



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**CARRERA MATEMÁTICA**

**APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CRESSMAN Y FAST BARNES  
EN LA INTERPOLACIÓN DE VARIABLES METEOROLÓGICAS:  
RECURSOS CLAVE PARA ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN  
LA ESPOCH**

**Trabajo de Integración Curricular**

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

**MATEMÁTICA**

**AUTORA:** ANABEL ESTEFANÍA SAMANIEGO RODRÍGUEZ

**DIRECTOR:** ING. ALEX EDUARDO POZO VALDIVIEZO, M.Sc.

Riobamba – Ecuador

2024

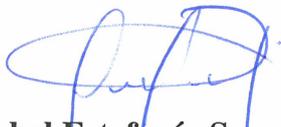
**©2024, Anabel Estefanía Samaniego Rodríguez**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Anabel Estefanía Samaniego Rodríguez, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 28 de mayo de 2024

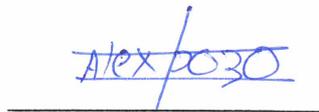


**Anabel Estefanía Samaniego Rodríguez**

**C.I. 2100659560**

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**CARRERA MATEMÁTICA**

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CRESSMAN Y FAST BARNES EN LA INTERPOLACIÓN DE VARIABLES METEOROLÓGICAS: RECURSOS CLAVE PARA ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN LA ESPOCH**, realizado por la señorita: **ANABEL ESTEFANÍA SAMANIEGO RODRÍGUEZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	<b>FIRMA</b>	<b>FECHA</b>
Ing. María de Lourdes Palacios Robalino, Mgrt. <b>PRESIDENTE DEL TRIBUNAL</b>		2024-28-05
Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, MSc. <b>DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR</b>		2024-28-05
Ing. Cristina Estefanía Ramos Araujo, MSc. <b>ASESORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR</b>		2024-28-05

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mis padres, quienes han sido mi mayor fuente de inspiración y apoyo incondicional a lo largo de este arduo camino académico. Su amor, paciencia y sacrificio han sido los pilares sobre los cuales he construido mis sueños y logros. A mi familia, amigos y seres queridos, les agradezco por su constante aliento y comprensión durante este viaje. Este logro es también de ustedes. Finalmente, dedico este trabajo a todos aquellos que creen en mí y me han brindado su apoyo en los momentos más difíciles. Este logro es para ustedes, con cariño y gratitud infinita.

*Anabel*

## **AGRADECIMIENTO**

A mi querida madre, Gloria, cuya dedicación y amor han sido la base de mi vida y éxito académico. Gracias por ser mi guía, mi refugio y mi inspiración en cada paso del camino. A mi querido padre, Hernán, por su constante deseo de verme prosperar y su incansable lucha para hacerlo posible. Agradezco cada palmada en la espalda y cada palabra de aliento que han sido mi brújula tanto en mi carrera como en mi vida.

También quiero expresar mi profundo agradecimiento a mis hermanos, cuyo apoyo incondicional ha sido un faro de luz en los momentos más desafiantes. Espero que mi trayectoria les sirva de inspiración y ejemplo de que todo es posible con determinación y esfuerzo.

De manera especial, mi gratitud hacia mi Director de Tesis, Eduardo Pozo, cuya experiencia y conocimientos han sido fundamentales para orientar el desarrollo y culminación exitosa de este trabajo.

A mis amigos Alex, Jeremy, Walter, Vanessa, Lesley, les agradezco su apoyo inquebrantable, confianza y cariño. Cada uno de ustedes ha contribuido a mi fortaleza y ánimo de una manera única. Gracias por ser mi punto de apoyo, mi equipo de aliento y, lo más importante, la familia que yo elegí.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento por haber sido parte de este viaje. Sin su presencia y respaldo, este logro no habría sido posible.

*Anabel*

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
INTRODUCCIÓN . . . . .	1
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. <i>Objetivo General</i> . . . . .	3
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i> . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	4
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>2. MARCO TEORICO . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1. Interpolación . . . . .	5
2.1.1. <i>Interpolación polinomial</i> . . . . .	6
2.1.2. <i>Splines cúbicos</i> . . . . .	9
2.1.3. <i>Interpolación bicúbica</i> . . . . .	14
2.1.4. <i>Derivadas direccionales y cruzadas</i> . . . . .	19
2.1.5. <i>Splines Bicúbicos</i> . . . . .	23
2.2. Repaso de Teoría de Probabilidades . . . . .	25
2.3. Convolución . . . . .	32
2.3.1. <i>Autoconvolución</i> . . . . .	33
2.4. Correcciones Sucesivas . . . . .	35
2.4.1. <i>Formulación del método</i> . . . . .	35
2.5. Método de Cressman . . . . .	37
2.6. Método de Fast Barnes . . . . .	41
2.6.1. <i>Deducción del peso de Fast Barnes</i> . . . . .	42
2.6.2. <i>Interpolación de Barnes como serie de convoluciones</i> . . . . .	46
2.6.3. <i>Generalización de la aproximación de Fast Barnes</i> . . . . .	48

2.7.	<b>Análisis del Error y la Convergencia de las Correcciones Sucesivas . . . . .</b>	49
2.7.1.	<i>Definición del Error . . . . .</i>	49
2.7.2.	<i>Criterio de Convergencia . . . . .</i>	49
2.7.3.	<i>Análisis del Error en los Métodos de Cressman y Fast Barnes . . . . .</i>	50
2.7.4.	<i>Convergencia de las Correcciones Sucesivas . . . . .</i>	50
2.8.	<b>Ejemplo de aplicación . . . . .</b>	50

### **CAPÍTULO III**

3.	<b>MARCO METODOLÓGICO . . . . .</b>	54
3.1.	<b>Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas . . . . .</b>	54

### **CAPÍTULO IV**

4.	<b>MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS . . . . .</b>	56
4.1.	<b>Recopilación de datos de temperatura . . . . .</b>	56
4.2.	<b>Simulación de los métodos de Cressman, Barnes y Fast Barnes . . . . .</b>	58
4.3.	<b>Análisis de Validación Cruzada para Métodos de Interpolación . . . . .</b>	63

### **CAPÍTULO V**

5.	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .</b>	66
5.1.	<b>CONCLUSIONES . . . . .</b>	66
5.2.	<b>RECOMENDACIONES . . . . .</b>	68
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	72

## RESUMEN

La interpolación de variables meteorológicas, como la temperatura y la precipitación, es crucial para comprender y predecir el clima en áreas con datos faltantes. En Chimborazo, la pérdida de datos en los registros de estaciones meteorológicas afecta negativamente las proyecciones futuras de estas variables. El objetivo de esta investigación es comparar y analizar dos métodos de interpolación ampliamente utilizados en meteorología: el método de Cressman y el método Fast Barnes, para determinar cuál es más adecuado para rellenar los datos faltantes de temperatura en Chimborazo. La investigación adopta un enfoque cualitativo con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental, centrándose en la revisión bibliográfica de los métodos mencionados y su implementación en Python. Se evalúan la precisión y la influencia del relieve en las predicciones, utilizando datos recopilados de estaciones meteorológicas en diferentes altitudes y topografías dentro de la provincia de Chimborazo. Los resultados muestran que, aunque los métodos de Barnes y Fast Barnes generan superficies más suaves y visualmente continuas, el método de Cressman ofrece mayor precisión en la captura de variaciones locales, reflejada en un menor error RMS. Esta investigación concluye que el método de Cressman es el más preciso para capturar variaciones locales de temperatura, mientras que los métodos de Barnes y Fast Barnes son preferibles para superficies más suaves. La elección del método de interpolación debe basarse en las características del conjunto de datos y los objetivos del análisis. Este estudio proporciona una base sólida para la aplicación efectiva de técnicas de interpolación en estudios meteorológicos y climáticos en regiones como Chimborazo.

**Palabras clave:** <INTERPOLACIÓN>, <METEOROLOGÍA>, <FAST BARNES>, <CRESSMAN>, <BARNES>.



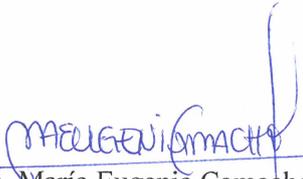
0954-DBRA-UPT-2024



## ABSTRACT

The interpolation of meteorological variables, such as temperature and precipitation is crucial for understanding and predicting climate in areas with missing data. In Chimborazo, the loss of data in meteorological station records negatively impacts future projections of these variables. This research is intended to compare and analyze two interpolation methods widely used in the field of meteorology: the Cressman method and the Fast Barnes method to determine which is more suitable for filling in missing temperature data in Chimborazo. The study adopts a qualitative approach with a descriptive scope and a documentary research design, focusing on the bibliographic review of the methods mentioned above and their implementation in Python. The accuracy and influence of the terrain on the predictions are evaluated using data collected from meteorological stations at different altitudes and topographies within the province of Chimborazo. The results show that although the Barnes and Fast Barnes methods generate smoother and visually continuous surfaces, the Cressman method offers greater accuracy in capturing local variations, reflected in a lower RMS error. This research concludes that the Cressman method is the most accurate for capturing local temperature variations, while the Barnes and Fast Barnes methods are preferable for smoother surfaces. The choice of interpolation method should be based on the characteristics of the dataset and the objectives of the analysis. This study provides a solid foundation for the effective application of interpolation techniques in meteorological and climatic studies in regions such as Chimborazo.

**Keywords:** <INTERPOLATION>, <METEOROLOGY>, <FAST BARNES>, <CRESSMAN>, <BARNES>.



Lcda. María Eugenia Camacho, M.Sc.

0601609597

## INTRODUCCIÓN

En la década de 1950, el avance de la predicción meteorológica numérica propulsó el desarrollo de técnicas de análisis objetivo, utilizadas para derivar un campo analizado a partir de observaciones específicas, generalmente distribuidas de manera irregular, mediante un método común conocido como corrección sucesiva, tal se señala en (Bech & Pla, 1999). Este método modifica iterativamente el campo analizado en función de la diferencia entre las observaciones originales y el valor analizado en los puntos de observación, originando los métodos de Cressman y Barnes.

En el trabajo de (Cressman, 1959), se presenta un método notable por su capacidad eficaz y sencilla para aproximar datos meteorológicos. Este método utiliza una ponderación que decrece conforme aumenta la distancia entre las localizaciones, lo que contribuye significativamente al análisis y pronóstico del clima. Los resultados obtenidos mediante este método son de alta relevancia tanto en el ámbito científico como en el práctico, demostrando su utilidad y precisión en la interpretación y predicción de fenómenos meteorológicos.

Por otro lado, (Zürcher, 1999) resalta la frecuente aplicación del método de Barnes en procedimientos de corrección sucesiva, ya sea con o sin una primera suposición desde un campo de fondo. Una mejora posterior a este método es el Fast Barnes, donde la interpolación no se realiza una sola vez, sino que se aplica varias veces con parámetros de ancho gaussiano decrecientes para minimizar sucesivamente los errores residuales.

En la década de 1960, el matemático Carl De Boor desarrolló una herramienta matemática avanzada conocida como el método de splines bicúbicos (De Boor, 1962), la cual ha sido fundamental para el suavizado y análisis de datos meteorológicos. Esta técnica permite la creación de mapas detallados, el modelado de superficies climáticas y el análisis de tendencias en series temporales. Su aplicación es crucial para la predicción del tiempo y la comprensión de los patrones meteorológicos, ofreciendo una precisión y versatilidad significativas en el ámbito de la meteorología.

En el Capítulo I, se examina detalladamente la problemática que motivó esta investigación, delineando con precisión los objetivos que guiarán su desarrollo. Asimismo, se presenta una justificación exhaustiva del estudio, subrayando su relevancia en el ámbito de la interpolación de variables meteorológicas mediante los métodos de Cressman y Fast Barnes, y destacando su aplicabilidad práctica en el análisis de datos meteorológicos.

El Capítulo II se enfoca en la revisión bibliográfica esencial para la implementación del método de Cressman y Fast Barnes en la interpolación de variables meteorológicas, proporcionando un fundamento teórico robusto para la investigación.

El Capítulo III detalla la metodología aplicada durante la elaboración de esta investigación,

describiendo los procedimientos y técnicas empleadas para alcanzar los objetivos propuestos.

El Capítulo IV presenta la estructura de la monografía, organizando y articulando los contenidos de manera coherente y lógica.

Finalmente, el Capítulo V expone las conclusiones derivadas de este estudio sobre la interpolación de variables meteorológicas mediante los métodos de Cressman y Fast Barnes. Además, se ofrecen recomendaciones para investigaciones futuras en este campo, subrayando áreas potenciales de mejora y expansión del conocimiento.

# CAPÍTULO I

## 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo, se expone el problema que ha dado origen al presente trabajo de titulación. Asimismo, se abordó el objetivo general, el cual orientó el tema de investigación. Mientras, que los objetivos específicos marcaron los pasos necesarios para alcanzar el objetivo general propuesto. Por último, pero no menos importante se mencionó la justificación, en la cual se plasmó la motivación e importancia del trabajo de titulación.

### 1.1. Planteamiento del problema

El Grupo de Investigación de Energías Alternativas y Ambiente "GEAA" de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo utiliza 11 estaciones meteorológicas distribuidas en toda la provincia de Chimborazo para recopilar datos sobre los diferentes parámetros meteorológicos. Sin embargo, en los registros recopilados de las estaciones, existe pérdida de datos en el historial temporal de la variable temperatura y precipitación, lo que afecta negativamente a las proyecciones de dichas variables en los próximos años.

