



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM Y SUS
APLICACIONES PARA LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE
MATEMÁTICA DE LA ESPOCH

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA: LICETH PAMELA GUASHPA HUARACA
DIRECTORA: Dra. MAYRA ELIZABETH CÁCERES MENA, Mgtr.

Riobamba – Ecuador

2024

©2024, Liceth Pamela Guashpa Huaraca

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Liceth Pamela Guashpa Huaraca, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 28 de mayo de 2024



Liceth Pamela Guashpa Huaraca

060544950-3

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM Y SUS APLICACIONES PARA LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH**, realizado por: **LICETH PAMELA GUASHPA HUARACA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ing. María José Mendoza Salazar Mgs. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2024-05-28
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena Mgtr. DIRECTORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-28
Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-28

DEDICATORIA

A mis padres, Eduardo Guashpa y Enriqueta Huaraca, que con su amor incondicional y sabios consejos me han guiado en cada paso de mi vida. A ustedes, que me enseñaron el valor del esfuerzo y la perseverancia, dedico este logro con todo mi corazón. A mis hermanos Kevin y Edison, por su apoyo incondicional, por sus palabras de aliento en los momentos difíciles y por estar siempre presentes con su amor y comprensión.

A mi pareja Anderson Dillón, por su amor incondicional, paciencia infinita y constante apoyo. Gracias por creer en mí, por estar a mi lado en cada paso de este camino, compartiendo mis sueños y ayudándome a convertirlos en realidad.

A mi tutora de tesis, Mayra Cáceres, gracias por su guía, paciencia y dedicación a lo largo de este proceso. Su conocimiento y sabiduría han sido invaluable para el desarrollo de este trabajo. Aprecio profundamente su disposición para escuchar mis ideas, brindar retroalimentación constructiva y ofrecer su apoyo incondicional.

A mis amigos, por todo su apoyo, por los momentos de risas y por estar siempre ahí, en las buenas y en las malas. Su amistad ha sido un pilar fundamental en este viaje.

A todos ustedes, dedico esta tesis con profundo agradecimiento y amor.

Liceth

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido de manera significativa a la realización de esta tesis. En primer lugar, agradezco a mis padres y hermanos, cuyo amor incondicional y apoyo constante han sido fundamentales en mi vida. Gracias por creer en mí, por su paciencia y por enseñarme el valor del esfuerzo y la dedicación.

A mi pareja, por su amor, paciencia y comprensión. Gracias por estar a mi lado en cada momento, por tus palabras de aliento y por compartir este viaje conmigo. A mi tutora de tesis, Mayra Cáceres, por su guía, paciencia y dedicación a lo largo de este proceso. Su conocimiento y sabiduría han sido esenciales para el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos, por su compañía y por hacer de este camino una experiencia memorable. Gracias por los momentos de risas, por las palabras de ánimo y por estar siempre presentes. Finalmente, agradezco a todas las personas que, de una u otra manera, han contribuido a que este sueño se haga realidad. Su apoyo y aliento han sido cruciales para alcanzar este logro.

Liceth

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ANEXOS	ix
RESUMEN	x
ABSTRACT	xi
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. <i>Objetivo General</i>	3
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	4

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Referencias teóricas	6

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO	7
3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, técnicas e instrumentos de investigación empleadas	7

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	9
4.1.	Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados	9
4.2.	Discusión	10

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	12
5.1.	Conclusiones	12
5.2.	Recomendaciones	13

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE ANEXOS

**ANEXO A: MONOGRAFÍA DE ESTUDIOS “ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM
Y SUS APLICACIONES”**

RESUMEN

El propósito de este proyecto de investigación fue elaborar un documento referencial que sirva como guía para comprender los fundamentos teóricos de las ecuaciones integrales de Fredholm, con el fin de abordar y ampliar los temas presentados en las asignaturas de Análisis Funcional en la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Para el desarrollo del estudio se consideró una investigación de tipo documental con un enfoque cualitativo y nivel descriptivo, la recolección y análisis de la información se estructuró de manera lógica, mediante un proceso de búsqueda documental, identificación, recolección y selección de textos y artículos disponibles en fuentes confiables referente al tema propuesto. El resultado que se obtuvo fue una monografía de estudios bajo el título: "Ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones", la misma que está estructurada en cuatro capítulos, en donde se describe de forma clara y comprensible definiciones, conceptos como operador acotado, núcleo simétrico, operador integral, función propia, entre otros; además se presentan métodos de resolución de ecuaciones integrales de Fredholm lineales y no lineales, así como su aplicación en el problema de Sturm - Liouville, cuerda tensa con carga continua, entre otras. Al finalizar esta investigación se concluye que la monografía ayudará a nuevos y actuales estudiantes de la carrera de Matemática, a comprender y ampliar sus conocimientos sobre ecuaciones integrales, de igual forma les permitirá interpretar situaciones que involucren este tipo de ecuaciones, así como también su resolución. Finalmente, se recomienda como una ampliación de esta investigación, realizar un estudio detallado sobre las ecuaciones integrales de Volterra.

