación es el GEOGEBRA.	0	2	9	12	7					
	2100		70%							
10. Mis compañeros que no conocen de GEOGEBRA rápidamente aprenden este programa, ya sea con la ayuda del profesor o de sus compañeros, que si conocen y saben este software.	0	0	11	16	3					
	2050		68%							
Elaborado por: Carlos Torres 2014						85%				

4.3 ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA

4.3.1 Dominio psicomotriz: momento diagnóstico

La prueba **diagnóstica** (ANEXO 1) debe ser receptada una vez que se ha procedido a dar 2 semanas de clases tipo conferencia, aplicando exactamente las mismas estrategias didácticas, las mismas motivaciones, los mismos periodos de tiempo, en espacios semejantes, etc. con el propósito de evitar sesgos de cualquier índole.

Sobre la Lista de Cotejos (ANEXO 8) se recogen los resultados de la prueba **diagnóstica**. Esta lista contiene 6 columnas (nº, grupo, imita, sigue instrucciones, independiente, preciso). La primera de ellas contiene el número de lista del estudiante; se debe recordar que no es conveniente colocar nombres o códigos de estudiantes por cuanto dicha información pertenece a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL; institución ésta, que no tiene interés alguno en que se divulguen los pormenores de su proceso educativo.

La segunda columna corresponde al grupo: experimental o de control; en la tercera columna debe colocarse un “**Si**” en caso de que el estudiante no tenga problemas en imitar el proceso de construcción de soluciones a problemas sobre triángulos; coloque un “**No**” en los casilleros de los estudiantes que no sepan imitar.

Para llenar la cuarta columna entregue un grupo de instrucciones para resolver gráfica y analíticamente ejercicios sobre resolución de triángulos. Si un estudiante ejecuta las instrucciones solo leyendo sin necesidad de preguntarle a usted como maestro, ponga en el casillero un “**Si**”; caso contrario un “**No**”.

En la quinta columna, una vez que usted proponga un problema de resolución de triángulos sin dar instrucciones precisas de cómo hacerlo, coloque un “**Si**” en la casilla del estudiante que echó mano a las herramientas científicas teóricas que usted le facilitó en las 2 semanas iniciales y que trabajó independientemente; caso contrario un “**No**”.

En la sexta casilla referente a la precisión, si es que existen estudiantes que muestran niveles de calidad (rapidez, eficiencia, eficacia, puntualidad) en la ejecución de la evaluación diagnóstica señale un “**Si**”; caso contrario un “**No**”. Recuerde que la lista de cotejos es criterial; debe usted ser muy observador y detallista para registrar los resultados fidedignos de su aplicación metodológica.

En la tabla 4-4 se recogen los resultados de la prueba **diagnóstica** y en la tabla 5-4 la correspondiente matriz de contingencia.

Tabla 4-4. Matriz: Grupos – Dominio psicomotriz

No	GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Experimental	Si	Si	Si	Si
2	Experimental	No	No	No	No
3	Experimental	No	Si	No	No
4	Experimental	No	No	No	No
5	Experimental	Si	Si	Si	Si
6	Experimental	No	No	No	No
7	Experimental	No	No	No	No
8	Experimental	Si	Si	Si	No

CONTINÚA....

				CONTINUACIÓN	
9	Experimental	Si	Si	Si	No
10	Experimental	No	Si	No	No
11	Experimental	Si	Si	Si	No
12	Experimental	Si	Si	No	No
13	Experimental	No	No	No	No
14	Experimental	No	Si	No	No
15	Experimental	Si	Si	No	No
16	Experimental	Si	Si	No	No
17	Experimental	No	No	No	No
18	Experimental	Si	Si	No	No
19	Experimental	No	No	No	No
20	Experimental	No	No	No	No
21	Experimental	No	No	No	No
22	Experimental	No	No	No	No
23	Experimental	No	No	No	No
24	Experimental	No	No	No	No
25	Experimental	Si	Si	No	No
26	Experimental	No	No	No	No
27	Experimental	No	No	No	No
28	Experimental	No	No	No	No
29	Experimental	Si	Si	Si	No
30	Experimental	No	No	No	No
31	Control	Si	Si	Si	No
32	Control	Si	No	Si	No
33	Control	No	No	No	No
34	Control	No	No	No	No
35	Control	Si	Si	Si	Si
36	Control	Si	Si	No	No
37	Control	Si	Si	No	No
38	Control	No	No	No	No
39	Control	Si	Si	Si	Si
40	Control	No	No	No	No
41	Control	Si	Si	No	No
42	Control	No	No	No	No
43	Control	Si	Si	Si	No

CONTINÚA...

				CONTINUACIÓN	
44	Control	No	No	No	No
45	Control	Si	No	No	No
46	Control	Si	Si	Si	No
47	Control	No	No	No	No
48	Control	No	No	No	No
49	Control	No	No	No	No
50	Control	No	Si	No	No
51	Control	No	No	No	No
52	Control	No	No	No	No
53	Control	No	No	No	No
54	Control	Si	Si	No	No
55	Control	Si	Si	No	No
56	Control	No	No	No	No
57	Control	No	No	No	No
58	Control	No	No	No	No
59	Control	Si	Si	No	No
60	Control	No	No	No	No

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Tabla 5-4. Matriz de Contingencia: Momento diagnóstico

GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	ES INDEPENDIENTE	ES PRECISO
Experimental	11	14	6	2
E. Esperado	12	13	6	2
Control	13	12	6	2
C. Esperado	12	13	6	2
Total	24	26	12	4
Chi calculado	0,32 p=0,96			
Chi tabulado	7,81 p=0,05			

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 4-4

Planteamiento de la hipótesis:

H₀: Se relacionan grupo y categorías del dominio psicomotriz; $p \geq 0,05$

H₁: No se relacionan grupo y categorías del dominio psicomotriz; $p < 0,05$

Validación de la hipótesis:

Grados de libertad: 3

Nivel de confianza: 95%; $\alpha=0.05$

Chi tabulado: 7.81

Chi calculado: 0.32

$P = 0.96$

Decisión: como $0,96 > 0,05$ se acoge la hipótesis nula; es decir que existe relación entre los grupos y su desempeño en el dominio psicomotriz en el diagnóstico.

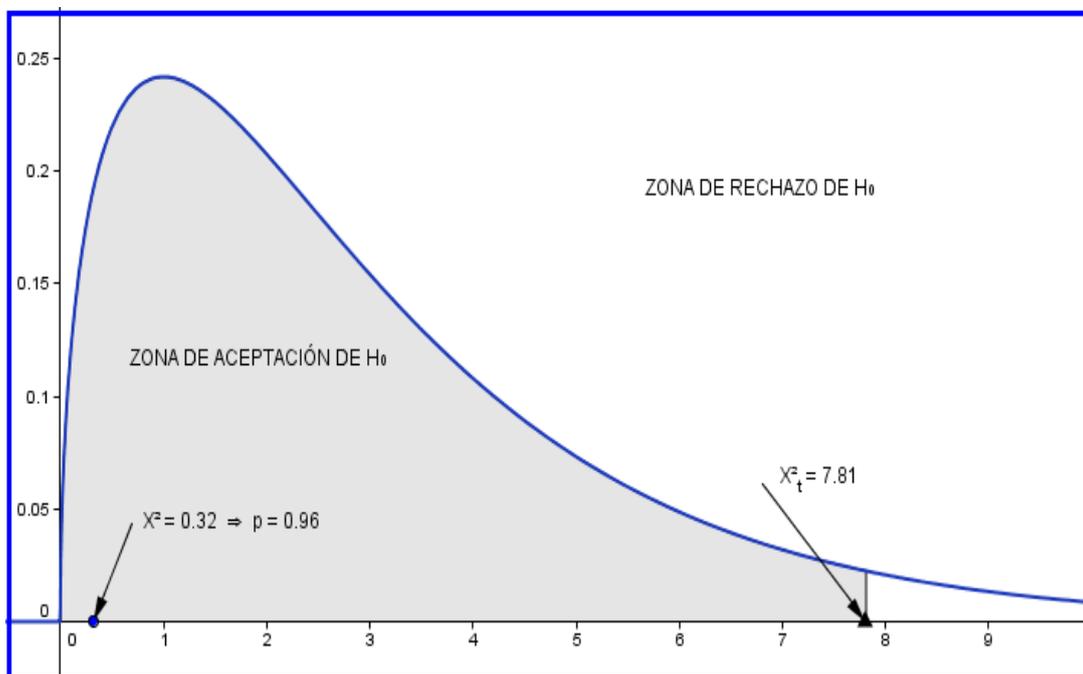


Imagen 1-4. Prueba Chi cuadrado: Momento diagnóstico

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente:Tabla 5-4

El gráfico anterior corresponde a la descripción gráfica de la prueba de hipótesis mediante la técnica Chi cuadrado en la cual se marcan con vectores los valores crítico y calculado de la mencionada prueba; así como las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula.

4.3.2 Dominio psicomotriz: momento primera evaluación

La prueba **primera evaluación** (ANEXO 2) debe ser receptada una vez que se ha procedido a dar con Geogebra, el primer módulo sobre triángulos al grupo experimental; en cuanto al grupo de control se debe continuar con las clases expositivas. En ambos grupos deben aplicarse los mismos contenidos y las mismas preguntas de evaluación.

Sobre la Lista de Cotejos (ANEXO 9) se recogen los resultados de la prueba **primera evaluación**. Esta lista contiene 6 columnas (nº, momento, imita, sigue instrucciones, independiente, preciso). La primera de ellas contiene el número de lista del estudiante; se debe recordar que no es conveniente colocar nombres o códigos de estudiantes por cuanto dicha información pertenece a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL; institución ésta, que no tiene interés alguno en que se divulguen los pormenores de su proceso educativo.

La segunda columna corresponde al grupo experimental pero en diferentes momentos; en la tercera columna debe colocarse un “**Si**” en caso de que el estudiante no tenga problemas en imitar el proceso de construcción de soluciones a problemas sobre triángulos; coloque un “**No**” en los casilleros de los estudiantes que no sepan imitar.

Para llenar la cuarta columna entregue un grupo de instrucciones para resolver gráfica y analíticamente ejercicios sobre resolución de triángulos. Si un estudiante ejecuta las instrucciones solo leyendo sin necesidad de preguntarle a usted como maestro, ponga en el casillero un “**Si**”; caso contrario un “**No**”.

En la quinta columna, una vez que usted proponga un problema de resolución de triángulos sin dar instrucciones precisas de cómo hacerlo, coloque un “**Si**” en la casilla del estudiante que echó mano a las herramientas científicas teóricas que usted le facilitó en las 2 semanas iniciales y que trabajó independientemente; caso contrario un “**No**”.

En la sexta casilla referente a la precisión, si es que existen estudiantes que muestran niveles de calidad (rapidez, eficiencia, eficacia, puntualidad) en la ejecución de la evaluación diagnóstica señale un “**Si**”; caso contrario un “**No**”. Recuerde que la lista de cotejos es criterial; debe usted ser muy observador y detallista para registrar los resultados fidedignos de su aplicación metodológica.

En la tabla 6-4 se recogen los resultados de la prueba **primer evaluación** y en la tabla 7-4 la correspondiente matriz de contingencia.

Tabla 6-4. Matriz: Momentos – Dominio psicomotriz

N°	MOMENTO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Diagnóstico	Si	Si	Si	Si
2	Diagnóstico	No	No	No	No
3	Diagnóstico	No	Si	No	No
4	Diagnóstico	No	No	No	No
5	Diagnóstico	Si	Si	Si	Si
6	Diagnóstico	No	No	No	No
7	Diagnóstico	No	No	No	No
8	Diagnóstico	Si	Si	Si	No
9	Diagnóstico	Si	Si	Si	No
10	Diagnóstico	No	Si	No	No
11	Diagnóstico	Si	Si	Si	No
12	Diagnóstico	Si	Si	No	No
13	Diagnóstico	No	No	No	No
14	Diagnóstico	No	Si	No	No
15	Diagnóstico	Si	Si	No	No
16	Diagnóstico	Si	Si	No	No
17	Diagnóstico	No	No	No	No
18	Diagnóstico	Si	Si	No	No
19	Diagnóstico	No	No	No	No
20	Diagnóstico	No	No	No	No
21	Diagnóstico	No	No	No	No
22	Diagnóstico	No	No	No	No
23	Diagnóstico	No	No	No	No
24	Diagnóstico	No	No	No	No
25	Diagnóstico	Si	Si	No	No
26	Diagnóstico	No	No	No	No
27	Diagnóstico	No	No	No	No
28	Diagnóstico	No	No	No	No
29	Diagnóstico	Si	Si	Si	No
30	Diagnóstico	No	No	No	No
31	Evaluación 1	Si	Si	Si	No
32	Evaluación 1	Si	Si	Si	No
33	Evaluación 1	No	No	Si	Si
34	Evaluación 1	No	No	No	No
35	Evaluación 1	Si	Si	Si	Si
36	Evaluación 1	Si	Si	Si	Si

CONTINÚA...

				CONTINUACIÓN	
37	Evaluación 1	Si	Si	Si	No
38	Evaluación 1	No	No	No	Si
39	Evaluación 1	Si	Si	Si	Si
40	Evaluación 1	Si	No	No	No
41	Evaluación 1	Si	Si	Si	No
42	Evaluación 1	No	No	No	No
43	Evaluación 1	Si	Si	Si	Si
44	Evaluación 1	No	Si	No	Si
45	Evaluación 1	Si	No	No	No
46	Evaluación 1	Si	Si	Si	No
47	Evaluación 1	Si	Si	No	No
48	Evaluación 1	No	No	No	No
49	Evaluación 1	No	No	No	No
50	Evaluación 1	No	Si	No	Si
51	Evaluación 1	No	Si	No	Si
52	Evaluación 1	No	No	No	Si
53	Evaluación 1	Si	No	No	No
54	Evaluación 1	Si	Si	No	No
55	Evaluación 1	Si	Si	No	No
56	Evaluación 1	No	Si	No	Si
57	Evaluación 1	Si	Si	No	No
58	Evaluación 1	No	No	No	No
59	Evaluación 1	Si	Si	No	No
60	Evaluación 1	No	No	No	No

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Tabla 7-4. Matriz de Contingencia: Momento primera evaluación

MOMENTO				
	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	ES INDEPENDIENTE	ES PRECISO
Diagnóstico	11	14	6	2
Esperado	10.4	11.9	5.9	4.8
Evaluación 1	17	18	10	11
Esperado	17.6	20.1	10.1	8.2
Total	28	32	16	13
Chi calculado	3.29 p = 0.35			
Chi Tabulado	7.81 p = 0.05			

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente:Tabla 6-4

Planteamiento de la hipótesis:

H₀: Se relacionan momentos y categorías del dominio psicomotriz; $p \geq 0,05$

H_i: No se relacionan momentos y categorías del dominio psicomotriz; $p < 0,05$

Validación de la hipótesis:

Grados de libertad: 3

Nivel de confianza: 95%; $\alpha=0.05$

Chi tabulado: 7.81

Chi calculado: 3.29

P = 0.35

Decisión: como $0.35 > 0.05$ se concluye que se relacionan momentos y categorías del dominio psicomotriz.

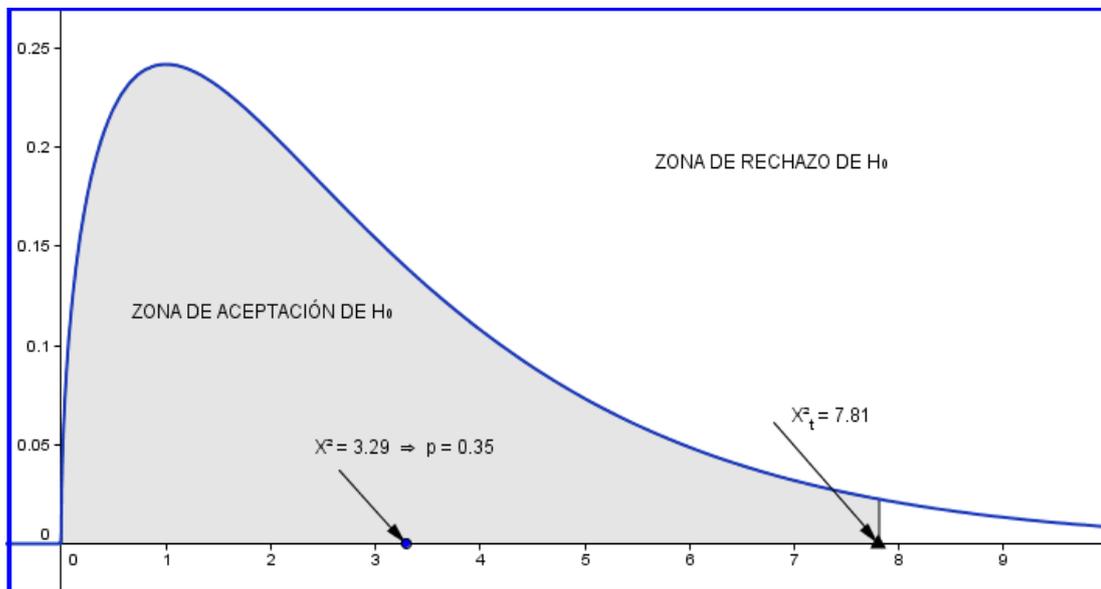


Imagen 2-4. Prueba Chi cuadrado: Momento primera evaluación

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente:Tabla 7-4

El gráfico anterior corresponde a la descripción gráfica de la prueba de hipótesis mediante la técnica Chi cuadrado en la cual se marcan con vectores los valores crítico y calculado de la mencionada prueba; así como las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula.

4.3.3 Dominio psicomotriz: momento evaluación final

La prueba **evaluación final** debe ser receptada una vez se ha procedido a dar el segundo módulo sobre triángulos a los grupos experimental y de control; en cuanto al grupo de control se debe

continuar con las clases expositivas. En ambos grupos deben aplicarse los mismos contenidos y las mismas preguntas de evaluación.

Sobre la Lista de Cotejos (ANEXO 10) se recogen los resultados de la prueba **evaluación final**. Esta lista contiene 6 columnas (nº, grupo, imita, sigue instrucciones, independiente, preciso). La primera de ellas contiene el número de lista del estudiante; se debe recordar que no es conveniente colocar nombres o códigos de estudiantes por cuanto dicha información pertenece a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL; institución ésta, que no tiene interés alguno en que se divulguen los pormenores de su proceso educativo.

La segunda columna corresponde al grupo: experimental o control; en la tercera columna debe colocarse un “**Si**” en caso de que el estudiante no tenga problemas en imitar el proceso de construcción de soluciones a problemas sobre triángulos; coloque un “**No**” en los casilleros de los estudiantes que no sepan imitar.

Para llenar la cuarta columna entregue un grupo de instrucciones para resolver gráfica y analíticamente ejercicios sobre resolución de triángulos. Si un estudiante ejecuta las instrucciones solo leyendo sin necesidad de preguntarle a usted como maestro, ponga en el casillero un “**Si**”; caso contrario un “**No**”.

En la quinta columna, una vez que usted proponga un problema de resolución de triángulos sin dar instrucciones precisas de cómo hacerlo, coloque un “**Si**” en la casilla del estudiante que echó mano a las herramientas científicas teóricas que usted le facilitó en las 2 semanas iniciales y que trabajó independientemente; caso contrario un “**No**”.

En la sexta casilla referente a la precisión, si es que existen estudiantes que muestran niveles de calidad (rapidez, eficiencia, eficacia, puntualidad) en la ejecución de la evaluación diagnóstica señale un “**Si**”; caso contrario un “**No**”. Recuerde que la lista de cotejos es criterial; debe usted ser muy observador y detallista para registrar los resultados fidedignos de su aplicación metodológica.

En la tabla 8-4 se recogen los resultados de la prueba **evaluación final** y en la tabla 9-4 la correspondiente matriz de contingencia.

Tabla 8-4. Matriz: Grupos - Dominio psicomotriz

NO. LISTA	GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Experimental	Si	Si	Si	Si
2	Experimental	Si	Si	Si	No
3	Experimental	Si	Si	No	Si
4	Experimental	No	No	No	No
5	Experimental	Si	Si	Si	Si
6	Experimental	No	No	No	No
7	Experimental	No	Si	No	No
8	Experimental	Si	Si	Si	Si
9	Experimental	Si	Si	Si	No
10	Experimental	No	Si	Si	No
11	Experimental	Si	Si	Si	Si
12	Experimental	Si	Si	No	No
13	Experimental	Si	No	Si	No
14	Experimental	No	Si	No	No
15	Experimental	Si	Si	No	No
16	Experimental	Si	Si	No	No
17	Experimental	Si	No	Si	Si
18	Experimental	Si	Si	No	No
19	Experimental	Si	No	No	No
20	Experimental	No	No	Si	No
21	Experimental	Si	Si	Si	No
22	Experimental	Si	No	No	Si
23	Experimental	No	No	No	No
24	Experimental	No	Si	Si	No
25	Experimental	Si	Si	Si	No
26	Experimental	Si	Si	No	No
27	Experimental	No	No	Si	No
28	Experimental	No	No	No	No
29	Experimental	Si	Si	Si	No
30	Experimental	No	Si	No	Si
31	Control	Si	Si	Si	No
32	Control	Si	Si	Si	No
33	Control	No	No	Si	Si
34	Control	No	No	No	No
35	Control	Si	Si	Si	Si

CONTINÚA...

				CONTINUACIÓN	
36	Control	Si	Si	Si	Si
37	Control	Si	Si	No	No
38	Control	No	No	No	No
39	Control	Si	Si	Si	Si
40	Control	Si	No	No	No
41	Control	Si	Si	Si	No
42	Control	No	No	No	No
43	Control	Si	Si	Si	Si
44	Control	No	Si	No	No
45	Control	Si	No	No	No
46	Control	Si	Si	Si	No
47	Control	Si	No	No	No
48	Control	No	No	No	No
49	Control	No	No	No	No
50	Control	No	Si	No	Si
51	Control	No	No	No	No
52	Control	No	No	No	No
53	Control	No	No	No	No
54	Control	Si	Si	No	No
55	Control	Si	Si	No	No
56	Control	No	Si	No	Si
57	Control	No	No	No	No
58	Control	No	No	No	No
59	Control	Si	Si	No	No
60	Control	No	No	No	No

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Tabla 9-4. Matriz de Contingencia: Momento evaluación final

GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	ES INDEPENDIENTE	ES PRECISO
Experimental	19	20	15	8
E. Esperado	19.5	20.1	13.8	8.6
Control	15	15	9	7
C. Esperado	14.5	14.9	10.2	6.4
Total	34	35	24	15
Chi calculado	0.39 p=0,94			
Chi tabulado	7,81p=0,05			

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 8-4

Planteamiento de la hipótesis:

H₀: Se relacionan grupo y categorías del dominio psicomotriz; $p \geq 0,05$

H₁: No se relacionan grupo y categorías del dominio psicomotriz; $p < 0,05$

Validación de la hipótesis:

Grados de libertad: 3

Nivel de confianza: 95%; $\alpha = 0.05$

Chi tabulado: 7.81

Chi calculado: 0.39

P = 0.94

Decisión: como $0,94 > 0,05$ se acoge la hipótesis nula; es decir que existe relación entre los grupos y su desempeño en el dominio psicomotriz.

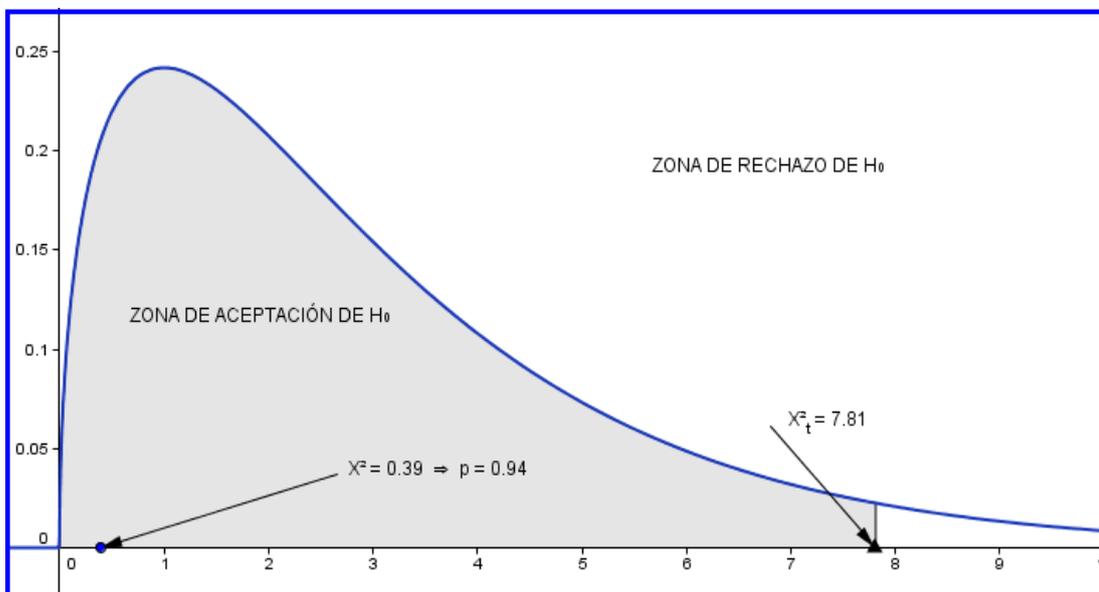


Imagen 3-4. Prueba Chi cuadrado: Momento evaluación final

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente:Tabla 9-4

El gráfico anterior corresponde a la descripción gráfica de la prueba de hipótesis mediante la técnica Chi cuadrado en la cual se marcan con vectores los valores crítico y calculado de la mencionada prueba; así como las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula.

4.4 ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA

4.4.1 Dominio cognitivo

Para la evaluación de rendimiento (ANEXO 4) en el dominio cognitivo tanto para el grupo experimental y de control, se elaboró un test de geometría sobre el tema triángulos, el mismo que fue aplicado a los dos grupos dándoles un mismo tiempo de 60 minutos para la resolución.

Tabla 10-4. Logros de rendimiento grupo experimental y control

NO. LISTA	GRUPO EXPERIMENTAL / 10	GRUPO DE CONTROL / 10
1	7,3	10
2	8,1	7
3	7,6	5,5
4	4,5	6,7
5	9,3	5,8
6	8,5	7,3
7	7,6	7,3
8	8,1	6
9	8,5	6
10	7,3	4,5
11	9	8
12	8,1	7,6
13	6	9,7
14	7,6	7,3
15	9	8,5
16	7,3	6
17	8,1	8,1
18	8,5	2
19	7,6	7,3
20	9,3	3,3
21	8,5	4,5
22	4,5	6
23	9	9,3
24	7,6	5
25	9,3	4,5
26	7,3	6,6
27	3	5
28	8,1	4,5
29	9,3	7,3
30	9	8

Elaborado por: Carlos Torres 2014

El tema de dicha evaluación se enfocó en la resolución de problemas donde que el estudiante debía tener un conocimiento cabal de los teoremas estudiados en el transcurso de la investigación. Esta evaluación fue aplicada una vez finalizadas las clases sobre triángulos y después de las evaluaciones psicomotrices.

Tabla 11-4. Estadísticos descriptivos

ESTADÍSTICOS			
		Experimental	Control
N	Válidos	30	30
	Perdidos	30	30
Media		7,7633	6,4867
Desv. típica		1,51304	1,85300

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

Tabla 12-4. Tabla de frecuencia grupo experimental

EXPERIMENTAL					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	3,00	1	1,7	3,3	3,3
	4,50	2	3,3	6,7	10,0
	6,00	1	1,7	3,3	13,3
	7,30	4	6,7	13,3	26,7
	7,60	5	8,3	16,7	43,3
	8,10	5	8,3	16,7	60,0
	8,50	4	6,7	13,3	73,3
	9,00	4	6,7	13,3	86,7
	9,30	4	6,7	13,3	100,0
	Total	30	50,0	100,0	
Perdidos	Sistema	30	50,0		
Total		60	100,0		

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

Tabla 13-4. Tabla de frecuencia grupo de control

CONTROL					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	2,00	1	1,7	3,3	3,3
	3,30	1	1,7	3,3	6,7
	4,50	4	6,7	13,3	20,0
	5,00	2	3,3	6,7	26,7
	5,50	1	1,7	3,3	30,0
	5,80	1	1,7	3,3	33,3
	6,00	4	6,7	13,3	46,7
	6,60	1	1,7	3,3	50,0
	6,70	1	1,7	3,3	53,3
	7,00	1	1,7	3,3	56,7
	7,30	5	8,3	16,7	73,3
	7,60	1	1,7	3,3	76,7
	8,00	2	3,3	6,7	83,3
	8,10	1	1,7	3,3	86,7
	8,50	1	1,7	3,3	90,0
	9,30	1	1,7	3,3	93,3
	9,70	1	1,7	3,3	96,7
	10,00	1	1,7	3,3	100,0
	Total	30	50,0	100,0	
Perdidos	Sistema	30	50,0		
Total		60	100,0		

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

Se debe recordar que la evaluación final no tiene que ver con la habilidad de usar GeoGebra sino con la abstracción del tema triángulos; es decir con la capacidad de comprender, aplicar, analizar y sintetizar dicha temática; independientemente del grupo o metodología.