Existen diversas técnicas que se utilizan para abordar el problema de los datos faltantes, como la interpolación, los promedios móviles, la regresión lineal, el análisis espectral y el modelado de series temporales. Debido a que muestrear todas las ubicaciones del área de estudio para medir las variables climatológicas resulta difícil y costoso, la interpolación se presenta como una técnica viable para predecir los valores desconocidos en puntos geográficos específicos.

En este contexto, se plantea la siguiente investigación documental sobre los métodos de interpolación de Fast Barnes y Cressman; con el fin de tener un mejor relleno de datos de precipitación y temperatura. Es importante destacar que este trabajo también servirá como un documento informativo para los estudiantes de la Carrera de Matemática, ya que se aborda la aplicación de métodos de interpolación para el relleno de datos provenientes de climatología.

### 1.2. Objetivos

#### 1.2.1. *Objetivo General*

Efectuar una investigación documental de carácter teórico-práctico sobre Correcciones Sucesivas, y su relación con la interpolación de Cressman, Fast Barnes y Splines bicúbicos, mismos que serán implementados en Python para el relleno de datos de temperatura provenientes de las estaciones

meteorológicas de la ESPOCH.

### **1.2.2. *Objetivos específicos***

1. Determinar los fundamentos teóricos que sustentan los métodos de Cressman, Fast Barnes y splines bicúbicos.
2. Caracterizar los elementos que componen las correcciones sucesivas y la interpolación de datos meteorológicos.
3. Establecer relación sistémica entre los elementos que componen las correcciones sucesivas y la interpolación.

### **1.3. *Justificación***

La aplicación de métodos avanzados, como el de Cressman y Fast Barnes, en la interpolación de variables meteorológicas constituye un desafío significativo y de gran relevancia para el Grupo de Investigación de Energías Alternativas y Ambiente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. En este escenario, la falta de información documentada clara, organizada e inequívoca sobre la implementación de estos métodos específicos para abordar la irregularidad y pérdida de datos en series temporales meteorológicas crea un obstáculo sustancial.

A pesar de la eficacia comprobada de los métodos de Cressman y Fast Barnes en la aproximación de datos meteorológicos, la ausencia de manuscritos y literatura especializada concerniente a los fundamentos y aplicaciones prácticas presenta un obstáculo sustancial para la realización de un estudio exhaustivo en este dominio. La falta de recursos claros que expliquen cómo estos métodos pueden optimizarse y aplicarse de manera efectiva para rellenar datos meteorológicos, especialmente en la temperatura y la precipitación, limita la capacidad de los investigadores para comprender y utilizar plenamente estas herramientas.

En virtud de ello, resulta imperativo abordar la falta de documentación en los métodos de Cressman y Fast Barnes para la interpolación de variables meteorológicas es esencial para el Grupo de Investigación de Energías Alternativas y Ambiente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. La carencia de recursos claros limita la capacidad del grupo para optimizar y aplicar plenamente estos métodos en el relleno de datos meteorológicos, especialmente en temperatura y precipitación. Proporcionar recursos detallados facilitaría la comprensión teórica y la aplicación práctica, impulsando avances significativos en la aproximación precisa de datos meteorológicos.

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo se centra en interpolación polinomial en dos variables. Además, se abordarán las técnicas de correcciones sucesivas aplicadas a través de los métodos de Cressman, Barnes y Fast Barnes. Estos métodos son ampliamente utilizados en meteorología y ciencias geoespaciales para mejorar la precisión de los modelos y predicciones. El método de Cressman se destaca por su simplicidad y efectividad en aplicaciones prácticas, mientras que el método de Barnes introduce una técnica ponderada que mejora la suavidad y precisión de las interpolaciones. Finalmente, el método de Fast Barnes optimiza el proceso, reduciendo significativamente el tiempo de cálculo sin sacrificar la calidad de la interpolación. Este capítulo proporcionará una visión detallada de cada método, sus fundamentos matemáticos, y ejemplos de su aplicación en la interpolación de datos meteorológicos.

#### 2.1. Interpolación

La interpolación, como un método matemático de gran importancia, nos impulsa a realizar un análisis meticuloso de datos para estimar valores desconocidos dentro de un conjunto de datos previamente establecido. Este procedimiento tiene el propósito de proporcionar una función continua y derivable entre los puntos dados, permitiendo la inferencia coherente de valores intermedios. La elemento central de la interpolación reside en la formulación de una función que capture de manera efectiva la relación entre los datos disponibles, facilitando así una representación precisa y útil de los valores intermedios.

Este método, ampliamente aplicado en disciplinas como la Ingeniería, la Física, la Informática o la Climatología, desempeña un papel crucial al modelar sistemas complejos con datos limitados. En Ingeniería y Física, facilita una mejor comprensión mediante la interpolación precisa de datos. En Informática, suaviza animaciones y transiciones, mejorando la calidad visual. En Climatología, aumenta la resolución espacial y temporal de los datos climáticos, permitiendo una comprensión más detallada de los patrones climáticos. En el ámbito de la investigación científica, la interpolación se utiliza para estimar valores desconocidos de una función en puntos específicos, completando así los datos faltantes en un conjunto de datos.

No obstante, la eficacia de este método está vinculada a la calidad de los datos, así como a la cuidadosa elección del método de interpolación. Entre los métodos más comunes, destacan la interpolación polinomial y la interpolación trigonométrica. La interpolación polinomial es

ampliamente utilizada debido a su simplicidad y a la capacidad de proporcionar una función continua que pasa por todos los puntos de datos dados. Por otro lado, la interpolación trigonométrica es particularmente útil para datos periódicos, donde las funciones seno y coseno pueden modelar eficazmente las oscilaciones presentes en los datos. La selección adecuada del método de interpolación es crucial para garantizar resultados precisos y fiables en el análisis de datos.

### 2.1.1. Interpolación polinomial

En la práctica, a menudo se puede medir un proceso o cantidad física (por ejemplo, temperatura) en varios puntos (por ejemplo, instantes de tiempo para la temperatura), pero no se tiene una expresión analítica para el proceso que nos permita calcular su valor en un punto arbitrario. La interpolación proporciona una forma simple y buena de estimar la expresión analítica, esencialmente una función, en el rango abarcado por los puntos medidos. Mientras que, si un punto para la evaluación está fuera del rango, entonces se llama extrapolación, lo cual generalmente produce un valor no tan confiable como el de la interpolación.

Se considera una familia de funciones de una sola variable  $x$ :

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n),$$

donde  $a_0, \dots, a_n$  son los parámetros. El problema de interpolación para  $\Phi$  se puede enunciar de la siguiente manera:

Dados  $n + 1$  pares de números reales o complejos  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , con  $x_i \neq x_k$  para  $i \neq k$ , se busca determinar coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  tales que  $\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Lo anterior se conoce como problema de interpolación lineal si  $\Phi$  depende linealmente de los parámetros  $a_i$ :

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \dots + a_n\Phi_n(x).$$

Los problemas típicos en esta clase incluyen la interpolación polinómica:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

así como la interpolación trigonométrica:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1e^{ix} + a_2e^{2ix} + \dots + a_n e^{nix}.$$

La interpolación polinómica se abordará brevemente a continuación. La interpolación

trigonométrica se utiliza extensamente para el análisis numérico de Fourier de series temporales y fenómenos periódicos en general.

La clase de interpolación lineal también incluye la interpolación por splines. En el caso especial de splines cúbicos,  $\Phi$  es de clase  $C^2$  en  $[x_0, x_n]$  y coincide con algún polinomio cúbico en cada  $[x_i, x_{i+1}]$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . La interpolación por splines es muy útil para representar curvas empíricas, así como para tratar con ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

Según el Teorema de Aproximación de Weierstrass, cualquier función continua sobre un intervalo cerrado puede ser aproximada arbitrariamente bien por polinomios. Sin embargo, el teorema no indica cómo construir dicho polinomio para satisfacer un rango de error especificado permitido para la aproximación.

Por otro lado, se denota como  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  al conjunto de polinomios reales de grado menor o igual a  $n$ . Para todo  $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  y coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  reales tal que

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Aquí,  $n$  es el grado del polinomio. La desventaja de esta forma es que los redondeos numéricos pueden provocar una pérdida de significancia para  $x$  que no esté cerca de cero. La forma de potencias desplazadas se basa en el desarrollo de Taylor alrededor de algún punto  $x_0$ :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

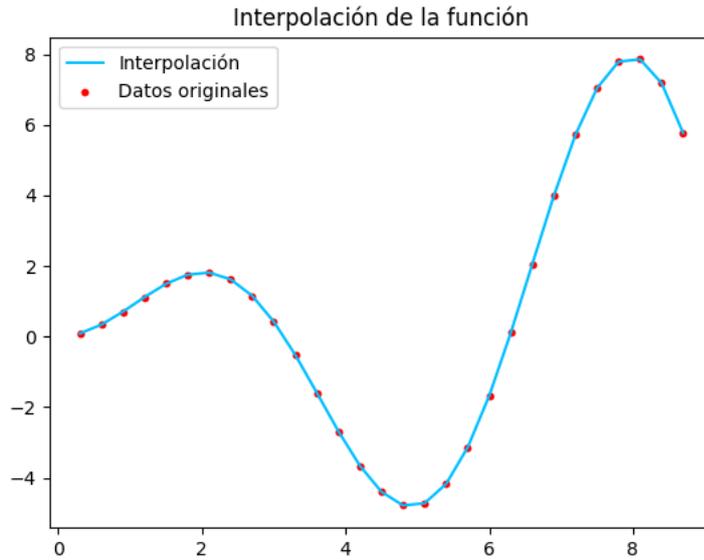
donde  $a_i = \frac{p^{(i)}(c)}{i!}$ . La forma de Newton “expande” el polinomio alrededor de  $n$  puntos:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + \dots + a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n).$$

Una evaluación de la forma de Newton requiere  $n + \frac{n(n+1)}{2}$  adiciones y  $\frac{n(n+1)}{2}$  multiplicaciones. La forma de Newton anidada

$$p(x) = a_0 + (x - c_1)(a_1 + (x - c_2)(a_2 + \dots + (x - c_{n-1})(a_{n-1} + (x - c_n) \dots))$$

permite la evaluación mediante el esquema de Horner que se reduce a  $2n$  adiciones y  $n$  multiplicaciones.



**Ilustración 2-1:** Ejemplo de función interpolada.  
Realizado por: Samaniego A., 2024.

Por otro lado, para determinar el polinomio, se debe hallar los coeficientes  $a_i$ . Para esto, se dispone de los  $n + 1$  datos  $p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$ ; además, para obtener una solución única, suponemos que  $m = n$ .

Mostremos que bajo esta condición el problema admite efectivamente una y solo una solución. Para ello, se acude al teorema de Existencia y Unicidad del polinomio interpolante, el cual se presenta a continuación:

**Teorema 2.1.** Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $n + 1$  puntos distintos en  $[a, b]$ . Existe un polinomio único  $p$  de grado  $n$  o menor que interpola  $f(x)$  en los puntos  $\{x_i\}$ , es decir,  $p(x_i) = f(x_i)$ , para  $0 \leq i \leq n$ .

Para demostrar la unicidad, se necesita recordar que, si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes reales o complejos, entonces existe un número complejo  $\xi$  tal que  $p(\xi) = 0$ .

*Demostración.* Primero, probamos la **existencia** del polinomio interpolante.

Es suficiente construir un polinomio interpolador. Esto se hace mediante los polinomios  $\ell_0(x), \ell_1(x), \dots, \ell_n(x)$  tales que

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

con  $i, k = 0, \dots, n$ . Es decir,

$$\ell_i(x_k) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

El polinomio interpolante toma la forma siguiente

$$p_n(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + \cdots + f_n\ell_n(x).$$

Los polinomios  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$  se denominan polinomios de Lagrange.

Probamos, ahora, la **unicidad**. Supongamos que  $p$  y  $q$  son polinomios de grado a lo sumo  $n$  que coinciden en  $\{x_i\}$ . Entonces,  $p - q$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n$  que se anula en  $\{x_i\}$ . Por lo tanto, por el Teorema Fundamental del Álgebra,

$$(p - q)(x) = c \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

donde  $c$  es algún número real. El lado izquierdo tiene grado a lo sumo  $n$ , mientras que el lado derecho tiene grado exactamente  $n + 1$  a menos que  $c = 0$ . Por lo tanto,  $c = 0$  y  $p = q$ . De ahí que  $p$  es único. □

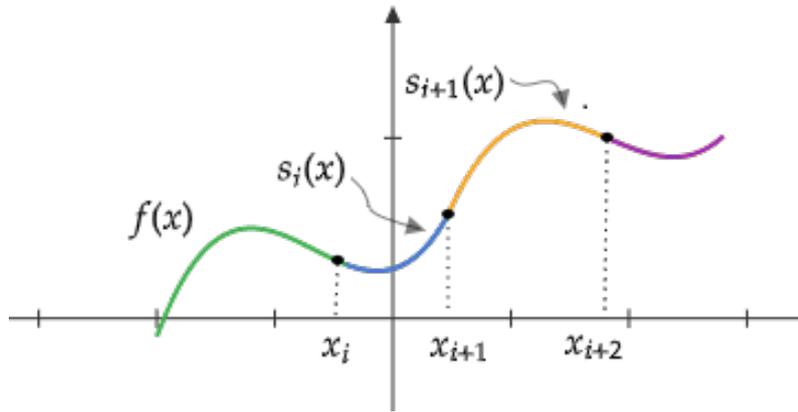
La calidad de una aproximación depende del número de puntos de aproximación y de sus ubicaciones. Un problema con el polinomio interpolador de Lagrange es que necesitamos  $n$  sumas,  $2n^2 + 2n$  restas,  $2n^2 + n - 1$  multiplicaciones y  $n + 1$  divisiones para evaluar  $p(\xi)$  en un punto dado  $\xi$ . Incluso después de que todos los denominadores hayan sido calculados una vez por todas y divididos en los valores  $a_i$ , todavía necesitamos  $n$  sumas,  $n^2 + n$  restas y  $n^2 + n$  multiplicaciones. Otro problema es que en la práctica, uno puede no estar seguro de cuántos puntos de interpolación usar. Por lo tanto, uno puede querer incrementarlos con el tiempo y ver si la aproximación mejora. Al hacerlo, uno quisiera usar la aproximación antigua. No está claro cómo hacer esto fácilmente con la forma de Lagrange. En este sentido, la forma de Lagrange no es incremental (además de que también es incómoda de programar).