Palabras clave: <ECUACIONES INTEGRALES>, <MÉTODOS DE RESOLUCIÓN>, <OPERADOR ACOTADO>, <NÚCLEO SIMÉTRICO>, <OPERADOR INTEGRAL>, <STURM-LIOUVILLE>.

0652-DBRA-UPT-2024



ABSTRACT

The aim of this research project was to create a referential document to be used as a guide for the understanding of theoretical foundations in Fredholm integral equations, to discuss and extend the topics studied in the Functional Analysis courses in the Mathematics Major at Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. For the development of the study, a documentary-type research with a qualitative approach and descriptive level was considered, the gathering and analysis of information was structured in a sequential way, by means of a documentary search process, identification, collection and selection of texts and articles available in reliable sources related to the proposed topic. The result obtained was a monograph entitled: "Fredholm integral equations and their applications", which is structured in four chapters where definitions and concepts such as bounded operator, symmetric kernel, integral operator, eigenfunction, among others, are described in a clear and understandable way. In addition, methods for solving linear and nonlinear Fredholm integral equations are also presented, as well as their application in the Sturm-Liouville problem, taut string with stable loads, among others. It is concluded that the monograph will help new and current students of Mathematics to understand and broaden their knowledge about integral equations to interpret situations involving this type of equations, as well as their resolution. Finally, it is recommended to broaden this research, in order to carry out a detailed study on Volterra's integral equations.

Keywords: <INTEGRAL EQUATIONS>, <RESOLUTION METHODS>, <BOUNDED OPERATOR>, <SYMMETRIC KERNEL>, < INTEGRAL OPERATOR >, <STURM-LIOUVILLE>.



Lic. Paul Rolando Armas Pesantez Mgs.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones integrales son de gran interés científico, se encuentran entre las ramas más importantes de la matemática, se sabe que afectan diversos campos de la matemática aplicada y la física. De hecho, la mayoría de los modelos construidos a partir de problemas de ingeniería física y biología se tratan mejor cuando están presentes en forma de ecuaciones integrales (Bounefla, 2020 pág. 1). Históricamente, la primera ecuación integral a resolver es

$$\int_0^z \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^x} = F(x), 0 < x < 1, \quad (0.1)$$

encontrado por Abel en un problema elemental de mecánica.

Mucho más tarde, el matemático ruso N. Sonine estudió una ecuación de la misma forma que la ecuación de Abel pero un poco más general. Sonine había agotado, por así decirlo, el alcance del artificio de cálculo utilizado por Abel y la cuestión parecía cerrada, cuando en 1896, M. Vito Volterra en una serie de notas presentadas a las Academias de Ciencias de Turín y Roma, abordada con total éxito y por un método directo el estudio general de la ecuación integral

$$\int_0^z k(x,s)\varphi(s)ds = F(x), \quad (0.2)$$

Los hermosos resultados que obtiene, fueron seguidos inmediatamente por Ivar Fredholm en 1900 en la ecuación integral.

$$\varphi(x) + \int_0^1 k(x,s)\varphi(s)ds = F(x), \quad (0.3)$$

cuya importancia para el análisis fue particularmente destacada por el propio I. Fredholm, D. Hillbert y E. Picard.

En un artículo de 1903 Fredholm mostró un gran interés en las ecuaciones de tipo (0.3). El propósito de él, era dar una generalización de los resultados de esta teoría para sistemas lineales finitos de ecuaciones. En ese artículo Fredholm considera dos distintos casos: El primero y más simple es cuando (0.3) siempre tiene única solución, la segunda es cuando (0.3) solo tiene una solución si $F(x)$ satisface ciertas condiciones respecto al kernel $k(x,s)$. En ese caso la solución no es única, a pesar de que el conjunto de soluciones puede ser caracterizado. Los dos casos toman todas las posibilidades respecto a las soluciones y por eso se conocen colectivamente como la alternativa de Fredholm.