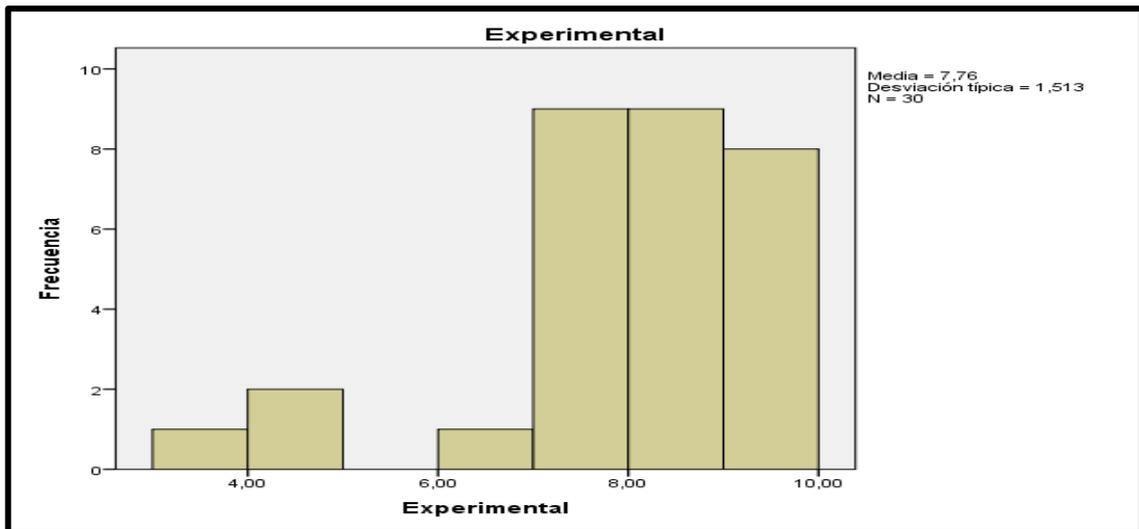


Imagen 4-4. Histograma grupo experimental

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

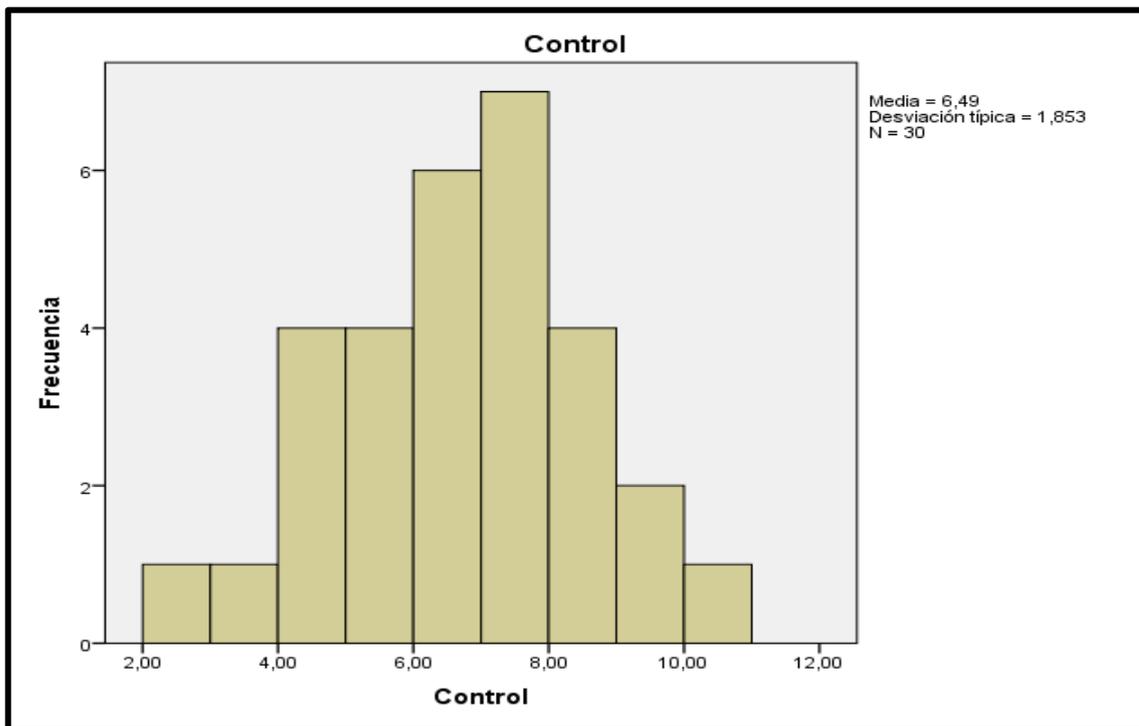


Imagen 5-4. Histograma grupo de control

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

Tabla 14-4. Medias y desviaciones muestrales

MEDIAS	VALOR
X ₁ Experimental	7,76
X ₂ Control	6,49
S ₁	1,51
S ₂	1,85

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente: Tabla 10-4

4.5 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS PARAMÉTRICA

- Las medias de rendimiento del diagnóstico entre los grupos de experimentación y control son iguales.

H₀: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; p valor ≥ 0.05 ; z calculada \leq valor crítico = 1.64

- Las medias de rendimiento del diagnóstico entre los grupos de experimentación y control son significativamente diferentes.

H₁: $\mu_1 - \mu_2 > 0$; p valor < 0.05 ; z calculada $>$ valor crítico = 1.64

$$z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_1}}}$$

Donde:

X₁: Media de rendimiento del grupo experimental

X₂: Media de rendimiento del grupo de control

S₁: Desviación muestral del grupo experimental

S₂: Desviación muestral del grupo de control

$$z = \frac{7.76 - 6.49}{\sqrt{\frac{1.51^2}{30} + \frac{1.85^2}{30}}} = z = \frac{1.27}{\sqrt{0.19}} = 2.91$$

Decisión: Como Z calculado $2.91 > Z$ Tabulado 1.64 se rechaza la hipótesis nula y se da por aceptada la hipótesis alternativa; es decir, las medias del diagnóstico entre los grupos experimental y de control son significativamente diferentes. Por lo tanto, el rendimiento académico de los estudiantes del primero grupo es mejor que el de los estudiantes del grupo de control.

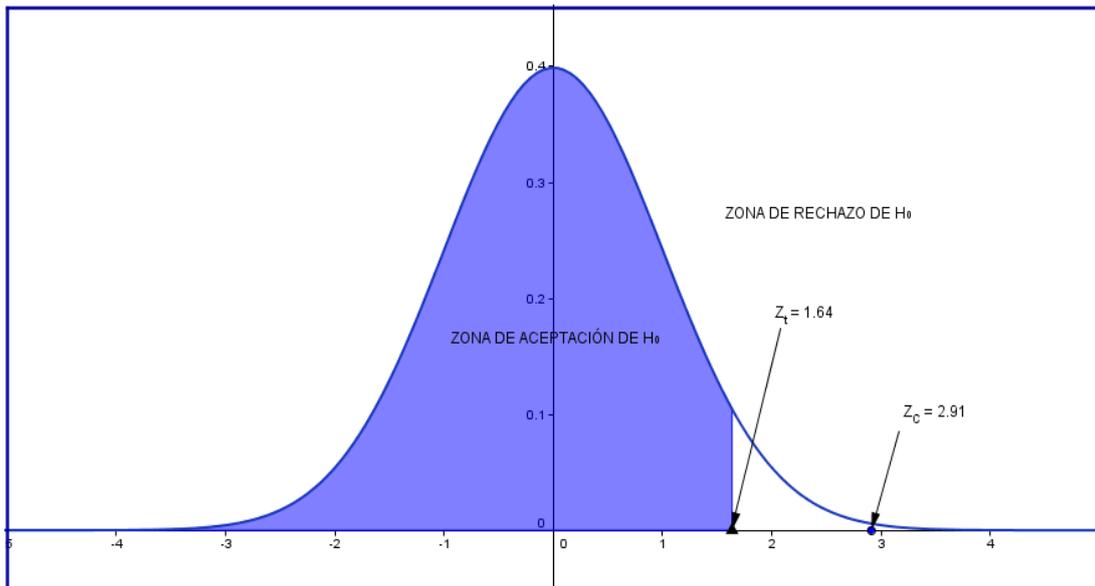


Imagen 6-4. Prueba Z

Elaborado por: Carlos Torres 2014

Fuente:Tabla 10-4

El gráfico anterior corresponde a la descripción gráfica de la prueba de hipótesis mediante la técnica Zeta normalizada a una sola cola en la cual se marcan con vectores los valores crítico y calculado de la mencionada prueba; así como las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula.

4.6PROPUESTA

4.6.1 *Introducción*

El autor presenta la guía metodológica orientada a mediar en el aprendizaje de geometría en el tema triángulos. El mediador es el recurso interactivo basado en el software libre denominado GeoGebra. El recurso utiliza un lenguaje intuitivo de alto nivel.

Los beneficiarios de esta propuesta son en primera instancia los estudiantes de nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE. Se espera que con los resultados óptimos alcanzados mediante la investigación adjunta a este apartado se amplíe la aplicación a otros grupos estudiantiles y de maestros.

El impacto de esta investigación, entendiéndose éste como aquella parte de la realidad educativa que cambia, se relaciona con la traducción de los contenidos abstractos de la geometría y matemática en la concreción de conocimientos prácticos a fin de alcanzar el aprendizaje significativo.

Las partes en las que se divide esta guía metodológica son las siguientes:

1. Desarrollo de la teoría de triángulos según el programa de matemática para Nivelación de la CENESCYT, donde se encuentra la materia desglosada en conceptos, definiciones, simbología, propiedades, teoremas, demostraciones, ejemplos, problemas resueltos y problemas propuestos.
2. Enlace a través de un ícono, a los archivos del Geogebra para vistas gráficas y dinámicas, que ilustran las propiedades de los triángulos y los teoremas demostrados analíticamente.
3. Enlace a través del mismo ícono al Geogebra, para realizar gráficos y dibujos de interés en el momento de la clase, ya sea por parte del estudiante o del profesor.

Cada archivo en Geogebra ilustra en forma dinámica propiedades de los triángulos o un teorema.

La interfaz de estos archivos constan de una parte textual, de una ventana gráfica y de una ventana algebraica. En la parte textual se encuentra el nombre y el enunciado del teorema, la hipótesis, la tesis y la correspondiente simbología. En la ventana gráfica, a través del dibujo, se ilustra dinámicamente el teorema o propiedad demostrada. En la ventana algebraica se

visualizan en cambio las diferentes medidas de los elementos geométricos, que van cambiando según cambian las medidas de la figura en la ventana gráfica.

4.6.2 Justificación

La presente propuesta se justifica por los siguientes aspectos:

- Se hizo posible esta propuesta ya que se contaron con los recursos técnicos, tecnológicos, informáticos y el talento humano para concretar el producto que ahora se plasma en este documento.
- Fue viable construir la propuesta porque las autoridades de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, así como las de la Universidad de las Fuerzas Armadas con carácter democrático incentivaron, permitieron y motivaron la implementación de aquella; existió la complacencia de los miembros de las referidas comunidades educativas.
- La originalidad de la propuesta se verifica no en el sentido de que no existan otros trabajos de tesis relativos a la aplicación de GeoGebra como recurso didáctico, sino en el sentido de hacerlo en el marco de una teoría constructivista como lo es la Teoría de la Actividad de Leontiev, interpretada por nóveles investigadores de la pedagogía.

Los objetivos de esta propuesta son los siguientes:

4.6.3 Objetivo general

Elaborar e implementar una guía metodológica basada en el programa mediador GeoGebra para mejorar el rendimiento académico de geometría tema triángulos de los estudiantes de nivelación de la UFA-ESPE-L.

4.6.4 Objetivos específicos

- Diseñar las actividades relativas a la guía
- Diseñar el esquema general de la Guía Didáctica
- Establecer una prueba piloto
- Aplicar la guía didáctica
- Aplicar las matrices de observación y logros de aprendizaje

4.6.5 Beneficiarios

Los beneficiarios directos son los estudiantes de nivelación de la UFA-ESPE-L

4.6.6 Contenido

Puesto que la propuesta está desarrollada en otro formato, ésta se la ha incluido en el ANEXO 11, al final de este trabajo. La propuesta consta de los siguientes temas:

- Triángulos: definición, representación gráfica, elementos, denominación, clasificación, ángulos en el triángulo.
- Triángulos: líneas, puntos notables y ángulos entre líneas fundamentales.
- Propiedades de los triángulos: Isósceles, equilátero y rectángulo.
- Triángulos: congruencia.
- Triángulos: semejanza.
- Resolución de triángulos rectángulos: relaciones métricas y trigonométricas.
- Resolución de triángulos: relaciones métricas y trigonométricas.

4.6.7 Recursos humanos, técnicos y didácticos

Talento humano: Tesista y tutor de investigación

Recursos técnico didácticos: GeoGebra 4.4.45.0 Software libre, Word

4.6.8 Guía para el profesor y el alumno

- a. Comenzar el desarrollo de la asignatura según el programa de triángulos establecido por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.
- b. Dar la clase o hacer las explicaciones teóricas del caso a los estudiantes, siguiendo los contenidos sobre triángulos de la Propuesta.
- c. Cuando el profesor lo estime necesario, puede hacer uso del enlace con el Geogebra, a través del ícono que se encuentra en la parte inferior de cada una de las propiedades y teoremas del programa.

- d. En el enlace con el Geogebra, el profesor encontrará en forma dinámica la propiedad o el teorema que él terminó de explicar o demostrar al estudiante.
- e. El estudiante, por su lado, hace el seguimiento de la Propuesta a través de su computador, mientras que el docente da las explicaciones científicas del tema que está tratando en esa clase.
- f. El estudiante hace las verificaciones por su propia cuenta, de las propiedades y teoremas demostrados, por medio de su computador.
- g. El docente explica la resolución de ejercicios resueltos que se encuentran en la Propuesta.
- h. El docente plantea los problemas a resolverse que se encuentran en la Propuesta.
- i. El estudiante resuelve los problemas planteados.

Cabe señalar que este proceso se repite para todos y cada uno de los teoremas sobre triángulos, que se encuentran en la Propuesta.

Ejemplo:

Tema: Teorema de las bisectrices internas de un triángulo

1. El docente proyecta en el pizarrón la teoría sobre el tema del teorema de las bisectrices internas.
2. El docente explica el enunciado del teorema de las bisectrices internas del triángulo, estableciendo la hipótesis y la tesis del mismo.
3. El docente explica la demostración del teorema de la manera más adecuada.
4. Una vez realizada la explicación de la demostración, el docente se enlaza al archivo del Geogebra a través del ícono que se encuentra en la página.
5. Ya en el archivo, el docente ilustra dinámicamente las propiedades demostradas, para diferentes situaciones o medidas del triángulo haciendo uso del punto de arrastre.
6. El estudiante imita en su computador lo realizado por el docente y verifica las propiedades demostradas, por su propia cuenta.
7. El docente explica la resolución de los ejercicios resueltos sobre el teorema planteado y que se encuentran en la Propuesta.

8. El docente plantea a los estudiantes ejercicios para que los resuelva, los mismos que se encuentran en la propuesta y que tratan sobre el teorema de las bisectrices internas del triángulo.
9. El estudiante resuelve los problemas planteados sobre bisectrices internas.

CONCLUSIONES

- En el desarrollo de esta investigación se consideraron los tres dominios del aprendizaje (cognitivo, psicomotriz, afectivo) según las taxonomías de Benjamín Bloom, tomando como variable de estudio el rendimiento de los estudiantes en la parte cognitiva, una vez aplicada la PROPUESTA.
- La decisión en cuanto a utilizar un software como mediador de la enseñanza de la geometría tema triángulos y en cuanto a que el software más adecuado es el GeoGebra, fue tomada por los docentes de Nivelación a través de la encuesta N°1 (ANEXO 5), donde que a las proposiciones planteadas respondieron con un promedio de aceptación del 85% (Tabla 6).
- La PROPUESTA desarrollada por el tesista una vez terminada y puesta a consideración de los docentes y del grupo experimental de Nivelación, fue validada por ellos a través de las encuestas números 2 y 3 (ANEXOS 6 y 7), donde que a las proposiciones planteadas respondieron con un promedio de aceptación del 98% (Tabla 7) y 85% (Tabla 8), respectivamente.
- La prueba diagnóstica mostró que los grupos experimental y control tuvieron relativamente iguales desempeños de partida en cuanto a la capacidad psicomotriz; por lo tanto se concluye, que se propició la realización de la investigación sin sesgos de historia y maduración en el diseño experimental.
- Es notoria la acción del laboratorio virtual sobre las capacidades del estudiante y la mejora de sus potencialidades psicomotrices, así como de su rendimiento, según los resultados arrojados por la pruebas chi cuadrado y zeta normalizado en cuanto a la prueba de la hipótesis. Conclusión que es validada también, al observar una diferencia aproximada del 17%, entre las medias aritméticas de las calificaciones de los estudiantes de los dos grupos (7.76 y 6.49 respectivamente) según se puede apreciar en la tabla 19.
- Para finalizar, la prueba Z que fue aplicada para la validación de la hipótesis general de la tesis, muestra que al aplicar GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza, en comparación a la simple clase expositiva, aquella mejora el aprendizaje de la geometría tema triángulos, de los estudiantes involucrados en la investigación. Pero esto por sí solo, no garantiza bajo ningún aspecto un óptimo rendimiento del estudiante.
-

RECOMENDACIONES

- En otras actividades de investigación sobre este tema es conveniente que se mida el mejoramiento de la parte sicomotriz y afectiva del estudiante, porque esto a la postre significa mejorar el rendimiento en la parte cognitiva del alumno.
- Para nuevas investigaciones relacionadas con la implementación de laboratorios virtuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, el investigador debe cuidarse de no caer en la inestabilidad del ambiente experimental; es decir, si se echa mano de los campos virtuales se debe garantizar que los ambientes de aprendizaje sean los mismos tanto en el grupo experimental como en el de control; caso contrario los errores en el diseño experimental restarán credibilidad al estudio.
- El profesor debe mantener un equilibrio respetable en cuanto a su propio papel y al del recurso metodológico, de manera que se note claramente la función apenas facilitadora y coordinadora del maestro (para evitar el conductismo extremo) y el ejercicio mediador de GeoGebra (no debe ser una herramienta única e indispensable de aprendizaje) donde que el protagonismo lo tenga el estudiante.
- La PROPUESTA que fue aprobada tanto por los estudiantes del grupo experimental que participaron en la investigación así como por todos docentes, debe ser aplicada ahora por parte de los docentes a todos los estudiantes de Nivelación, para que cada quien haga su propia investigación y saque sus conclusiones.
- Para futuras investigaciones, que se establezcan estudios sobre la combinación de GeoGebra como recurso, con otras estrategias de aprendizaje para determinar un mejoramiento más substancial del rendimiento académico que el alcanzado por este estudio.
- Si se ha probado que los recursos metodológicos para el aprendizaje de la geometría mediados por softwares geométricos incuestionablemente mejoran el rendimiento de los estudiantes, se debe trabajar ahora, en la optimización de dichos recursos en función de sus potencialidades y direccionarlos hacia los temas de asignatura preestablecidos.

BIBLIOGRAFÍA

ARBOLEDA, A. (2007). *Psicología Social. Teoría y práctica*. Barranquilla, Colombia: Barranquilla Ediciones. Pp. 15 -19.

AUSUBEL, D. (1980). *Psicología educacional*. Rio de Janeiro, Brasil: Interamericana.Pp.37-42.

BANNON, L. J., & BØDKER, S. (1989). *Beyond the interface: Encountering artifacts in use*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. Pp. 227 - 253.

BERTELSEN, O. W., & BØDKER, S. (2002). *Discontinuities. Book Social thinking*. Cambridge, UK:MIT Press.Pp. 409 - 424.

CAREAGA BUTTER, M. (2001). *Software y su uso pedagógico*. Centro de educación y tecnología de Chile. Santiago, Chile: Centro Zonal Sur-Austral. Pp. 25 -28.

CATALDI, Z. (2000). *Una metodología para el diseño, desarrollo y evaluación de software educativo*. Tesis de Magister en Informática, UNLP. La Plata, Argentina.Pp. 37 - 45.

www.fi.uba.ar/laboratorios/lsi/cataldi-tesisdemagistereninformatica.pdf.

13-XII-2014

DOGAN, M. & (2011). *The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles*.International Journal of Human Sciences. New York, USA: Copernic Editions.Pp. 1441-1458.

ENGESTRÖM, Y., MIETTINEN, R., & PUNAMÄKI, R. L. (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge.UK : Cambridge University Press. Pp. 89 - 93.

ESCUDE, A. (2011). *GeoGebra in the math classroom*. Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2011. Chesapeake, USA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).Pp. 3970-3974.

www.editlib.org/p/36952/.

15-IX-2014

FREIRE, M. (1995). *A socio-cultural/semiotic interpretation of intercommunication mediated by computers*. The Proceedings of International Conference LS Vygotsky and the Contemporary Human Sciences. Pp. 1 - 9.

<https://books.google.com.ec/books?isbn...>

10-X-2014

FREIRE, P. (2005). *Pedagogía del Oprimido*. Montevideo, Uruguay: Tierra Nueva. Pp. 115 - 121.

GALVIS PANQUEVA, Á. (1992). *Ingeniería de Software Educativo*. Universidad de Santa Fe. Bogotá, Colombia. Pp. 121 - 129.

GEOGEBRA. (2014). *GeoGebra*.

[http://g \(Godino, 2004\).Geogebra.org/](http://g(Godino,2004).Geogebra.org/)

15-X-2014

GODINO, J. D.(2004). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Granada, España. Pp.49 -57.

HEROLD, D. (2009). Virtual education: Teaching media studies in Second Life. Journal of Virtual Worlds Research.Conference. Pp. 1-10

<https://learningfromsocialworlds.wordpress.com/>.

5-I-2015

HOHENWARTER, M., & JONES, K. . (2007). *Geometry Working Group: ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. London, UK: Copernic Editions. Pp. 126-131.

INGERSOLL, R. M. (1999). *The problem of underqualified teachers in American secondary schools. Educational researcher. Columbia University*. New York, USA. Pp.26-37.

KUMAR, A., KUMAR, P. Y BASU, S. C. (2001). Student Perceptions of Virtual Education: An Exploratory Study. Proceedings of 2001 Information Resources Management Association International Conference. Ohio, USA: M. Khosrow-Pour. Pp. 400-403.

<http://www.irma-international.org/viewtitle/31653/>.

3- VI- 2014

LABAÑINO, C. (2005). Material Básico Curso las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en la Institución Educativa. Tema 3.5. El Software Educativo. En CD Versión 2:00. IPLAC. La Habana.

www.monografias.com › Computacion › Software.

18-II-2015

LEONTIEV, A. N. (2014). *Activity and consciousness.Dialectus*.

www.periodicos.ufc.br/index.php/dialectus/.../1042.

15-II-2015

LOSADA, R. (2007). GEOGEBRA: La eficiencia de la intuición. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 10 (1), Pp. 223-239.

tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/20915/Bibliografía.pdf.

04-XII-2014

LOOP, C. (1987). *Smooth subdivision surfaces based on triangles*.

research.microsoft.com/en-us/um/people/cloop/.

19-I-2014

LURIA, A. R. (1981). *The working brain*.

<https://books.google.com.ec/books?isbn...>

27-I-2014

MARQUÈS, P. (1996). *El software educativo*. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España. Pp. 55-60.

http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software/.

16-VI-2014

MCFARLANE Y DE RIJCKE, (1999). *Los Desafíos de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Educación*. OCDE. España. Pp. 159-163.

baseddp.mec.gub.uy/.../Los%20desafios%20de%20las%20tecnologias%20..

09-VII-2014

MISHRA, P., & KOEHLER, M. . (2006). *Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge*. The Teachers College Record, 1017-1054.

punya.educ.msu.edu/.../mishra-koehler-tcr2006.pdf.

11-V-2014

NARDI, B. A., WHITTAKER, S., & BRADNER, E. (2000). *Interaction and outeration: instant messaging in action*. In Proceedings of the 2000 ACM conference on Computer supported cooperative work. Pp. 79-88.

http://psychology.ucsc.edu/faculty/singleton.php%3F%26singleton%3Dtrue%26cruz_id%3Dsw hittak.

25-X-2014

ORDÓÑEZ, C. (2004). *Pensar pedagógicamente desde el constructivismo. De las concepciones a las prácticas pedagógicas*. Revista de estudios sociales, 19(8). Pp. 7-12.

<http://www.redalyc.org/pdf/562/56209914.pdf>

26-X-2014

PIAGET, J., & PETIT, N.(1971). *Seis estudios de psicología*. Barcelona, España. Seix Barral. Pp. 135-138.

<http://www.redalyc.org/pdf/562/56209914.pdf> .

25-VI-2014

RAFAELIS.(1988). *Interactivity: From new media to communication*. In R. P. Hawkins, J. M. Wiemann, & S. Pingree. Sage Annual Review of Communication Research: Advancing Communication Science: Merging Mass and Interpersonal Processes. Newbury Park, USA: Beverly Hills: Sage. Pp. 110-134.

REVISTA VÍNCULOS (2013). *Análisis de software matemático usados en nivel superior*. Vol. 10(1). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Manizales, Colombia. Pp. 303.

revistavinculos.udistrital.edu.co/.../2013/11/Analisis-de-software-matema..

9-I-2015

SENPLADES. (2014). *Plan Nacional del Buen Vivir 2013-2017*. Quito: Asamblea.

www.planificacion.gob.ec/tag/asamblea.

24-VII-2014

STARR, D. (1998). Virtual education: Current practices and future directions. *The internet and higher education*, 1(2), Pp. 157-165.

[https://books.google.com.ec/books?isbn... -](https://books.google.com.ec/books?isbn...)

3-V-2014

THE GEOMETER'S SKETCHPAD. (2014). The Geometer's Sketchpad.
<http://www.geometriadinamica.cl/2005/08/geometers-sketchpad/>
9-I-2015

VYGOTSKY, L. S. (1987). *Pensamento e Linguagem*. Sao Paulo, Brasil: Livraria Martins Fontes Editora, Ltda . Pp. 112-114.

WIKIPEDIA (2014). Wikipedia, La enciclopedia libre.
<http://www.wikipedia.org/>
15-X-2014

WU, W. T. (1978). On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry. *Scientia Sinica*. Pittsburgh, USA: Carbonell editors.Pp. 159-172.

ANEXOS:**ANEXO A****DOMINIO:** PSICOMOTRIZ**PRUEBA:** MOMENTO DIAGNÓSTICO**GRUPO:** EXPERIMENTAL Y CONTROL**CUESTIONARIO**

1. Construya un triángulo de lados $a=4\text{cm}$, $b=6\text{cm}$ y $c=8\text{cm}$ con la ayuda de una regla y compás, siguiendo el proceso utilizado en el pizarrón por el profesor.

2. Con la ayuda de regla, compás y graduador, construya el cuadrilátero de dimensiones $a=3.5\text{cm}$, $b=5\text{cm}$, $c=6\text{cm}$, $d=7\text{cm}$, el ángulo entre los lados a y b es igual a 120° ; siguiendo las instrucciones de abajo:
 - a. Trace el lado $a=3.5\text{cm}$, en forma horizontal
 - b. Sobre el extremo derecho del segmento “ a ” trace un ángulo de 120° con el graduador
 - c. Sobre este ángulo trace el segmento $b=5\text{cm}$
 - d. En el extremo libre de “ b ” trazamos una circunferencia de radio igual a “ c ”
 - e. En el extremo libre de “ a ” trazamos un arco de circunferencia de radio igual a “ d ” de tal manera que corte la circunferencia del literal anterior
 - f. Finalmente completamos el cuadrilátero uniendo con segmentos el punto de intersección de los dos arcos con los extremos libres de los lados “ a ” y “ b ”

3. Construya un triángulo de lado $a=4.4\text{ mm}$, $b=5.2\text{mm}$ $B=35^\circ$ con la ayuda de regla, compás y graduador.

4. Construya un triángulo de lados $a=6\text{cm}$ $b=8\text{cm}$ $c=10\text{cm}$ con la mayor precisión del caso en sus medidas, utilizando los instrumentos geométricos más adecuados.

ANEXO B**DOMINIO:** PSICOMOTRIZ**PRUEBA:** MOMENTO PRIMERA EVALUACIÓN**GRUPO:** EXPERIMENTAL**CUESTIONARIO**

1. Construya un triángulo de lado $a=3.8u$ y vértices $B=38^\circ$, $C=79^\circ$; siguiendo el proceso utilizado por el profesor en la ventana gráfica del GeoGebra y luego verifique la medida del tercer ángulo de acuerdo al primer teorema fundamental de los triángulos.

2. Siguiendo las instrucciones de abajo, construya un triángulo de lado $c=5.2u$ y vértices $A=47^\circ$, $B=81^\circ$ y luego verifique si el ángulo externo de C cumple con la propiedad geométrica de que su medida es igual a la suma de A y B.
 - a. Trace el lado $c=5.2u$, en forma horizontal
 - b. Sobre el un extremo del segmento “c” trace el ángulo $A=47^\circ$
 - c. Sobre el otro extremo del segmento “c” trace el ángulo $B=81^\circ$
 - d. Con los dos ángulos trazados y el segmento “c” complete el triángulo solicitado
 - e. Prolongue cualquiera de los lados (a v b) y determine el ángulo externo de C
 - f. Verifique que la medida del ángulo externo de C, es igual a la suma de los ángulos A y B

3. Construya un cuadrilátero de cualquier medida de lados y verifique si se cumple la propiedad de que la suma interna de sus ángulos es igual a 360° .

4. Construya dos triángulos opuestos por el vértice y verifique con precisión si se cumple el teorema triangular del lazo.

ANEXO C**DOMINIO:** PSICOMOTRIZ**PRUEBA:** MOMENTO EVALUACIÓN FINAL**GRUPO:** EXPERIMENTAL Y CONTROL**CUESTIONARIO**

1. Construya un triángulo de cualquier medida y trace 2 bisectrices internas correspondientes a los ángulos A y B, siguiendo el proceso utilizado por el profesor en la ventana gráfica del GeoGebra (grupo experimental) o en el pizarrón (grupo de control) y verifique el cumplimiento del teorema de las bisectrices internas de un triángulo.

2. Siguiendo las instrucciones de abajo, construya un triángulo de cualquier medida y trace 2 de sus bisectrices externas correspondientes a los ángulos A y B; luego verifique el cumplimiento del teorema de las bisectrices externas de un triángulo.
 - a. Dibuje un triángulo cualesquiera y prolongue los lados “a” y “b” para formar los ángulos externos de B y A respectivamente.
 - b. Trace las bisectrices externas de los ángulos A y B
 - c. Verifique el cumplimiento del teorema de las bisectrices externas de un triángulo

3. Dibuje un triángulo cualesquiera y trace la bisectriz interna de A y la bisectriz externa de C; luego verifique si se cumple el teorema que estipula que la medida del ángulo formado por las dos bisectrices antes mencionada, es igual a la mitad de la medida del tercer ángulo B.

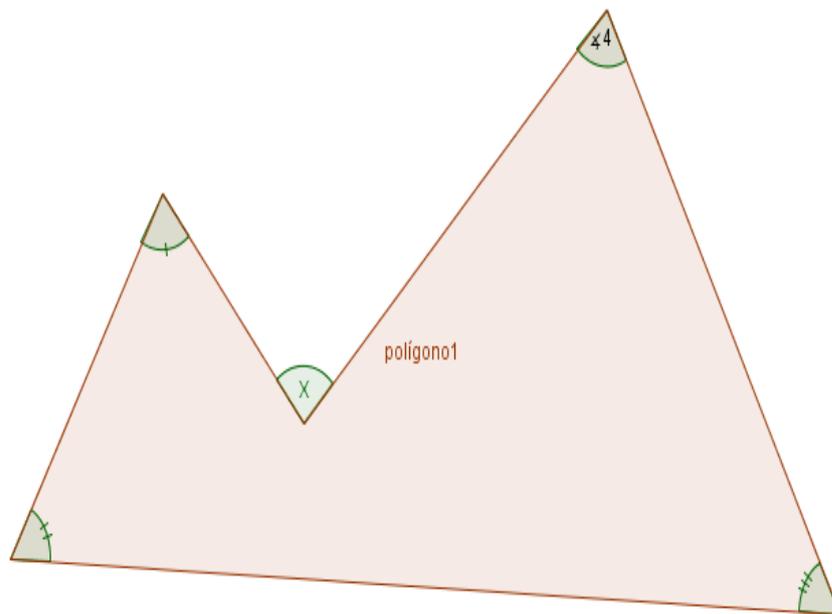
4. Verifique con precisión si en un triángulo, la medida del ángulo formado por la bisectriz interna y altura de un mismo vértice, es igual al valor absoluto de la semidiferencia de las medidas de los otros dos ángulos del triángulo.

ANEXO D**DOMINIO:** COGNITIVO**PRUEBA:**COGNITIVA**GRUPO:** EXPERIMENTAL Y CONTROL

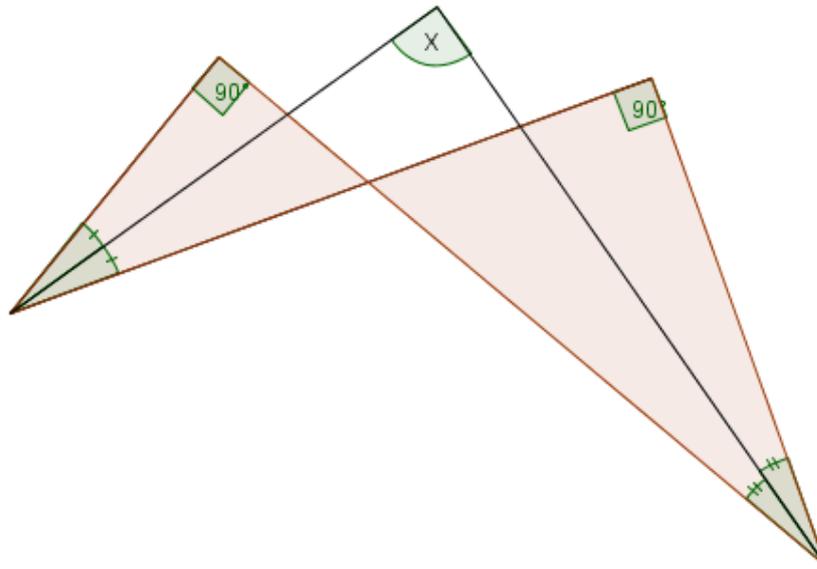
TEMA: Resolución de problemas sobre triángulos, aplicando el conocimiento de los teoremas geométricos por parte de los estudiantes.