Dentro de la interpolación polinomial, existen varios tipos destacados, como la interpolación de Lagrange, los splines cúbicos y los splines bicúbicos, entre otros. A continuación, se detalla el estudio de los splines cúbicos.

### 2.1.2. *Splines cúbicos*

Las funciones splines fueron introducidas en los años 40 por Schenberg, quien aportó una mayor flexibilidad en la aproximación polinómica. Este enfoque permitió disminuir el grado del polinomio utilizado para aproximar la función, al considerar funciones polinómicas por tramos, llamadas *splines*, en honor a la varilla flexible que se utilizaba para trazar curvas suaves en el papel. Aquí se considerará el caso de los splines cúbicos.

La aproximación mediante polinomios por partes ofrece la posibilidad de generar estimaciones altamente precisas. Sin embargo, en ocasiones, estas aproximaciones no resultan agradables a la vista debido a la falta de suavidad en los puntos de unión entre las partes del polinomio. Aunque la función es continua, no es continuamente diferenciable en todo el rango de la aproximación. Así, los splines surgen como una solución a este problema. Su enfoque radica en desarrollar una aproximación polinómica por partes que, además de interpolar los datos, mantenga una *suavidad* al ser continuamente diferenciable hasta cierto grado.



**Ilustración 2-2:** Ejemplo de función interpolada.  
Realizado por: Samaniego, A, 2024.

**Definición 2.1.** Sean  $I = [a, b]$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$  elementos de  $I$ . La función  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina spline de grado  $k$  si  $S$  es una función de clase  $C^{k-1}(I)$  y si la restricción de  $S$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  es un polinomio de grado  $k$  para  $i = 0, \dots, n-2$  entonces, los pares ordenados  $(x_i, S(x_i))$  se llaman puntos de control.

Para definir un spline  $S$  de grado  $k$  necesitamos  $n$  puntos y  $n-1$  polinomios  $s_i$  de grado  $k$ . El spline entonces se define de la siguiente manera:

$$S(x) = s_i(x) = \sum_{i=0}^k a_i(x-x_i)^i$$

para  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  con  $i = 0, \dots, n-2$ . Se observa que la traslación por  $-x_i$  en la expresión de  $s_i$  permite simplificar los cálculos durante la construcción del spline y no vuelve compleja su definición.

**Definición 2.2** (Spline cúbico). Para  $i = 0, \dots, n$ , denotamos como  $P_i$  los puntos de  $\mathbb{R}^2$  de coordenadas  $(x_i, y_i)$  tales que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$ . Se busca definir una función  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por tramos mediante polinomios  $S_i$  de grado tres sobre los intervalos

$[x_i, x_{i+1}]$ . Se obtiene entonces un spline cúbico si y solo si

$$S_i(x_i) = y_i \quad \text{para } i = 0, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \text{para } i = 0, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \quad (2.4)$$

Se establece  $S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$ . Así, se obtiene la función spline siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Se nota que se tiene exactamente  $4n$  incógnitas y  $4n - 2$  ecuaciones. Resta entonces 2 ecuaciones más. Estas ecuaciones pueden involucrar  $S'(x_0)$ ,  $S''(x_0)$ ,  $S'(x_{n-1})$  y  $S''(x_{n-1})$ .

Se reemplaza las ecuaciones anteriores en  $S_i$  por ecuaciones en  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$ . La primera da  $d_i = y_i$ .

Se debe calcular las dos primeras derivadas de  $S_i$  :

$$S'_i(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$

y

$$S''_i(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i.$$

Se establece  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . La ecuación (2.4) da

$$S''_i(x_i) = 2b_i = S''_{i-1}(x_i) = 6a_{i-1}(x - x_{i-1}) + 2b_{i-1}$$

y por ende

$$b_i = 3a_{i-1}h_{i-1} + b_{i-1}. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.3) da

$$s'_i(x_i) = c_i = s'_{i-1}(x_i) = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}$$

por lo tanto

$$c_i = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.2) da

$$s_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}$$

y por ende

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} - \frac{c_i}{h_i^2} - \frac{b_i}{h_i}. \quad (2.7)$$

Si se fijan los valores de  $b_0$  y  $c_0$ , lo que equivale a fijar  $S'(x_0)$  y  $S''(x_0)$ , entonces el spline se calcula fácilmente. Para poder resolver este spline, es necesario modificar el sistema de ecuaciones.

En primer lugar, se eliminan el mayor número posible de incógnitas. Se define  $m_i = S''(x_i)$  para  $i = 0, \dots, n-1$  y se tiene  $S''(x_i) = s_i''(x_i)$  y por lo tanto  $m_i = s_i''(x_i) = 2b_i$ . Obteniéndose así

$$b_i = \frac{m_i}{2}. \quad (2.8)$$

A partir de (2.2) se calculan los coeficientes  $a_i$  en función de los valores  $m_i$ . Se debe tener  $s_i''(x_i) = m_i$ .

De donde

$$m_i = s_{i-1}''(x_i) = 6a_{i-1} + 2b_{i-1} \quad \text{y} \quad b_{i-1} = m_{i-1}$$

obteniéndose así  $a_{i-1} = \frac{m_i - m_{i-1}}{6h_{i-1}}$  y por ende

$$a_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}. \quad (2.9)$$

A partir de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se calcula  $c_i$  en función de los  $m_i$ . De  $s_i(x_i) = y_i$  se obtiene

$d_i = y_i$  y de  $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ , se arriba a

$$y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i$$

sea además

$$c_i = \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i - a_i h_i^3 - b_i h_i^2) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i.$$

Reemplazando  $a_i, b_i$  por sus valores, se obtiene

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i \frac{m_{i+1} - m_i}{6} - h_i \frac{m_i}{2}. \quad (2.10)$$

En este punto, se sabe cómo calcular los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$  y  $d_i$  a partir de los  $h_i, m_i$  y  $y_i$ . Conociendo los  $h_i$  y  $y_i$ , queda por encontrar los  $m_i$ .

A partir de (2.3) se debe encontrar una relación que enlace los valores  $m_{i-1}, m_i$  y  $m_{i+1}$ . Así, en

función de  $s'_i(x_i) = s'_i(x_i)$ , se desprende

$$c_i = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}.$$

Se reemplaza  $a_{i-1}$ ,  $b_{i-1}$ ,  $c_{i-1}$  para expresarlo en función de los  $m_i$  a fin de obtener

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i \frac{m_{i+1} - m_i}{6} - h_i \frac{m_i}{2} = h_{i-1} \frac{m_i - m_{i-1}}{2} + m_{i-1}h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - h_{i-1} \frac{m_i - m_{i-1}}{6} - h_{i-1} \frac{m_{i-1}}{2}.$$

De donde se ve que

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)m_i + h_im_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (2.11)$$

Para encontrar  $m_i$  con  $i = 0, \dots, n$ , se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} - h_{n-2}) & h_{n-2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix}}_X = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}}_B$$

La matriz  $A$  es de  $n - 2$  filas por  $n$  columnas. Por lo tanto, se deben agregar dos filas adicionales.

Un spline cúbico  $S$  definido en  $[a, b]$  se dice *natural* si  $S''(a) = S''(b) = 0$ . Esta condición impone  $m_0 = m_{n-1} = 0$ . El sistema entonces se convierte en:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix}}_X = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \quad (2.12)$$

La matriz  $A$  es tridiagonal, definida positiva y diagonalmente dominante por lo que existe una única solución del sistema (2.12).

Además de los splines cúbicos naturales o sujetos, existen otras condiciones importantes que pueden imponerse para adaptarse a diferentes contextos y necesidades. Entre ellas se encuentran los splines cúbicos libres y periódicos. Los splines libres no imponen restricciones adicionales en los extremos

de los intervalos de interpolación, lo que los hace flexibles en aplicaciones donde se desea evitar efectos no deseados en los bordes. Por otro lado, los splines periódicos son útiles para funciones que exhiben periodicidad, asegurando que la derivada primera y última del spline en los extremos se igualen, facilitando así la representación de fenómenos recurrentes como señales periódicas en procesamiento de señales y análisis de series temporales.

En el contexto de interpolación y aproximación de funciones, es fundamental evaluar la precisión de los métodos utilizados. Los splines cúbicos son una herramienta poderosa para aproximar funciones suaves mediante polinomios locales en intervalos específicos. Sin embargo, para asegurar la validez de estas aproximaciones, es crucial estudiar la cota del error asociado a los splines cúbicos. Esta cota proporciona una estimación del error máximo entre la función original y su aproximación spline, permitiendo así evaluar la precisión y fiabilidad del método utilizado.

**Teorema 2.2** (Error de la interpolación de splines cúbicos). Sean  $[a, b]$  un intervalo,  $f \in C^4([a, b])$  y  $S$  un spline cúbico que interpola  $f$  en la partición  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  con  $h := \max_{0 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i)$  para todo  $i$ , entonces

$$\|f - S\|_{\infty} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

Más aún, existe una constante positiva  $C_k$ , con  $k = 1, 2, 3$ , tal que

$$\|f^{(k)} - S^{(k)}\|_{\infty} \leq C_k h^{4-k} \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede ver en el artículo de (Hall y Meyer, 1976). □

Cabe notar que en la interpolación de splines no es más precisa, en términos del exponente en el tamaño de la partición, que la aproximación ordinaria mediante polinomios por partes (es decir, que la constante en la estimación es menor). La ventaja de la interpolación spline radica en la suavidad de la aproximación, como lo comenta, en la página 219, (Epperson, 2013).

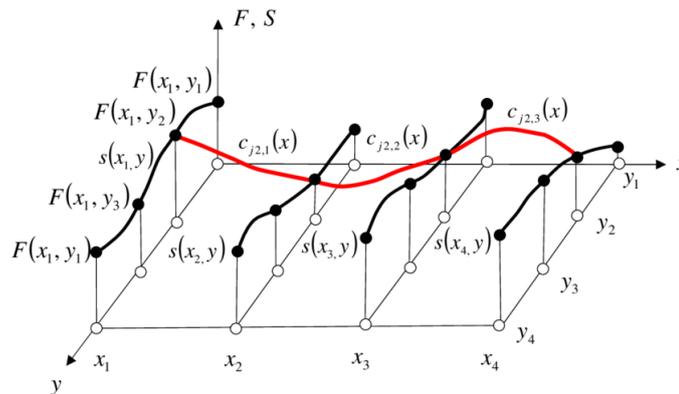
Una vez establecido el marco teórico para la interpolación utilizando splines cúbicos en una dimensión, avanzamos hacia la extensión natural de estos métodos en dos dimensiones con los splines bicúbicos. Sin antes mencionar, brevemente, a la interpolación bicúbica.

### 2.1.3. Interpolación bicúbica

La interpolación bicúbica emplea polinomios cúbicos de tercer grado para suavizar funciones bidimensionales. Esta técnica facilita la creación de superficies interpoladas suaves que se ajustan a

los datos en una malla bidimensional, ofreciendo una aproximación continua y diferenciable de los datos originales.

Sean dado los valores  $f_{ij} = f(x_i, y_j)$  en los puntos de la malla rectangular  $(x_i, y_j)$  de una malla rectangular,  $i = 0, \dots, n$ ;  $j = 0, \dots, m$ ; el objetivo es encontrar una función  $S(x, y)$  que pase a través de todos los puntos de la malla y sus derivadas parciales de primer y segundo orden coincidan en los puntos de la malla; Sean dadas las derivadas direccionales en los puntos de frontera de la malla, es decir,  $p_{ij} = S_x(x_i, y_j)$  para  $i = 0, n$  y  $j = 0, \dots, m$ , y  $q_{ij} = S_y(x_i, y_j)$  para  $i = 0, \dots, n$  y  $j = 0, m$ ; finalmente, sea  $s_{ij} = S_{xy}(x_i, y_j)$  dado en las cuatro esquinas de la malla. El problema es ajustar una función  $S(x, y)$  de clase  $C^2$  a través de estos valores dados.