Según (Caballero, 2019), las ecuaciones integrales de Fredholm son una herramienta matemática fundamental para modelar diversos fenómenos complejos en una gran variedad de campos. El análisis y aplicación de este tipo de ecuaciones, han demostrado ser de gran importancia y trascendencia en la resolución de problemas tanto teóricos como prácticos, lo que respalda su investigación continua y detallada en el ámbito académico y científico (pág. 5).

En la actualidad, se sabe que el tema de las ecuaciones integrales de Fredholm no se encuentra en la malla curricular de la carrera de Matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, lo cual dificulta el aprendizaje y comprensión de los estudiantes interesados en esta área. Por este motivo, se ha optado por realizar una investigación bibliográfica con el propósito de profundizar el estudio de las ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones. Se examinarán diversas fuentes bibliográficas tales como, artículos, libros y tesis, con el fin de seleccionar únicamente la información esencial para facilitar la comprensión y aplicación del tema.

Este trabajo de integración curricular deja como resultado una monografía estructurada en cuatro capítulos, dirigida para los estudiantes que deseen ampliar sus conocimientos en Análisis Funcional y teoría de operadores. Esta monografía tiene como objetivo primordial proporcionar una herramienta valiosa y útil para los estudiantes de la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), en la que cada capítulo se describe de manera detallada y entendible las definiciones, teoremas, métodos de resolución y aplicaciones, además cada definición se ilustra con ejemplos para facilitar su comprensión.

A través de este documento referencial, se buscó investigar la teoría matemática que respalda este tipo de ecuaciones integrales, examinando tanto sus aplicaciones prácticas como los métodos disponibles para su resolución. Además, se abordaron temas relacionados con la existencia y unicidad de soluciones.

Por último, este trabajo de investigación se estructuró en 5 capítulos de la siguiente forma: en el primer capítulo se presenta el problema de investigación, estableciendo el planteamiento del problema, objetivos tanto general como específicos y su justificación. En el segundo capítulo se abordan las bases teóricas del tema, respaldados por fuentes certificadas como artículos, libros y tesis.

El tercer capítulo detalla el marco metodológico, incluyendo enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos utilizados. El cuarto capítulo contiene el marco de análisis e interpretación de resultados, en el cual se presenta la estructura de la monografía y se realiza una discusión de cada sección y finalmente, el quinto capítulo expone las conclusiones y recomendaciones derivadas de la investigación realizada.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

La inclusión de las ecuaciones integrales de Fredholm en la formación de los estudiantes de Matemática es importante debido a su amplia gama de aplicaciones en diversos campos científicos y su contribución a la investigación matemática y científica. Estas ecuaciones proporcionan herramientas poderosas para modelar y resolver problemas que involucran fenómenos físicos y procesos dinámicos.

Actualmente, sabemos que el tema de las ecuaciones integrales de Fredholm no se encuentra en la malla curricular de la carrera de Matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. El objetivo del presente trabajo de investigación fue generar un documento referencial acerca de las ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones, para los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH.

Al proporcionar una monografía estructurada y completa, se espera que este documento se convierta en una herramienta de apoyo invaluable para los estudiantes de la ESPOCH, brindándoles la oportunidad de adquirir conocimientos sólidos sobre las ecuaciones integrales. Esto no solo mejorará su formación académica, sino que también los preparará para enfrentar desafíos científicos y tecnológicos en el futuro.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo General*

Elaborar un documento referencial completo y accesible sobre las ecuaciones integrales de Fredholm, mediante la investigación y documentación, para contribuir con la comprensión y aplicación de este tema en los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Investigar y recopilar información actualizada sobre el tópico, incluyendo definiciones, teoremas y métodos de resolución.
- Organizar la información recopilada de manera lógica y estructurada, siguiendo un enfoque

pedagógico para facilitar la comprensión de los estudiantes.