CUESTIONARIO

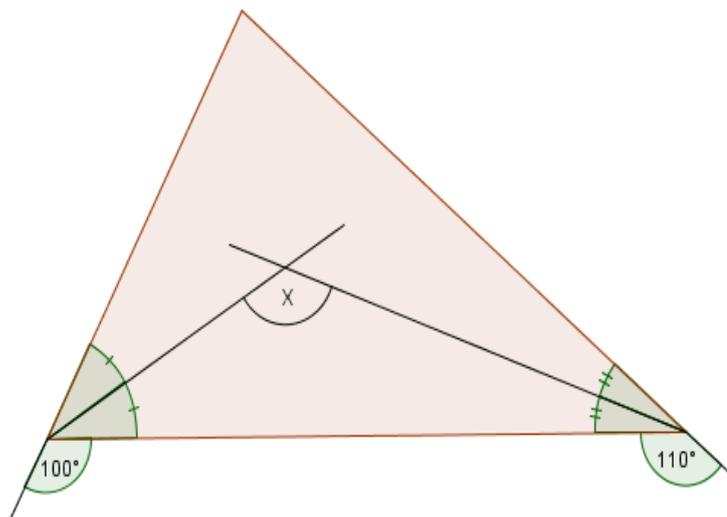
1. En la figura geométrica de abajo determine el valor del ángulo X, sabiendo que la suma de los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$ es igual a 300° .



2. En la configuración geométrica indicada y bajo las condiciones establecidas, determine el valor del ángulo X.



3. Aplicando teoremas demostrados en clase, determine el valor angular de X



NOTA: Para todos los problemas, ponga por favor su propia simbología.

ANEXO E

ENCUESTA N° 1

**MEDIDA DE ACEPTACIÓN POR PARTE DE LOS DOCENTES, DE LA
ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON LA AYUDA DE SOFTWARES
GEOMÉTRICOS INTERACTIVOS EN NIVELACIÓN DE LA UFA-ESPE-EL Y
SELECCIÓN DE UNO DE ESOS SOFTWARES**

NOMBRE:

GENERO:

EDAD:

TÍTULO:

ÁREA: Nivelación

Conoce softwares de geometría interactiva? SI NO

Responder este instrumento permitirá medir el grado de aceptación que tiene el Docente por la enseñanza de la Geometría con un software matemático interactivo y luego seleccionarlo desde la Web, como una herramienta de trabajo que ayude a mejorar el proceso educativo de los estudiantes de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L.

Instrucciones:

En este documento te presentamos 11 proposiciones. Te pedimos que expreses tu acuerdo o desacuerdo frente a cada una de ellas de la manera más sincera. Para responder, marca con una “X” la opción numérica que mejor represente tu grado de apreciación con cada frase.

Al leer la proposición puedes estar de acuerdo o en desacuerdo.

- Si estás **totalmente de acuerdo, 5**
- Si estás **de acuerdo, 4.**
- Si **no estás seguro sobre la proposición o no puedes contestar, 3.**
- Si estás **en desacuerdo, 2.**
- Si estás **totalmente en desacuerdo, 1.**

1. Enseñar Geometría con la ayuda de softwares geométricos interactivos, es mejor que enseñar sólo con tiza y pizarrón.	1	2	3	4	5
2. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, los gráficos que se realizan en él, son a escala y la realidad geométrica no se distorsiona.	1	2	3	4	5
3. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, el estudiante tiene la posibilidad de aprender y hacer sus propios trazos y gráficos a escala.	1	2	3	4	5
4. Al enseñar Geometría con softwares geométricos interactivos, las propiedades de los postulados, axiomas, teoremas y otros, pueden verificarse dinámicamente con este programa.	1	2	3	4	5
5. Al no tener que dibujar los gráficos en el pizarrón, se gana tiempo con los dibujos que ya se tienen dibujados en el software geométrico.	1	2	3	4	5
6. Los trabajos con softwares geométricos son ordenados y pulcros.	1	2	3	4	5
7. Me gustaría que la institución para la que yo trabajo, me proporcione en forma digital, la asignatura de Geometría desarrollada de acuerdo a los contenidos establecidos por la Senescyt y con el soporte de un software geométrico interactivo.	1	2	3	4	5
8. El software geométrico interactivo que más conocen y han utilizado los estudiantes que llegan a nivelación es el GEOGEBRA.	1	2	3	4	5
9. Los estudiantes que no conocen GEOGEBRA, rápidamente lo asimilan del profesor o de sus compañeros que si conocen este software.	1	2	3	4	5
10. Los principales softwares geométricos que conozco y se encuentran en la Web son: Autocad, Geometer'sSketchPad, CabriGeometry Plus II, Geogebra, GeoEnzo, GeometryCalculator.	1	2	3	4	5
11. Me gustaría que en nivelación se enseñe Geometría con GEOGEBRA, puesto que es: software libre; muy conocido en la comunidad educativa de nuestro país; muy versátil y fácil de aprender.	1	2	3	4	5

ANEXO F

ENCUESTA N° 2

**MEDIDA DE ACEPTACIÓN POR PARTE DE LOS DOCENTES, DE LA
PROPUESTA PLANTEADA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA
CON EL SOFTWARE INTERACTIVO GEOGEBRA EN NIVELACIÓN DE LA
UFA-ESPE-EL**

NOMBRE:

GENERO:

EDAD:

TÍTULO:

ÁREA: Nivelación

Participó de la reunión en la cual se presentó la PROPUESTA? SI NO

Responder este instrumento permitirá medir el grado de aceptación que tiene el Docente por la PROPUESTA planteada para la enseñanza de la Geometría utilizando el software matemático interactivo GEOGEBRA, como una herramienta de trabajo que ayude a mejorar el proceso educativo de los estudiantes de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas.

Instrucciones:

En este documento te presentamos 12 proposiciones. Te pedimos que expresas tu acuerdo o desacuerdo frente a cada una de ellas de la manera más sincera. Para responder, marca con una “X” la opción numérica que mejor represente tu grado de apreciación con cada frase.

Al leer la proposición puedes estar de acuerdo o en desacuerdo.

- Si estás **totalmente de acuerdo, 5**
- Si estás **de acuerdo, 4.**
- Si **no estás seguro sobre la proposición o no puedes contestar, 3.**
- Si estás **en desacuerdo, 2.**
- Si estás **totalmente en desacuerdo, 1.**

1. El desarrollo de la teoría sobre triángulos está desarrollado totalmente en digital.	1	2	3	4	5
2. El contenido de la teoría sobre triángulos está compuesto por conceptos, definiciones, postulados, teoremas, propiedades, etc.	1	2	3	4	5
3. Los teoremas están respaldados por su correspondiente demostración.	1	2	3	4	5
4. El desarrollo del contenido del tema sobre triángulos, está respaldado por la correspondiente teoría, problemas resueltos y problemas planteados.	1	2	3	4	5
5. Los Teoremas y propiedades geométricas demostradas se pueden verificar en forma dinámica a través del Geogebra, por medio de un enlace.	1	2	3	4	5
6. El material desarrollado teóricamente contiene gráficos y dibujos estáticos, estructurados adecuadamente para la enseñanza.	1	2	3	4	5
7. Los teoremas y propiedades geométricas, están respaldados con gráficos y dibujos, con su correspondiente demostración matemática y la verificación de las propiedades en Geogebra y en forma dinámica.	1	2	3	4	5
8. Me gustaría disponer de este material interactivo sobre triángulos, para mis clases de geometría.	1	2	3	4	5
9. Los estudiantes se van a sentir motivados puesto que van a poder verificar dinámicamente las propiedades geométricas y teoremas demostrados, a través del Geogebra.	1	2	3	4	5
10. Este trabajo dispone de enlaces con internet para poder hacer cualquier consulta sobre geometría.	1	2	3	4	5
11. Este trabajo también me da la posibilidad de editarlo, en el supuesto caso que quiera mejorarlo o hacer otras modificaciones y presentaciones.	1	2	3	4	5
12. Este material me motiva y me mantiene con la actitud de siempre estar mejorando en todo, como profesor de geometría.	1	2	3	4	5

Gracias por su colaboración:

Firma:

ANEXO G

ENCUESTA Nº 3

**MEDIDA DE ACEPTACIÓN POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES, DE LA
ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON SOFTWARE
GEOMÉTRICOINTERACTIVO GEOGEBRA EN NIVELACIÓN DE LA UFA-
ESPE-EL**

NOMBRE:**GENERO:****EDAD:****TÍTULO:** Estudiante**ÁREA:** Nivelación

Conoce del software matemático GeoGebra? SI NO

Responder este instrumento permitirá medir el grado de aceptación que tiene el estudiante, por el aprendizaje de la Geometría utilizando el software matemático interactivo GEOGEBRA, como una herramienta de trabajo que ayude a mejorar el proceso educativo de ellos, como estudiantes de Nivelación de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-EL.

Instrucciones:

En este documento te presentamos 10 proposiciones. Te pedimos que expreses tu acuerdo o desacuerdo frente a cada una de ellas de la manera más sincera. Para responder, marca con una "X" la opción numérica que mejor represente tu grado de apreciación con cada frase.

Al leer la proposición puedes estar de acuerdo o en desacuerdo.

- Si estás **totalmente de acuerdo**, 5
- Si estás **de acuerdo**,4.
- Si **no estás seguro sobre la proposición o no puedes contestar**, 3.
- Si estás **en desacuerdo**, 2.
- Si estás **totalmente en desacuerdo**, 1.

1. Aprender Geometría con la ayuda de software geométrico interactivo GEOGEBRA, es mejor que aprender sólo con tiza y pizarrón.	1	2	3	4	5
2. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, los gráficos son a escala y la realidad geométrica no se distorsiona.	1	2	3	4	5
3. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, tengo la posibilidad de hacer mis propios trazos y gráficos a escala.	1	2	3	4	5
4. Al aprender Geometría con GEOGEBRA, las propiedades de los postulados, axiomas, teoremas y otros, se pueden verificar dinámicamente con este programa.	1	2	3	4	5
5. Los resultados numéricos de problemas planteados y resueltos, se pueden verificar con el software GEOGEBRA.	1	2	3	4	5
6. Al no tener que dibujar el docente los gráficos en el pizarrón, se gana tiempo con los dibujos que él ya tiene dibujado en el software GEOGEBRA.	1	2	3	4	5
7. Los trabajos con software GEOGEBRA son ordenados y pulcros.	1	2	3	4	5
8. Me gustaría que me enseñen Geometría en forma digital, asistido por el software geométrico interactivo GEOGEBRA.	1	2	3	4	5
9. El software geométrico interactivo que más conocen y han utilizado mis compañeros que llegan a nivelación es el GEOGEBRA.	1	2	3	4	5
10. Mis compañeros que no conocen de GEOGEBRA rápidamente aprenden este programa, ya sea con la ayuda del profesor o de sus compañeros, que si conocen y saben este software.	1	2	3	4	5

Gracias por su colaboración:

Firma:.....

ANEXO H

LISTA DE COTEJOS



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA BÁSICA

LISTA DE COTEJOS EN EL DOMINIO PSICOMOTRIZ

MOMENTO: DIAGNÓSTICO

Nº	GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Experimental				
2	Experimental				
3	Experimental				
4	Experimental				
5	Experimental				
6	Experimental				
7	Experimental				
8	Experimental				
9	Experimental				
10	Experimental				
11	Experimental				
12	Experimental				
13	Experimental				
14	Experimental				
15	Experimental				
16	Experimental				
17	Experimental				
18	Experimental				
19	Experimental				
20	Experimental				
21	Experimental				
22	Experimental				
23	Experimental				
24	Experimental				
25	Experimental				

26	Experimental				
27	Experimental				
28	Experimental				
29	Experimental				
30	Experimental				
31	Control				
32	Control				
33	Control				
34	Control				
35	Control				
36	Control				
37	Control				
38	Control				
39	Control				
40	Control				
41	Control				
42	Control				
43	Control				
44	Control				
45	Control				
46	Control				
47	Control				
48	Control				
49	Control				
50	Control				
51	Control				
52	Control				
53	Control				
54	Control				
55	Control				
56	Control				
57	Control				
58	Control				
59	Control				
60	Control				

ANEXO I



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA BÁSICA
LISTA DE COTEJOS EN EL DOMINIO PSICOMOTRIZ
MOMENTO: PRIMERA EVALUACIÓN

N°	MOMENTO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Diagnóstico				
2	Diagnóstico				
3	Diagnóstico				
4	Diagnóstico				
5	Diagnóstico				
6	Diagnóstico				
7	Diagnóstico				
8	Diagnóstico				
9	Diagnóstico				
10	Diagnóstico				
11	Diagnóstico				
12	Diagnóstico				
13	Diagnóstico				
14	Diagnóstico				
15	Diagnóstico				
16	Diagnóstico				
17	Diagnóstico				
18	Diagnóstico				
19	Diagnóstico				
20	Diagnóstico				
21	Diagnóstico				
22	Diagnóstico				
23	Diagnóstico				
24	Diagnóstico				
25	Diagnóstico				
26	Diagnóstico				
27	Diagnóstico				
28	Diagnóstico				

29	Diagnóstico				
30	Diagnóstico				
31	Evaluación 1				
32	Evaluación 1				
33	Evaluación 1				
34	Evaluación 1				
35	Evaluación 1				
36	Evaluación 1				
37	Evaluación 1				
38	Evaluación 1				
39	Evaluación 1				
40	Evaluación 1				
41	Evaluación 1				
42	Evaluación 1				
43	Evaluación 1				
44	Evaluación 1				
45	Evaluación 1				
46	Evaluación 1				
47	Evaluación 1				
48	Evaluación 1				
49	Evaluación 1				
50	Evaluación 1				
51	Evaluación 1				
52	Evaluación 1				
53	Evaluación 1				
54	Evaluación 1				
55	Evaluación 1				
56	Evaluación 1				
57	Evaluación 1				
58	Evaluación 1				
59	Evaluación 1				
60	Evaluación 1				

ANEXO J



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA BÁSICA
LISTA DE COTEJOS EN EL DOMINIO PSICOMOTRIZ
MOMENTO: EVALUACIÓN FINAL

N°	GRUPO	IMITA	SIGUE INSTRUCCIONES	INDEPENDIENTE	PRECISO
1	Experimental				
2	Experimental				
3	Experimental				
4	Experimental				
5	Experimental				
6	Experimental				
7	Experimental				
8	Experimental				
9	Experimental				
10	Experimental				
11	Experimental				
12	Experimental				
13	Experimental				
14	Experimental				
15	Experimental				
16	Experimental				
17	Experimental				
18	Experimental				
19	Experimental				
20	Experimental				
21	Experimental				
22	Experimental				
23	Experimental				
24	Experimental				
25	Experimental				
26	Experimental				
27	Experimental				
28	Experimental				

29	Experimental				
30	Experimental				
31	Control				
32	Control				
33	Control				
34	Control				
35	Control				
36	Control				
37	Control				
38	Control				
39	Control				
40	Control				
41	Control				
42	Control				
43	Control				
44	Control				
45	Control				
46	Control				
47	Control				
48	Control				
49	Control				
50	Control				
51	Control				
52	Control				
53	Control				
54	Control				
55	Control				
56	Control				
57	Control				
58	Control				
59	Control				
60	Control				

ANEXO K

PROPUESTA

CONTENIDO DEL TEMA DE TRIÁNGULOS SEGÚN EL PROGRAMA DE NIVELACIÓN VIGENTE DE LA UFA-ESPE-L:

- Triángulos: definición, representación gráfica, elementos, denominación, clasificación, ángulos en el triángulo.
- Triángulos: líneas, puntos notables y ángulos entre líneas fundamentales.
- Propiedades de los triángulos: Isósceles, equilátero y rectángulo.
- Triángulos: congruencia.
- Triángulos: semejanza.
- Resolución de triángulos rectángulos: relaciones métricas y trigonométricas.
- Resolución de triángulos: relaciones métricas y trigonométricas.

ÍNDICE

1.	TRIÁNGULOS	109
1.1	Definición	109
1.2	Simbología o notación	109
1.3	Clasificación de los triángulos.....	110
1.3.1	Por sus lados:	110
1.3.2	Por sus ángulos:	110
1.4	Líneas y Puntos Fundamentales	110
1.4.1	Líneas fundamentales: bases, medianas, bisectrices, mediatrices y alturas.....	110
1.4.2	Puntos Fundamentales: Baricentro, incentro, excentro, circuncentro y ortocentro.....	113
1.5	Propiedades de ciertas configuraciones geométricas que se desprenden de las propiedades fundamentales del triángulo.....	117
1.5.1	Teorema Fundamental de los triángulos (I):.....	117
1.5.2	Teorema de los Cuadriláteros (II):	118
1.5.3	Teorema del ángulo exterior de un cuadrilátero (III):	120
1.5.4	Teorema del lazo (IV):	121
1.5.5	Teorema de las bisectrices internas de un triángulo (V):	122
1.5.6	Teorema de las bisectrices externas de un triángulo (VI):	123
1.5.7	Teorema relativo a una bisectriz interna y una bisectriz externa (VII): ..	124
1.5.8	Teorema de la bisectriz y la altura del mismo vértice (VIII):	125
1.6	Ejercicios Resueltos sobre Triángulos:.....	126
1.7	Ejercicios Propuestos:.....	131

2.	CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS	135
2.1	Definición:	135
2.2	Simbología:.....	135
2.3	Condición geométrica fundamental de congruencia:	135
2.4	Postulados de congruencia triangular:.....	136
2.5	Propiedades geométricas que se demuestran por Congruencias de triángulos	138
2.5.1	Teorema de las paralelas (I):	138
2.5.2	Teorema del triángulo y la paralela (II):.....	139
2.5.3	Teorema del triángulo isósceles (III):.....	141
2.5.4	Teorema del triángulo rectángulo y la mediana (IV):	143
2.5.5	Teorema sobre la altura y la mediana de un triángulo rectángulo (V): ...	145
2.6	Ejercicios Resueltos sobre Congruencia Triangular:.....	146
2.7	Ejercicios Propuestos:.....	153
3.	SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS	157
3.1	Definición:	157
3.2	Simbología:.....	157
3.3	Condición geométrica fundamental de semejanza:	157
3.4	Postulados de semejanza triangular:.....	158
3.5	Propiedades geométricas que se demuestran por Semejanza de triángulos.	162
3.5.1	Teorema del Baricentro (I):	162
3.5.2	Teorema del baricentro y la altura (II):	164
3.5.3	Teorema de la antiparalela (III):.....	165
3.5.4	Teorema del Perímetro de un triángulo (IV):	166
3.6	Ejercicios Resueltos sobre Semejanza Triangular:.....	167

3.7	Ejercicios Propuestos:.....	172
4.	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	174
4.1	Relaciones Métricas en los Triángulos Rectángulos	174
4.1.1	Teorema I:.....	175
4.1.2	Teorema II:	175
4.1.3	Teorema III:	175
4.1.4	Teorema IV:.....	176
4.2	Relaciones Trigonómicas en los Triángulos Rectángulos.....	176
4.3	Ejercicios Resueltos sobre Relaciones Métricas y Trigonómicas en Triángulos Rectángulos:	179
4.4	Ejercicios Propuestos:.....	183
5.	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESCALENOS	185
5.1	Relaciones Métricas en los triángulos escalenos	185
5.1.1	Teorema de las Bisectrices (I):	185
5.1.2	Teorema de Stewart (II):.....	187
5.1.3	Teorema de Menelao (III):	188
5.1.4	Teorema de Ceva (IV):	189
5.2	Relaciones Trigonómicas en los Triángulos Escalenos	191
5.2.1	Ley de Senos:	191
5.2.2	Ley de Cosenos:	192
5.3	Ejercicios Resueltos sobre Relaciones Métricas y Trigonómicas en Triángulos Escalenos:	194
5.4	Ejercicios Propuestos:.....	198

1. TRIÁNGULOS

1.1 Definición

Triángulo es una figura geométrica plana formada por tres segmentos de recta, que se unen consecutivamente por sus extremos y forman una figura cerrada como se indica en la Fig. 1.

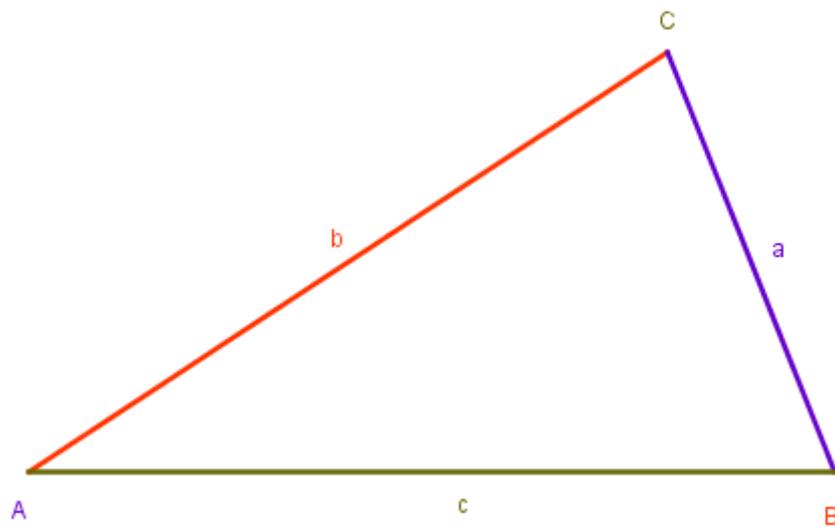


Fig.1

1.2 Simbología o notación

Por las letras que se encuentran en sus vértices.

Ejemplo:

Para denotar o simbolizar el triángulo anterior: $\triangle ABC$.

En todo triángulo, los lados de éste se representan con las letras minúsculas correspondientes a las letras mayúsculas del vértice opuesto (lado $a, b \wedge c$); o a su vez como se representan los segmento (lados $\overline{AB}, \overline{BC} \wedge \overline{AC}$).

1.3 Clasificación de los triángulos

1.3.1 Por sus lados:

Equiláteros: tres lados congruentes.

Isósceles: dos lados congruentes.

Escalenos: ningún lado es congruente con el otro.

1.3.2 Por sus ángulos:

Equiángulos: sus tres ángulos internos son congruentes.

Acutángulos: sus tres ángulos internos son agudos.

Obtusángulos: uno de sus ángulos internos es obtuso.

Rectángulos: uno de sus ángulos internos es recto (90°).

1.4 Líneas y Puntos Fundamentales

1.4.1 Líneas fundamentales: bases, medianas, bisectrices, mediatrices y alturas.

- **Bases (3):** constituyen cada uno de los lados del triángulo; \overline{AB} , $\overline{BC} \wedge \overline{AC} \vee a$, $b \wedge c$ (Fig.2).

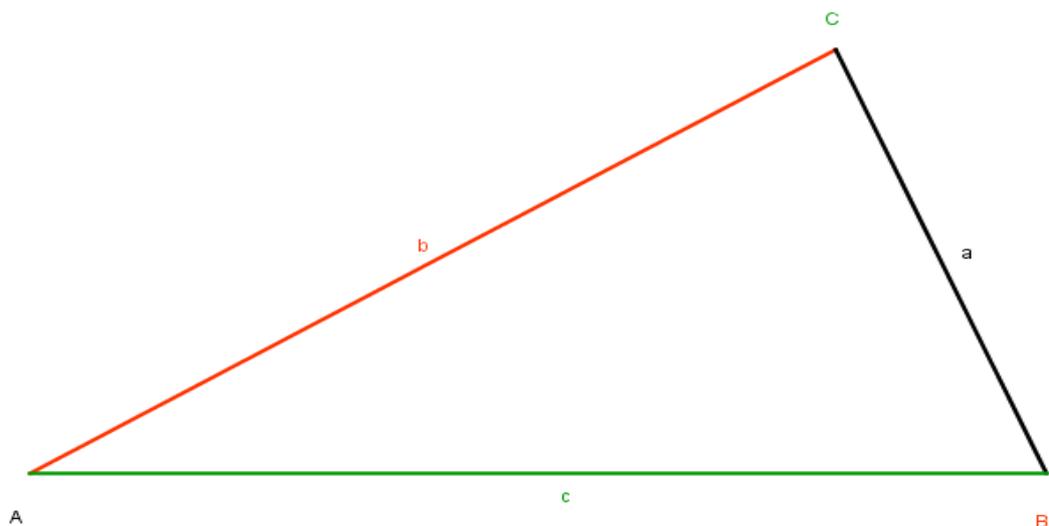


Fig. 2

- **Medianas (3):** segmentos de recta que unen los vértices del triángulo con el centro de los lados opuestos. Si D , E y F son puntos medios de los lados del $\triangle ABC$, entonces \overline{AF} , \overline{BD} , \overline{CE} son medianas (Fig. 3).

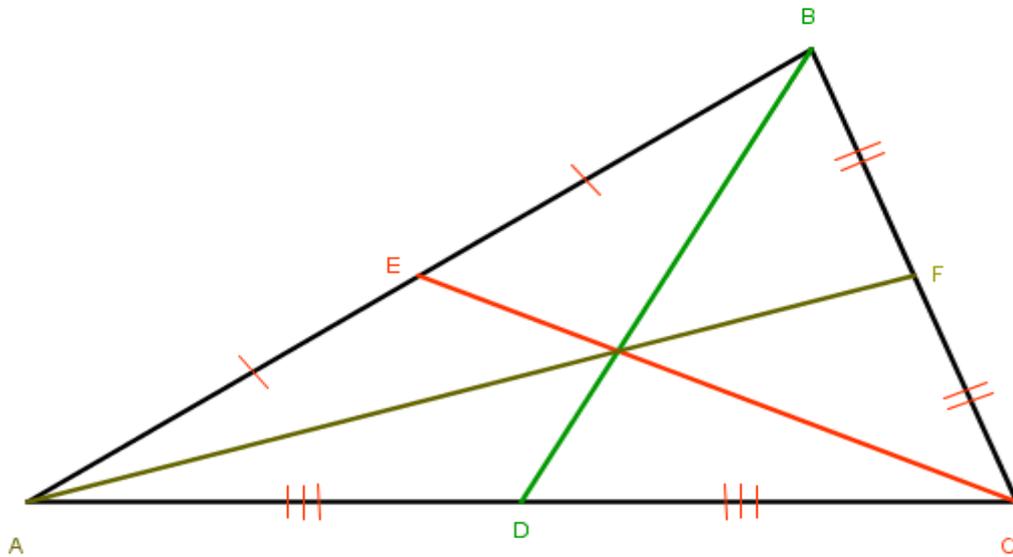


Fig. 3



- **Bisectrices (9):** Segmentos de recta que dividen a los ángulos tanto internos como externos de un triángulo en la mitad. Por lo tanto se tienen tres bisectrices internas y seis externas, de las cuales dos de éstas le corresponden a cada uno de los lados del triángulo. En la Fig. 4 \overline{AF} , $\overline{BD} \wedge \overline{CE}$ son bisectrices internas, mientras que $\overline{BO}_a \wedge \overline{CO}_a$ son sólo dos de las bisectrices externas.

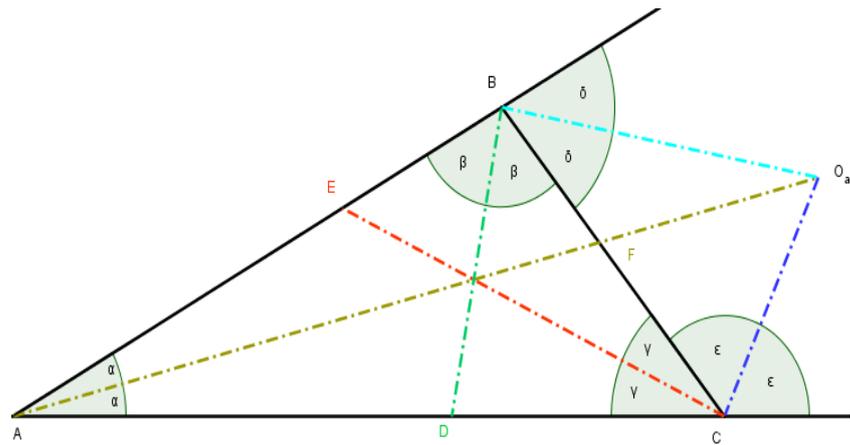


Fig. 4



- **Mediatrices (3):** Segmentos de recta perpendiculares levantadas en la mitad de cada uno de los lados del triángulo. Si D , E y F son puntos medios de los lados del triángulo ABC , entonces \overline{DI} , \overline{EG} y \overline{FH} son mediatrices (Fig. 5).

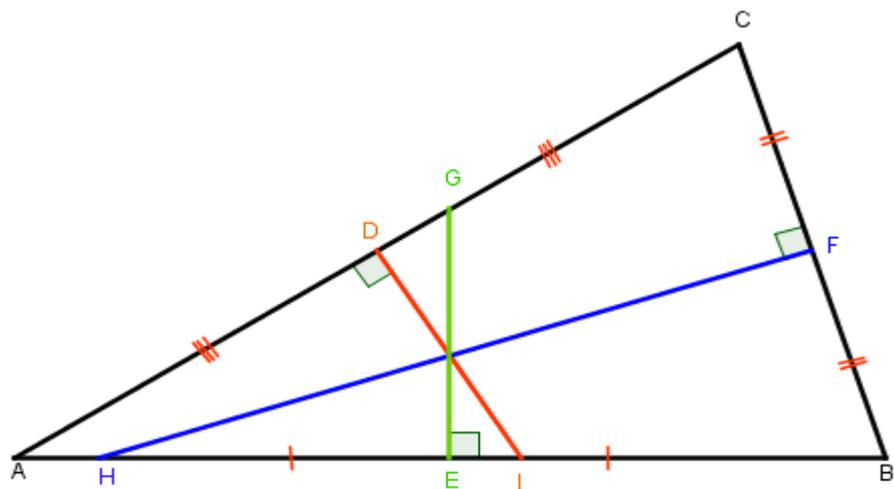


Fig. 5



- **Alturas (3):** Segmentos de recta que unen perpendicularmente, los vértices del triángulo con el lado opuesto correspondiente o su prolongación. En la Fig. 6, \overline{AF} , \overline{BD} \wedge \overline{CE} son alturas del $\triangle ABC$.

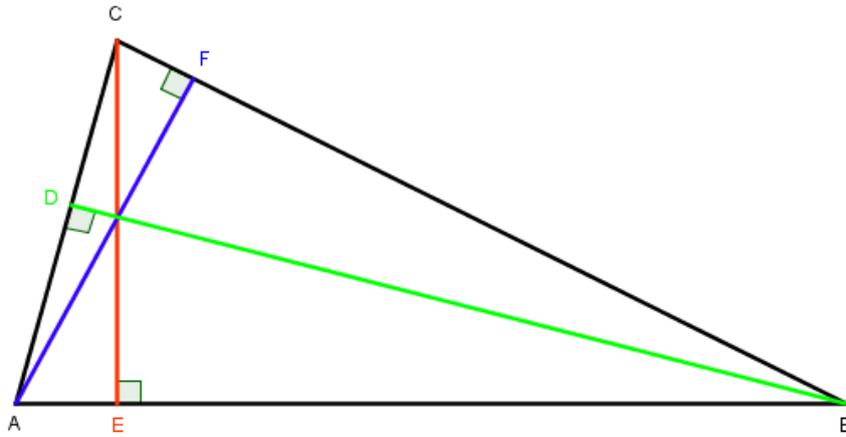


Fig. 6



1.4.2 **Puntos Fundamentales:** Baricentro, incentro, excentro, circuncentro y ortocentro.