**Ilustración 2-3:** Ejemplo de función interpolada con splines bicúbicos.  
**Disponible en:** (Limongelli y Carvelli, 2015)

El método de interpolación bicúbica que se describirá produce una función polinómica bicúbica  $S(x, y)$ . Esto se define en cada celda rectangular  $R_{ij} = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j, i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m\}$  de la malla

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j, \quad (x, y) \in R_{ij}. \quad (2.13)$$

Esta expresión también puede ser representada de manera matricial:

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}.$$

Considerando la forma del polinomio de interpolación, se procede al cálculo de las derivadas parciales de primer y segundo orden respecto a las variables  $x$  e  $y$  del polinomio expresado. La interpolación se realiza secuencialmente en los ejes  $x$  e  $y$  para asegurar la suavidad de la superficie

interpolada y su coincidencia con los puntos de la malla. Posteriormente, se completa la superficie mediante la interpolación en el plano  $xy$ . Las ecuaciones que definen este proceso son las siguientes:

$$S_x(x,y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} i x^{i-1} y^j,$$

$$S_y(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} j x^i y^{j-1},$$

$$S_{xy}(x,y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} i j x^{i-1} y^{j-1}.$$

Por lo tanto, la interpolación de estas funciones implica determinar los 16 coeficientes  $a_{ij}$  de la ecuación (2.13) a partir de valores conocidos. Esto conduce a resolver un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas, expresadas de la siguiente manera:

$$f(0,0) = S(0,0) = a_{00},$$

$$f(1,0) = S(1,0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30} = \sum_{i=0}^3 a_{i0},$$

$$f(0,1) = S(0,1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03} = \sum_{j=0}^3 a_{0j},$$

$$f(1,1) = S(1,1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij},$$

$$f_x(0,0) = S_x(0,0) = a_{10},$$

$$f_x(1,0) = S_x(1,0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30} = \sum_{i=1}^3 i a_{i0},$$

$$f_x(0,1) = S_x(0,1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} = \sum_{j=0}^3 a_{1j},$$

$$f_x(1,1) = S_x(1,1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i a_{ij},$$

$$f_y(0,0) = S_y(0,0) = a_{01},$$

$$f_y(1,0) = S_y(1,0) = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31} = \sum_{i=0}^3 a_{i1},$$

$$f_y(0,1) = S_y(0,1) = a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03} = \sum_{j=1}^3 j a_{0j},$$

$$f_y(1,1) = S_y(1,1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j a_{ij},$$

$$f_{xy}(0,0) = S_{xy}(0,0) = a_{11},$$

$$f_{xy}(1,0) = S_{xy}(1,0) = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = \sum_{i=1}^3 i a_{i1},$$

$$f_{xy}(0,1) = S_{xy}(0,1) = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j},$$

$$f_{xy}(1,1) = S_{xy}(1,1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ija_{ij}.$$

El sistema de ecuaciones puede representarse de forma matricial como  $AX = B$ , donde:

$$X = \left[ a_{00} \ a_{10} \ a_{20} \ a_{30} \ a_{01} \ a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{02} \ a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{03} \ a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \right]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f_x(0,0) \\ f_x(1,0) \\ f_x(0,1) \\ f_x(1,1) \\ f_y(0,0) \\ f_y(1,0) \\ f_y(0,1) \\ f_y(1,1) \\ f_{zy}(0,0) \\ f_{zy}(1,0) \\ f_{zy}(0,1) \\ f_{zy}(1,1) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Para verificar la invertibilidad de la matriz  $A$ , es útil explorar su factorización para obtener más información sobre su estructura y determinar su potencial invertibilidad. Una vez establecidas las condiciones suficientes para la invertibilidad de  $A$ , se puede proceder al cálculo de su inversa, que

se representa de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & -9 & -9 & 9 & 6 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 3 & -3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -4 & -2 & 4 & 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  y  $B \in \mathbb{R}^n$ , con  $1 \leq n \leq 16$ , la invertibilidad de  $A$  implica la existencia de una única solución para el sistema lineal  $AX = B$ . Por lo tanto, este método proporciona una superficie interpoladora única de la función deseada, cumpliendo con las condiciones de suavidad y continuidad requeridas. Al utilizar la expresión  $X = A^{-1}B$ , se determinan los coeficientes  $a_{ij}$  de la función interpoladora  $S$  en la malla para cualquier combinación de valores de  $f_x, f_y, f_{xy}$  y  $f_{zy}$ .

Como se ha observado en la construcción del método, este utiliza los datos de entrada en todos los cálculos, lo cual lo convierte en un método global en la malla. Sin embargo, cualquier cambio en los datos de entrada modificará la superficie resultante. Por ejemplo, si se desea utilizar una malla diferente, las condiciones originales ya no serían aplicables.

Por lo tanto, buscamos una función bicúbica que interpole una superficie utilizando puntos base distribuidos en una malla de puntos  $[a, b] \times [c, d]$ , donde  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  y  $c = y_0 < \dots < y_m = d$ . Esto implica obtener  $n \times m$  funciones polinómicas diferentes, una para cada cuadrado de la malla.

#### 2.1.4. Derivadas direccionales y cruzadas

Para determinar el polinomio bicúbico que mejor se ajuste a los datos recopilados, es necesario calcular las derivadas direccionales y cruzadas de la función. En la construcción del método, partimos de la suposición de que conocemos las derivadas parciales con respecto a  $x$ ,  $y$ , y la derivada cruzada  $xy$ . Sin embargo, estas derivadas no siempre se pueden calcular directamente, y tampoco se dispone de ellas. Por esta razón, se necesita encontrar una aproximación que nos permita aplicar el método de interpolación bicúbica.

Una de las mejores formas de aproximar las derivadas es utilizando métodos de derivación numérica que, aunque puedan sacrificar algo de precisión, conservan la propiedad de ser *métodos locales*. En el caso de funciones de una variable, la diferencia centrada permite obtener una aproximación de las derivadas utilizando tres puntos equidistantes  $x_0 < x_1 < x_2$ , todos a una misma distancia  $h$ . La derivada de la función en cada uno de estos puntos se determina de la siguiente manera:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}.$$

Este enfoque permite aproximar las derivadas necesarias para la interpolación bicúbica, garantizando que el método sea aplicable incluso en ausencia de derivadas exactas. Mediante esta aproximación, se preserva la continuidad y suavidad de la interpolación, lo cual es esencial para obtener resultados precisos y fiables en aplicaciones prácticas.

Para el caso  $x^* = x_0$ , se utiliza la fórmula de diferencia hacia adelante con tres puntos:

$$f'(x^*) \approx \frac{-f(x^* + 2h) + 4f(x^* + h) - 3f(x^*)}{2h}.$$

Para  $x^* = x_1$ , se emplea la fórmula de diferencia centrada con tres puntos:

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + h) - f(x^* - h)}{2h}.$$

En el caso  $x^* = x_2$ , se aplica la fórmula de diferencia hacia atrás con tres puntos:

$$f'(x^*) \approx \frac{3f(x^*) - 4f(x^* - h) + f(x^* - 2h)}{2h}.$$

Estas fórmulas se extienden de una variable a dos variables para obtener una aproximación de las derivadas parciales a partir de los datos disponibles. Al tratar con funciones de dos variables, se consideran los puntos  $(x_i, y_j)$  con  $i, j = 0, 1, 2$  tales que  $x_0 < x_1 < x_2$  e  $y_0 < y_1 < y_2$ . Las fórmulas para la aproximación de las derivadas se expresan a continuación:

Derivada parcial respecto a la variable  $x$ :

Si  $x^* = x_0$ , fórmula en diferencia hacia adelante con tres puntos:

$$f_z(x^*, y_i) \approx \frac{-f(x^* + 2h, y_i) + 4f(x^* + h, y_i) - 3f(x^*, y_i)}{2h}.$$

Para  $x^* = x_1$ , fórmula en diferencia centrada con tres puntos:

$$f_x(x^*, y_i) \approx \frac{f(x^* + h, y_i) - f(x^* - h, y_i)}{2h}.$$

En el caso  $x^* = x_2$ , fórmula en diferencia hacia atrás con tres puntos:

$$f_x(x^*, y_i) \approx \frac{3f(x^*, y_i) - 4f(x^* - h, y_i) + f(x^* - 2h, y_i)}{2h}.$$

La derivada parcial respecto a la variable  $y$ : Si  $y^* = y_0$ , fórmula en adelante con tres puntos:

$$f_y(x_i, y^*) \approx \frac{-f(x_i, y^* + 2h) + 4f(x_i, y^* + h) - 3f(x_i, y^*)}{2h}$$

Si  $y^* = y_1$ , fórmula centrada con tres puntos:

$$f_y(x_i, y^*) \approx \frac{f(x_i, y^* + h) - f(x_i, y^* - h)}{2h}$$

Si  $y^* = y_2$ , fórmula en diferencia hacia atrás con tres puntos:

$$f_y(x_i, y^*) \approx \frac{3f(x_i, y^*) - 4f(x_i, y^* - h) + f(x_i, y^* - 2h)}{2h}$$

La derivada parcial cruzada:

Si  $x^* = x_0$  e  $y^* = y_0$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{c} -[-f(x^* + 2h, y^* + 2h) + 4f(x^* + 2h, y^* + h) - 3f(x^* + 2h, y^*)] \\ +4[-f(x^* + h, y^* + 2h) + 4f(x^* + h, y^* + h) - 3f(x^* + h, y^*)] \\ -3[-f(x^*, y^* + 2h) + 4f(x^*, y^* + h) - 3f(x^*, y^*)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_1$  e  $y^* = y_0$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{c} [-f(x^* + h, y^* + 2h) + 4f(x^* + h, y^* + h) - 3f(x^* + h, y^*)] - \\ -[-f(x^* - h, y^* + 2h) + 4f(x^* - h, y^* + h) - 3f(x^* - h, y^*)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_0$  e  $y^* = y_1$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} [-f(x^* + 2h, y^* + h) + 4f(x^* + h, y^* + h) - 3f(x^*, y^* + h)] - \\ -[-f(x^* + 2h, y^* - h) + 4f(x^* + h, y^* - h) - 3f(x^*, y^* - h)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_0$  e  $y^* = y_2$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} -[3f(x^* + 2h, y^*) - 4f(x^* + 2h, y^* - h) + f(x^* + 2h, y^* - 2h)] + \\ +4[3f(x^* + h, y^*) - 4f(x^* + h, y^* - h) + f(x^* + h, y^* - 2h)] - \\ -3[3f(x^*, y^*) - 4f(x^*, y^* - h) + f(x^*, y^* - 2h)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_2$  e  $y^* = y_0$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} -[3f(x^*, y^* + 2h) - 4f(x^* - h, y^* + 2h) + f(x^* - 2h, y^* + 2h)] \\ +4[3f(x^*, y^* + h) - 4f(x^* - h, y^* + h) + f(x^* - 2h, y^* + h)] \\ -3[3f(x^*, y^*) - 4f(x^* - h, y^*) + f(x^* - 2h, y^*)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_1$  e  $y^* = y_1$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} [f(x^* + h, y^* + h) - f(x^* + h, y^* - h)] - \\ -[f(x^* - h, y^* + h) - f(x^* - h, y^* - h)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_1$  e  $y^* = y_2$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} [3f(x^* + h, y^*) - 4f(x^* + h, y^* - h) + f(x^* + h, y^* - 2h)] \\ -[3f(x^* - h, y^*) - 4f(x^* - h, y^* - h) + f(x^* - h, y^* - 2h)] \end{array} \right)$$

Si  $x^* = x_2$  e  $y^* = y_1$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} [3f(x^*, y^* + h) - 4f(x^* - h, y^* + h) + f(x^* - 2h, y^* + h)] \\ -[3f(x^*, y^* - h) - 4f(x^* - h, y^* - h) + f(x^* - 2h, y^* - h)] \end{array} \right)$$

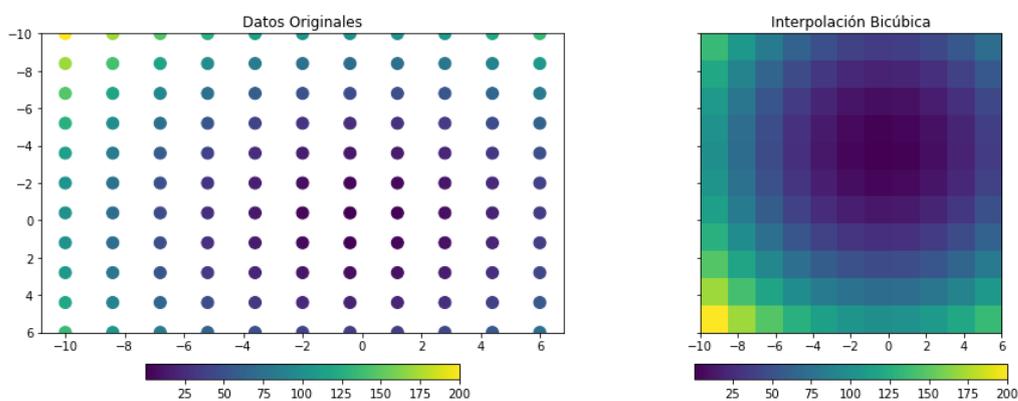
Si  $x^* = x_2$  e  $y^* = y_2$  :

$$f_{xy}(x^*, y^*) \approx \frac{1}{4h^2} \left( \begin{array}{l} 3[3f(x^*, y^*) - 4f(x^*, y^* - h) + f(x^*, y^* - 2h)] \\ -4[3f(x^* - h, y^*) - 4f(x^* - h, y^* - h) + f(x^* - h, y^* - 2h)] \\ +[3f(x^* - 2h, y^*) - 4f(x^* - 2h, y^* - h) + f(x^* - 2h, y^* - 2h)] \end{array} \right)$$

Considerando  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_{xy}$  como la derivada parcial respecto de  $x$ , la derivada parcial respecto de  $y$  y la derivada cruzada respectivamente, es esencial analizar la precisión de las fórmulas de aproximación empleadas. En el caso de funciones de una variable, las fórmulas de aproximación

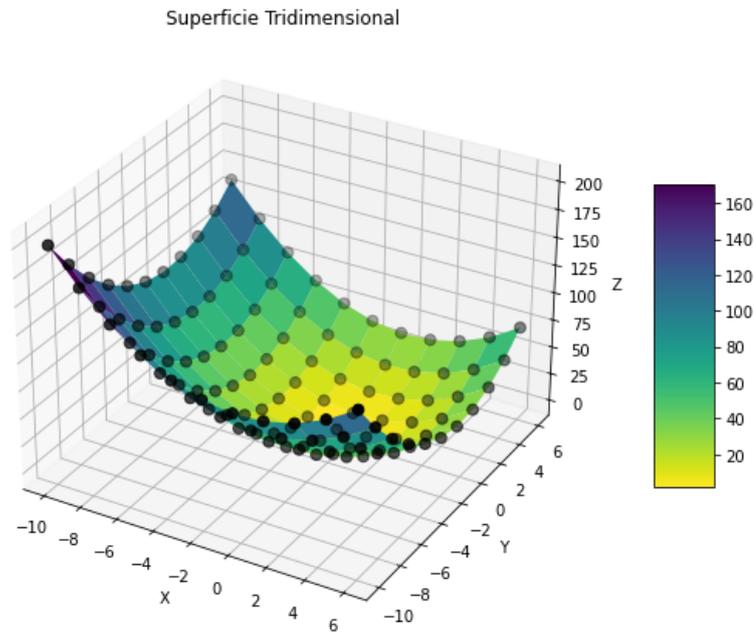
tienen un error de orden  $\mathcal{O}(h^2)$ . De manera similar, para funciones de dos variables, las fórmulas correspondientes presentan un error de orden  $\mathcal{O}(h^2, h^2)$ . Esto implica que no se pierde precisión significativa, ya que todas las aproximaciones utilizadas mantienen un error de segundo orden. En consecuencia, podemos asegurar que las aproximaciones de las derivadas parciales y cruzadas son suficientemente precisas para ser utilizadas en el método de interpolación bicúbica, preservando la exactitud y eficiencia del proceso.