- Incluir aplicaciones de las ecuaciones integrales de Fredholm en diferentes campos de la ciencia, para mostrar su relevancia en la resolución de problemas reales.
- Redactar una monografía siguiendo una estructura general (portada, introducción, desarrollo, conclusión y bibliografía), que sirva como fuente de estudio para los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH, utilizando un enfoque cualitativo (Organización del Bachillerato Internacional, 2018).
- Proporcionar referencias bibliográficas y recursos adicionales para que los estudiantes puedan profundizar en el tema.

1.3. Justificación

Las ecuaciones integrales de Fredholm tienen una estrecha relación con la teoría de operadores, una parte fundamental del análisis funcional. Explorar la conexión entre estos dos campos no solo ampliará la comprensión de las ecuaciones integrales, sino que también ofrecerá nuevas perspectivas sobre la teoría general de operadores y su aplicación en problemas matemáticos y físicos.

La ausencia de una monografía específica sobre las ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo representa una limitación para los estudiantes interesados en este ámbito. A través de esta investigación bibliográfica, se pretendió desarrollar una monografía escrita de forma clara y comprensible, que permita a los estudiantes de la carrera de matemáticas de la ESPOCH comprender de manera clara y completa las definiciones, teoremas, métodos de resolución y las aplicaciones de las ecuaciones integrales de Fredholm.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

Según (Quispe, 2017), el término de Ecuación Integral fue utilizado por primera vez por Bois-Reymond en 1888. En general, una ecuación integral es aquella en donde la incógnita es una función que se encuentra en la parte integral de dicha ecuación (pág 12). Algunos ejemplos típicos son:

$$\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \quad (2.1)$$

y

$$\phi(x) + \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy = f(x). \quad (2.2)$$

En estas ecuaciones la función f y K son conocidas y ϕ es la incógnita. La función K se le denomina el núcleo; a las ecuaciones (2.1) y (2.2) se les denomina ecuación integral de Fredholm de primera y segunda especie, respectivamente. De acuerdo con (Goyal, 2017), el término ecuaciones de Fredholm se atribuye al matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), en reconocimiento a su estudio sistemático de este tipo de ecuaciones. Estas ecuaciones integrales encuentran aplicación en problemas relacionados con la electrostática y la teoría del potencial (pág 14).

La contribución de Fredholm a la teoría de la ecuación (2.2) se amplió para abarcar situaciones que involucran sistemas de ecuaciones integrales, así como casos en los que el núcleo se considera como un operador integral. La resolución de un sistema se simplifica a la de una única ecuación, caracterizada por la presencia de discontinuidades en su núcleo (Molano, 2017 pág. 15).

Hilbert (1904) demostró que los teoremas de Fredholm pueden probarse mediante una aplicación rigurosa del proceso de transición límite y construyó una teoría general de ecuaciones lineales sobre la base de la teoría de las formas lineales y bilineales en un número infinito de variables. Además, demostró que toda función de la forma

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy \quad (f \text{ continua}), \quad (2.3)$$

tiene un desarrollo en serie de autofunciones $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (h, \psi_n) \psi_n(x)$ absoluta y uniformemente convergente, lo que permitió abordar la resolución de la ecuación integral de parámetro λ .

En la investigación realizada por (Bounefla, 2020) nos menciona algunos de los métodos de resolución para ecuaciones integrales de Fredholm lineales y no lineales, entre los cuales se

encuentran el método de Adomian, el método modificado, método de calculo directo, método de regularizacion y método de aproximaciones sucesivas (págs 9-25). Además cabe señalar que estos métodos fueron presentados de manera detallada en el documento referencial, en el cual se incluyendo ejemplos para su mejor comprensión.

2.1. Referencias teóricas

En el marco de este trabajo de investigación, se propuso realizar una exploración, selección, análisis y redacción de material bibliográfico relevante sobre el tema de ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones. El objetivo final es crear un documento guía de estudio. Es importante destacar la relevancia de la bibliografía que se ha empleado en el desarrollo de este proyecto de investigación documental. Por tal motivo, se han tenido en cuenta las siguientes referencias bibliográficas:

- *Integral Equations* (Goyal y Sharma, 2017).
- *Integral equations: theory and numerical treatment* (Hackbusch, 1995).
- *Integral equations and their applications* (Rahman, 2001).
- *A first course in integral equations* (Wazwaz, 2015).

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Este trabajo de investigación se diseñó utilizando un enfoque cualitativo, ya que se centró en la comprensión e interpretación de bases teóricas, mediante la lectura y el análisis de textos relacionados con las ecuaciones integrales de Fredholm. El propósito fue redactar cada capítulo de manera ordenada, con el fin de facilitar la comprensión para los estudiantes de la carrera de Matemática en la ESPOCH.