- **Baricentro (G):** Punto de intersección de las tres medianas de un triángulo. El baricentro divide a las medianas en dos partes, de tal manera que el segmento que se encuentra del lado del vértice es el doble del otro (Fig. 7).

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GE}} = 2$$

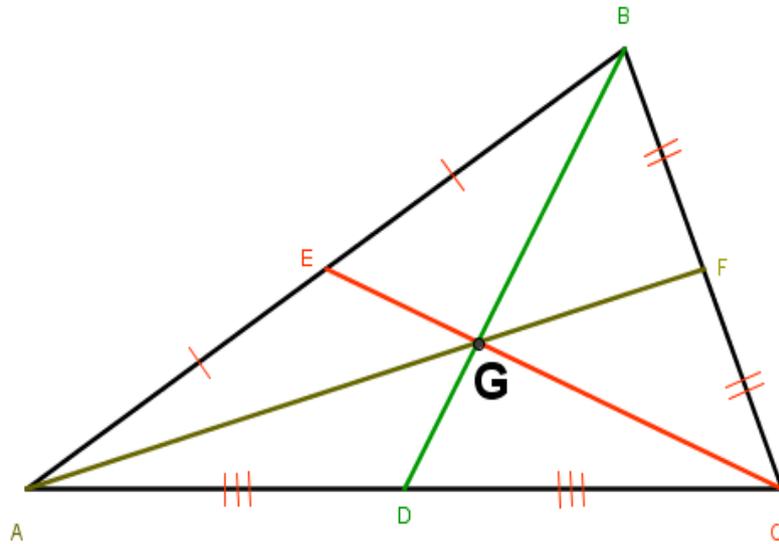


Fig. 7



- **Incentro (I):** Punto de intersección de las tres bisectrices internas de un triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia inscrita de radio r (Fig. 8).

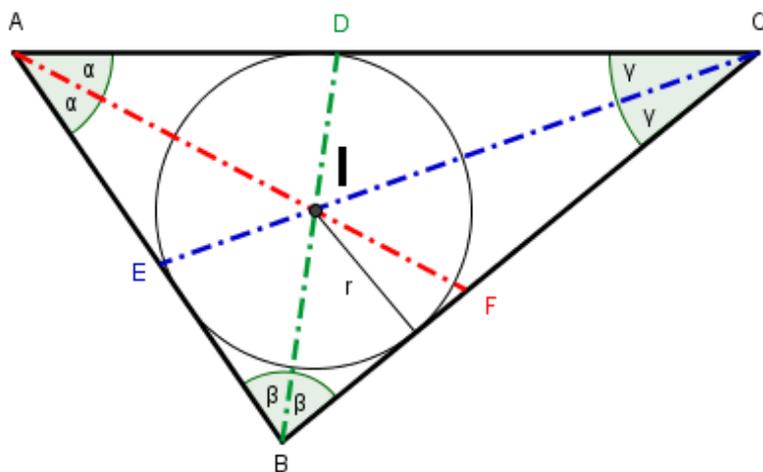


Fig. 8



- **Excentros (E_a, E_b, E_c):** Punto de intersección de una bisectriz interna de un triángulo, con dos bisectrices externas opuestas a la primera (Fig. 9). Los excentros tienen la propiedad de ser los centros de las circunferencias exinscritas al triángulo. En la gráfica sólo consta el excentro E_a y el radio R_a de la circunferencia.

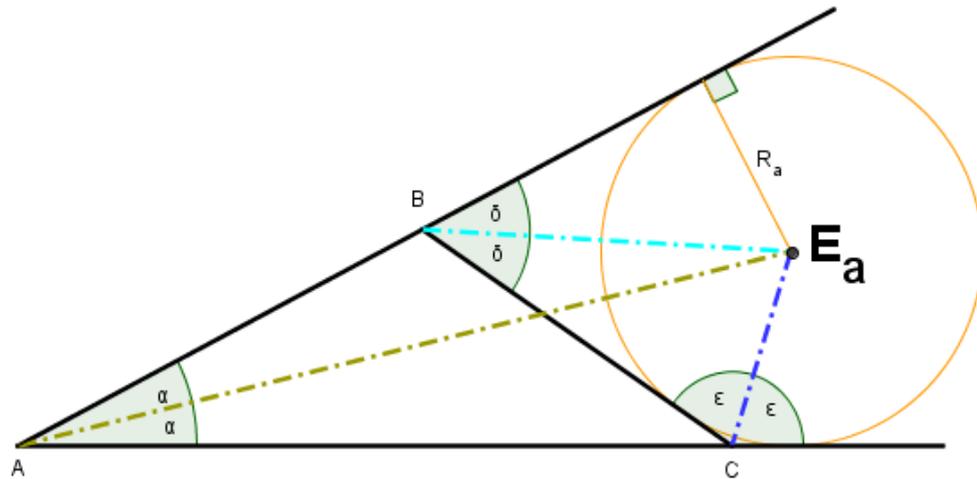


Fig. 9



- **Circuncentro (C):** Punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y de radio R (Fig. 1).

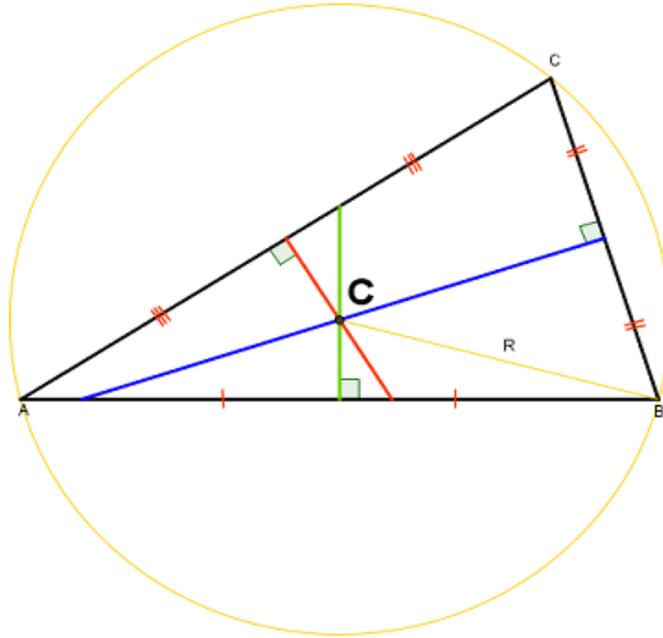


Fig.10



- **Ortocentro (H):** Punto de intersección de las tres alturas de un triángulo (Fig. 11).

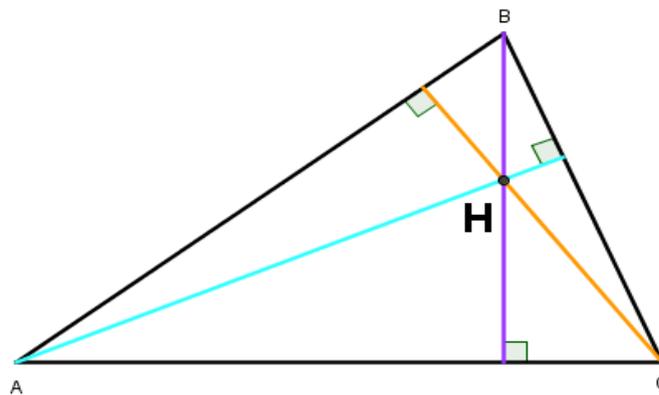


Fig. 11



En general, como propiedades importantes de los puntos y líneas fundamentales de un triángulo, podemos citar las siguientes:

- Cada clase de líneas fundamentales se intersecan en su correspondiente punto fundamental.
- El baricentro y el incentro siempre están hacia el interior del triángulo.
- El circuncentro y el ortocentro pueden estar afuera, adentro o sobre los lados del triángulo.
- Los excentros siempre se encuentran afuera del triángulo.

1.5 Propiedades de ciertas configuraciones geométricas que se desprenden de las propiedades fundamentales del triángulo.

1.5.1 Teorema Fundamental de los triángulos (I):

En todo triángulo, la suma de sus tres ángulos internos es igual a π Rad o 180° (Fig. 12).

H) ΔABC cualesquiera

T) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

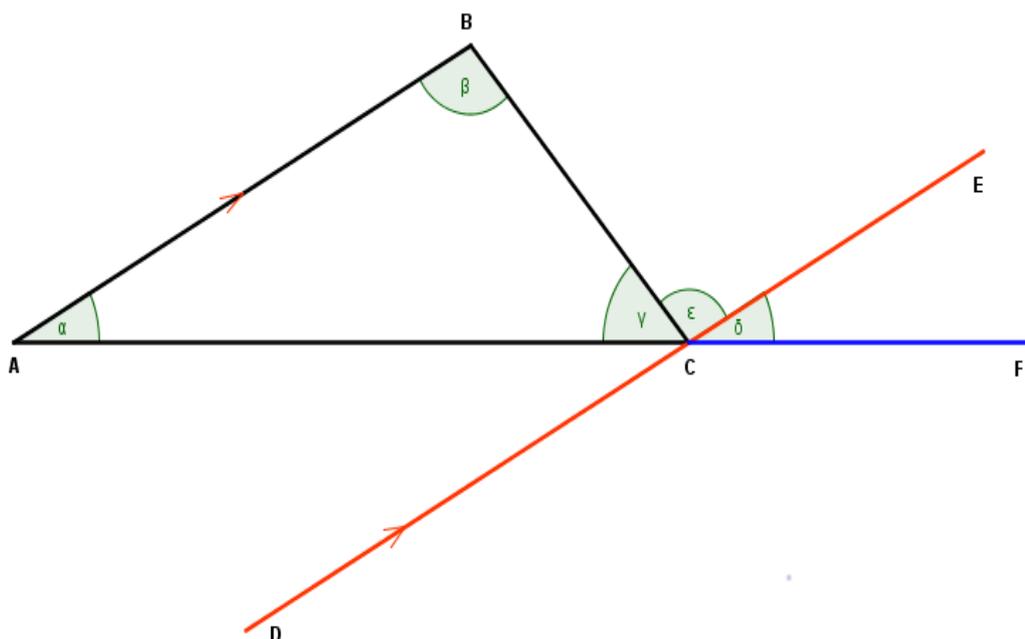


Fig. 12

Demostración:

$\overline{DE} \parallel \overline{AB} \wedge \overline{CF}$ prolongación de \overline{AC} (Construcción)

$$\delta = \alpha \quad (\text{Angulos correspondientes})$$

$$\varepsilon = \beta \quad (\text{Angulos alternos internos})$$

$$(1) \quad \delta + \varepsilon + \gamma = 180^\circ \quad (\text{Angulo Llano})$$

$\delta \wedge \varepsilon$ en (1)

\therefore

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Corolarios:

- Cualquiera de los ángulos externos de un triángulo, es igual a la suma de sus ángulos internos opuestos. Como ejemplo, en la Fig. 12 de arriba $\angle BCF = \alpha + \beta$.
- Un triángulo no tiene más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.
- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

1.5.2 Teorema de los Cuadriláteros (II):

La suma de los ángulos internos de todo cuadrilátero es igual a 2π Rad ó 360° (Fig. 13).

H) $\square ABCD$ cualesquiera

T) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

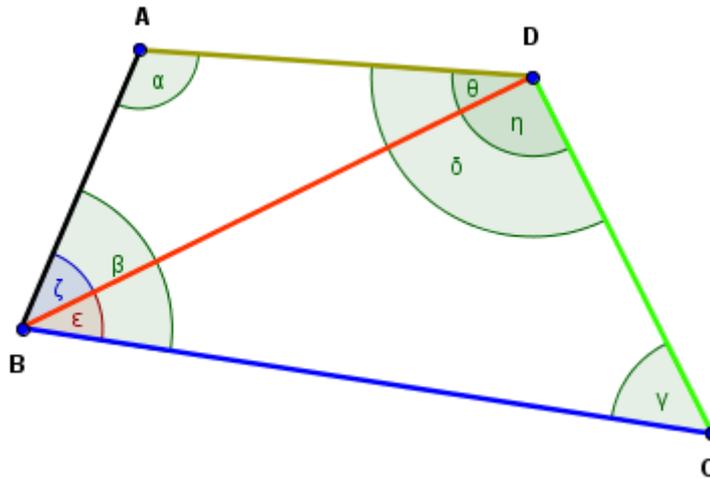


Fig. 13

Demostración:

$\overline{BD} \Rightarrow \triangle ABD \wedge \triangle BDC$ (Construcción)

$\Rightarrow \zeta + \varepsilon = \beta \wedge \theta + \eta = \delta$ (Composición de ángulos)

$\triangle ABD$ (1) $\alpha + \zeta + \theta = 180^\circ$ (Teorema I)

$\triangle BDC$ (2) $\varepsilon + \eta + \gamma = 180^\circ$ (Teorema I)

(1) + (2) $\alpha + \zeta + \theta + \varepsilon + \eta + \gamma = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \zeta + \varepsilon = \beta \wedge \theta + \eta = \delta$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$



1.5.3 Teorema del ángulo exterior de un cuadrilátero (III):

Cualquier ángulo exterior (ε) de un cuadrilátero, es igual a la suma de los tres ángulos internos opuestos a éste (Fig. 14).

H) $\square ABCD$ cualesquiera

T) $\varepsilon = \beta + \gamma + \delta$

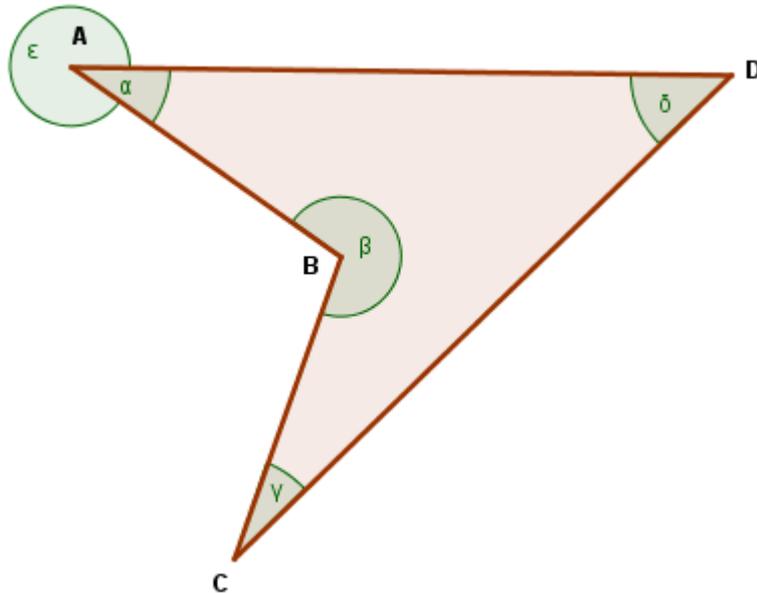


Fig. 14

Demostración:

$$\square ABCD \quad (1) \quad \alpha = 360^\circ - (\beta + \gamma + \delta) \quad (\text{Teorema II})$$

$$\therefore (2) \quad \alpha = 360^\circ - \varepsilon$$

$$(1) = (2) \quad 360^\circ - (\beta + \gamma + \delta) = 360^\circ - \varepsilon$$

$$\therefore \boxed{\varepsilon = \beta + \gamma + \delta}$$



1.5.4 Teorema del lazo (IV):

Si dos lados de un triángulo son la prolongación de los lados de otro triángulo (Fig. 15), la suma de los ángulos internos no comunes del primero es igual a la suma de los dos internos no comunes del segundo.

H) $\triangle ABCD$ *cualquiera*

T) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

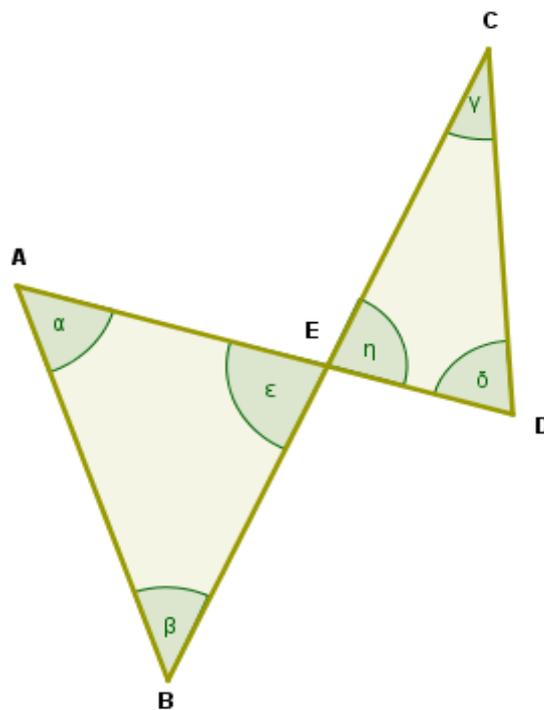


Fig. 15

Demostración:

$$\triangle ABE \quad (1) \quad \alpha + \beta + \varepsilon = 180^\circ \quad (\text{Teorema I})$$

$$\triangle CDE \quad (2) \quad \gamma + \delta + \eta = 180^\circ \quad (\text{Teorema I})$$

$$(1) = (2) \quad \alpha + \beta + \varepsilon = \gamma + \delta + \eta$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \eta \quad (\text{Opuestos por el vértice})$$

$$\therefore \alpha + \varepsilon = \sigma + \theta$$



1.5.5 Teorema de las bisectrices internas de un triángulo (V):

El ángulo que se forma por el cruce de dos bisectrices internas de un triángulo, es igual a 90° más la mitad del ángulo interno no bisecado (Fig. 16).

H) ΔABC cualesquiera

I Incentro

T) $\gamma = 90^\circ + \delta/2$

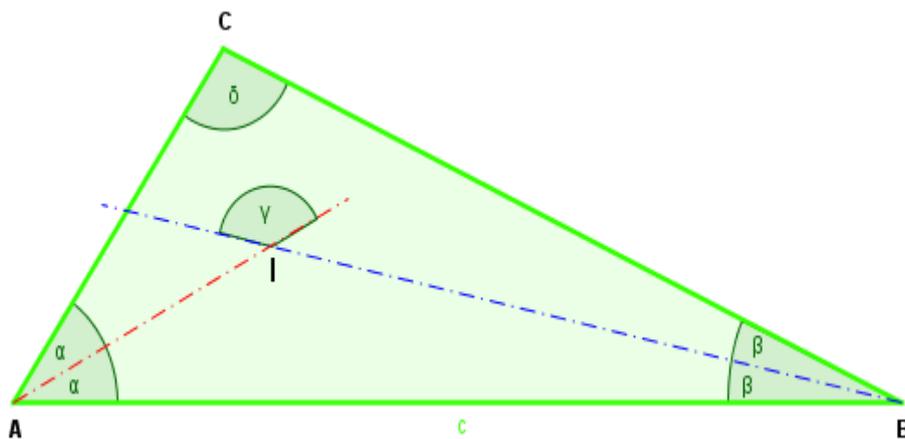


Fig. 16

Demostración:

$$\Delta AIB \quad \alpha + \gamma + \beta = 180^\circ \Rightarrow (1) \quad \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

$$\triangle ABC \quad 2\alpha + 2\beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow (2) \quad \alpha + \beta = \frac{180^\circ - \delta}{2}$$

$$(1) = (2) \quad 180^\circ - \gamma = \frac{180^\circ - \delta}{2} \Rightarrow 2(180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \delta$$

$$360^\circ - 2\gamma = 180^\circ - \delta \Rightarrow 180^\circ + \delta = 2\gamma$$

$$\therefore \gamma = 90^\circ + \frac{\delta}{2}$$



1.5.6 Teorema de las bisectrices externas de un triángulo (VI):

El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo es igual a 90° menos la mitad del ángulo interno opuesto a éstas (Fig.17).

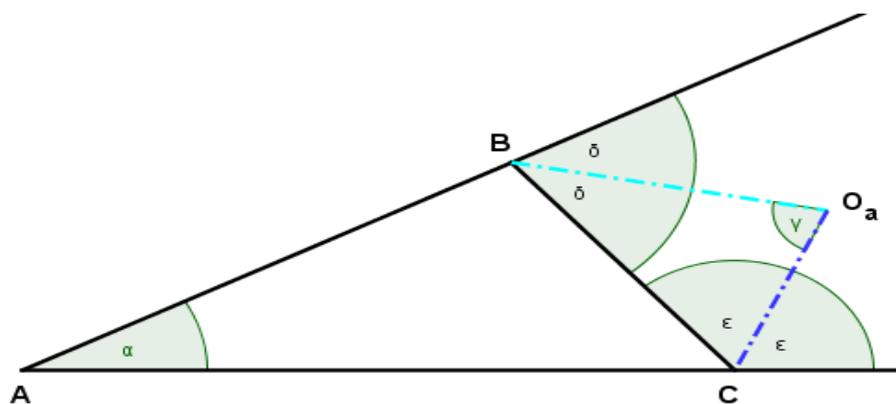


Fig. 17

H) $\triangle ABC$ cualesquiera

O_a Excentro relativo al vértice A

T) $\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

Demostración:

$$\triangle BCO_a \quad \delta + \varepsilon + \gamma = 180^\circ \Rightarrow (1) \quad \delta + \varepsilon = 180^\circ - \gamma$$

$$\triangle ABC \quad (2) \quad \alpha + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 2\delta \quad \wedge \quad \hat{C} = 180^\circ - 2\varepsilon$$

$$\hat{B} \wedge \hat{C} \text{ en (2)} \quad \alpha + (180^\circ - 2\delta) + (180^\circ - 2\varepsilon) = 180^\circ$$

$$(3) \quad \alpha + 360^\circ - 2(\delta + \varepsilon) = 180^\circ$$

$$(1) \text{ en (3)} \quad \alpha + 360^\circ - 2(180^\circ - \gamma) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\gamma = 180^\circ$$

$$\therefore \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$



1.5.7 Teorema relativo a una bisectriz interna y una bisectriz externa (VII):

El ángulo formado por una bisectriz interna de un triángulo y una bisectriz externa, pero de vértices diferentes, es igual a la mitad del ángulo interno correspondiente al tercer vértice (Fig. 18).

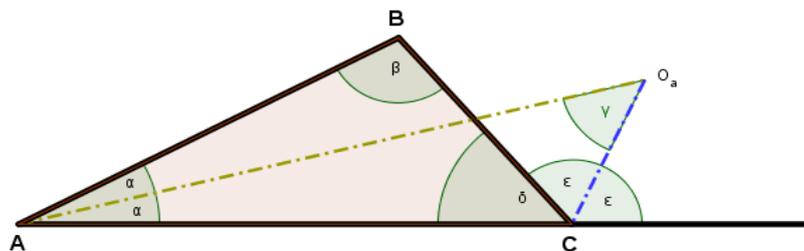


Fig. 18

H) $\triangle ABC$ cualesquiera

Ea Excentro relativo al vértice A

T) $\gamma = \frac{\beta}{2}$

Demostración:

$\triangle ACO_a$ (1) $\alpha + \delta + \varepsilon + \gamma = 180^\circ$
 $\varepsilon = \alpha + \gamma$ (Angulo externo)

$\triangle ABC$ (3) $2\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$

(1) = (3) $\alpha + \delta + \varepsilon + \gamma = 2\alpha + \beta + \delta \Rightarrow$ (4) $\varepsilon + \gamma = \alpha + \beta$

(ε) en (4) $\alpha + \gamma + \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow 2\gamma = \beta$

$\therefore \gamma = \frac{\beta}{2}$



1.5.8 Teorema de la bisectriz y la altura del mismo vértice (VIII):

El ángulo formado (Fig. 19) por una de las bisectrices internas del vértice de un triángulo y su correspondiente altura, es igual al valor absoluto de la semidiferencia de los ángulos internos de los otros dos vértices.

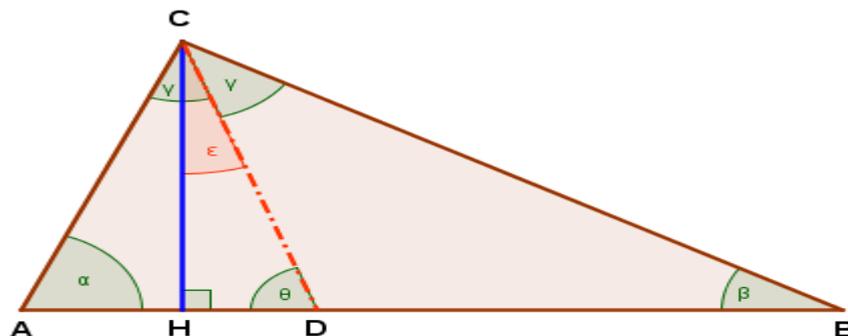


Fig. 19

H) $\triangle ABC$ cualesquiera
 \overline{CH} Altura relativa a $\sphericalangle C$
 \overline{CD} Bisectriz relativa a $\sphericalangle C$

T) $\varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$

Demostración:

$\triangle CDB$ $\theta = \beta + \gamma$ (Angulo externo)

$\triangle CDH$ (1) $\varepsilon + \theta = 90^\circ$

θ en (1) (3) $\varepsilon + \beta + \gamma = 90^\circ$

$\triangle ABC$ $2\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow$ (4) $\gamma = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2}$

(4) en (3) $\varepsilon + \beta + \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = 90^\circ$

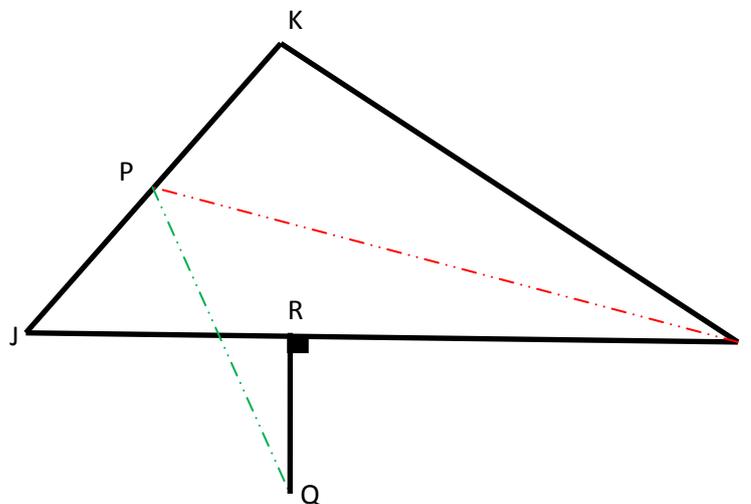
$2\varepsilon + 2\beta + 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\varepsilon - \alpha + \beta = 0$

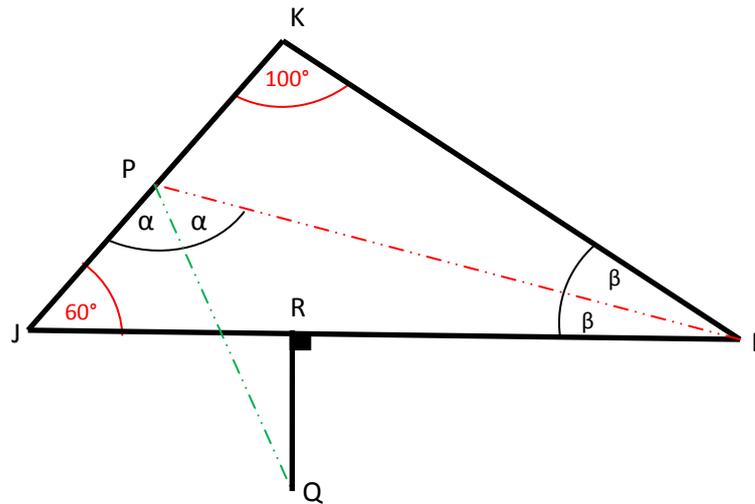
$\therefore \varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2}$



1.6 Ejercicios Resueltos sobre Triángulos:

1. H) $\sphericalangle JKL = 100^\circ$; $\sphericalangle LJK = 60^\circ$ T) $\sphericalangle PQR = ?$



Resolución: $\triangle JKL$

$$\hat{J} + \hat{K} + \hat{L} = 180^\circ; \quad 60^\circ + 100^\circ + \hat{L} = 180^\circ \Rightarrow \hat{L} = 20^\circ \quad (\text{Teorema I})$$

$$\beta = \frac{\hat{L}}{2}; \quad \beta = \frac{20^\circ}{2} \Rightarrow \beta = 10^\circ \quad (\text{Hipótesis Gráfica})$$

 $\triangle JPL$

$$\hat{J} + 2\alpha + \beta = 180^\circ; \quad \alpha = \frac{180^\circ - \beta - \hat{J}}{2} \quad (\text{Teorema I, Hipótesis Gráfica})$$

$$\alpha = \frac{180^\circ - 10^\circ - 60^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 55^\circ$$

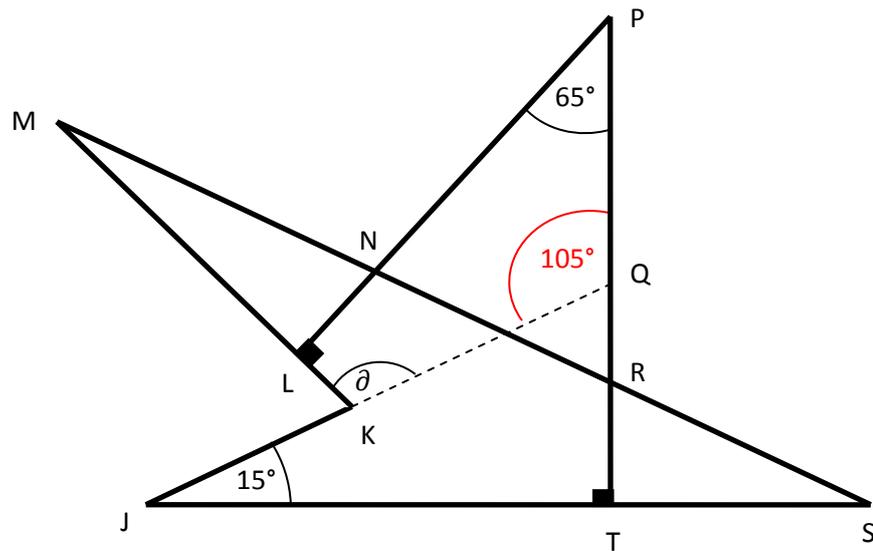
 $\square PQRL$

$$\hat{R} = \alpha + \hat{Q} + \beta; \quad \hat{Q} = \hat{R} - \hat{P} - \hat{L} \quad (\text{Teorema III, Hipótesis Gráfica})$$

$$\hat{Q} = 90^\circ - 55^\circ - 10^\circ \Rightarrow \hat{Q} = 25^\circ \quad \therefore \hat{Q} = \sphericalangle PQR$$

$$\therefore \sphericalangle PQR = 25^\circ$$

2. T) $\theta = ?$



Resolución:

$\triangle JQT$

$$\hat{J} + \hat{Q} + \hat{T} = 180^\circ$$

(Teorema I)

$$\hat{Q} = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ \Rightarrow \hat{Q} = 75^\circ$$

(Hipótesis Gráfica)

$$\sphericalangle PQR = 180^\circ - \hat{Q}; \quad \sphericalangle PQR = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$\square KLPQ$

$$\theta + \hat{L} + \hat{P} + \hat{Q} = 360^\circ$$

(Teorema II)