Esta aproximación nos proporciona derivadas en los extremos del intervalo de definición de la malla, lo que implica que podemos calcular todos los puntos de la misma. Después de deducir el método de interpolación bicúbica y comprender cómo se calculan los coeficientes para obtener una superficie suave que pase por los puntos de datos dados, procedemos a visualizar los resultados mediante gráficos mostrados en las figuras 2-4 y 2-5.



**Ilustración 2-4:** Ejemplo de una malla rectangular  $\Omega = [-10, 6] \times [-10, 6]$ .

**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.



**Ilustración 2-5:** Ejemplo de interpolación bicúbica sobre la malla rectangular  $\Omega = [-10, 6] \times [-10, 6]$ , aplicada a la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Realizado por: Samaniego, A, 2024.

### 2.1.5. Splines Bicúbicos

Los splines bicúbicos son una extensión de los splines cúbicos a dos dimensiones. Se utilizan para interpolar datos en una malla rectangular, proporcionando una superficie suave que pasa por los puntos de datos dados y garantiza la continuidad en los valores de la función y sus derivadas hasta el segundo orden. Esta técnica es ampliamente utilizada en gráficos por computadora, procesamiento de imágenes, modelado geométrico y análisis numérico debido a su capacidad para producir superficies suaves y continuas.

**Definición 2.3.** Sea  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  un dominio rectangular, y se supone que se tiene una malla de puntos  $(x_i, y_j)$  con  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $j = 0, 1, \dots, m$ . El objetivo es encontrar una función spline bicúbica  $S(x, y)$  que interpole los valores dados  $f_{ij}$  en estos puntos. La forma general de un spline bicúbico en cada subconjunto  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  está dada por:

$$S(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{kl} (x - x_i)^k (y - y_j)^l$$

donde los coeficientes  $a_{kl}$  se determinan mediante las condiciones de interpolación.

Para asegurar que  $S(x, y)$  no solo interpole los valores  $f_{ij}$ , sino que también mantenga la suavidad y

continuidad en todo el dominio, se imponen las siguientes condiciones en cada punto de la malla:

$$S(x_i, y_j) = f_{ij},$$

$$S_x(x_i, y_j) = f_{x,ij},$$

$$S_y(x_i, y_j) = f_{y,ij},$$

$$S_{xx}(x_i, y_j) = f_{xx,ij},$$

$$S_{yy}(x_i, y_j) = f_{yy,ij},$$

$$S_{xy}(x_i, y_j) = f_{xy,ij}.$$

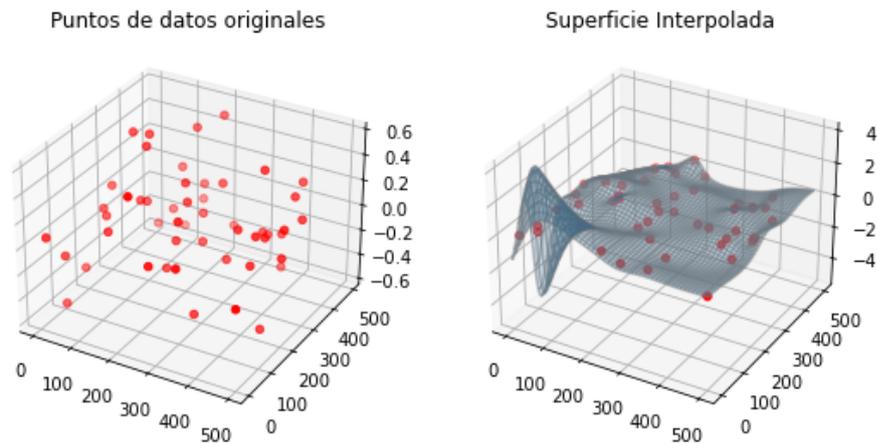
Entonces, para cada subconjunto  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , necesitamos resolver un sistema de ecuaciones lineales para los 16 coeficientes  $a_{kl}$ . Esto se hace mediante la imposición de las condiciones de interpolación en los cuatro vértices del subconjunto. Expresado en forma matricial, el sistema de ecuaciones puede escribirse como:

$$AX = B$$

donde  $A$  es una matriz  $16 \times 16$  que depende de las coordenadas de los puntos de la malla,  $X$  es el vector de coeficientes  $a_{kl}$ , y  $B$  es el vector de los valores de la función y sus derivadas en los puntos de la malla. Una vez obtenidos los coeficientes  $a_{kl}$ , podemos construir la función spline bicúbica  $S(x, y)$  en el subconjunto correspondiente.

El spline bicúbico garantiza la continuidad de la función interpolada  $S(x, y)$  y sus derivadas de primer y segundo orden en todo el dominio. Esto es crucial para aplicaciones donde la suavidad de la superficie es importante, tales como gráficos por computadora, procesamiento de imágenes y modelado geométrico. Estos gráficos permiten apreciar la suavidad y la continuidad de la superficie interpolada, así como la precisión con la que el spline bicúbico se ajusta a los datos originales.

Los splines bicúbicos proporcionan una técnica robusta y eficiente para la interpolación de datos en dos dimensiones. Su capacidad para garantizar la suavidad y la continuidad de la superficie interpolada los hace especialmente útiles en una amplia gama de aplicaciones prácticas. A través de la formulación matemática y la derivación de los coeficientes, hemos visto cómo se puede construir un spline bicúbico que cumpla con las condiciones de interpolación necesarias para obtener resultados precisos y visualmente atractivos.



**Ilustración 2-6:** Ejemplo de interpolación de splines bicúbicos sobre una malla rectangular, aplicada a la función  $f(x,y) = \sin x \sin y$ .

Realizado por: Samaniego, A, 2024.

## 2.2. Repaso de Teoría de Probabilidades

En esta sección se revisará nociones básicas de la Teoría de Probabilidad las cuales permitirán una comprensión mejor del método de Fast Barnes.

**Definición 2.4** (Variable Aleatoria). Una variable aleatoria,  $X$ , se define como una función medible del espacio muestral a los números reales  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, una variable aleatoria por lo tanto asigna un número real a cada resultado posible de un experimento aleatorio.

Una variable aleatoria es esencialmente una regla o mecanismo para generar números reales aleatorios. Por otro lado, si  $\Omega$  es finito o numerable entonces, se dice que  $X$  es una variable aleatoria discreta mientras que si  $\Omega$  es no numerable entonces, se dice que  $X$  es una variable aleatoria continua.

**Definición 2.5** (Función de repartición o función de distribución acumulativa). La función de repartición de una variable aleatoria  $X$  viene dada por

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t).$$

La función de repartición satisface las propiedades siguientes:

1.  $F_X(-\infty) = \mathbb{P}(X \leq -\infty) = 0$  y  $F_X(+\infty) = \mathbb{P}(X \leq \infty) = 1$ .
2.  $F_X$  es una función creciente de  $t$ .
3. Si  $b > a$ , entonces  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .
4.  $F_X$  es continua por la derecha: es decir,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(t+h) = F_X(t)$ .

**Definición 2.6** (Función de densidad o Función de probabilidad). Sea  $X$  una variable aleatoria con función de repartición  $F_X$  continua. Entonces, la función de probabilidad de  $X$  se define como:

$$f_X(t) = F_X'(t).$$

Según el Teorema Fundamental del Cálculo, la función de repartición  $F_X$  se puede escribir en términos de la función de probabilidad,  $f_X$ , de la siguiente manera:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

Mientras que si  $X$  una variable aleatoria discreta con función de repartición  $F_X$  entonces, la función de probabilidad de  $X$  se define como

$$f_X(t) = \mathbb{P}(X = t).$$

**Definición 2.7** (Probabilidad conjunta). Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias. La función de distribución conjunta de  $X$  e  $Y$  está dada por

$$F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

**Definición 2.8** (Variables aleatorias independientes). Sean  $X$  e  $Y$  cualesquiera variables aleatorias (continuas o discretas).  $X$  e  $Y$  son independientes si, y solo si,

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $X$  e  $Y$  son discretas, son independientes si, y sólo si, su función de probabilidad conjunta es el producto de sus funciones de probabilidad individuales:

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y),$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes si no tienen efecto entre sí. Esto significa que la probabilidad de que ambos tomen valores específicos simultáneamente es el producto de las probabilidades individuales.

**Definición 2.9** (Esperanza de una variable aleatoria). Sea  $X$  una variable aleatoria continua con

función de probabilidad  $f_X$ . La esperanza de  $X$  es

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Mientras que si  $X$  una variable aleatoria discreta con función de probabilidad  $f_X$ . La esperanza de  $X$  es

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \mathbb{P}(X = x).$$

Si  $X(\Omega)$  es infinito, no se está seguro de que exista esperanza.

**Definición 2.10** (Esperanza de  $g(X)$ ). Sea  $X$  una variable aleatoria continua, y sea  $g$  una función. La esperanza de  $g(X)$  es

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Mientras que si  $X$  es una variable aleatoria discreta, y sea  $g$  una función. La esperanza de  $g(X)$  es

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x).$$

**Propiedades** (Propiedades de la Esperanza). 1. Sean  $g$  y  $h$  funciones, y sean  $a$  y  $b$  constantes.

Para cualquier variable aleatoria  $X$  (discreta o continua),

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)].$$

En particular,

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b.$$

2. Sean  $X$  e  $Y$  cualquier variable aleatoria (discreta, continua, independiente o no independiente).

Entonces,

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Más generalmente, para cualquier variable aleatoria  $X_1, \dots, X_n$ ,

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n].$$

3. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes, y sean  $g$  y  $h$  funciones. Entonces,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)].$$

Se recalca que  $E(XY) = E(X)E(Y)$  es generalmente cierto solo si  $X$  e  $Y$  son **independientes**. Además, si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ . Sin embargo, el recíproco no es generalmente cierto: es posible que  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  incluso si  $X$  e  $Y$  son dependientes.

**Definición 2.11** (Varianza). Sea  $X$  una variable aleatoria. La varianza de  $X$  es

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

La varianza es la desviación media al cuadrado de una variable aleatoria con respecto a su propio valor esperado. Si  $X$  tiene una varianza alta, podemos observar valores de  $X$  muy alejados del valor esperado. Si  $X$  tiene una varianza baja, los valores de  $X$  tienden a agruparse estrechamente en torno al valor esperado.

**Definición 2.12** (Covarianza). Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias. La covarianza entre  $X$  e  $Y$  viene dada por

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Se nota que la covarianza es una medida de la asociación o dependencia entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ . La covarianza puede ser positiva o negativa. Y además, se cuenta con las siguientes consecuencias:

1.  $\text{cov}(X, Y)$  será positivo si los valores grandes de  $X$  tienden a ocurrir con valores grandes de  $Y$ , y los valores pequeños de  $X$  tienden a ocurrir con valores grandes de  $Y$ , y valores pequeños de  $X$  tienden a ocurrir con valores pequeños de  $Y$ .
2.  $\text{cov}(X, Y)$  será negativo si valores grandes de  $X$  tienden a ocurrir con valores pequeños de  $Y$ , y valores pequeños de  $X$  tienden a ocurrir con valores grandes de  $Y$ .
3. Si  $X$  e  $Y$  son independientes, no existe un patrón entre valores grandes de  $X$  y valores grandes de  $Y$ , por lo que  $\text{cov}(X, Y) = 0$ . Sin embargo,  $\text{cov}(X, Y) = 0$  **no implica** que  $X$  e  $Y$  sean independientes.

**Definición 2.13** (Vector Aleatorio). Cuando se trabaja con múltiples variables aleatorias, a veces es útil utilizar notaciones vectoriales y matriciales. Cuando tenemos  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se puede ponerlas en un vector  $\mathbb{X}$  :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Se llama a  $\mathbb{X}$  vector aleatorio. Donde  $\mathbb{X}$  es un vector  $n$  dimensional porque está formado por  $n$  variables aleatorias.