La presente investigación tiene un nivel de investigación descriptivo ya que el objetivo fue crear una monografía, en la cual se describe y analiza la teoría existente sobre las ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones, a través de la revisión y recopilación de documentos.

El trabajo de investigación presentado es de tipo documental, ya que el objetivo fue buscar y recopilar información en diferentes fuentes bibliográficas certificadas como libros, artículos y tesis. Como resultado, se redactó una monografía que incluye definiciones, teoremas, ejemplos y aplicaciones más relevantes para su comprensión y desarrollo.

Para lograr los objetivos planteados, se propusieron actividades como:

- **Búsqueda y recopilación de información:** Se realizó una investigación exhaustiva en fuentes bibliográficas, revistas científicas y recursos en línea para obtener información actualizada sobre las ecuaciones integrales de Fredholm,
- **Organización y estructuración de la información:** Se clasificó y organizó la información recopilada en secciones y subsecciones lógicas, siguiendo un enfoque pedagógico que facilite la comprensión de los estudiantes.
- **Estudio y descripción de las ecuaciones integrales de Fredholm:** Se desarrolló las definiciones, propiedades, teoremas importantes y métodos de resolución de las ecuaciones integrales de Fredholm.
- **Desarrollo de las aplicaciones:** Se realizó aplicaciones de las ecuaciones integrales de Fredholm en diferentes campos de la ciencia.

- Referencias bibliográficas: Se proporcionó referencias bibliográficas para que los estudiantes puedan ampliar sus conocimientos sobre el tema.

Finalmente, para la realización del trabajo de investigación se utilizaron varios instrumentos. Primero, se utilizó un computador ya que nos permitió realizar diversas actividades como: navegar por sitios web, realizar documentos, recopilar datos, revisión de la literatura, entre otras. Segundo, se hizo uso del Internet el cual fue importante para acceder a diferentes fuentes de infracción actualizada y de relevancia. También, se utilizó motores de búsqueda para obtener la información necesaria para la investigación en menor tiempo. Finalmente, para redactar y darle forma al documento se hizo uso del *software* de escritura L^AT_EX.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados

Esta investigación documental, con un enfoque cualitativo y nivel descriptivo, ha dado lugar a la creación de una monografía de estudio titulado "Ecuaciones integrales de Fredholm y sus aplicaciones". La intención de este documento referencial es servir como recurso para los estudiantes de la carrera de Matemáticas en la ESPOCH, específicamente par aquellos que quieran ampliar sus conocimientos en Análisis Funcional. Su objetivo principal es dar a conocer la clasificación, métodos de resolución y aplicaciones prácticas de las ecuaciones integrales de Fredholm, con el propósito de contribuir a la formación académica de los estudiantes. La monografía busca difundir la importancia y utilidad de estos conceptos matemáticos en situaciones de la vida real.

Estructura de la monografía

La monografía que se deja como resultado consta de cuatro capítulos, cada uno de las cuales abarca definiciones, teoremas, ejemplos e ilustraciones diseñados con la intención de facilitar la comprensión de cada tema.