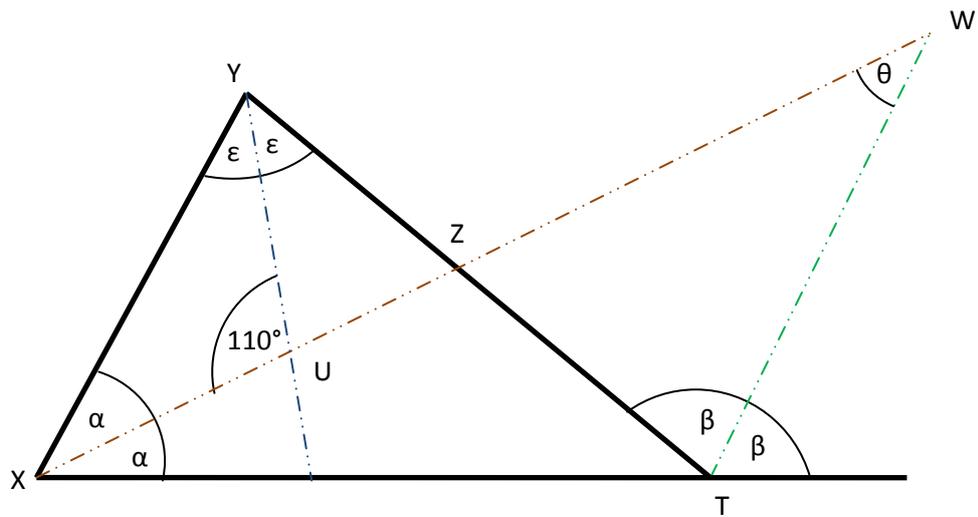
$$\theta = 360^\circ - 90^\circ - 65^\circ - 105^\circ$$

(Hipótesis Gráfica)

$$\therefore \theta = 100^\circ$$

3. H) $\alpha = 20^\circ$

T) $\theta = ?$



Resolución:

$\triangle XYU$

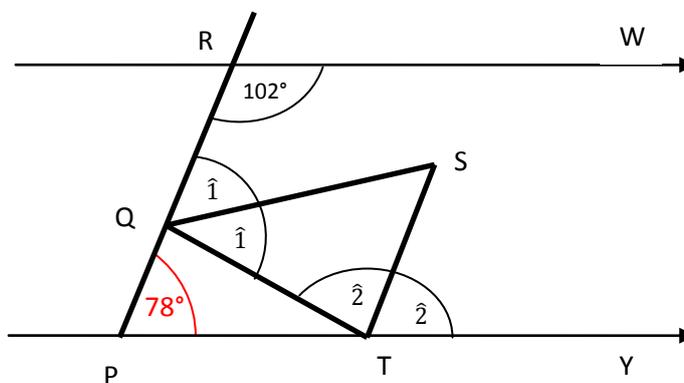
$$\alpha + \varepsilon + \hat{U} = 180^\circ \quad (\text{Teorema I})$$

$$\varepsilon = 180^\circ - 110^\circ - 20^\circ \Rightarrow \varepsilon = 50^\circ \quad (\text{Hipótesis})$$

$$\theta = \frac{\sphericalangle XYT}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} \Rightarrow \theta = \varepsilon \quad (\text{Teorema VII})$$

$$\therefore \theta = 50^\circ$$

4. T) $\hat{S} = ?$



Resolución:

$$\overline{RW} \parallel \overline{PY}; \quad \sphericalangle WRP + \sphericalangle RPT = 180^\circ \quad (\text{Hipótesis, Angulos Conjugados})$$

$$\sphericalangle RPT = 180^\circ - \sphericalangle WRP = 180^\circ - 102^\circ \Rightarrow \sphericalangle RPT = 78^\circ$$

$\triangle PQT$

$$(1) \quad \hat{P} + \hat{Q} + \hat{T} = 180^\circ; \quad \sphericalangle RPT = \hat{P} = 78^\circ \quad (\text{Definición})$$

$$\hat{Q} = 180^\circ - 2\hat{1}; \quad \hat{T} = 180^\circ - 2\hat{2} \quad (\text{Angulos Suplementarios})$$

$$\hat{P}, \hat{Q}, \hat{T} \text{ en } (1) \quad 78^\circ + 180^\circ - 2\hat{1} + 180^\circ - 2\hat{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{1} + \hat{2} = 129^\circ$$

$\triangle QST$

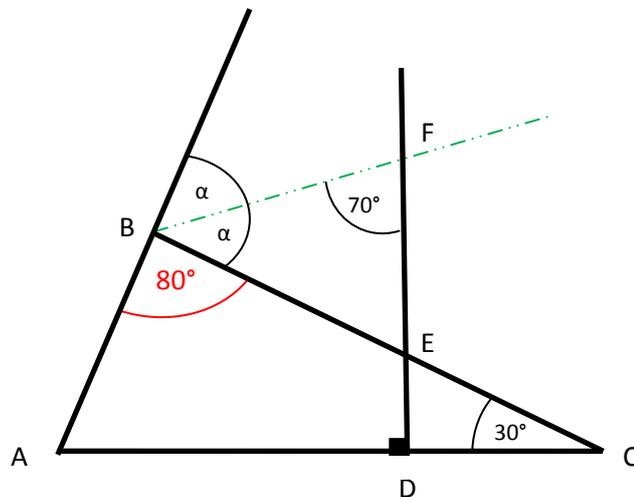
$$(2) \quad \hat{S} = 180^\circ - \hat{Q} - \hat{T}; \quad \hat{Q} = \hat{1}; \quad \hat{T} = \hat{2} \quad (\text{Teorema I, Definición})$$

$$\hat{Q}, \hat{T} \text{ en } (2) \quad \hat{S} = 180^\circ - (\hat{1} + \hat{2}) \quad \because \hat{1} + \hat{2} = 129^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{S} = 180^\circ - 129^\circ$$

$$\therefore \hat{S} = 51^\circ$$

5. T) $\hat{A} = ?$



Resolución:

∞ **BCDF**

$$(1) \quad \widehat{B} + \widehat{F} = \widehat{D} + \widehat{C} \quad (\text{Teorema IV})$$

$$\widehat{B} = \alpha; \widehat{C} = 30^\circ; \widehat{D} = 90^\circ; \widehat{F} = 70^\circ \quad (\text{Hipótesis Gráfica})$$

$$\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{F} \text{ en (1)} \quad \alpha = 90^\circ + 30^\circ - 70^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

$\triangle ABC$

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2\alpha \quad (\text{Angulo Suplementario})$$

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2 * 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 80^\circ$$

$$(2) \quad \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}; \quad \sphericalangle ABC = \widehat{B} = 80^\circ; \quad \widehat{C} = 30^\circ$$

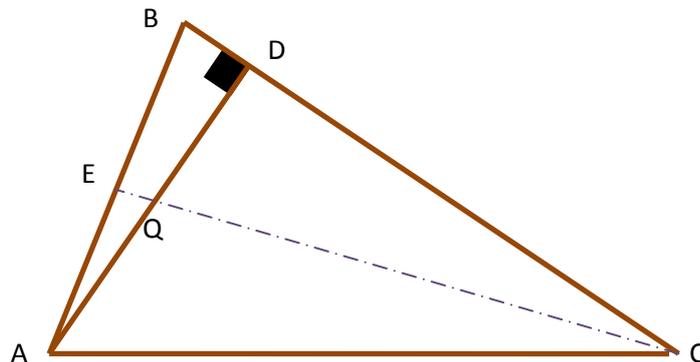
$$\widehat{B}, \widehat{C} \text{ en (2)} \quad \widehat{A} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ$$

$$\therefore \widehat{A} = 70^\circ$$

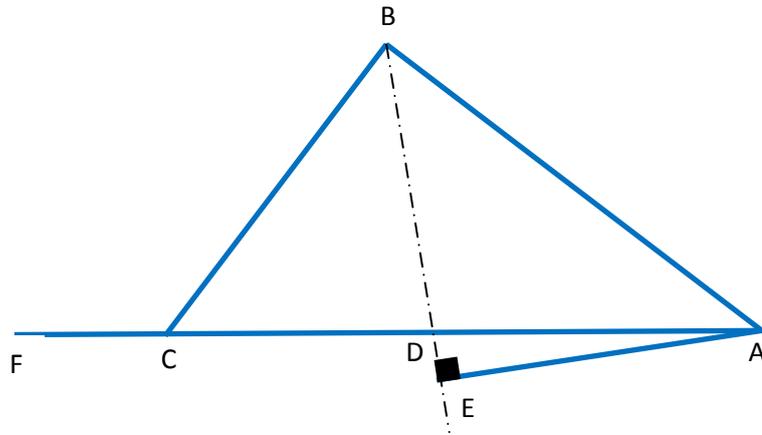
1.7 Ejercicios Propuestos:

1. H) $\sphericalangle BAC = \frac{16\pi}{45} \text{ rad}$ $\widehat{B} = \frac{21\pi}{90} \text{ rad}$

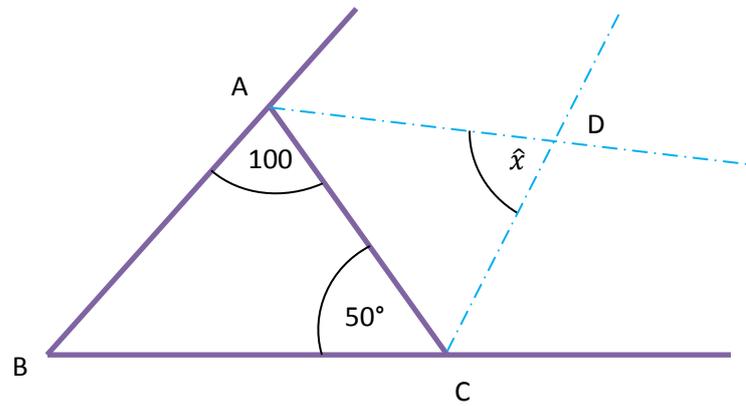
T) $\sphericalangle AQC = ?$ Solución: 127°



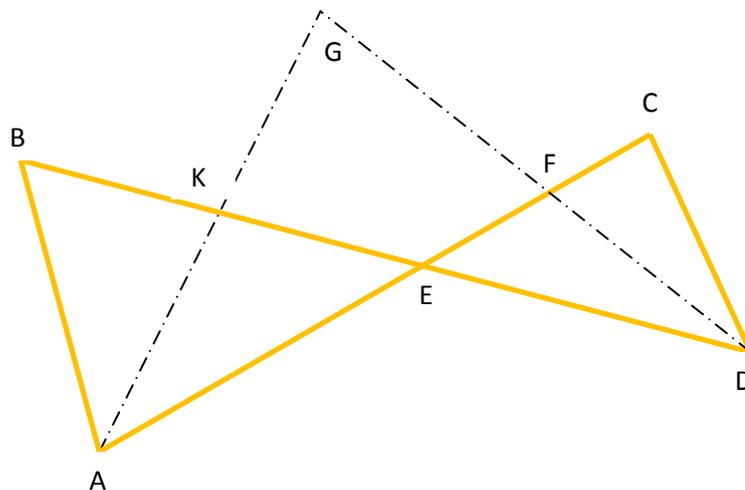
2. H) $\angle BCF = 110^\circ$ $\angle BAD = 40^\circ$
 T) $\angle DAE = ?$ Solución: 15°



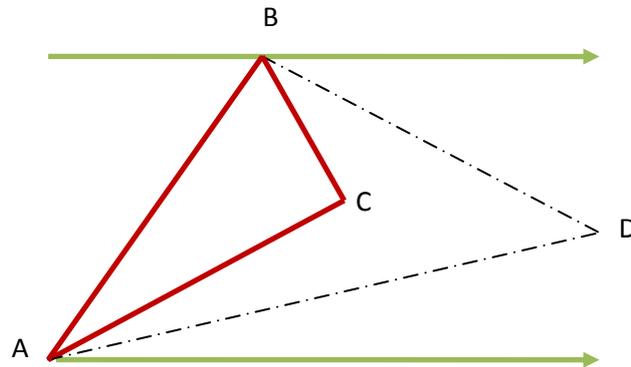
3. T) $\hat{x} = ?$ Solución 75°



4. H) $\angle B = \frac{22\pi}{45} \text{ rad}$ $\angle C = \frac{4\pi}{9} \text{ rad}$
 T) $\angle G = ?$ Solución: 84°



5. T) $\hat{C} = 2\hat{D}$

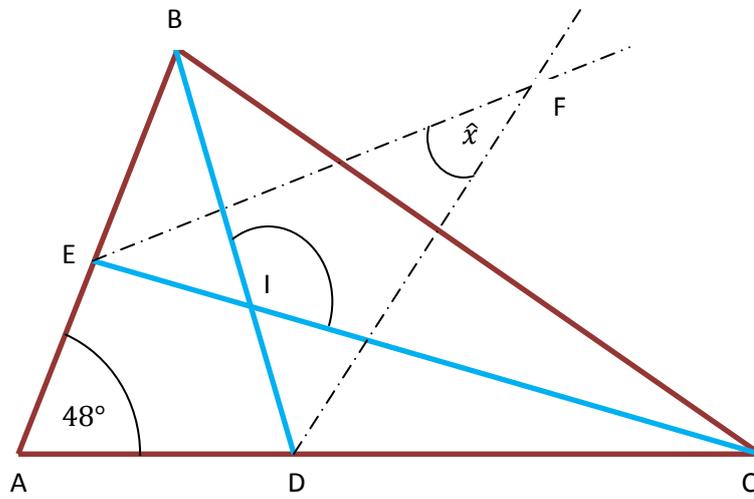


6. En un triángulo ABC: $A = 35^\circ$ y $B = 50^\circ$. Calcular el ángulo formado por la altura del vértice B y la bisectriz del vértice C.

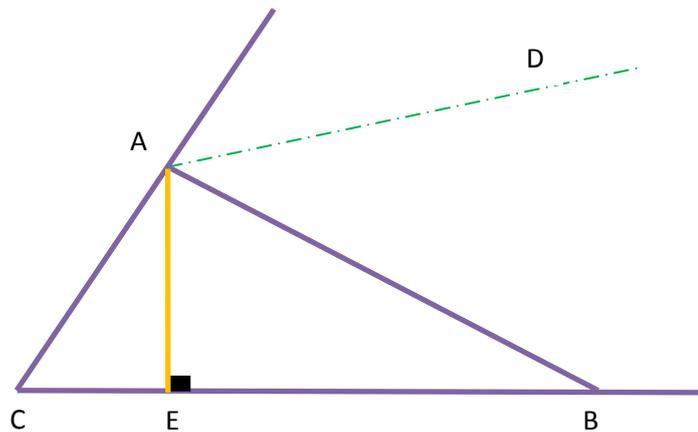
Solución: $42,5^\circ$

7. En un triángulo obtusángulo ABC ($C > 90^\circ$), si P es el pie de la altura h_a , Q pie de la altura de h_b , y H es el ortocentro, demostrar que el ángulo \sphericalangle PHQ es igual a la suma de los ángulos A y B.
8. En un triángulo ABC, obtusángulo ($A > 90^\circ$), H es ortocentro. Demostrar que las bisectrices de los ángulos \sphericalangle HBA y \sphericalangle HCA son perpendiculares entre sí.

9. H) I Incentro del $\triangle ABC$
 T) $\hat{x} = ?$ Solución: 33°



10. H) $\hat{C} - \hat{B} = 15^\circ$ T) $\angle DAE = ?$ Solución: 97.5°



2. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

2.1 Definición:

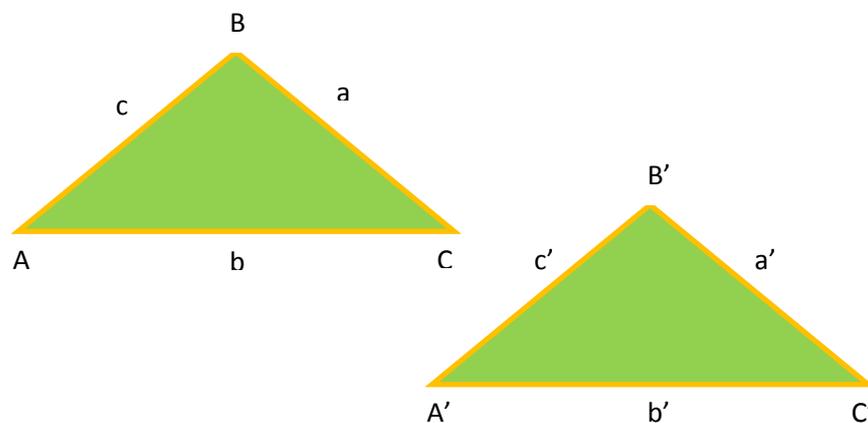
En general, dos figuras o cuerpos geométricos son congruentes si tienen exactamente la misma forma y la misma medida. Siendo un triángulo una figura geométrica plana, la definición de congruencia geométrica, es también aplicable a este concepto.

2.2 Simbología:

El símbolo de congruencia es: \cong

2.3 Condición geométrica fundamental de congruencia:

La condición geométrica fundamental que hace que dos triángulos sean congruentes es la de que todos los ángulos y lados de uno de los triángulos sean congruentes con todos los ángulos y lados del otro triángulo como se muestra en la Fig. 20.



$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \sphericalangle A = \sphericalangle A', & \sphericalangle B = \sphericalangle B', & \sphericalangle C = \sphericalangle C' \\ a = a', & b = b', & c = c' \end{cases}$$

Fig. 20

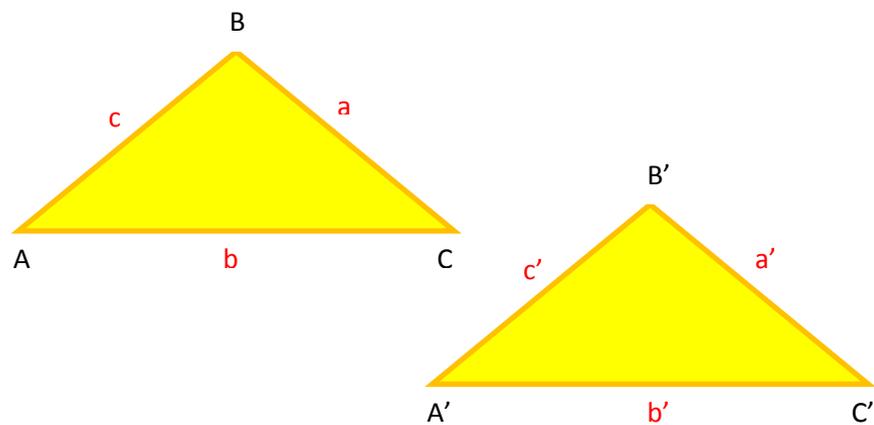


Pero para demostrar que dos triángulos son congruentes, no hace falta verificar toda la *condición geométrica fundamental*; basta que se cumplan solamente ciertas condiciones y ya dichos triángulos son congruentes.

Esas condiciones necesarias pero suficientes, son conocidas con el nombre de *postulados de congruencia*, los mismos que vienen a continuación y son tres.

2.4 Postulados de congruencia triangular:

- I. Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos, son congruentes con los tres lados del otro triángulo.



$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow a \cong a'; b \cong b'; c \cong c'$$

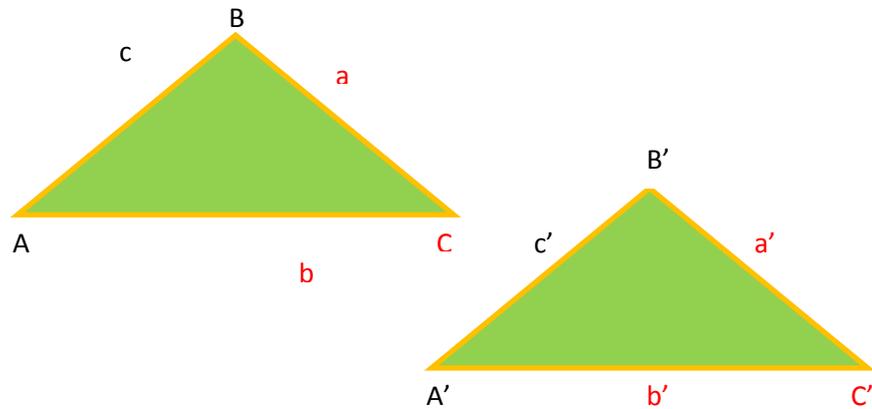
Fig. 21

A esta correspondencia de congruencia se le denomina: Lado (L), Lado (L), Lado (L).



- II. Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de uno de los triángulos, son congruentes con los dos lados

correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos del segundo triángulo (Fig. 22).



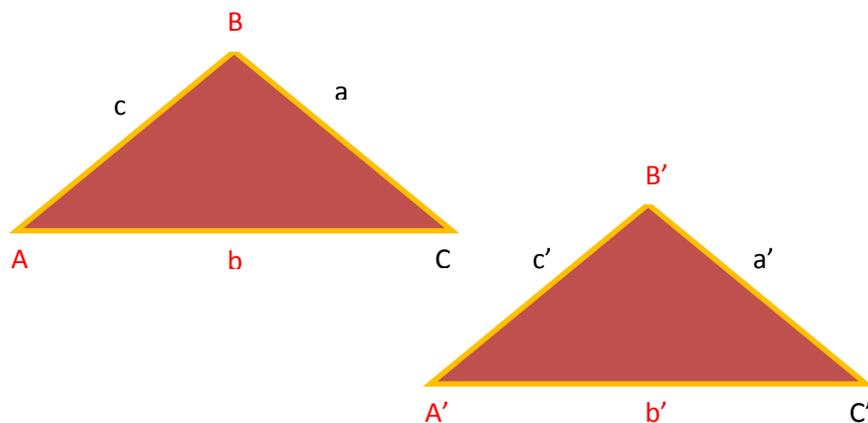
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Leftrightarrow a \cong a'; b \cong b'; \sphericalangle C \cong \sphericalangle C'$$

Fig. 22

A esta correspondencia se le denomina: Lado (L), Angulo (A), Lado(L).



III. Dos triángulos son congruentes si dos de sus ángulos y cualquiera de uno de sus lados de uno de los triángulos, son congruentes con los correspondientes del segundo triángulo (Fig. 23).



$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow A \cong A'; b \cong b'; B \cong B'$$

Fig. 23

A esta correspondencia se le denomina: Angulo (A), Lado (L), Angulo (A).



Todos estos postulados de congruencia, son aplicables a cualquier tipo de triángulo, por lo que se considera innecesario establecer postulados para triángulos específicos, salvo el caso que se los requiera.

2.5 Propiedades geométricas que se demuestran por Congruencias de triángulos

2.5.1 Teorema de las paralelas (I):

Si dos rectas paralelas son cortadas por otras dos también paralelas, los segmentos que así se determinan son congruentes entre sí de dos en dos, como se aprecia en la Fig. 24.

$$H) \quad \overline{XY} \parallel \overline{ZW}; \quad \overline{XZ} \parallel \overline{YW} \qquad T) \quad \overline{XY} \cong \overline{ZW}; \quad \overline{XZ} \cong \overline{YW}$$

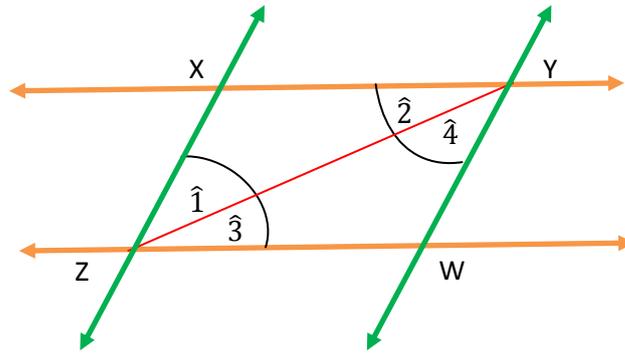


Fig. 24

Demostración:

\overline{yz} (Construcción)

$\Delta xyz \wedge \Delta zwy$

\overline{yz} (L) (Lado común)

$\hat{1} = \hat{4}$ (A) (Ángulos alternos internos)

$\hat{3} = \hat{2}$ (A) (Ángulos alternos internos)

$\Rightarrow \Delta xyz \cong \Delta zwy$ (Postulado III)

$$\therefore \overline{XY} \cong \overline{ZW} \wedge \overline{XZ} \cong \overline{YW}$$



2.5.2 Teorema del triángulo y la paralela (II):

Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, que pase por el punto medio de cualquiera de sus otros dos lados, ésta también pasará por el punto medio del tercer lado (Fig. 25).

$$H) \quad M \text{ Punto medio de } \overline{AB} \quad \overline{MN} \parallel \overline{AC} \quad T) \quad \overline{BN} = \overline{NC}$$

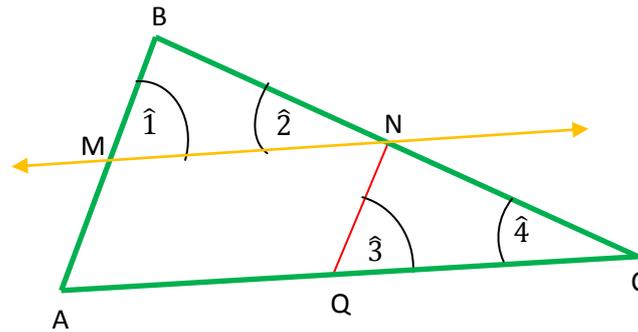


Fig. 25

Demostración:

$$\overline{NQ} \parallel \overline{AB} \quad (\text{Por construcción})$$

$$\overline{BM} = \overline{MA} \quad (M \text{ punto medio } \overline{AB}); \quad \overline{MA} = \overline{NQ} \quad (\text{Teorema I})$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad \overline{BM} = \overline{NQ}$$

$\triangle MBN \wedge \triangle QNC$

$$\overline{BM} = \overline{NQ} \quad (L) \quad (1)$$

$$\hat{1} = \hat{A} = \hat{3} \quad (A) \quad (\text{Ángulos correspondientes})$$

$$\hat{2} = \hat{4} \quad (A) \quad (\text{Ángulos correspondientes})$$

$$\Rightarrow \triangle MBN \cong \triangle QNC \quad (\text{Postulado III})$$

$$\therefore \boxed{\overline{BN} = \overline{NC}}$$

Corolario:

El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, siempre es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de dicho lado.



2.5.3 Teorema del triángulo isósceles (III):

Si dos ángulos de un mismo triángulo son congruentes entre sí, los lados opuestos a dichos ángulos también son congruentes (Fig. 26).

H) $\triangle ABC$ Isósceles; \hat{B} Angulo desigual; $\hat{A} = \hat{C}$

T) $\overline{AB} = \overline{BC}$

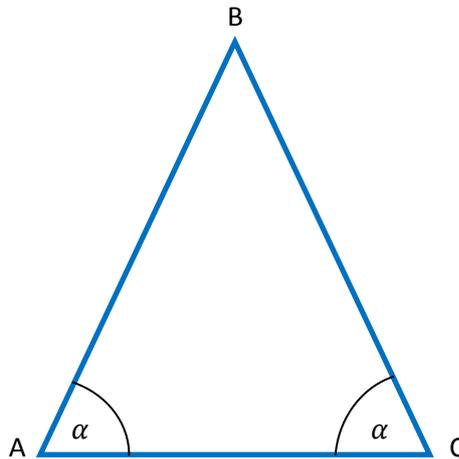
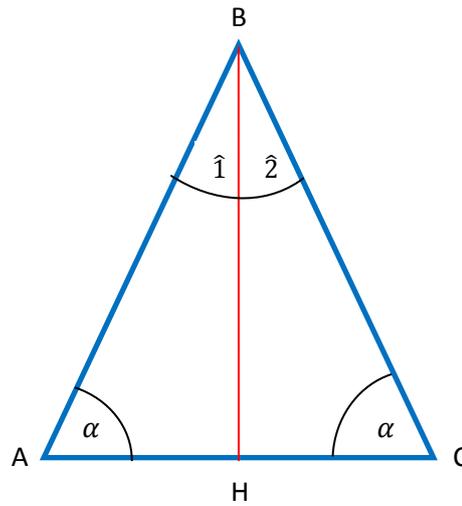


Fig.26

Demostración:



\overline{BH} Bisectriz (Construcción) \Rightarrow (1) $\hat{1} = \hat{2}$

$\triangle ABH \wedge \triangle CBH$

$\alpha = \hat{A} = \hat{C}$ (A) (Hipótesis)

$\hat{1} = \hat{2}$ (A) (1)

\overline{BH} (L) (Lado común)

$\Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle CBH$ (Postulado III)

$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$

Corolarios:

$\sphericalangle AHB = \sphericalangle BHC \wedge \sphericalangle AHB + \sphericalangle BHC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AHB = \sphericalangle BHC = 90^\circ$

$\therefore \overline{BH}$ ES TAMBIÉN ALTURA Y MEDIATRIZ

$\therefore \overline{AH} = \overline{HC} \Rightarrow \overline{BH}$ ES TAMBIÉN MEDIANA



Por lo tanto:

- En todo triángulo isósceles, la línea notable correspondiente al ángulo desigual, es al mismo tiempo: bisectriz, mediatriz, mediana y altura.
- En todo triángulo equilátero, todas las líneas notables tienen la misma longitud y son al mismo tiempo: bisectrices, mediatrices, medianas y alturas.
- En todo triángulo donde que una línea fundamental es otra línea fundamental, dicho triángulo es isósceles.
- En todo triángulo equilátero, el incentro, baricentro, circuncentro y ortocentro, es el mismo punto.

2.5.4 Teorema del triángulo rectángulo y la mediana (IV):

La mediana correspondiente al ángulo recto en un triángulo rectángulo, es siempre igual a la mitad de la hipotenusa (Fig. 27).

H) ΔXYZ rectángulo $\sphericalangle X = 90^\circ$ \overline{XN} mediana

T) $\overline{XN} = \overline{YN} = \overline{NZ}$

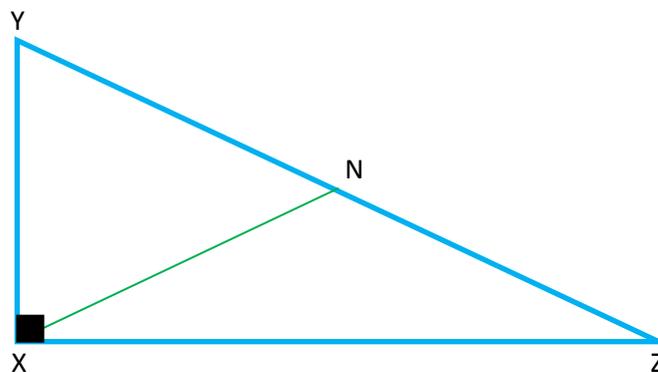
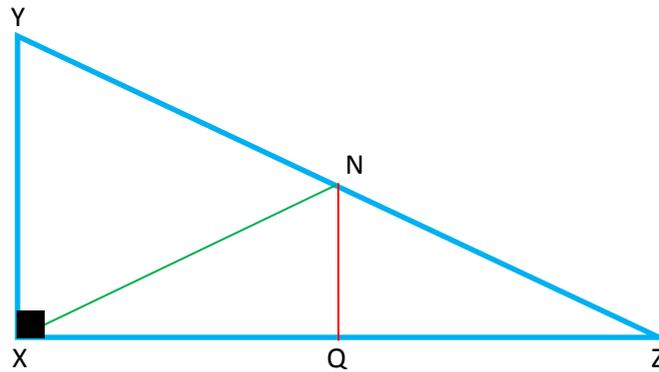


Fig. 27

Demostración:

$$\overline{NQ} \parallel \overline{XY} \quad (\text{Construcción})$$

$$\triangle QNX \wedge \triangle QNZ$$

$$\overline{NQ} \quad (L) \quad (\text{Lado común})$$

$$\overline{XQ} = \overline{QZ} \quad (L) \quad (\text{Teorema II})$$

$$\sphericalangle XQN = \sphericalangle NQZ = \sphericalangle X = 90^\circ \quad (A) \quad (\text{Construcción})$$

$$\Rightarrow \triangle XNQ \cong \triangle QNZ \quad (\text{Postulado II})$$

∴

$$\overline{XN} = \overline{NZ} = \overline{NY}$$

Corolario:

- Si el lado de un triángulo es el doble de la longitud de su mediana correspondiente, entonces el triángulo es rectángulo.