**Definición 2.14** (Esperanza de un vector aleatorio). La esperanza de un vector aleatorio  $\mathbb{X}$  se define como

$$\mathbb{E}[\mathbb{X}] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{E}[X_2] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix}.$$

**Definición 2.15** (Matriz de correlación y matriz de covarianza). Para un vector aleatorio  $\mathbb{X}$ , se define la matriz de correlaciones,  $R_{\mathbb{X}}$ , como

$$R_{\mathbb{X}} = \mathbb{E}[\mathbb{X}\mathbb{X}^T] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1^2] & \mathbb{E}[X_1X_2] & \dots & \mathbb{E}[X_1X_n] \\ \mathbb{E}[X_2X_1] & \mathbb{E}[X_2^2] & \dots & \mathbb{E}[X_2X_n] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbb{E}[X_nX_1] & \mathbb{E}[X_nX_2] & \dots & \mathbb{E}[X_n^2] \end{bmatrix}.$$

Mientras que la matriz de covarianza,  $C_{\mathbb{X}}$ , se define como

$$C_{\mathbb{X}} = \mathbb{E}[(\mathbb{X} - \mathbb{E}[\mathbb{X}])(\mathbb{X} - \mathbb{E}[\mathbb{X}])^T] = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix},$$

donde la matriz de covarianza es una generalización de la varianza de una variable aleatoria.

**Definición 2.16** (Vectores aleatorios gaussianos). Sea  $\mathbb{X}$  un vector aleatorio de dimensión  $n$  y  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sus componentes. Se dice que  $\mathbb{X}$  es un vector aleatorio gaussiano de dimensión  $n$  si, para todos los reales  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , la variable aleatoria real  $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$  es una variable aleatoria real gaussiana.

Para hallar la forma general de la función de probabilidad de un vector aleatorio gaussiano es conveniente partir del caso más sencillo en el que las  $X_i$  son independientes e idénticamente distribuidas,  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . En este caso, sabemos cómo encontrar la ley conjunta. Es simplemente el producto de las leyes *marginales*. A tal vector aleatorio se denomina vector aleatorio normal

estándar. Así pues

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{bmatrix},$$

donde  $Z_i$  son independientes e idénticamente distribuidas y  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{Z_i}(z_i) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right). \end{aligned}$$

Para un vector aleatorio normal estándar  $\mathbf{Z}$ , donde las  $Z_i$  son independientes e idénticamente distribuidas y  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , la función de probabilidad viene dada por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right).$$

Ahora se mencionará acerca de la convergencia en ley, también conocida como convergencia en distribución, es un concepto fundamental en la teoría de probabilidades que describe cómo las distribuciones de una secuencia de variables aleatorias se aproximan a una distribución límite conforme el número de observaciones tiende al infinito. Este tipo de convergencia es crucial en el análisis asintótico, permitiendo que variables aleatorias con distribuciones conocidas sean utilizadas para aproximar distribuciones más complejas en grandes muestras. Por ejemplo, en el Teorema Central del Límite, la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas converge en distribución a una variable aleatoria normal. Esta propiedad es esencial en el estudio de vectores gaussianos, cuya distribución conjunta converge en ley hacia una distribución normal multivariante, facilitando el análisis del método de Fast Barnes.

**Definición 2.17** (Convergencia en ley). Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias y  $X$  una variable aleatoria, se dice que la sucesión  $(X_n)_N$  converge en ley hacia la variable aleatoria  $X$ , si para la sucesión de probabilidades  $(\mathbb{P}_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  y la función de probabilidad  $\mathbb{P}_X$  se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h d\mathbb{P}_X$$

para toda función continua y acotada  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejemplo.** Para cada  $n$ , sea  $\mathbb{P}_n$  la medida de probabilidad en  $\mathbb{R}$  que satisface

$$\mathbb{P}_n \left( \left\{ \frac{k}{n} \right\} \right) = \frac{1}{n} \quad \text{para } k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

y sea  $\mathbb{P}$  la medida de Lebesgue restringida al intervalo  $[0, 1]$ . Entonces, la sucesión de probabilidades  $\mathbb{P}_n$  converge a  $\mathbb{P}$ . En particular, si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada y continua, entonces

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} h \left( \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_{[0,1]} h dm \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para el siguiente teorema, recordemos que la distribución normal estándar es la medida de probabilidad en  $\mathbb{R}$  definida por la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} x^2 \right).$$

**Teorema 2.3** (Teorema Central del Límite). Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión independiente e idénticamente distribuida de variables aleatorias cuadrado integrable, con esperanza  $m \in \mathbb{R}$  y varianza  $\sigma^2$ . Para todo número natural no nulo  $n$ , se define  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Entonces, la sucesión de variables aleatorias  $\left( \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en ley hacia una variable aleatoria gaussiana centrada de varianza  $\sigma^2$ .

Mientras que su versión vectorial dice que

**Teorema 2.4** (Teorema Central del Límite (caso vectorial)). Sean  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión independiente e idénticamente distribuida de vectores aleatorios de dimensión  $n$ , cuadrado integrable, con esperanza  $m \in \mathbb{R}^n$  y matriz de covarianza  $C_{\mathbb{X}}$ . Para todo número natural no nulo  $k$ , definimos  $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ . Entonces, la sucesión de las leyes de los vectores aleatorios  $\left( \frac{S_k - km}{\sqrt{k}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  converge hacia la ley gaussiana de dimensión  $n$ ,  $\mathcal{N}_n(0, C_{\mathbb{X}})$ .

*Demostración.* La demostración de los teoremas precedentes se pueden encontrar en el Capítulo 7, Sección 7.1 de (Saussereau, 2014). □

Después de haber revisado los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades, es crucial entender cómo estas bases se aplican en métodos prácticos de análisis y procesamiento de datos. Una de las herramientas más importantes en este contexto es la convolución, la cual permite desarrollar métodos de aproximación utilizando funciones regulares. En la siguiente sección, exploraremos en resumen la convolución y su relevancia en el método de Fast Barnes.

### 2.3. Convolución

La convolución es una herramienta esencial en el desarrollo de diversos métodos de aproximación mediante funciones regulares. Su aplicación permite suavizar y analizar datos de manera precisa, facilitando la implementación de técnicas avanzadas en el procesamiento y modelado de señales y datos.

**Definición 2.18** (Convolución). Sean  $f$  y  $g$  dos funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . El producto de convolución entre las funciones  $f$  y  $g$  es una función que es notada por  $f * g$  y que está definida por medio de la expresión

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy. \quad (2.14)$$

Se recuerda que el producto de convolución no puede darse en ciertos casos específicos. Por ejemplo, si alguna de las funciones involucradas no es integrable, es decir, si no pertenece al espacio  $L^1$ , entonces la convolución no está bien definida. En efecto, consideremos las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{para } x \neq 0, \quad g(x) = e^{-x} \quad \text{para } x \geq 0.$$

La función  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  no es integrable sobre  $\mathbb{R}$  porque la integral de  $\frac{1}{x^2}$  diverge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Ambas integrales son divergentes, por lo que  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ . Como  $f$  no es integrable, la convolución  $(f * g)(x)$  no está bien definida. Esto ilustra un caso en el que el producto de convolución no puede darse debido a que una de las funciones involucradas no es integrable.

Existen muchas condiciones diferentes bajo las cuales esta operación está definida. Si el producto  $f(y)g(x-y)$  es una función integrable de  $y$ , entonces  $f * g(x)$  está definido por una integral absolutamente convergente. Por ejemplo, si  $g$  está acotada con soporte acotado, entonces solo es necesario que  $f$  sea localmente integrable para que  $f * g$  esté definido. En este capítulo, utilizamos métodos de análisis funcional para extender la definición de convolución a situaciones en las que estas integrales no son absolutamente convergentes. Esto sigue de cerca el patrón establecido para extender la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Propiedades** (Propiedades del producto de convolución). Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  tres funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces se tienen las siguientes identidades:

1.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ,

2.  $f * (g + h) = f * g + f * h$ ,
3.  $(f + g) * h = f * h + g * h$ ,
4. si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces se tiene  $(\lambda f) * g = f * (\lambda g)$ .

Si la convolución se definiera sin “reflejar” el argumento de la segunda función a través del origen, es decir, si  $f * g(x) = \int f(y)g(y-x) dy$ , entonces el producto de convolución no sería conmutativo. En su lugar, tendríamos la identidad  $f * g(x) = g * f(-x)$ .

### 2.3.1. Autoconvolución

La autoconvolución de una función  $f$  es un caso particular de la convolución donde la misma función se convoluciona consigo misma. Se define como:

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y) dy \quad (2.15)$$

Este proceso es útil en diversas aplicaciones, como en el análisis de señales y en el procesamiento de imágenes, donde se desea estudiar cómo una función se modifica a sí misma a través de la convolución.

Por ejemplo, si  $f(x)$  es una función de densidad de probabilidad, la autoconvolución de  $f(x)$  da la densidad de la suma de dos variables aleatorias independientes con la misma distribución que  $f$ . Es importante destacar que la autoconvolución puede proporcionar información sobre la dispersión y la forma de la función original, ya que combina la función con una versión reflejada y desplazada de sí misma.

Por otro lado, para una función  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la convolución  $n$  veces consigo misma  $f^{*n}$  se define por

$$f^{*(n+1)}(x) = (f * f^{*n})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f^{*n}(x-y) dy \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

con  $f^{*1} = f$ .

O de forma equivalente, se tiene que

$$f^{*(n+1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1) \dots f(y_n) f(x - t_1 - \dots - t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

En el caso de una función integrable de dos variables  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  la autoconvolución  $n$  veces  $f^{*n}$  está dada por

$$\begin{aligned} f^{*(n+1)}(x, y) &= f * f^{*n}(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) \cdot f^{*n}(x-s, y-t) ds dt \end{aligned}$$

para  $n \in \mathbb{N}$  y con  $f^{*1}(x,y) = f(x,y)$ .

**Ejemplo.** Se considera la función  $f$  definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La autoconvolución de  $f$ , denotada como  $(f * f)$ , se calcula como:

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y) dy$$

Dado que  $f$  se anula fuera del intervalo  $[-1, 1]$ , la integral se puede simplificar. Se considera los siguientes casos:

1. Para  $|x| > 2$ :

$$(f * f)(x) = 0$$

porque los intervalos de  $f(y)$  y  $f(x-y)$  no se superponen.

2. Para  $|x| \leq 2$ :

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y) dy = \int_{-1}^1 f(y)f(x-y) dy$$

Dentro del intervalo  $[-1, 1]$ , la función  $f(x)$  es 1. Así, se tiene:

$$(f * f)(x) = \int_{-1}^1 f(y)f(x-y) dy$$

Dependiendo de  $x$ , los límites de la integral se ajustan:

1. Para  $0 \leq x \leq 2$ :

$$(f * f)(x) = \int_{x-1}^1 1 dy = 1 - (x-1) = 2-x$$

2. Para  $-2 \leq x < 0$ :

$$(f * f)(x) = \int_{-1}^{x+1} 1 dy = (x+1) - (-1) = x+2$$

En resumen, la autoconvolución  $(f * f)$  es una función definida como:

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 2, \\ 2+x & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ 2-x & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

## 2.4. Correcciones Sucesivas

Durante la década de 1950, el avance de la Predicción Numérica del Tiempo impulsó el desarrollo de técnicas de análisis para el diagnóstico espacial a partir de observaciones puntuales irregulares. En este contexto, el Método de Correcciones Sucesivas (SCM) emergió como una técnica iterativa para modificar el campo analizado, basándose en las diferencias entre observaciones y valores previamente analizados. Las técnicas de ajuste polinómico utilizadas inicialmente resultaron insatisfactorias, lo que llevó a un perfeccionamiento de los métodos iterativos en el análisis meteorológico.

En 1955, Bergthorsson y Doos propusieron un método innovador que introducía funciones de peso para ajustar funciones univariadas, reduciendo significativamente las demandas computacionales. Este enfoque, conocido como el Método de Correcciones Sucesivas, aplicaba iterativamente correcciones a un conjunto de datos. Las ponderaciones originales se determinaron empíricamente, sentando las bases para el desarrollo futuro de la interpolación estadística.

### 2.4.1. Formulación del método

El Método de Correcciones Sucesivas considera un conjunto de  $k$  observaciones  $f_0(r_k)$ , donde  $r_k$  denota la posición de cada observación. El conjunto de datos iniciales evaluados en cada punto  $r_i$  puede ser representado como una combinación lineal de las observaciones  $f_0(r_k)$ . Cada observación  $k$  contribuye al valor evaluado en el punto  $i$  con un determinado peso  $W_0(r_{ik})$ , el cual generalmente disminuye con la distancia. Si asumimos que no hay errores asociados a las observaciones, entonces el conjunto de datos iniciales se expresa como sigue:

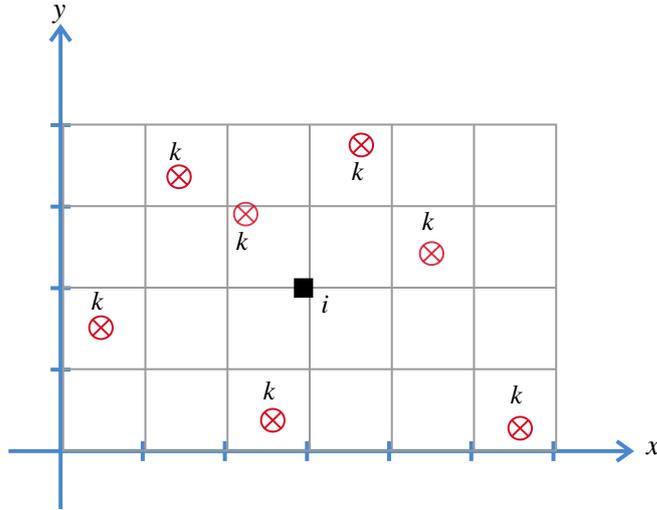
$$f_A^0(r_i) = \sum_{k=1}^K W_0(r_{ik}) f_0(r_k). \quad (2.17)$$

El cálculo del conjunto de datos iniciales analizados en la iteración  $j + 1$  a partir del campo de la iteración anterior se obtiene a través de la diferencia entre las observaciones  $f_0(r_k)$  y el valor que toma en cada punto de observación  $r_k$  el campo de la iteración  $j$ :

$$f_A^{j+1}(r_i) = f_A^j(r_i) + \sum_{k=1}^K W_{j+1}(r_{ik}) [f_0(r_k) - f_A^j(r_k)], \quad (2.18)$$

donde  $W_j(r_{ik})$  indica el peso que se le da a una observación en función de la distancia  $x_k - x_i$ , se define como:

$$W_j(r_{ik}) = \frac{w_j(r_{ik})}{\sum_{k=1}^K w_j(r_{ik})}. \quad (2.19)$$



**Ilustración 2-7:** Ejemplo de conjunto de datos a evaluarse.  
Realizado por: Samaniego, A, 2024.

Estableciéndose así el Método de Correcciones Sucesivas,

$$f_i^{j+1} = f_A^j(r_i) + \left[ \frac{\sum_{k=1}^K w_j(r_{ik}) [f_0(r_k) - f_A^j(r_k)]}{\sum_{k=1}^K w_j(r_{ik})} \right]. \quad (2.20)$$

Consecuentemente, se presentan tres propiedades fundamentales:

1.  $\sum_{k=1}^{K_i} w_j(r_{ik}) \leq 1$ .
2.  $w_j(r_{ik}) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K_i$
3.  $w_j(r_{ik})$  es independiente de la distancia entre las observaciones.