1. **Capítulo 1:** Preliminares

1.1 Operadores acotados

1.2 El espacio dual

1.3 Operadores compactos

1.4 Teoría de Riesz para operadores compactos

2. **Capítulo 2:** Ecuaciones integrales de Fredholm

2.1 Clasificación de las ecuaciones integrales de Fredholm

2.2 Problemas que llevan a ecuaciones integrales

2.2.1 El problema de la tautócrona y la ecuación de Abel

2.2.2 Equilibrio de una cuerda cargada

- 2.2.3 Oscilaciones libres y forzadas de una cuerda
- 2.3 Raíces características y funciones propias
- 2.4 Operador integral de Fredholm
- 2.5 La alternativa de Fredholm
 - 2.5.1 Caso de las ecuaciones integrales
 - 2.5.2 Teoremas de Fredholm para el caso de núcleo degenerados
 - 2.5.3 Teoremas de Fredholm para ecuaciones integrales de núcleo no degenerado
- 3. **Capítulo 3:** Métodos de resolución de las ecuaciones integrales de Fredholm
 - 3.1 Ecuaciones de Fredholm lineales
 - 3.1.1 Método de descomposición de Adomian
 - 3.1.2 Método de descomposición modificado
 - 3.1.3 Método de cálculo directo
 - 3.1.4 Método de aproximaciones sucesivas
 - 3.1.5 Método de regularización
 - 3.2 Ecuaciones de Fredholm no lineales
 - 3.2.1 Método de cálculo directo
 - 3.2.2 Método de descomposición de Adomian
 - 3.2.3 El método de iteración variacional
 - 3.2.4 Método de regularización
- 4. **Capítulo 4:** Aplicaciones de las ecuaciones integrales de Fredholm
 - 4.1 Problema de Sturm - Liouville
 - 4.2 Cuerda tensa con carga continua
 - 4.2.1 Cuerda giratoria
 - 4.3 Cuerda vibrante

4.2. Discusión

Con respecto al análisis bibliográfico, se analizó la literatura existente acerca de las ecuaciones integrales de Fredholm. Mediante la revisión de diversos libros, tesis y artículos, se pudo crear una monografía de estudios para los estudiantes de la carrera de Matemática de la Escuela Superior

Politécnica de Chimborazo. Los resultados obtenidos mostraron que las ecuaciones integrales tienen un papel importante en diversas áreas de la matemática aplicada, la física y la ingeniería, por lo cual la elaboración del documento referencial permitirá a futuros estudiantes interesados en el tema, ampliar sus conocimientos y prepararse para desafíos científicos y tecnológicos en el futuro.

Por tal motivo, en el primer capítulo, Preliminares, se presentó definiciones, teoremas, proposiciones, notas y ejercicios previos para entrar al estudio de ecuaciones integrales de Fredholm. Además, se presentaron dos teoremas importantes de la teoría de Riesz, esenciales para el análisis teórico, la resolución de ecuaciones y la formulación de condiciones que garanticen la existencia y unicidad de soluciones.

En el segundo capítulo, titulado ecuaciones integrales de Fredholm se detalló los tipos de ecuaciones integrales, además se presentó definiciones importantes como núcleo simétrico, no simétrico, degenerado, operador integral de Fredholm, funciones propias. Finalmente, concluye con el estudio y demostración de los teoremas de la Alternativa de Fredholm, lo cual es importante para el estudio y solución de este tipo de ecuaciones.

Luego, en el tercer capítulo se mostró algunos de los métodos de resolución para ecuaciones integrales de Fredholm tanto lineales como no lineales, el método más eficaz es el de cálculo directo ya que aborda el problema directamente y proporciona todas las soluciones posibles de las ecuaciones integrales si la ecuación tiene más de una solución.

Finalmente, en el último capítulo se expuso algunas aplicaciones de este tipo de ecuaciones, una aplicación importante se da en el problema de Sturm-Liouville, lo que se hace en este problema es pasar de una ecuación diferencial con valores de frontera a una ecuación integral de Fredholm lineal de segunda especie para de esa manera facilitar su cálculo.

En conclusión, a través de la investigación realizada y los resultados obtenidos se buscó facilitar el estudio y la comprensión de las ecuaciones integrales de Fredholm. ya que cada capítulo se desarrolló de forma lógica y estructurada, presentando definiciones con ejemplos ilustrativos.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Una vez terminado el proyecto de investigación, podemos concluir que: La investigación realizada permitió recopilar una amplia gama de información actualizada sobre las ecuaciones integrales de Fredholm, que abarca desde definiciones fundamentales hasta desarrollos teóricos y métodos de resolución, esta información constituye una base sólida para el entendimiento y la aplicación de este tema.

La estructuración del contenido se realizó cuidadosamente, siguiendo un enfoque pedagógico que facilita la comprensión progresiva de los conceptos, de igual forma se estableció conexiones claras entre los diferentes temas tratados, lo que contribuye a una comprensión integral del tópico por parte de los estudiantes.

Se destacó diversas aplicaciones de las ecuaciones integrales de Fredholm en diferentes áreas de la ciencia, demostrando su relevancia y utilidad en la resolución de problemas reales. Estos ejemplos prácticos ayudarán a los estudiantes a comprender la importancia y versatilidad de este tema en diversos contextos.

Como resultado del trabajo de integración curricular se redactó una monografía estructurada en cuatro capítulos, donde cada sección fue escrita de forma clara y organizada. Además se empleó un enfoque cualitativo que permitió una exploración detallada y comprensiva del tema, convirtiendo el documento en una valiosa fuente de estudio para los estudiantes de Matemática en la ESPOCH.