2.5.5 Teorema sobre la altura y la mediana de un triángulo rectángulo (V):

El valor absoluto de la diferencia entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, es igual al ángulo formado por la altura y la mediana relativas al ángulo recto (Fig. 28).

H) $\triangle XYZ$ Rectángulo \overline{HX} Altura \overline{MX} Mediana

T) $\hat{Z} - \hat{Y} = \hat{W}$

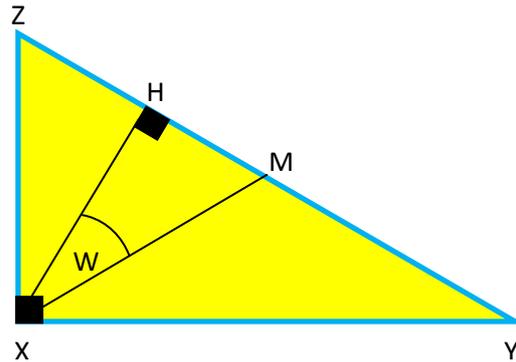


Fig. 28

Demostración:

$$\widehat{HXZ} = \hat{Y} \quad (\text{Lados perpendiculares } \triangle HXZ \perp \triangle HXY)$$

$$\overline{MX} = \overline{MZ} \quad (\text{Teorema IV})$$

$$\widehat{MXZ} = \hat{Z} \quad (\triangle XZM \text{ Isósceles})$$

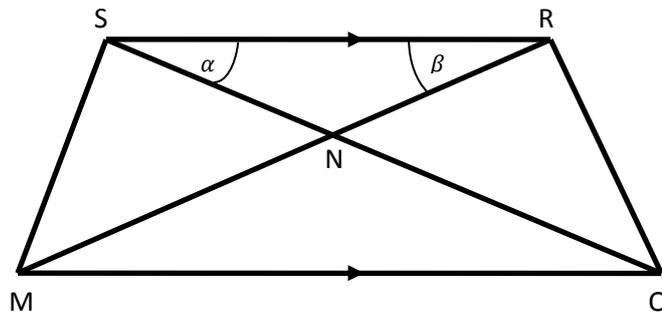
$$\Rightarrow \hat{W} = \widehat{MXZ} - \widehat{HXZ} \quad (\text{Gráfico})$$

$$\therefore \hat{W} = \hat{Z} - \hat{Y}$$

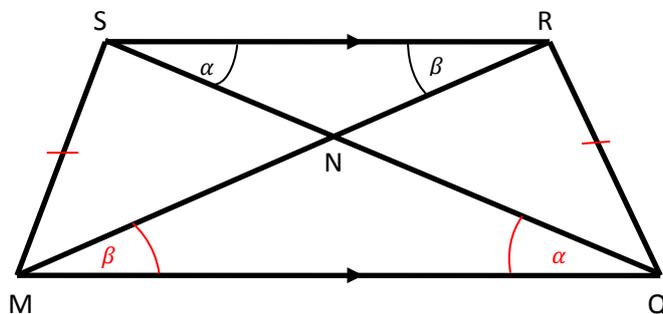


2.6 Ejercicios Resueltos sobre Congruencia Triangular:

1. H) $\sphericalangle QMS = \sphericalangle MQR$; $\overline{MS} = \overline{QR}$ T) $\alpha = \beta$



Demostración:



$\overline{RS} \parallel \overline{MQ}$ (Hipótesis Gráfica)
 $\Rightarrow \sphericalangle MQS = \alpha \wedge \sphericalangle QMR = \beta$ (Ángulos alternos internos)

$\triangle MQS \wedge \triangle MQR$

$\overline{MS} = \overline{QR}$ (L) (Hipótesis)

$\sphericalangle QMS = \sphericalangle MQR$ (A) (Hipótesis)

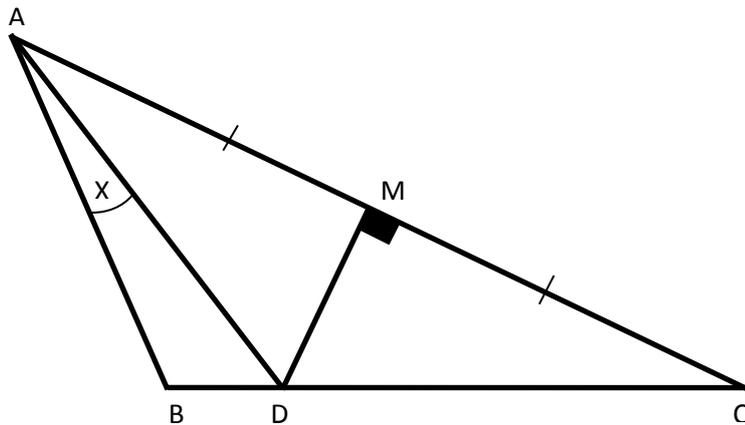
\overline{MQ} (L) (lado común)

$\Rightarrow \triangle MQS \cong \triangle MQR$ (Postulado II)

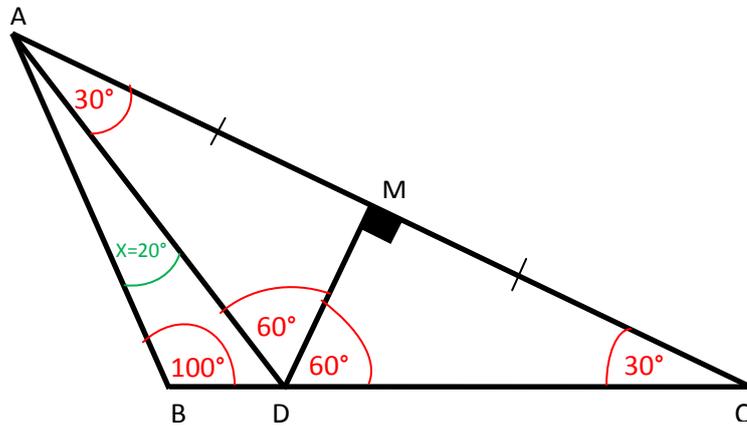
$\Rightarrow \sphericalangle QMR = \sphericalangle MQS$

$\therefore \alpha = \beta$

2. H) $\sphericalangle B = 100^\circ$; $\sphericalangle C = 30^\circ$ T) $\hat{X} = ?$



Demostración:



$\triangle CMD$

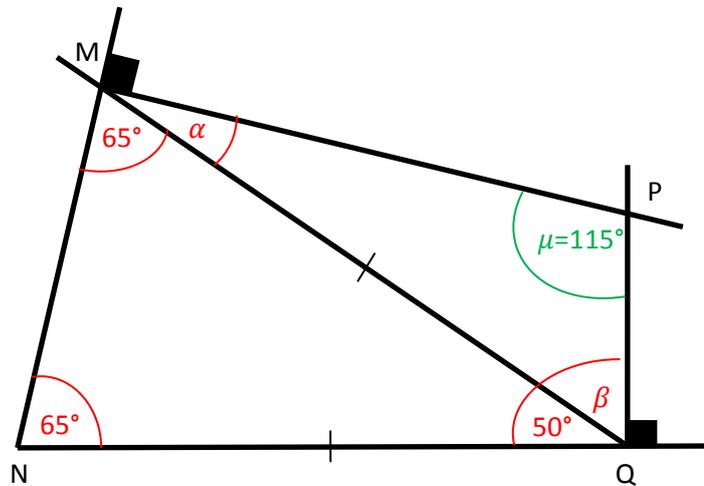
$\hat{C} + \hat{D} = 90^\circ$ (Hipótesis Gráfica y textual)

$\hat{D} = 90^\circ - 30^\circ \Rightarrow \hat{D} = 60^\circ$

$\triangle AMD \wedge \triangle CMD$

$AM = MC$ (L) (Hipótesis gráfica)

Demostración:



ΔMNQ Isósceles (Hipótesis gráfica)

$\Rightarrow \sphericalangle NMQ = N = 65^\circ$ (Teorema III)

$\sphericalangle MQN = 180^\circ - 2N \Rightarrow \sphericalangle MQN = 50^\circ$

ΔMPQ

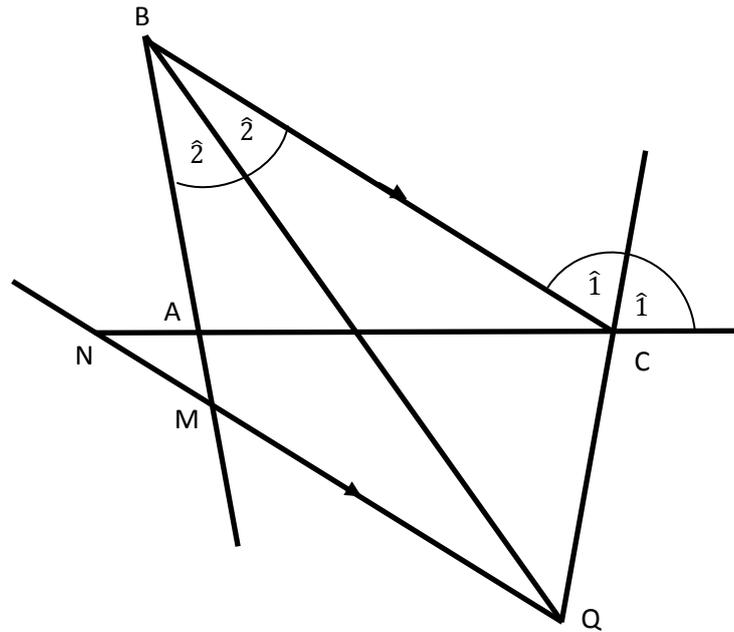
$\alpha = 90^\circ - \sphericalangle NMQ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$ (Ángulos complementarios)

$\beta = 90^\circ - \sphericalangle MQN \Rightarrow \beta = 40^\circ$ (Ángulos complementarios)

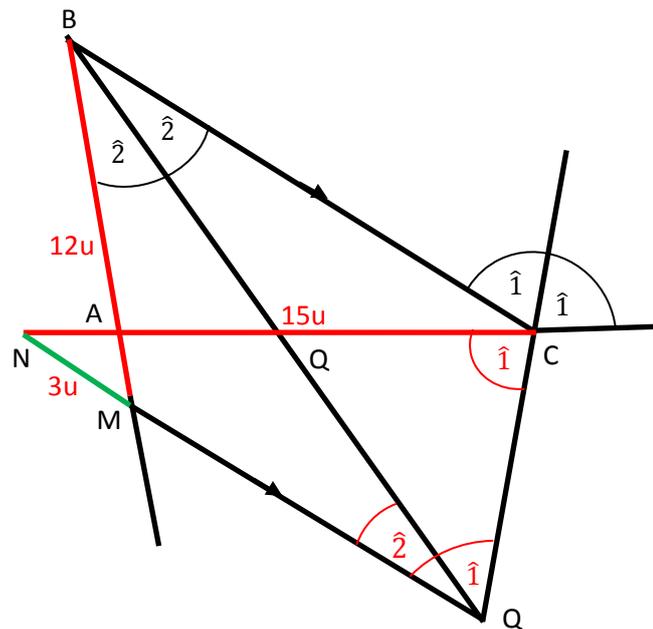
$\mu = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \mu = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ$

$\therefore \mu = 115^\circ$

4. H) $CN = 15 u$ $BM = 12 u$ T) $MN = ?$



Demostración:



$BC \parallel NQ$

(Hipótesis gráfica)

$\Rightarrow \sphericalangle CBQ = \sphericalangle BQN = \hat{2}$

(Ángulos alternos internos)

$\Rightarrow \triangle BMQ$ es isósceles

$\Rightarrow MQ = BM = 12u$

(Teorema III)

$$\sphericalangle NQC = \hat{1} \quad (\text{Ángulos correspondientes})$$

$$\sphericalangle NCQ = \hat{1} \quad (\text{Ángulos opuestos por el vértice})$$

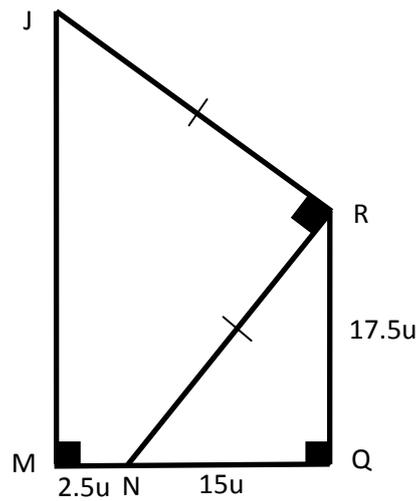
$\Rightarrow \triangle QNC$ es isósceles

$$\Rightarrow CN = NQ = 15u \quad (\text{Teorema III})$$

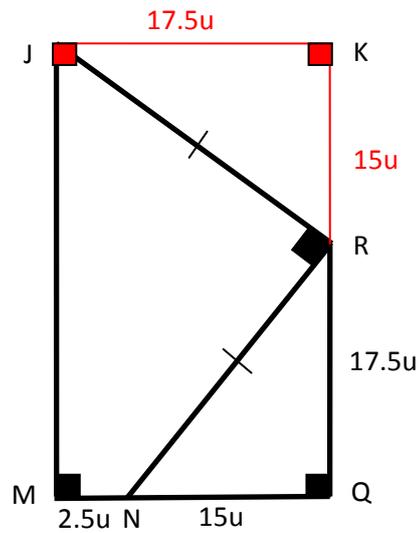
$$MN = NQ - MQ \Rightarrow MN = 15u - 12u$$

$$\therefore MN = 3u$$

5. T) $JM = ?$



Demostración:



$$JK \parallel MQ \wedge KR \parallel JM \quad (\text{Construcción})$$

$$\Rightarrow JK = MQ = 17.5u \quad (\text{Teorema I})$$

$$\Delta JKR \wedge \Delta NQR$$

$$JK = QR \quad (L) \quad (\text{Construcción})$$

$$\sphericalangle JKR = \sphericalangle NQR = 90^\circ \quad (A) \quad (\text{Construcción})$$

$$JR = NR \quad (L) \quad (\text{Hipótesis})$$

$$\Rightarrow \Delta JKR \cong \Delta NQR \quad (\text{Postulado II } \Delta \text{ rectángulos})$$

$$\Rightarrow KR = NQ = 15u$$

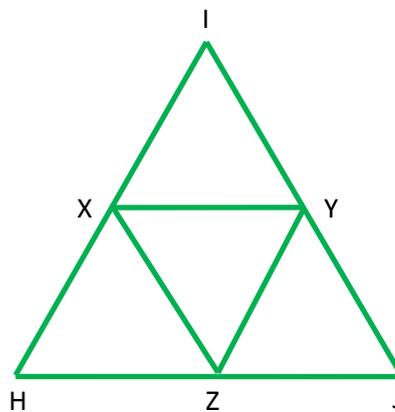
$$KQ = KR + RQ \Rightarrow KQ = 15u + 17.5u \Rightarrow KQ = 32.5u$$

$$JM = KQ \quad (\text{Teorema I})$$

$$\therefore JM = 32.5u$$

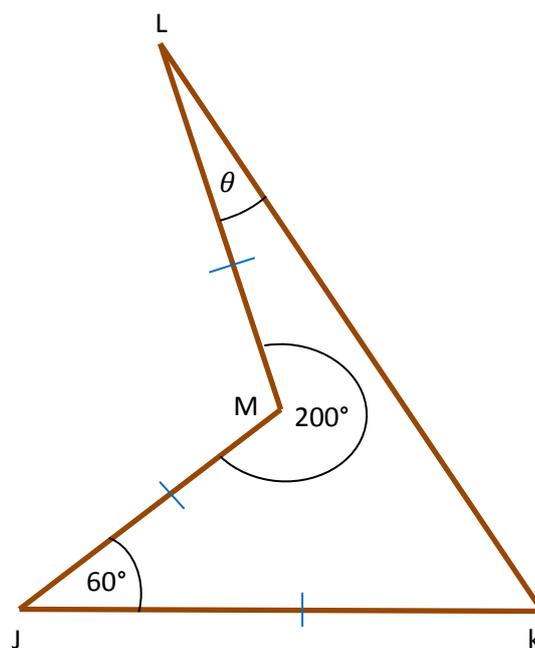
2.7 Ejercicios Propuestos:

1. Sobre los lados de un ΔABC se construyen los ΔBPC , ΔAQC y ΔARB . Demuestre que $AP = BQ = CR$
2. **H) $\Delta HIJ \wedge \Delta XYZ$ Triángulos Equiláteros**
T) $\Delta HXZ \cong \Delta XIY \cong \Delta YJZ$

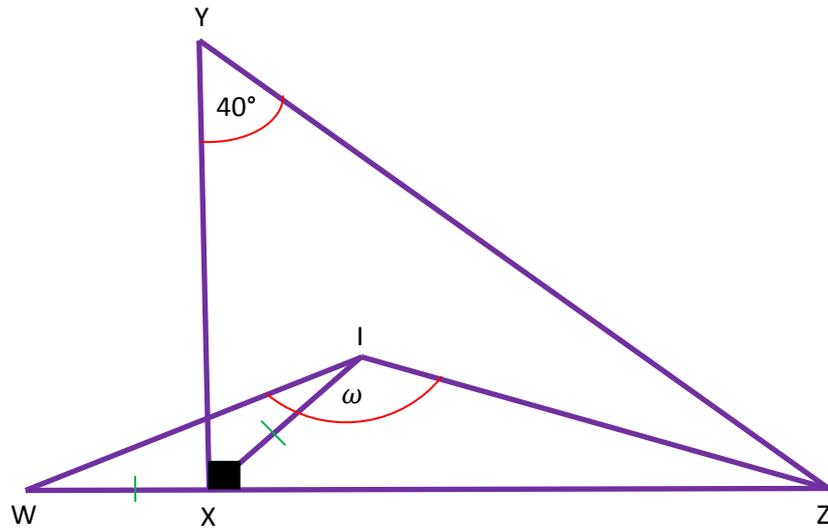


3. **T) $\theta = ?$**

Solución: 20°



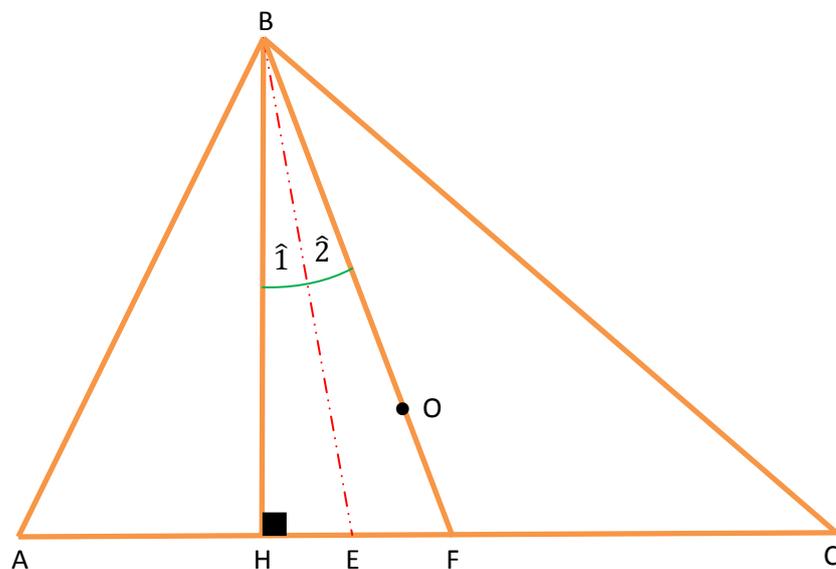
4. H) *I* Incentro del $\triangle XYZ$ T) $\omega = ?$ Solución: 132.5°



5. En un triángulo ABC ($\sphericalangle B > 90^\circ$) los puntos medios de los lados BC , CA y AB son respectivamente L , M y N . Si D es el pie de altura de A ; demostrar que los triángulos LMN y DMN son congruentes.

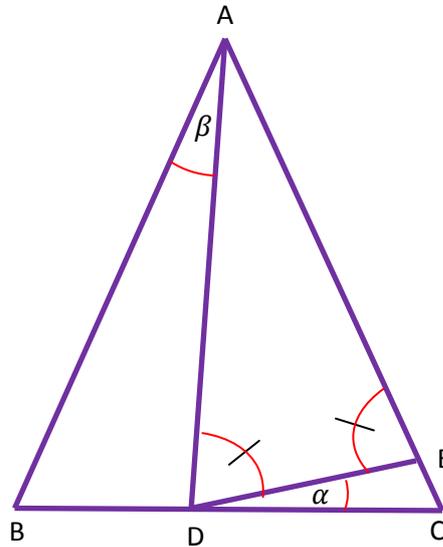
6. H) *O* Circuncentro del $\triangle ABC$; *BE* Bisectriz $\sphericalangle ABC$

T) $\hat{1} = \hat{2}$



7. H) $AB = AC$

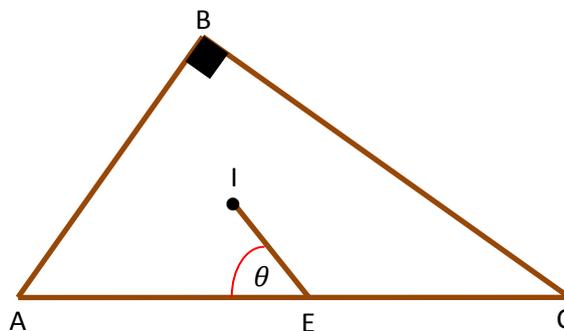
T) $\beta = 2\alpha$

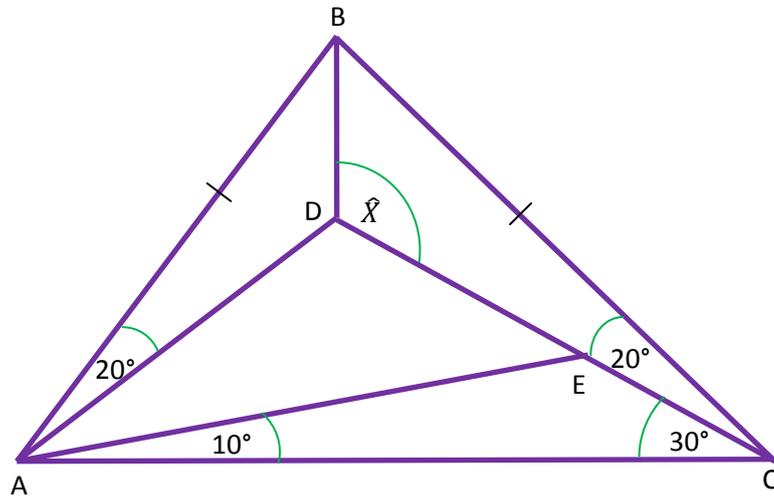


8. Demostrar que si desde un punto exterior a un triángulo equilátero, se trazan perpendiculares a los tres lados, el exceso de la suma de dos de dichas perpendiculares sobre la tercera es una línea fundamental.

9. H) I Incentro del $\triangle ABC$; $\overline{AB} = \overline{AE}$ T) $\theta = ?$

Solución: 45°



10. T) $\hat{X} = ?$ Solución: 120° 

3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

3.1 Definición:

En general, dos figuras o cuerpos geométricos son semejantes si tienen exactamente la misma forma pero diferente tamaño; como podría ser el caso de una fotografía de algo, pero ampliada o reducida. Siendo un triángulo una figura geométrica plana, la definición de semejanza geométrica, es también aplicable a este concepto.

3.2 Simbología:

El símbolo de semejanza es: \sim

3.3 Condición geométrica fundamental de semejanza:

La condición geométrica fundamental que hace que dos triángulos sean semejantes entre sí, es la de que todos los ángulos de uno de los triángulos sean congruentes con todos los ángulos del otro; así como todos los lados del primer triángulo, deben ser proporcionales a todos los lados del segundo (Fig. 29).

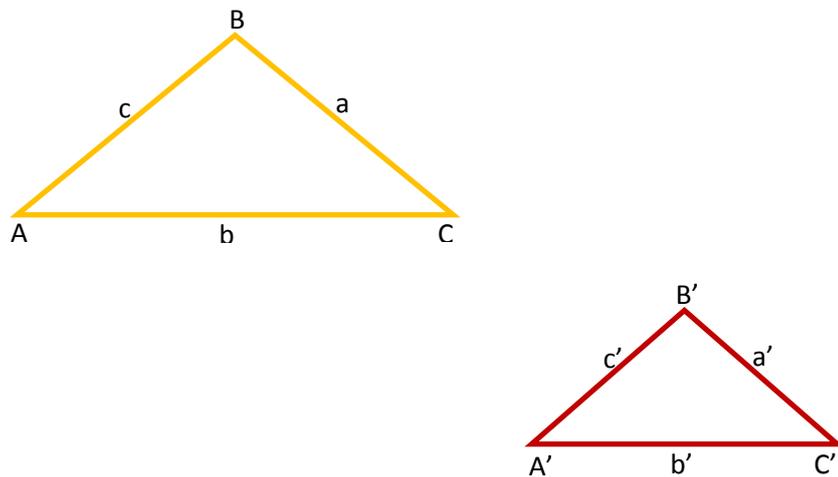


Fig. 29

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \sphericalangle A = \sphericalangle A', & \sphericalangle B = \sphericalangle B', & \sphericalangle C = \sphericalangle C' \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K \\ K = \text{constante de proporcionalidad} \end{cases}$$

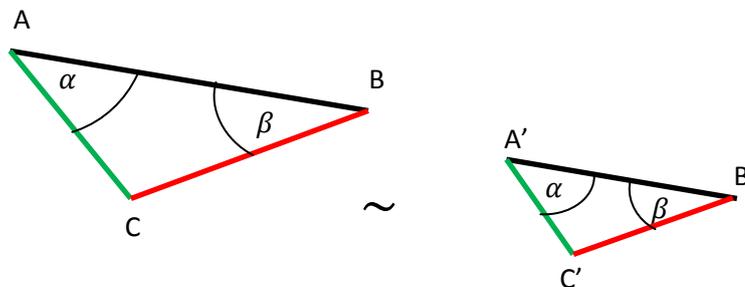


Pero para demostrar que dos triángulos son semejantes, no hace falta verificar toda la **condición geométrica fundamental**; basta que se cumplan solamente ciertas condiciones y ya dichos triángulos son semejantes.

Esas condiciones necesarias pero suficientes, son conocidas con el nombre de **postulados de semejanza**, los mismos que vienen a continuación y son cinco.

3.4 Postulados de semejanza triangular:

I. Dos triángulos son semejantes si dos de los ángulos de uno de ellos, son congruentes con dos del otro triángulo (Fig. 30).



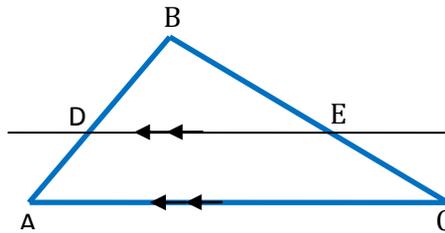
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow A \cong A' = \alpha \wedge B \cong B' = \beta$$

Fig. 30



- II.** Si se traza una recta paralela sea ésta interna o externa a cualquiera de los lados de un triángulo, el nuevo triángulo así formado es semejante al primero

(Fig. 31).

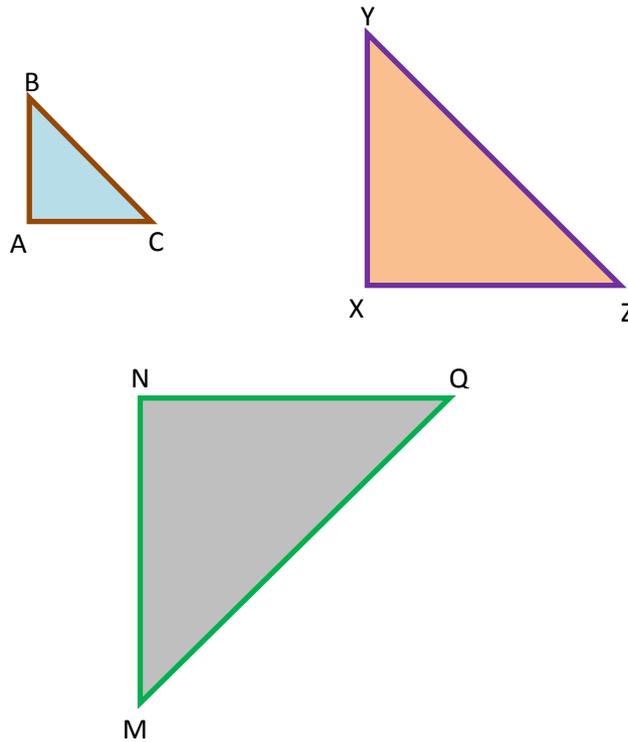


$$\triangle DBE \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \overline{DE} \parallel \overline{AC}$$

Fig. 31



- III.** Dos triángulos son semejantes si todos los lados de uno de los triángulos son respectivamente (a) paralelos o (b) perpendiculares a todos los lados del segundo triángulo (Fig. 32).



$$(a) \quad \Delta ABC \sim \Delta XYZ \Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{XY}; \overline{BC} \parallel \overline{YZ}; \overline{AC} \parallel \overline{XZ}$$

$$(b) \quad \Delta ABC \sim \Delta XYZ \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{NQ}; \overline{BC} \perp \overline{MQ}; \overline{AC} \perp \overline{MN}$$

Fig. 32



IV. Dos triángulos son semejantes, si los tres lados de uno de los triángulos son respectivamente proporcionales a los tres del segundo triángulo (Fig. 33).

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K = \text{Constante}$$

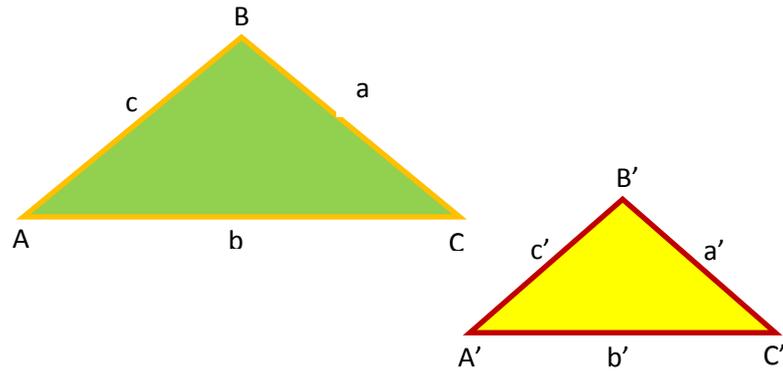
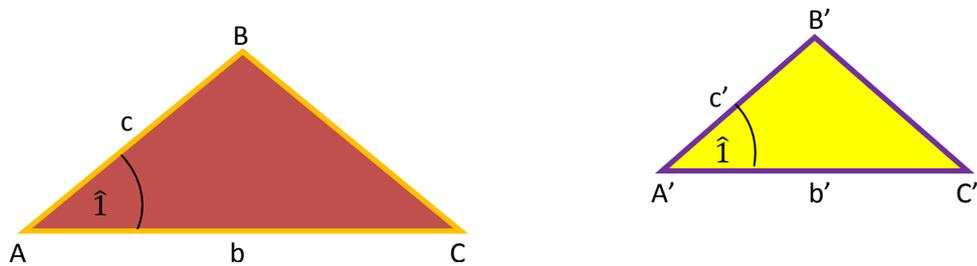


Fig. 33



V. Dos triángulos son semejantes, si dos de los lados de uno de los triángulos, son respectivamente proporcionales a los dos del segundo triángulo y si los ángulos comprendidos entre dichos lados son congruentes, como se indica en la Fig. 34.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle A' = \hat{1} \wedge \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Fig. 34



Todos estos postulados de semejanza son aplicables a cualquier tipo de triángulo, por lo que se considera innecesario establecer postulados para triángulos específicos, salvo el caso que se lo requiera.