Estas propiedades aseguran que los pesos asignados a cada observación cumplan con las condiciones necesarias para una correcta interpolación, manteniendo la no negatividad y la independencia de la distancia entre observaciones.

La primera propiedad se deriva de la ecuación (2.19). La segunda propiedad implica que el algoritmo de corrección no es capaz de realizar ninguna extrapolación significativa. Además, la tercera propiedad se sostiene porque el peso  $w_{ik}$  depende únicamente de la distancia de la observación desde el punto de análisis.

Para ilustrar esto, se considera dos observaciones situadas a la misma distancia del punto de análisis en la cuadrícula. Se tiene dos escenarios: en el primero, las estaciones de observación están casi ubicadas en el mismo lugar; en el segundo, las dos estaciones de observación están en lados opuestos del punto de análisis en la cuadrícula. En ambos casos, debido a la independencia de los pesos

respecto a la posición relativa de las estaciones, el algoritmo aplicará las mismas ponderaciones, subrayando así la consistencia de la interpolación independientemente de la distribución espacial de las observaciones.

Cuando las dos observaciones están casi ubicadas en el mismo lugar, la segunda observación aporta escasa información adicional sobre la variable de estado que no esté ya disponible en la primera observación. Por el contrario, cuando las dos observaciones están muy separadas, la segunda observación proporciona información nueva y valiosa que no se encuentra en la primera. No obstante, el algoritmo de corrección no discrimina entre estas dos situaciones y pasa por alto las correlaciones entre las observaciones. Como resultado, las observaciones en áreas con alta densidad de datos reciben un peso excesivo en comparación con las observaciones en áreas con baja densidad de datos.

Cabe notar que se han desarrollado diversos métodos para calcular el factor de peso en el análisis de datos meteorológicos. Este documento se centrará en el estudio y la aplicación de dos métodos prominentes: el método de Cressman y el método de Fast Barnes.

## **2.5. Método de Cressman**

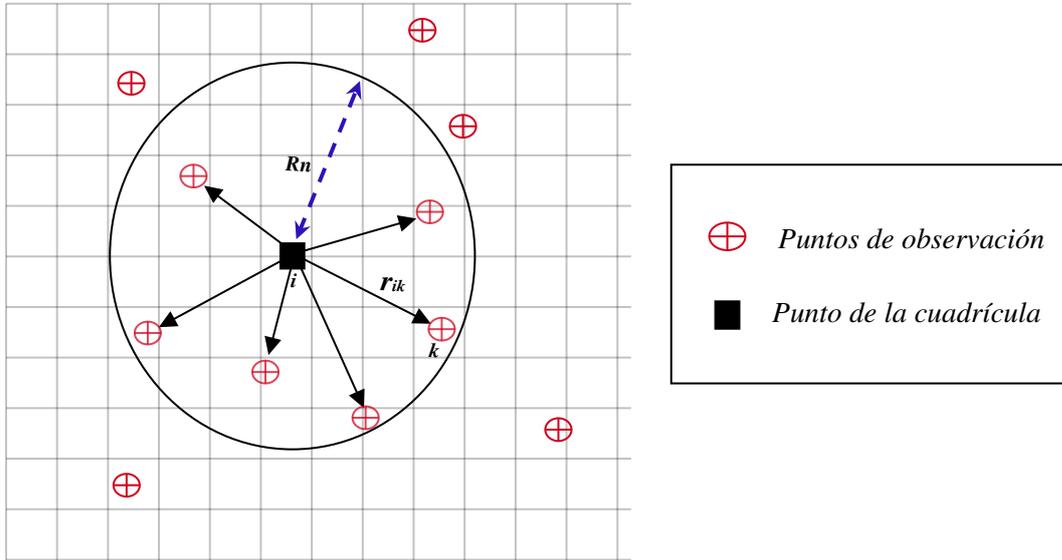
El método empírico de Cressman es una técnica empleada en el análisis meteorológico para interpolar datos dispersos de estaciones meteorológicas y estimar valores en ubicaciones no observadas. Desarrollado por el meteorólogo John Cressman a finales de la década de 1950 (Cressman, 1959), este enfoque se basa en la utilización de ponderaciones empíricas ajustadas según la experiencia y la observación de patrones climáticos.

A diferencia de los métodos puramente matemáticos, como la interpolación inversa de la distancia, el método empírico de Cressman se fundamenta en la intuición del meteorólogo y en su comprensión de la dinámica atmosférica local. Cressman propuso un sistema en el que las observaciones más cercanas a un punto de interés tienen un peso mayor en la estimación, reflejando la tendencia natural de que las condiciones atmosféricas varían de manera gradual en el espacio.

Este método no solo permite una mayor precisión en la interpolación de datos meteorológicos, sino que también incorpora el conocimiento experto del meteorólogo, haciendo que las estimaciones sean más robustas y adaptadas a las particularidades del entorno climático local.

Cressman realiza varias consideraciones fundamentales en su método de interpolación. Primero, define una región específica para el análisis. Luego, utiliza un conjunto de observaciones correspondientes a las mediciones realizadas en el momento exacto en que se desea llevar a cabo el análisis. A continuación, establece un conjunto de radios de influencia que representan la distancia entre un punto de observación y un punto de la malla. Finalmente, introduce una función

de peso que determina la relación entre la estación de observación y el punto de la cuadrícula que se está calculando. Estas consideraciones permiten una interpolación más precisa de los datos meteorológicos, ajustando las ponderaciones de acuerdo con la proximidad de las observaciones y, de esta manera, mejorando la exactitud del análisis.



**Ilustración 2-8:** Representación de la zona de influencia del método de Cressman  
Realizado por: Samaniego, A, 2024.

El método de Cressman calcula los valores en los puntos de la cuadrícula, denotados como  $f_i^{j+1}$  (donde  $i$  y  $j$  son los índices de los puntos de la rejilla en una cuadrícula 2D), como la media ponderada de la diferencia entre los valores observados,  $f_O(r_k)$ , y los valores de *background* interpolados a las ubicaciones de observación,  $f_A^j(r_k)$ . Esta diferencia, denominada incremento de observación,  $f_O(r_k) - f_A^j(r_k)$ , se suma al valor de fondo en el punto de la cuadrícula,  $f_A^j(r_i)$ . Matemáticamente, esto se expresa como:

$$f_i^{j+1} = f_A^j(r_i) + \frac{\sum_{k=1}^K w_j(r_{ik}) [f_O(r_k) - f_A^j(r_k)]}{\sum_{k=1}^K w_j(r_{ik})} \quad (2.21)$$

donde  $w_j(r_{ik})$  son los pesos asociados a cada observación  $k$  y a cada punto de la cuadrícula  $(i, j)$ , y  $f_O(r_k)$  representa los valores observados. A su vez, los pesos de Cressman,  $w_j(r_{ik})$ , se definen como

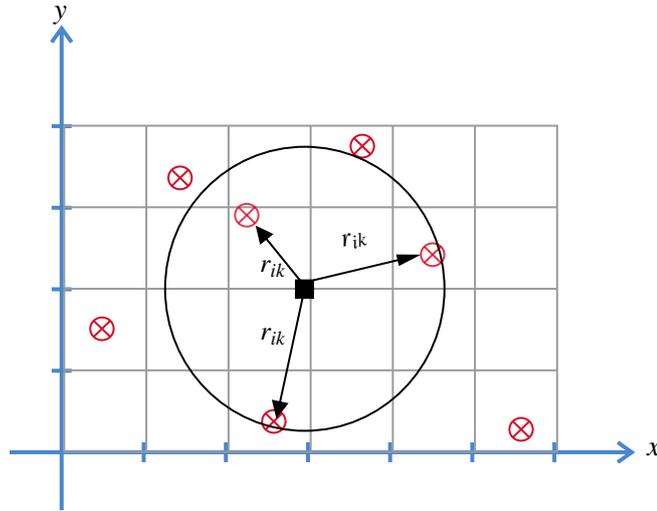
$$w_j(r_{ik}) = \begin{cases} \frac{R_n^2 - r_{ik}^2}{R_n^2 + r_{ik}^2} & \text{si } r_{ik}^2 \leq R_n^2, \\ 0 & \text{si } r_{ik}^2 > R_n^2, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde  $r_{ik}$  representa la distancia entre el punto de observación  $k$  y el punto de la malla  $i$ , y  $R_n$  es

el radio de influencia. La distancia entre un punto de observación y un punto de la malla,  $r_{ik}$ , se calcula utilizando la distancia euclidiana:

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \quad (2.23)$$

donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del punto en la cuadrícula y  $(x_k, y_k)$  son las coordenadas del punto de observación.

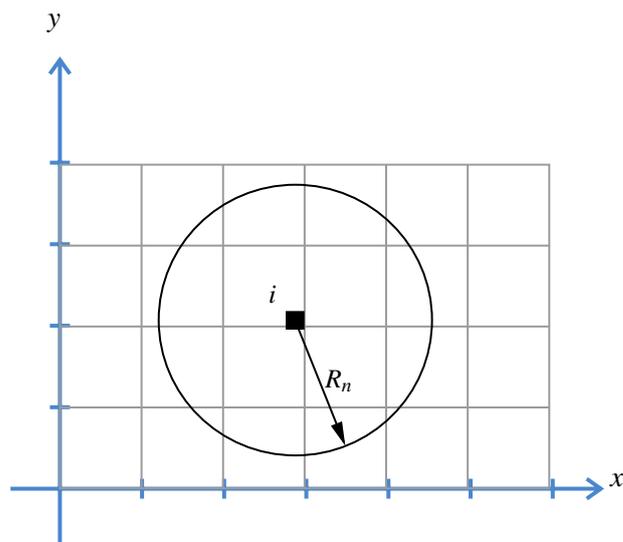


**Ilustración 2-9:** Método de Cressman con la distancia euclidiana.

Realizado por: Samaniego, A. 2024.

Por lo tanto, al utilizar la distancia euclidiana, las estaciones meteorológicas más cercanas al punto de interés recibirán un mayor peso en la estimación. Esto resultaría en una interpolación más precisa y coherente con la realidad, ya que las condiciones atmosféricas tienden a variar gradualmente en el espacio.

Ahora, el radio de influencia,  $R_n$ , es un parámetro fundamental que determina la distancia máxima a la cual las observaciones de puntos circundantes pueden afectar la estimación en un punto específico. Este radio define el área alrededor del punto de interés en la que se consideran los valores de los puntos vecinos para realizar la interpolación.



**Ilustración 2-10:** Radio de influencia para método de Cressman.

**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.

La elección del radio de influencia depende de varios factores, como la distribución de los puntos de datos, la variabilidad espacial de la variable de interés y el nivel de detalle deseado en la estimación. Un radio de influencia mayor incorporaría más puntos vecinos en el cálculo, lo que podría suavizar la interpolación pero también incluir más variabilidad. Por otro lado, un radio de influencia menor se centraría en puntos más cercanos, lo que podría producir una estimación más detallada pero también más susceptible a la variabilidad local.

Para seleccionar el radio de influencia adecuado, es importante considerar la distribución de los puntos de datos. En áreas con alta densidad de estaciones, un radio de influencia menor puede capturar mejor las variaciones locales. En contraste, en regiones con pocas estaciones, un radio de influencia mayor puede ser necesario para abarcar suficientes datos y evitar una interpolación de baja precisión. También es fundamental considerar la variabilidad espacial de la variable de interés. Fenómenos de pequeña escala, como las tormentas locales, requieren un radio de influencia menor para capturar los detalles precisos, mientras que fenómenos de gran escala, como los frentes meteorológicos, pueden necesitar un radio de influencia mayor para reflejar correctamente las variaciones espaciales amplias.

Además, el nivel de detalle deseado influye en la selección del radio de influencia. Un radio de influencia menor proporciona una estimación más detallada, lo cual es útil para estudios locales y análisis de alta resolución, pero puede aumentar la sensibilidad a la variabilidad local. En cambio, un radio de influencia mayor proporciona una estimación más suave y menos detallada, adecuada para estudios regionales o globales. Por último, realizar pruebas y validaciones es crucial para determinar el radio de influencia óptimo. Esto puede implicar dividir el conjunto de datos en partes de entrenamiento y prueba, y evaluar la precisión de la interpolación con diferentes valores de radio

de influencia.