Finalmente, se proporcionó referencias bibliográficas completas y relevantes que permiten a los estudiantes ampliar su conocimiento sobre las ecuaciones integrales de Fredholm, estas fuentes adicionales ofrecen la oportunidad de investigar aspectos específicos del tema con mayor detalle y profundidad.

5.2. Recomendaciones

En primer lugar, se recomienda realizar un estudio detallado de manera análoga al presente trabajo, pero con las ecuaciones integrales de Volterra, esto con el propósito de cristalizar el conocimiento sobre ecuaciones integrales y sus aplicaciones, lo que permitirá tener un estudio completo.

En segundo lugar, se recomienda explorar aplicaciones concretas en áreas como la Biología y Economía, para demostrar la relevancia y utilidad práctica de las ecuaciones integrales de Fredholm en la resolución de problemas reales. Al analizar casos específicos en estas áreas, se podrá ilustrar cómo las ecuaciones integrales se aplican para modelar y resolver problemas prácticos, contribuyendo así a una comprensión más profunda.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. BOUNEFLA, Eddine.** Equations intégrales de Fredholm et alternatives de Fredholm. [En línea]. (Trabajo de titulación) (Pregrado). Universidad 8 de mayo 1945 Guelma. 2020, 1-25. Disponible en: https://dspace.univ-guelma.dz/jspui/bitstream/123456789/10140/1/BOUNEFLA_CHEMS%20EDDINE_Math%20a9matiques._Equations%20aux%20d%20a9riv%20a9es%20partielles%20et%20analyse%20num%20a9rique.pdf.
- 2. CABALLERO, Inmaculada.** Una introducción a las ecuaciones integrales lineales [En línea]. 2019, (España), 5-9. [Consulta: 14 septiembre 2023]. Disponible en: <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/90001/Caballero%20Carrero%20M%20aa%20Inmaculada%20TFG.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- 3. GOYAL, M.** *Integral Equations*. [En línea]. New Jersey-USA: Prentice Hall, 2017 [Consulta: 28 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.phindia.com/PHIAdmin/samplechapter/Sharma%20and%20Goyal__Integral%20Equations%20Sharma__Sample%20Chapters.pdf.
- 4. HACKBUSCH, Wolfgang.** *Integral equations: theory and numerical treatment*. [En línea]. Alemania: B.G. Teubner Verlag, 1995 [Consulta: 19 diciembre 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books/about/Integral_Equations.html?id=1Ir1BwAAQBAJ&redir_esc=y.
- 5. MOLANO, Santiago.** La Alternativa de Fredholm. [En línea]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017, 34-43. [Consulta: 4 octubre 2023]. Disponible en: <https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT7/7CyT%2014.pdf>.
- 6. ORGANIZACIÓN BACHILLERATO INTERNACIONAL, (OBI).** *Monografía Guía* [En línea]. Ginebra-Suiza, 2018. [Consulta: 14 octubre 2023]. Disponible en: <https://www.dsc.cl/wp-content/uploads/2018/10/Gu%C3%ADa-Monograf%C3%ADa-2018.pdf>.
- 7. QUISPE, Danitza.** Ecuaciones Integrales de Fredholm y Volterra asociada a Ecuaciones Diferenciales [En línea]. Universidad Mayor de San Andrés, 2021, 3-6. [Consulta: 28 septiembre 2023]. Disponible en: <https://repositorio.umsa.bo/bitstream/handle/123456789/26661/PG-157.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- 8. RAHMAN, M.** *Integral equations and their applications*. [En línea]. Canadá: WIT Press, 2007. Disponible en: <https://simkosal04.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/11/integral-equation-and-their-application.pdf>.

9. WAZWAZ, Abdul. *Integral equations and their applications*. [En línea]. USA: Saint Xavier University, 2015 [Consulta: 10 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Ahmad_Alrub/post/Dear_friends_may_somebody_help_me_to_solve_these_integral_equations/attachment/59d6439279197b807799f01e/AS:444239592071172@1482926380769/download/A+First+Course+in+Integral+Equations_nodrm.pdf.

ANEXOS

ANEXO A: MONOGRAFÍA DE ESTUDIOS “ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM Y SUS APLICACIONES”.