3.5 Propiedades geométricas que se demuestran por Semejanza de triángulos.

3.5.1 Teorema del Baricentro (I):

En todo triángulo el baricentro divide a las medianas en dos segmentos, de tal manera que el segmento que se encuentra del lado del ángulo, es el doble del otro segmento (Fig. 35).

H) $\triangle ABC$ Cualesquiera; \overline{AM} , \overline{CN} Medianas; G Baricentro

T) $\overline{AG} = 2\overline{GM}$; $\overline{CG} = 2\overline{GN}$

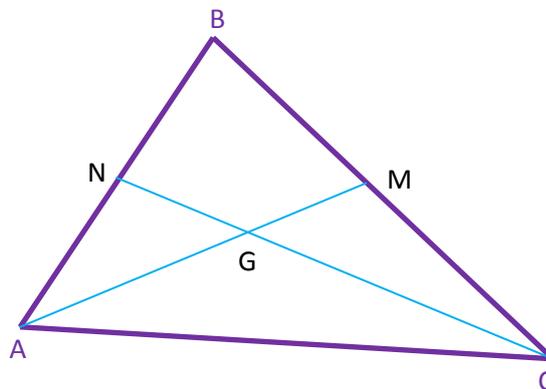
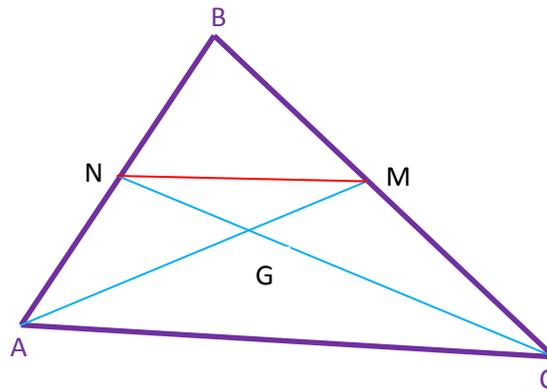


Fig. 35

Demostración:



\overline{MN} (Construcción)

M, N (Puntos medios de \overline{BC} y \overline{AB} respectivamente)

$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC}$ (Teorema II de congruencia de Δ)

$\Rightarrow \Delta AGC \sim \Delta MNG$ (Postulado III de semejanza de Δ)

$$\Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MN}}$$

$\frac{\overline{AC}}{\overline{MN}} = 2$ (Corolario del Teorema II de congruencia de Δ)

$$\Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GN}} = 2$$

$$\therefore \overline{AG} = 2\overline{GM} \wedge \overline{CG} = 2\overline{GN}$$

Corolario:

Dicho de otra manera; la longitud de la mediana es igual al triple del segmento de recta que une el baricentro con el punto medio del lado relativo a esta mediana.



3.5.2 Teorema del baricentro y la altura (II):

El segmento de recta perpendicular trazado desde el baricentro de un triángulo a cualquiera de sus lados, es igual en longitud a la tercera parte de la altura relativa al mismo lado (Fig. 36).

H) ΔABC Cualquiera; $\overline{AM}, \overline{BN}$ Medianas; G Baricentro;

\overline{BH} Altura; $\overline{GJ} \perp \overline{AC}$

T) $\overline{BH} = 3\overline{GJ}$

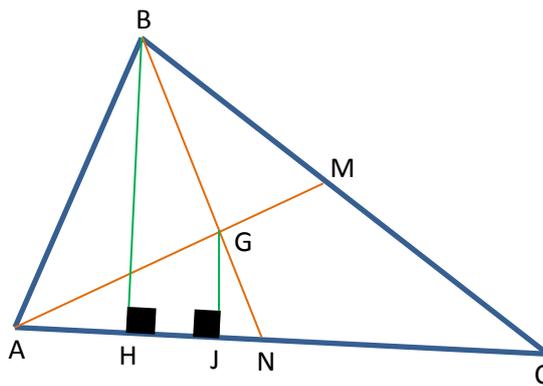


Fig. 36

Demostración:

$$\Delta BHN \sim \Delta GJN$$

(Postulado III de semejanza de Δ)

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{GJ}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{GN}} = 3$$

(Por corolario del teorema I)

$$\therefore \overline{BH} = 3\overline{GJ}$$



3.5.3 Teorema de la antiparalela (III):

- **Definición de antiparalela** (Fig. 37(a)):

ΔABC cualesquiera; Si $\sphericalangle CAJ = \sphericalangle JKB = \hat{1} \wedge \sphericalangle ACK = \sphericalangle KJB = \hat{2}; \hat{1} \neq \hat{2}$
 $\Rightarrow \overline{JK}$ Antiparalela de \overline{AC}

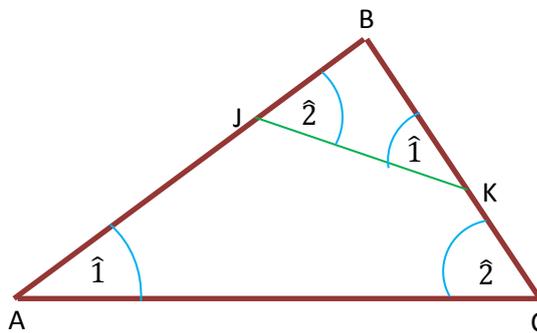


Fig. 37(a)

- **Teorema:** En todo triángulo, el segmento de recta que une las bases de dos alturas es antiparalela del lado opuesto (Fig. 37(b)).

H) ΔABC Cualesquiera; $\hat{A} \neq \hat{C}$

$\overline{AK} \wedge \overline{CJ}$ Alturas correspondientes a $\hat{A} \wedge \hat{C}$

T) \overline{JK} es antiparalela de \overline{AC}

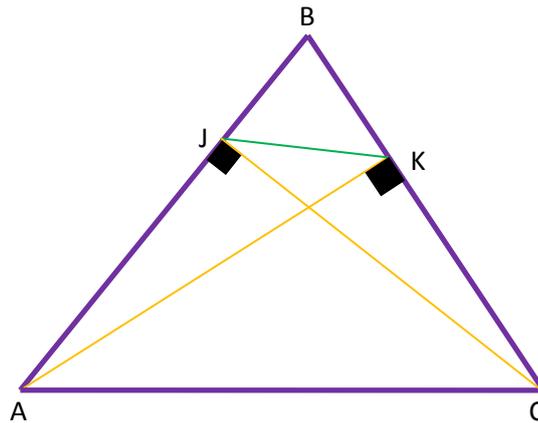


Fig. 37(b)

Demostración:

$$\triangle ABK \sim \triangle BCJ \quad (\text{Postulado I}) \quad \begin{cases} \hat{B} & \text{Ángulo común} \\ \sphericalangle AKB = \sphericalangle BJC = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CJ}} \quad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}} \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BJK \quad (\text{Postulado V}) \quad \begin{cases} (1) & \text{dos lados proporcionales} \\ \hat{B} & \text{Ángulo comprendido congruente} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{JK}} \quad \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle BKJ \wedge \sphericalangle BCA = \sphericalangle BJK$$

∴

 \overline{JK} es antiparalela de \overline{AC}


3.5.4 Teorema del Perímetro de un triángulo (IV):

Si dos triángulos son semejantes, la razón de sus perímetros están en la misma proporción que sus lados.

$$H) \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

P_1, P_2 Perímetros de $\Delta ABC \wedge \Delta A'B'C'$ respectivamente

$$T) \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Demostración:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (\Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (\text{Propiedad de las proporciones})$$

$$\therefore P_1 = a+b+c \wedge P_2 = a'+b'+c' \quad (\text{Definición})$$

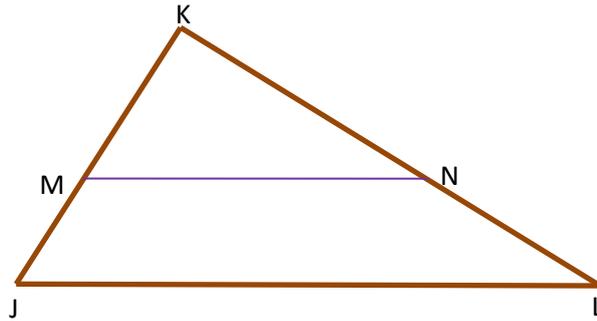
$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



3.6 Ejercicios Resueltos sobre Semejanza Triangular:

1. H) $JM = 3u; JK = 8u; KN = 15u; LN = 9u$

T) $MN \parallel JL$



Demostración:

$\triangle MKN \wedge \triangle JKL$

$$\frac{MK}{JK} = \frac{KN}{LK} \Rightarrow \frac{JK - JM}{JK} = \frac{KN}{NL + KN} \Rightarrow \frac{8u - 3u}{8u} = \frac{15u}{9u + 15u} \quad (\text{Hipótesis})$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{MK}{JK} = \frac{KN}{LK} \quad (\text{Dos lados proporcionales})$$

\hat{K} (Angulo comprendido congruente)

$\Rightarrow \triangle MKN \sim \triangle JKL$ (Postulado V)

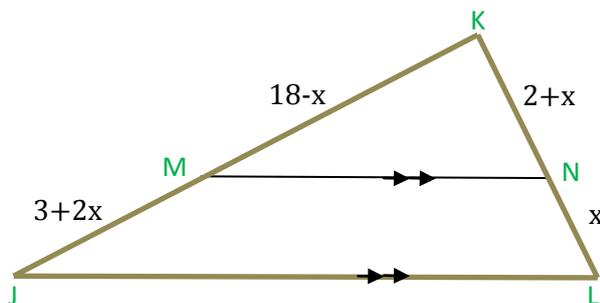
$\therefore \triangle MKN$ superpuesto $\triangle JKL$; $MK \parallel JK \wedge KN \parallel LK$ (Hipótesis)

\Rightarrow sus terceros lados también son paralelos

$\therefore MN \parallel JL$

2. T) $x = ?$

Solución: $3u$



Resolución:

$$\therefore MN \parallel JL \quad (\text{Hipótesis})$$

$$\Rightarrow \triangle JKL \sim \triangle MKN \quad (\text{Postulado II})$$

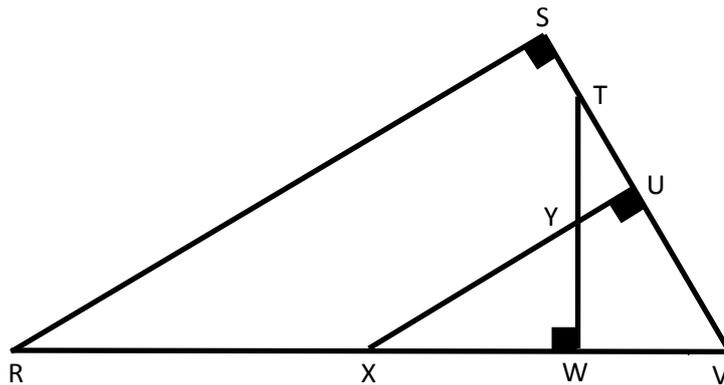
$$\therefore \frac{JK}{MK} = \frac{LK}{NK}$$

$$\frac{JK - MK}{MK} = \frac{LK - NK}{NK} \Rightarrow \frac{JM}{MK} = \frac{LN}{NK} \quad (\text{Propiedad de las Proporciones})$$

$$\Rightarrow \frac{3 + 2x}{18 - x} = \frac{x}{2 + x} \Rightarrow (3 + 2x)(2 + x) = x(18 - x) \Rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 3u$$

$$3. \quad T) \quad UV * WX = UX * WY$$

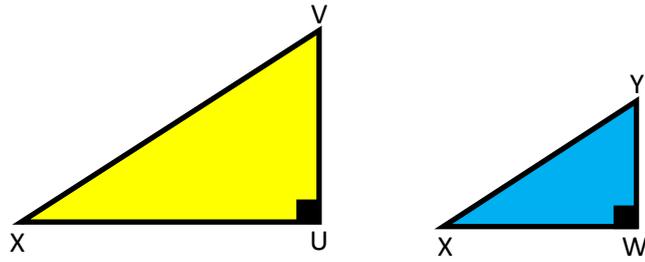
**Demostración:**

Identificamos los triángulos de los que forman parte los segmentos establecidos en los términos de la tesis: UV ; WX ; UX ; WY

$$\triangle UVX \wedge \triangle WXY$$

Sacamos aparte los triángulos en mención y con rotaciones adecuadas,

les ponemos en igual posición para poderlos comparar.



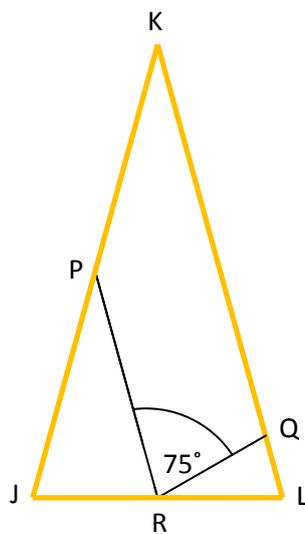
Postulado I $\begin{cases} \widehat{U} = \widehat{W} = 90^\circ \\ \widehat{X} \end{cases}$ *Angulo congruente* (Hipótesis)
Angulo común (Hipótesis)

$$\Rightarrow \Delta UVX \sim \Delta WXY \Rightarrow \frac{UV}{WY} = \frac{UX}{WX} = \frac{VX}{XY}$$

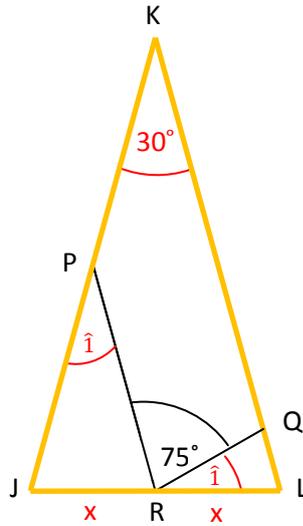
$$\therefore UV * WX = UX * WY$$

4. H) ΔJKL Isósceles; $\widehat{K} = 30^\circ$; $\widehat{J} = \widehat{L}$; $JR = RL = x$

T) $x = \sqrt{JP * QL}$



Demostración:



$$2\hat{j} + \hat{K} = 180^\circ \quad (\text{Hipótesis})$$

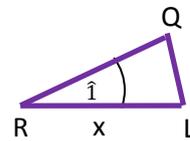
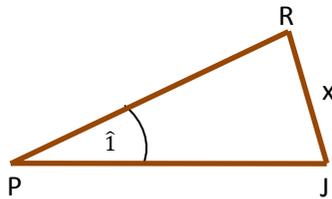
$$\hat{j} = \frac{180^\circ - \hat{K}}{2}; \hat{j} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} \Rightarrow \hat{j} = \hat{K} = 75^\circ$$

$\triangle JPR$

$$\hat{j} + \sphericalangle JPR = 75^\circ + \sphericalangle QRL \quad (\text{Ángulo externo})$$

$$\because \hat{j} = 75^\circ \Rightarrow \sphericalangle JPR = \sphericalangle QRL = \hat{i}$$

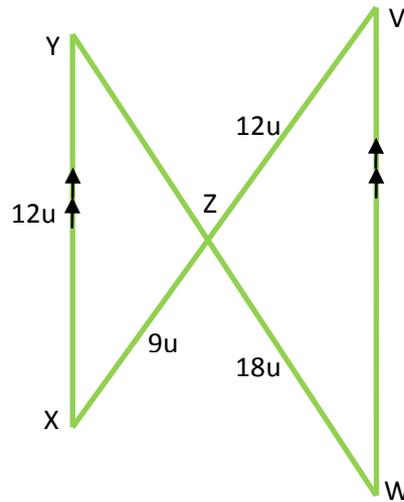
$$\Rightarrow \triangle JPR \sim \triangle LQR \quad \text{Postulado I} \quad \begin{cases} \hat{j} = \hat{L} \\ \sphericalangle JPR = \sphericalangle QRL = \hat{i} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{QL} = \frac{JP}{x} = \frac{PR}{QR}}$$

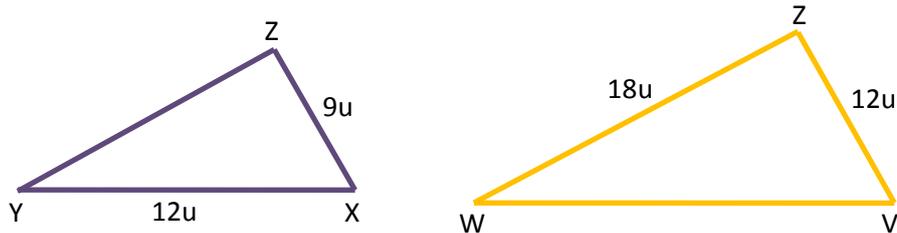
$$\therefore x = \sqrt{JP * QL}$$

5. T) $YZ = ?$ $VW = ?$



Resolución:

$$\triangle XYZ \sim \triangle VWZ \quad (\text{Postulados I, II, III})$$



$$\Rightarrow \frac{YZ}{WZ} = \frac{ZX}{ZV} = \frac{XY}{VW}; \quad \frac{YZ}{18u} = \frac{9u}{12u} = \frac{12u}{VW}$$

$$YZ = \frac{9u * 18u}{12u}; \quad VW = \frac{12u * 12u}{9u}$$

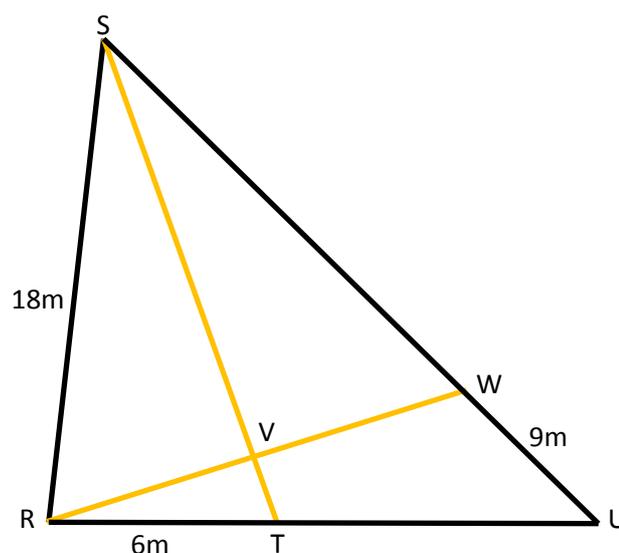
$$\therefore YZ = 13.5u; \quad VW = 16u$$

3.7 Ejercicios Propuestos:

1. Dado un triángulo equilátero XYZ, determinar la relación entre el radio del círculo inscrito y el radio del círculo circunscrito.

Solución: 2

2. Dos árboles que se encuentran en un mismo plano horizontal tienen una altura de 37m y 94m de altura respectivamente y se encuentran separados una distancia de 215m. Calcular la altura de la intersección de las rectas que unen el pie de cada árbol con la cúspide del otro. **Solución:** 26.55 m
3. A una determinada hora del día la sombra de una persona es de 60 cm. Si la sombra de un niño de 90 cm de altura a la misma hora es de 30 cm; calcular la altura de la persona.
Solución: 1.8 m
4. Dado un triángulo JKL, las medianas relativas a los vértices J y K son perpendiculares entre sí y miden respectivamente 12u y 16u. Calcular la medida de la tercera mediana. **Solución:** 20u
5. Demostrar que la diferencia de los cuadrados de los segmentos determinados por la altura correspondiente en uno de los lados de un triángulo, es igual a la diferencia de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo.
6. **H) $RV = VW$; $\triangle RSW$ isósceles T) $UT = ?$ Solución: 9m**



4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

4.1 Relaciones Métricas en los Triángulos Rectángulos

Las relaciones métricas en los triángulos rectángulos son aquellas que establecen relaciones entre sus diferentes elementos longitudinales. Así por ejemplo, el Teorema de Pitágoras efectivamente es una relación métrica, puesto que relaciona los catetos con la hipotenusa.

Existen otros teoremas sobre relaciones métricas y son tan importantes como el Teorema de Pitágoras, los mismos que a continuación se enuncian y se demuestran conjuntamente con este famoso teorema (Fig. 39).

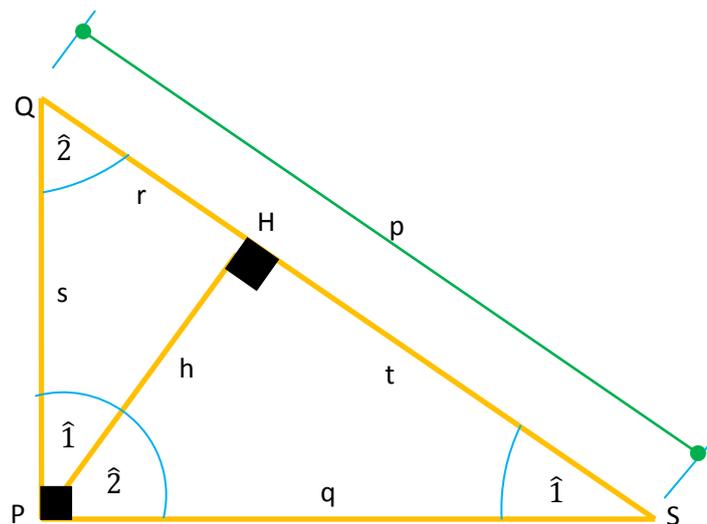


Fig.39

H) $\triangle PQS$ Rectángulo; h Altura relativa al vértice P;

"r" y "t" Proyecciones de los catetos "s" y "q" sobre la hipotenusa "p",

respectivamente; $\triangle PQS \sim \triangle HPS \sim \triangle HPQ$

4.1.1 Teorema I:

Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo, es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento que determina su proyección.

$$T_1) \quad q^2 = p * t \quad s^2 = p * r$$

Demostración:

$$\because \triangle PQS \sim \triangle HPS \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{t}{q} \quad \therefore \quad q^2 = p * t$$

$$\because \triangle PQS \sim \triangle HPS \Rightarrow \frac{s}{p} = \frac{r}{s} \quad \therefore \quad s^2 = p * r$$

4.1.2 Teorema II:

La altura correspondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo, es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.

$$T_2) \quad h^2 = r * t$$

Demostración:

$$\because \triangle HPS \sim \triangle HPQ \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{t}{h} \quad \therefore \quad h^2 = r * t$$

4.1.3 Teorema III:

El producto de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al producto entre la altura relativa al ángulo recto y la hipotenusa del mismo.

$$T_3) \quad q * s = h * p$$

Demostración:

$$\because \triangle PQS \sim \triangle HPS \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{h}{s} \quad \therefore \quad q * s = h * p$$

4.1.4 Teorema IV:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos (Teorema de Pitágoras).

$$T_4) \quad p^2 = q^2 + s^2$$

Demostración:

$$\text{Teorema I} \quad \begin{cases} q^2 = p * t & (1) \\ s^2 = p * r & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2)$$

$$q^2 + s^2 = p * t + p * r = p(t + r); \quad \because t + r = p \Rightarrow q^2 + s^2 = p^2$$

$$\therefore \boxed{p^2 = q^2 + s^2}$$



4.2 Relaciones Trigonómicas en los Triángulos Rectángulos

Las relaciones trigonométricas en los triángulos rectángulos son las diferentes razones que se pueden establecer entre sus lados, referenciados a sus ángulos.

Por semejanza de triángulos, dos o más de ellos son semejantes entre si, cuando todos los ángulos del uno son congruentes con los de los otros y los lados correspondientes proporcionales (Fig. 40).

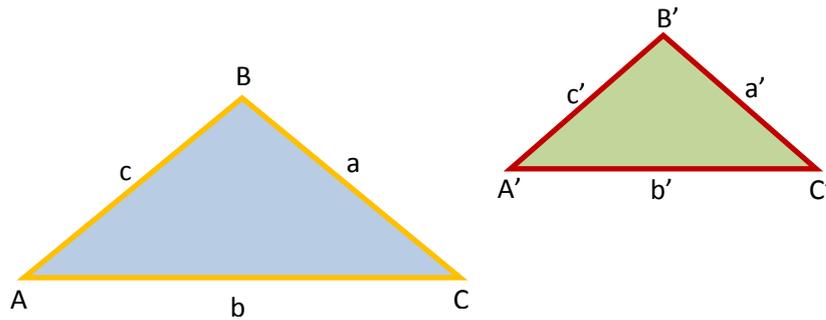


Fig. 40

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

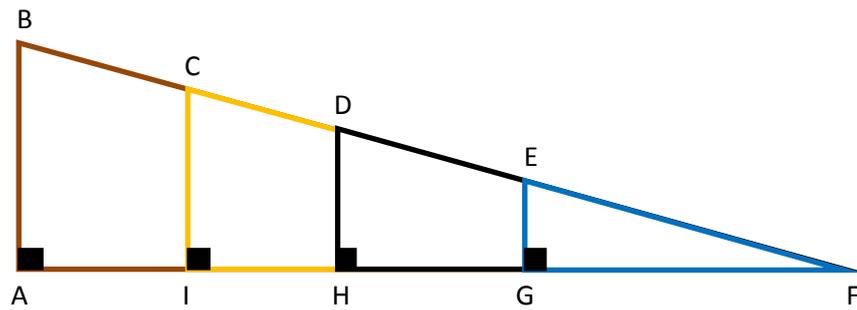
Corolario:

Si dos triángulos son semejantes, las diferentes razones que se pueden establecer entre los lados del primer triángulo, son exactamente iguales a las correspondientes del segundo triángulo.

$$\text{Si } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = k_1 ; \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = k_2 ; \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = k_3$$

Este principio justamente se utiliza para definir las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos. Así por ejemplo, si tengo dos o más triángulos rectángulos donde que las razones entre los lados de uno de ellos es igual a las razones de los otros, eso significa entonces que dichos triángulos son semejantes entre sí; es decir, los ángulos de uno de ellos son congruentes con los ángulos correspondientes de los otros triángulos (Fig. 41).

**Fig. 41**

En el gráfico anterior se tiene una serie de cuatro triángulos semejantes; por lo tanto las razones entre los lados de uno de los triángulos, siempre serán iguales a las razones entre los lados de los otros triángulos.

Seno, coseno y tangente son los nombres que se les dan a esas diferentes razones y el ángulo que se le asocia a cada uno de dichos nombres es solamente una referencia para saber cuál es el cateto opuesto y cuál es el adyacente. De hecho, para cada valor del ángulo entre 0° y 90° , siempre existirá un solo valor para la razón establecida. No importa qué tan grande o tan pequeño sea el triángulo; siempre para un cierto valor de ángulo habrá un único valor de la razón.

$$\sin \angle EFG = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{EG}{EF} = \frac{DH}{DF} = \frac{CI}{CF} = \frac{BA}{BF} = \dots$$

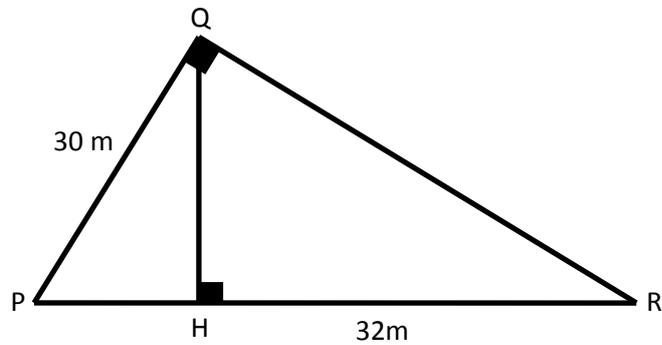
$$\cos \angle EFG = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{GF}{EF} = \frac{HF}{DF} = \frac{IF}{CF} = \frac{AF}{BF} = \dots$$

$$\tan \angle EFG = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{EG}{GF} = \frac{DH}{HF} = \frac{CI}{IF} = \frac{BA}{AF} = \dots$$

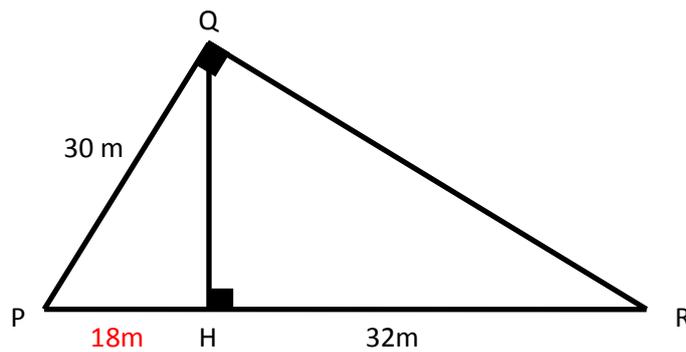


4.3 Ejercicios Resueltos sobre Relaciones Métricas y Trigonómicas en Triángulos Rectángulos:

1. T) $QR = ?$



Resolución:



ΔPQR

$$(1) \quad PQ^2 = PH * PR \quad (\text{Teorema I})$$

$$(2) \quad PR = PH + HR \quad (\text{Suma de segmentos})$$

(2) en (1)

$$PQ^2 = PH(PH + HR); 30^2 = PH^2 + 32PH$$

$$PH^2 + 32PH - 900 = 0 \Rightarrow PH = 18m$$

$PH \wedge HR$ en (2)

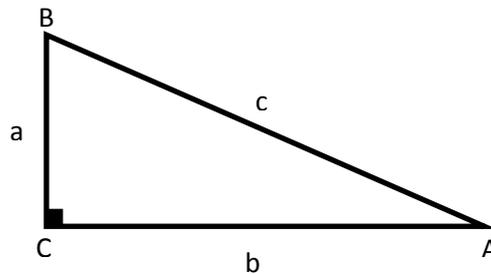
$$PR = 18 + 32 \Rightarrow PR = 50m$$

$$QR^2 = PR^2 - PQ^2 = 50^2 - 30^2 \Rightarrow QR^2 = 1600 \quad (\text{Teorema IV})$$

$$\therefore QR = 40m$$

2. Resolver el triángulo rectángulo ABC donde que el ángulo C es el ángulo recto, el ángulo A tiene 25° y el semiperímetro del triángulo es 151m.

Resolución:



$$(1) \quad \text{Semiperímetro} = p = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{Definición})$$

$$a = c * \sin A; \quad b = c * \cos A \quad (\text{Razones Trigonométricas})$$

$a \wedge b$ en (1)

$$p = \frac{c * \sin A + c * \cos A + c}{2}; \quad c = \frac{2p}{(\sin A + \cos A + 1)}$$

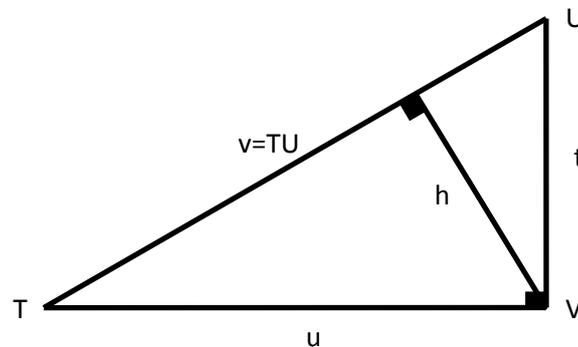
$$c = \frac{2 * 151}{(\sin 25^\circ + \cos 25^\circ + 1)} \Rightarrow c = 129.67m$$

$$a = 129.67 * \sin 25^\circ \quad \therefore a = 54.80m$$

$$b = 129.67 * \cos 25^\circ \quad \therefore b = 117.52m$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}; \hat{B} = 90^\circ - 25^\circ \quad \therefore \hat{B} = 65^\circ$$

$$3. \quad T) \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}$$



Resolución:

$$(1) \quad u * t = v * h \quad \Rightarrow \quad u^2 * t^2 = v^2 * h^2 \quad (\text{Teorema III})$$

$$(2) \quad v^2 = u^2 + t^2 \quad (\text{Teorema IV})$$

v^2 de (2) en (1)

$$(3) \quad u^2 * t^2 = (u^2 + t^2) * h^2$$

$$(3) \div u^2 * t^2 * h^2$$

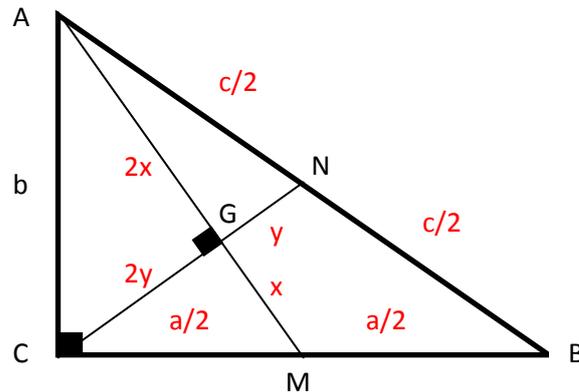
$$\frac{u^2 * t^2}{u^2 * t^2 * h^2} = \frac{(u^2 + t^2)h^2}{u^2 * t^2 * h^2}$$

$$\frac{u^2 * t^2}{u^2 * t^2 * h^2} = \frac{u^2 * h^2}{u^2 * t^2 * h^2} + \frac{t^2 * h^2}{u^2 * t^2 * h^2}$$

$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}$$

4. Si las medianas correspondientes al ángulo recto y a uno de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan a 90° ; calcular la relación que debe existir entre los catetos para que esto suceda.

Resolución:



H) $\triangle ABC$ Rectángulo; CN Mediana de \hat{C} ; AM Mediana de \hat{A} ;
 a, b Catetos; c Hipotenusa

T) $\frac{a}{b} = ?$

$AG = 2x \wedge GM = x$; $CG = 2y \wedge GN = y$ (Propiedad de las Medianas)

$\triangle ACG$ Rectángulo

$$(1) \quad b^2 = (2x)^2 + (2y)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{b^2 - 4y^2}{4} \quad (\text{Teorema IV})$$

$\triangle CGM$ Rectángulo

$$(2) \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2y)^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = 16y^2 + 4x^2 \quad (\text{Teorema IV})$$

$\triangle ABC$ Rectángulo

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{Teorema IV})$$

$$3y = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 6y \quad (\text{Propiedad de la mediana de } \hat{C})$$

$$c \text{ en (3)} \quad 36y^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2 + b^2}{36}$$

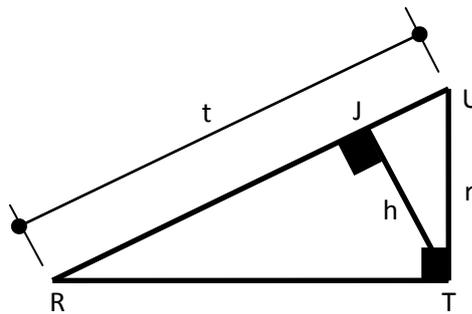
x^2 de (1) \wedge y^2 de (3) en (2)

$$a^2 = 16 \left(\frac{a^2 + b^2}{36} \right) + 4 \left(\frac{b^2 - 4 \left(\frac{a^2 + b^2}{36} \right)}{4} \right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

5. H) $r = 9$ millas; $RJ = 13.5$ millas

T) $h = ?$



Resolución:

$$\triangle RTU \quad (1) \quad r^2 = UJ * t \Rightarrow 81 = UJ * t \quad (\text{Teorema I})$$

$$t = UJ + RJ \Rightarrow t = UJ + 13.5 \quad (\text{Gráfico, Hipótesis})$$

$$t \text{ en (1)} \quad 81 = UJ(UJ + 13.5); \quad (UJ)^2 + 13.5(UJ) - 81 = 0$$

$$\Rightarrow UJ = 4.5 \text{ millas}$$

$$\triangle J TU \quad h^2 = r^2 - (UJ)^2 \Rightarrow h = \sqrt{9^2 - 4.5^2} \quad (\text{Teorema IV})$$

$$\therefore h = 7.79 \text{ millas}$$

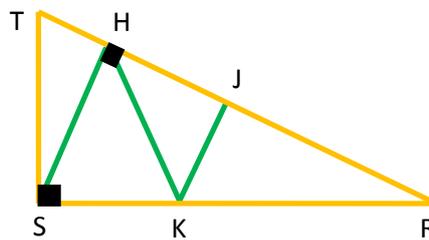
4.4 Ejercicios Propuestos:

1. Suponiendo un piso totalmente horizontal, si un vehículo recorre en línea recta 5km hacia el Este, luego 10 km hacia el Norte y finalmente 15km

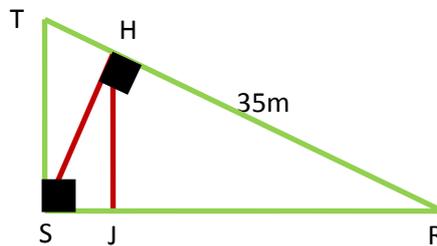
otra vez hacia el Este. Calcular a qué distancia se encuentra éste del punto de partida. **Solución:** $10\sqrt{5} \text{ km}$

2. Si la altura relativa al ángulo recto de un triángulo rectángulo, divide a la hipotenusa en dos partes de tal manera que una de ellas es la tercera parte de la otra. Calcular los ángulos de dicho triángulo. **Solución:** $60^\circ; 30^\circ$

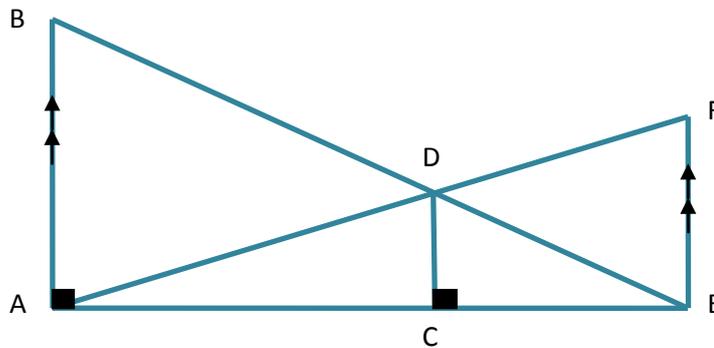
3. H) $RH = 17\text{pies}; HT = 29\text{pies}; JK \parallel HS$ T) $ST = ?$ $JK = ?$



4. H) $HJ \parallel ST; TH = 6\text{m}$ T) $HJ = ?$ $JS = ?$



5. H) $AB = 5.1\text{cm}; EF = 3.3\text{cm}$ T) $DC = ?$



5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESCALENOS

5.1 Relaciones Métricas en los triángulos escalenos

5.1.1 Teorema de las Bisectrices (I):

La bisectriz de un ángulo interno o externo de un triángulo, dividen al lado opuesto o a su proyección respectivamente, en partes proporcionales a los otros dos lados de dicho triángulo (Fig. 42).

H) $\triangle ABC$ escaleno; BD bisectriz interna; BE bisectriz externa

$$T_1) \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \quad T_2) \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE}$$

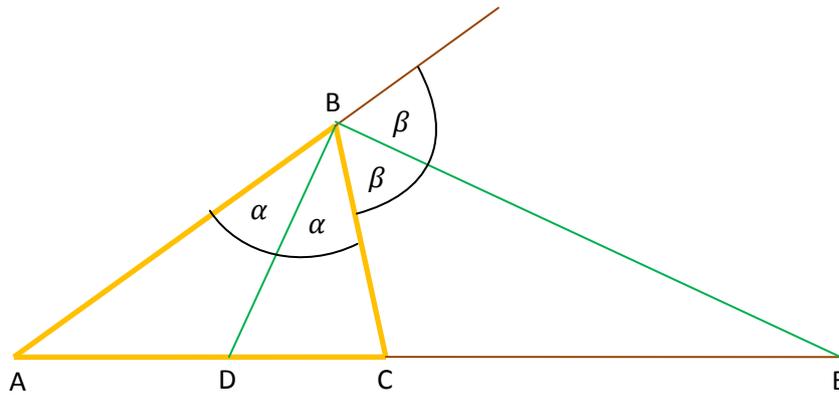
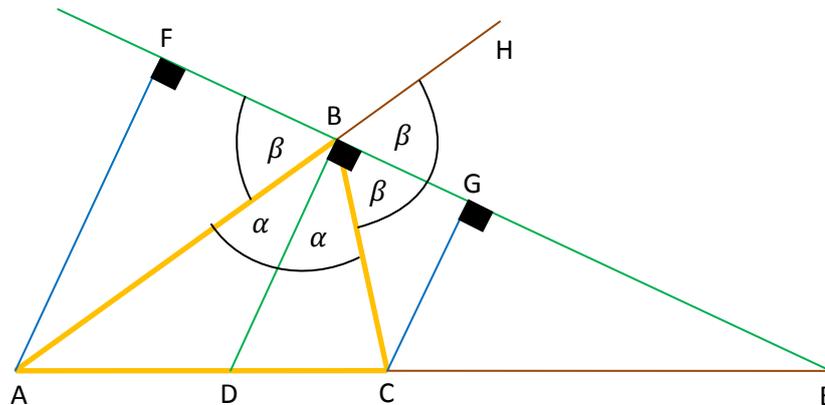


Fig.42

Demostración:



$CG \wedge AF$ proyecciones de $C \wedge A$

sobre bisectriz BE o su prolongación (Construcción)

$\triangle AFE \sim \triangle DBE \sim \triangle CGE$ (Triángulos rectángulos, \hat{E} común)

$$\Rightarrow \frac{BF}{BG} = \frac{AD}{DC} \quad (1)$$

$\widehat{ABC} = 2\alpha \wedge \widehat{CBH} = 2\beta$ (Ángulos suplementarios por construcción)

$\alpha + \beta = 90^\circ$ (Teorema de las bisectrices de 2 ángulos suplementarios)

$\widehat{ABF} = \widehat{HBG} = \widehat{CBG} = \beta$ (Hipótesis)

$\triangle ABF \sim \triangle BCG$ (Triángulos rectángulos, ángulo igual β)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BF}{BG} = \frac{AF}{CG} \quad (2)$$

$$\frac{BF}{BG} \text{ de (1) en (2)} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

\therefore

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$$

$$\triangle AFE \sim \triangle CGE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AF}{CG} = \frac{FE}{GE} \quad (3)$$

$$\frac{AF}{CG} \text{ de (2) en (3)} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$$

\therefore

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE}$$



5.1.2 Teorema de Stewart (II):

En un triángulo cualesquiera ABC como se indica en la Fig. 43, la longitud del segmento de recta BD elevada al cuadrado y multiplicada por la longitud del lado "b", es igual a la suma de los productos de los segmentos determinados "m" y "n" por los cuadrados de los lados no adyacentes "a" y "c" respectivamente, menos el producto de dichos segmentos determinados, por la longitud del lado "b" el cual los contiene.

H) ΔABC cualesquiera; a, b, c lados del triángulo;

BD segmento divisor en cualquier punto "D" del lado "b"

del triángulo; m, n segmentos determinados por el

segmento BD en el lado "b"

$$T) \quad BD^2 * b = m * a^2 + n * c^2 - m * n * b$$

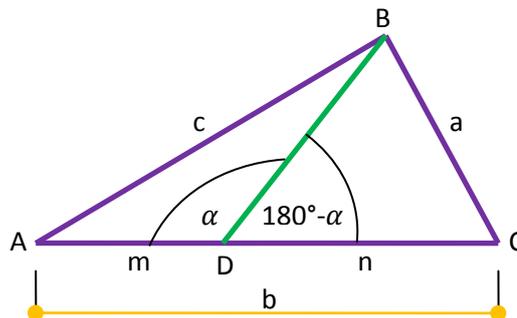


Fig. 43

Demostración:

ΔABD

$$c^2 = m^2 + BD^2 - 2m * BD * \cos\alpha \quad (\text{Ley de cosenos})$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad -\cos\alpha = \frac{c^2 - m^2 - BD^2}{2m * BD}$$

ΔBCD

$$a^2 = n^2 + BD^2 - 2n * BD * \cos(180^\circ - \alpha) \quad (\text{Ley de cosenos})$$

$$\Rightarrow (2) \quad \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{a^2 - n^2 - BD^2}{-2n * BD}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad (\text{Trigonometría})$$

$$(1) = (2) \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2 - m^2 - BD^2}{2m * BD} = \frac{a^2 - n^2 - BD^2}{-2n * BD}$$

$$\Rightarrow -2n * c^2 + 2nm^2 + 2nBD^2 = 2m * a^2 - 2m * n^2 - 2m * BD^2$$

$$-n * c^2 + nm(m + n) + BD^2(m + n) - m * a^2 = 0; \quad m + n = b$$

$$\therefore \quad \boxed{BD^2 * b = m * a^2 + n * c^2 + m * n * b}$$



5.1.3 Teorema de Menelao (III):

En un triángulo cualesquiera ABC como se indica en la Fig. 44, si una transversal “DF” determina sobre los lados de dicho triángulo o sus extensiones seis segmentos, el producto de la longitud de tres de ellos no consecutivos, es igual al producto de los otros tres.

H) ΔABC cualesquiera; DF transversal a los lados del triángulo

T) $AD * BE * CF = DB * EC * AF$

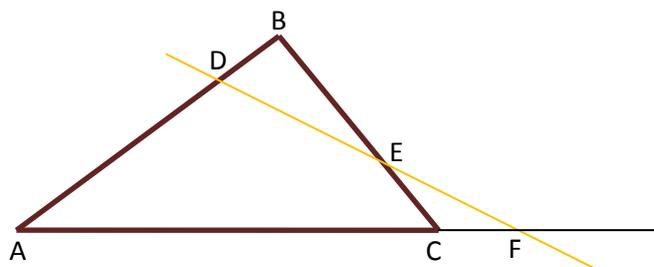
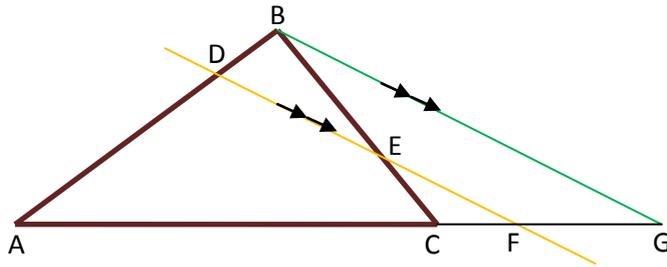


Fig. 44

Demostración:



$BG \parallel DF$ (Construcción)

$$\triangle ABG \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FG} \quad (\text{Postulado II de Semejanza } \Delta' r)$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad FG = \frac{AF * DB}{AD}$$

$$\triangle BCG \sim \triangle ECF \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{FG}{CF} \quad (\text{Postulado II de Semejanza } \Delta' r)$$

$$\Rightarrow \quad (2) \quad FG = \frac{BE * CF}{EC}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow FG = \frac{AF * DB}{AD} = \frac{BE * CF}{EC}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AD * BE * CF = DB * EC * AF}$$



5.1.4 Teorema de Ceva (IV):

Si desde los vértices de un triángulo ABC cualesquiera (Fig. 45), se trazan segmentos de recta a los lados opuestos correspondientes y que se crucen en un mismo punto, se determinan 6 segmentos en los lados del triángulo, tal que el

producto entre 3 segmentos de ellos no consecutivos así determinados, es igual al producto de los otros 3.

H) ΔABC cualesquiera; Q punto de intersección de los

segmentos AF, BD, CE

T) $AE * BF * CD = EB * FC * DA$

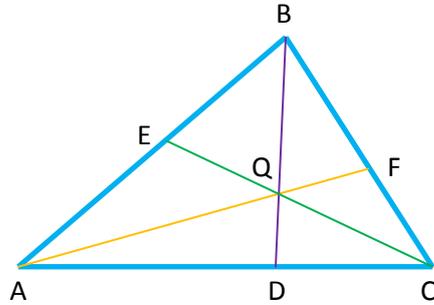


Fig. 45

Demostración:

ΔABD , EC transversal

$$(1) \quad AE * BQ * DC = EB * QD * AC \quad (\text{Teorema III})$$

ΔBCD , AF transversal

$$(2) \quad CF * BQ * DA = BF * QD * AC \quad (\text{Teorema III})$$

$$(1) \div (2)$$

$$\frac{AE * BQ * CD}{FC * BQ * DA} = \frac{EB * QD * AC}{BF * QD * AC}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AE * BF * CD = EB * FC * DA}$$



5.2 Relaciones Trigonómicas en los Triángulos Escalenos

5.2.1 Ley de Senos:

En todo triángulo, las funciones “seno” de los ángulos internos son proporcionales a sus lados opuestos (Fig. 46).

H) ΔABC cualesquiera

$$T) \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

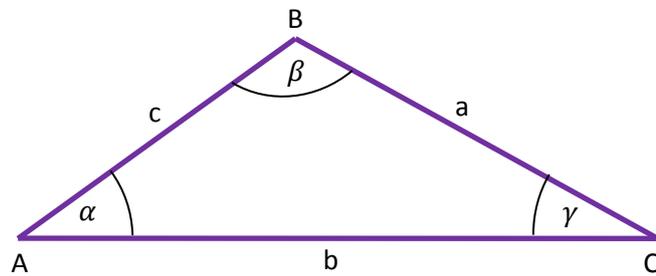
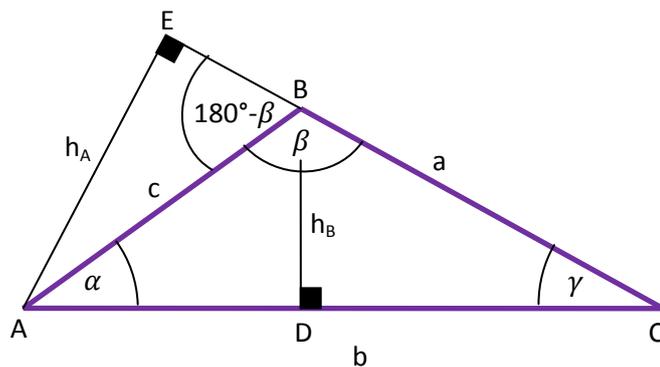


Fig. 46

Demostración:



$$BD = h_B \quad \text{altura relativa al vértice B} \quad (\text{Construcción})$$

$$AE = h_A \quad \text{altura relativa al vértice A} \quad (\text{Construcción})$$

ΔABD

$$\sin \alpha = \frac{h_B}{c} \Rightarrow \quad (1) \quad h_B = c * \sin \alpha$$

ΔABE

$$\sin(180^\circ - \beta) = \frac{h_A}{c} \Rightarrow h_A = c * \sin(180^\circ - B)$$

$$\therefore \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

(Trigonometría)

$$\Rightarrow \quad (2) \quad h_A = c * \sin B$$

 ΔACE

$$\sin \gamma = \frac{h_A}{b} \Rightarrow \quad (3) \quad h_A = b * \sin \gamma$$

 ΔBCD

$$\sin \gamma = \frac{h_B}{a} \Rightarrow \quad (4) \quad h_B = a * \sin \gamma$$

$$(1) = (4) \Rightarrow c * \sin \alpha = a * \sin \gamma \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$(2) = (3) \Rightarrow c * \sin B = b * \sin \gamma \Rightarrow \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



5.2.2 Ley de Cosenos:

En todo triángulo (Fig. 47), el cuadrado de la longitud de cualquiera de sus lados, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que determinan estos.

H) ΔABC cualesquiera

$$T) \quad c^2 = a^2 + b^2 - a * b * \cos \gamma$$

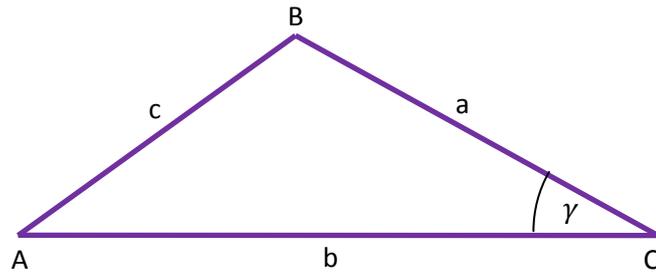
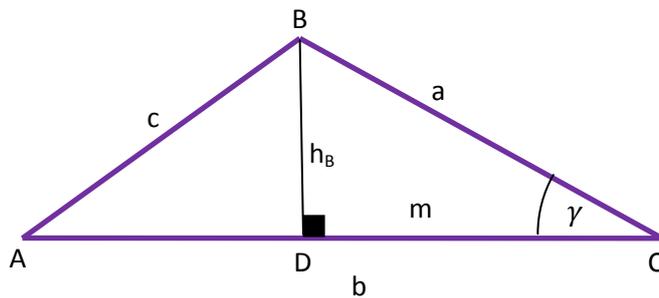


Fig. 47

Demostración:



$$BD = h_B \quad \text{altura relativa al vértice B} \quad (\text{Construcción})$$

$$DC = m \quad \text{proyección de "a" sobre "b"} \quad (\text{Construcción})$$

$\triangle ABD$

$$(1) \quad h_B^2 = c^2 - (b - m)^2 \quad (\text{Teorema de pitágoras})$$

$\triangle BCD$

$$(2) \quad h_B^2 = a^2 - m^2 \quad (\text{Teorema de pitágoras})$$

$$(1) = (2) \Rightarrow c^2 - (b - m)^2 = a^2 - m^2 \Rightarrow (3) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$

$$\cos \gamma = \frac{m}{a} \Rightarrow (4) \quad m = a * \cos \gamma$$

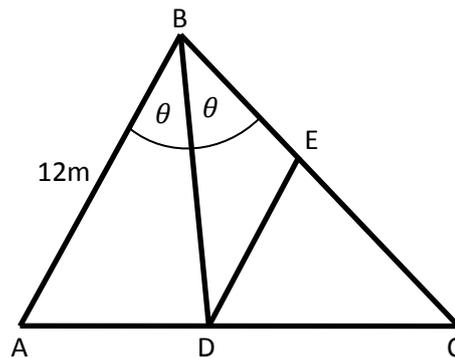
$$(4) \text{ en } (3) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2b(a * \cos \gamma)$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - a * b * \cos \gamma$$



5.3 Ejercicios Resueltos sobre Relaciones Métricas y Trigonométricas en Triángulos Escalenos:

1. H) $DE \parallel AB$; $BC = 16m$ T) $EC = ?$

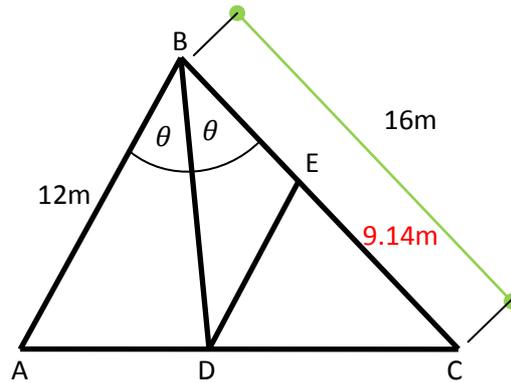


Resolución:

ΔABC

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} \quad (\text{Teorema de las bisectrices (I)})$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{12m} = \frac{CD}{16m} \Rightarrow (1) \quad AD = \frac{3}{4} CD$$



$$\triangle ABC \sim \triangle DEC$$

(Postulado II de Semejanza de triángulos)

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow (2) CE = 16 * \frac{CD}{AC}$$

$$(3) AC = AD + CD$$

(Hipótesis)

(1) en (3)

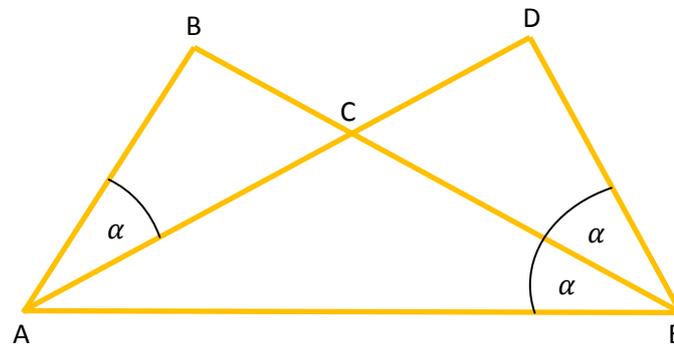
$$(4) AC = \frac{3}{4}CD + CD$$

(4) en (2)

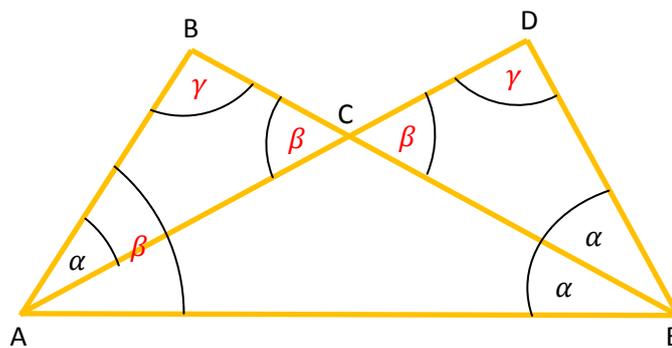
$$CE = 16 * \frac{CD}{\frac{3}{4}CD + CD} \Rightarrow CE = 16 * \frac{1}{\frac{3}{4} + 1} m$$

$$\therefore CE = 9.14m$$

$$2. \quad T) \quad AB = \frac{AD \cdot BE}{DE + AE}$$



Resolución:



$$\triangle ABC \sim \triangle CDE$$

(Postulado II de Semejanza de triángulos)

$$\widehat{BAC} = \widehat{CED} = \alpha; \widehat{ACB} = \widehat{DCE} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$$

$$\triangle ADE$$

(Teorema de las bisectrices (I))

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CD}$$

$$\Rightarrow (2) \quad CE = 16 \cdot \frac{CD}{AC}$$

$$(3) \quad AC = AD + CD$$

(Hipótesis)

(1) en (3)

$$(4) AC = \frac{3}{4}CD + CD$$

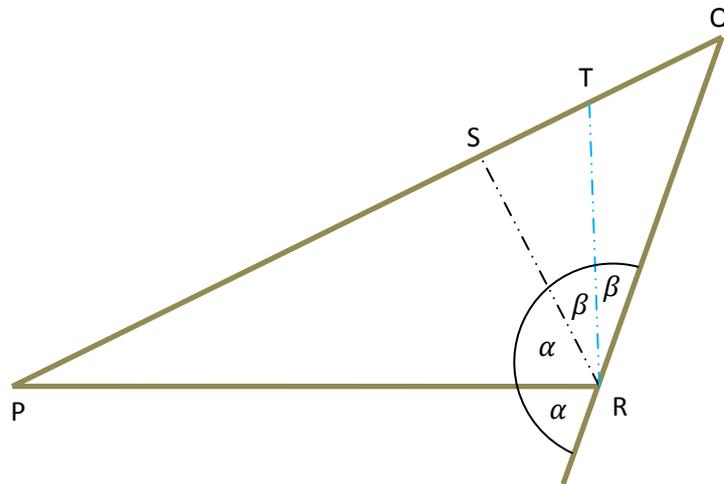
(4) en (2)

$$CE = 16 * \frac{CD}{\frac{3}{4}CD + CD} \Rightarrow CE = 16 * \frac{1}{\frac{3}{4} + 1} m$$

$$\therefore CE = 9.14m$$

3. H) $QT = 10.9u$; $ST = 9.10u$ $PR = 106.08u$

T) $PS = ?$ $RT = ?$



Resolución: **ΔQRS**

$$\frac{QT}{ST} = \frac{QP}{PS} \quad (\text{Teorema de las Bisectrices (I)})$$

$$\Rightarrow \frac{10.9}{9.1} = \frac{20 + PS}{PS} \Rightarrow PS = 100.56u$$

 ΔPRT

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \quad (\text{Angulo llano})$$

$\Rightarrow \Delta PRT$ es triángulo rectángulo; $R = 90^\circ$

$$RT^2 + PR^2 = PT^2; \quad PT = PS + ST \Rightarrow PT = 100.56 + 9.1 = 109.66$$

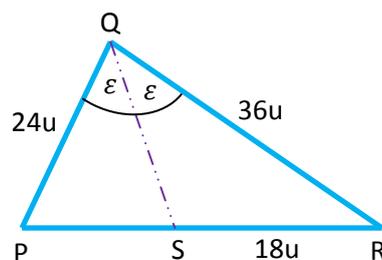
$$RT^2 = PT^2 - PR^2 \Rightarrow RT = 27.79u$$

$$\therefore PS = 100.56u; \quad RT = 27.79u$$

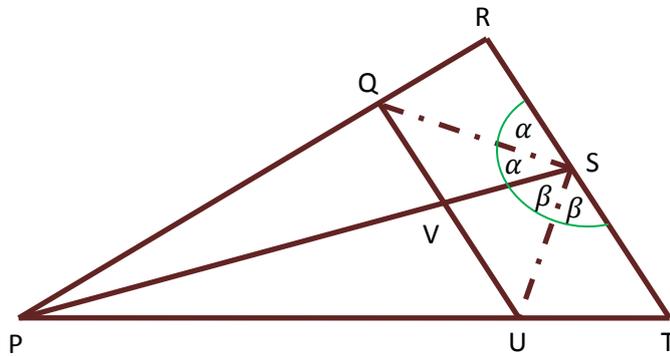
5.4 Ejercicios Propuestos:

1. T) QS?

Solución: 25.47u

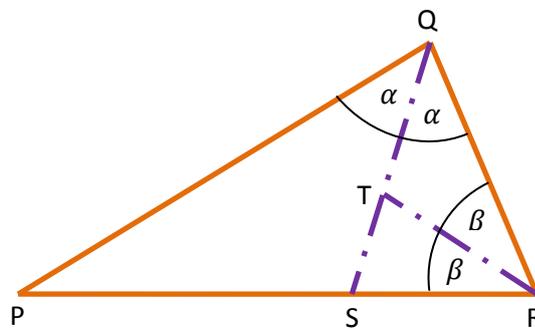


2. H) ΔPRT Escaleno; $RS = ST$ T) $QU \parallel RT$



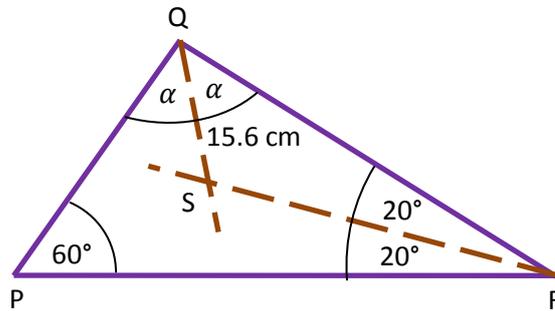
3. H) ΔPQR Escaleno; T Incentro ΔPQR

$$T) \frac{ST}{QT} = \frac{PR}{PQ + QR}$$



4. T) $QR = ?$

Solución: 39.52 cm



5. H) $PQ = 36u$; $PR = 48u$; PU mediana del ΔPQR ; $PT = TU$

T) $QT = ?$

Solución: 29.55u