En resumen, la selección del radio de influencia es un equilibrio entre la precisión de la interpolación y la capacidad de capturar las variaciones espaciales de la variable de interés. La consideración cuidadosa de estos factores ayudará a mejorar la exactitud y la relevancia de los resultados obtenidos.

## 2.6. Método de Fast Barnes

El método de Barnes (Barnes, 1964) es una técnica ampliamente empleada en disciplinas como meteorología y oceanografía para completar valores de datos recopilados en ubicaciones irregulares dentro de un conjunto de datos espaciales. Fue ideado en los años 60 por el meteorólogo Larry Barnes el cual propone utilizar un factor de ponderación derivado de la distribución bidimensional de una variable atmosférica. Este enfoque se basa en la premisa de que estas distribuciones visuales pueden ilustrar patrones espaciales y variaciones de la variable en una región específica.

Formalmente, el método de Barnes se puede definir para una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D$  es el región del estudio. Para un punto arbitrario  $x \in D$  y un conjunto dado de puntos muestrales  $x_k \in D$  con valores de observación  $f_k \in \mathbb{R}$  para  $k = 1, \dots, N$ , se define como:

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^N W_k(x) f_k \quad (2.24)$$

donde los pesos  $W_k(x)$  se calculan mediante:

$$W_k(x) = \exp\left(-\frac{r_{xk}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.25)$$

En esta expresión,  $r_{xk}$  es la distancia euclidiana entre el punto  $x$  y el punto de muestra  $x_k$ , y  $\sigma$  es un parámetro que controla la amplitud del factor de ponderación.

El método de corrección sucesiva de Barnes mejora iterativamente esta estimación inicial. En cada iteración  $n$ , se ajusta la función interpolada utilizando la diferencia entre los valores observados y los valores interpolados en las ubicaciones de observación. La corrección para la  $n$ -ésima iteración se expresa como:

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^N W_k(x) (f_k - f^{(n-1)}(x_k)) \quad (2.26)$$

donde  $f^{(n-1)}(x_k)$  representa el valor de la función interpolada en la iteración anterior en el punto de observación  $x_k$ . Este proceso de corrección sucesiva se repite hasta que las diferencias entre las iteraciones sucesivas sean suficientemente pequeñas, indicando que la interpolación converge a la solución.

Cabe notar que en (Zürcher, 2022), se propone una técnica nueva y rápida para calcular muy buenas aproximaciones de la interpolación de Barnes, denominada Fast Barnes. Mientras que (Koch, DesJardins y Kocin, 1983) proponen una variante del método de Barnes.

### 2.6.1. Dedución del peso de Fast Barnes

En esta sección, se presentará una deducción detallada del *peso* utilizado en el método de Fast Barnes, explorando su fundamentación teórica y su relación con las correcciones sucesivas aplicadas a los datos meteorológicos.

Para comprender esta metodología, se definen dos funciones,  $\overset{x}{*}$  y  $\overset{y}{*}$ , cuya aplicación va desde  $L^1(\mathbb{R}^2) \times L^1(\mathbb{R})$  hacia  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . Estos operadores se definen de la siguiente manera:

$$f \overset{x}{*} g_1(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y) \cdot g_1(x-s) ds, \quad f \overset{y}{*} g_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y) \cdot g_2(y-t) dt, \quad (2.27)$$

donde  $f$ ,  $g_1$  y  $g_2$  pertenecen a  $L^1(\mathbb{R})$ .

Nótese que en estas funciones,  $\overset{x}{*}$  realiza la convolución a lo largo del eje  $x$  mientras que  $\overset{y}{*}$  a lo largo del eje  $y$ .

Con estas funciones, se llega a

$$\begin{aligned} f * g(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) \cdot g(x-s,y-t) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) \cdot g_1(x-s) ds \right) g_2(y-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f \overset{x}{*} g_1(x,t)) \cdot g_2(y-t) dt = f \overset{x}{*} g_1 \overset{y}{*} g_2(x,y). \end{aligned}$$

Del hecho de que se puede cambiar el orden de integración, se deduce lo siguiente:

$$f * g(x,y) = f * (g_1(x) \cdot g_2(y)) = f \overset{x}{*} g_1 \overset{y}{*} g_2(x,y) = f \overset{y}{*} g_2 \overset{x}{*} g_1(x,y). \quad (2.28)$$

Por lo tanto, los dos operandos  $g_1$  y  $g_2$  conmutan, pero es importante tener en cuenta que las funciones unidireccionales a su izquierda también deben intercambiarse con ellos.

La convolución  $n$ -doble con una función separable se descompone así:

$$f * g^{*n}(x,y) = f * (g_1(x) \cdot g_2(y))^{*n} = f \overset{x}{*} g_1 \overset{y}{*} g_2 \cdots \overset{x}{*} g_1 \overset{y}{*} g_2(x,y).$$

Debido a la ley de conmutación (2.28), básicamente se puede escribir los operadores en la derecha

de  $f$  en cualquier orden, agrupándolos como

$$f * g^{*n}(x, y) = f * g_1 \cdots * g_1 * g_2 \cdots * g_2(x, y) = f * g_1^{*n} * g_2^{*n}(x, y). \quad (2.29)$$

Dado que la última fórmula parece un poco engorrosa, se utiliza nuevamente la expresión (2.28) para unir los dos  $n$ -dobles autoconvoluciones a una función separable, que se expresa como

$$f * g^{*n}(x, y) = f * \left( g_1^{*n}(x) \cdot g_2^{*n}(y) \right). \quad (2.30)$$

Dado que se han discutido algunas consecuencias de las  $n$ -autoconvoluciones hacia una distribución gaussiana, nos enfocamos ahora en la convergencia de estas  $n$ -autoconvoluciones hacia una ley de probabilidad gaussiana. Para el siguiente análisis, se asume que la media es  $\mu = 0$  y se denotará  $p(x)$  como la función de densidad de la sucesión de variables aleatorias  $\left( \frac{1}{\sqrt{n}} X_k \right)_{k=1, \dots, n}$  que, en consecuencia tienen varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

Recordemos que la función de densidad de la suma de variables aleatorias independientes corresponde a la convolución de sus funciones de densidad de probabilidad individuales (Belk, s.f, pág. 18), así:

$$\mathbb{P} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq a \right) = \int_{-\infty}^a p^{*n}(x) dx$$

donde  $p^{*n}$  denota la convolución  $n$  veces de  $p$  consigo misma.

A partir de este resultado, se puede escribir el Teorema Central del Límite de manera equivalente como sigue:

$$p^{*n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right), \quad (2.31)$$

lo que conduce directamente a la siguiente aproximación. Para  $n$  suficiente grande, la autoconvolución  $n$  veces de una función de densidad de probabilidad  $f$  con media  $\mu = 0$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$  se aproxima a una gaussiana con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Es decir,

$$p^{*n}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right). \quad (2.32)$$

Es importante destacar que esta aproximación es válida para funciones de densidad arbitrarias  $p$  con media  $\mu = 0$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ . Un ejemplo de una función de densidad de probabilidad simple es la ley de probabilidad uniforme. Por lo tanto, definimos una sucesión de leyes de probabilidad uniformes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , en la cual cada término  $u_n$  tiene media 0 y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

Estas funciones de densidad de probabilidad uniformes se pueden expresar mediante funciones

rectangulares elementales.

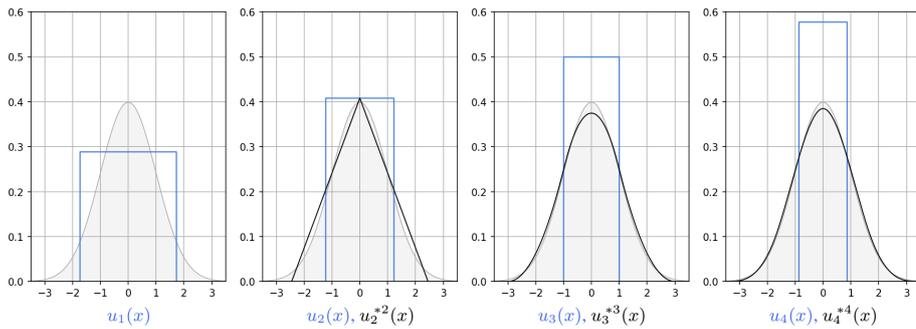
$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \sqrt{\frac{3}{n}}\sigma \text{ donde } n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.33)$$

tal que

$$u_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{n}}}\sigma r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{n}}} & \text{si } |x| \leq \sqrt{\frac{3}{n}}\sigma \text{ donde } n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de esta definición, está claro que  $\mathbb{E}[u_n] = 0$  y  $\text{Var}(u_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ . Según la relación de convergencia (2.31) y la aproximación (2.32), la sucesión de las  $n$ -dobles auto-convoluciones  $(u_n^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en ley hacia una ley normal con media cero y varianza  $\sigma^2$ .

El comportamiento convergente puede examinarse visualmente en la Figura 2-11, que representa la  $n$ -doble autoconvolución de los primeros miembros de la familia.



**Ilustración 2-11** Diferentes funciones convolucionadas.

Realizado por: Zurcher, Bruno, 2022.

Se observa, de izquierda a derecha, lo siguiente: en azul, las gráficas de las funciones de probabilidad de las distribuciones uniformes  $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$  y  $u_4(x)$  para  $\sigma = 1$ ; en negro, sus autoconvoluciones  $u_2^{*2}(x), u_3^{*3}(x)$  y  $u_4^{*4}(x)$ . El área cubierta por la ley de probabilidad de la distribución normal se indica en gris.

Ahora, suponiendo que  $X_k$  tiene un vector de esperanza  $\mu = 0$  y una matriz de covarianza  $\Sigma$ , podemos seguir la misma línea de argumentación que en el caso unidimensional. Sea  $p$  la función de densidad conjunta de las variables aleatorias escaladas  $(\frac{1}{\sqrt{n}}X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , que, por lo tanto, tienen un vector de esperanza igual a cero y una matriz de covarianza  $\frac{1}{n}\Sigma$ . Entonces, la ley límite se escribe en  $m$  dimensiones como:

$$p^{*n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}x^T \Sigma^{-1}x}. \quad (2.34)$$

Para continuar, se establece el caso cuando  $m = 2$ , donde  $\mathbb{E}[X] = 0$ ,  $\mathbb{E}[Y] = 0$ , y además  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ ,  $\text{Var}(Y) = \sigma^2$  con  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes. Se recuerda que los vectores aleatorios  $X_k$  no muestran preferencia por una dirección espacial específica, así, la matriz de covarianza se expresa como  $\Sigma = \sigma^2 \mathbb{I}$ , puesto que  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) = 0$  y  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2$ .

Posteriormente, se establece que

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x})}$$

donde  $\det \Sigma = \sigma^4$ , y entonces  $\sqrt{\det \Sigma} = \sigma^2$  y  $m = 2$ .

Seguidamente, se demostrará que  $\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x}\|^2$ . Dado que hemos definido  $\mathbf{x} = (x, y)$ , entonces:

$$\mathbf{x}' \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} [x, y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Así, la función de densidad de probabilidad en términos de  $\mathbf{x}$  es:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{x}\|^2}.$$

Por lo tanto, en dos dimensiones, esto simplifica la ley de probabilidad límite a:

$$p^{*n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|x\|^2}. \quad (2.35)$$

Ahora, se busca reemplazar  $p$  con los elementos de la sucesión  $(u_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$  de leyes uniformes bidimensionales independientes en un dominio de forma cuadrada. Estas leyes de probabilidad se definen como:

$$u_n^{(2)}(x, y) = u_n(x) u_n(y) = \begin{cases} \frac{n}{12\sigma^2} & \text{si } |x|, |y| \leq \sqrt{\frac{3}{n}} \sigma, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Con esta especificación, los miembros  $u_n^{(2)}$  tienen un vector medio 0 y una matriz de covarianza *isotrópica*  $\frac{\sigma^2}{n} \mathbb{I}$ , y por tanto, satisfacen la condición de la ley límite (2.35). Es importante notar que  $u_n^{(2)}(x, y)$  es separable, ya que se expresa como  $u_n(x) * u_n(y)$ . Esto se debe a que  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por lo tanto, la autoconvolución  $n$ -veces de

$u_n^{(2)}(x)$  es en sí misma separable, es decir,

$$(u_n^{(2)})^{*n}(x, y) = (u_n(x) \cdot u_n(y))^{*n} = u_n^{*n}(x) \cdot u_n^{*n}(y) = \left(\frac{n}{12\sigma^2}\right)^n r_n^{*n}(x) r_n^{*n}(y), \quad (2.37)$$

donde los operadores  $\overset{x}{*}$  y  $\overset{y}{*}$  denotan convolución unidimensional en la dirección  $x$  e  $y$ , respectivamente. Sustituyendo  $p(x)$  en la ecuación (2.35) por el lado derecho de la ecuación (2.37), se obtiene

$$\left(\frac{n}{12\sigma^2}\right)^n r_n^{*n}(x) r_n^{*n}(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|x\|^2}. \quad (2.38)$$

Para un  $n$  suficientemente grande, la autoconvolución  $n$ -veces de la función de probabilidad uniforme bidimensional  $\frac{n}{12\sigma^2} r_n(x) r_n(y)$  se aproxima a una ley normal bivariada con vector medio nulo y matriz de covarianza  $\sigma^2 \mathbb{I}$ , es decir,

$$\left(\frac{n}{12\sigma^2}\right)^n r_n^{*n}(x) r_n^{*n}(y) \approx \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|x\|^2}, \quad (2.39)$$

donde  $r_n(x)$  es una función definida como;

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \sqrt{\frac{3}{n}}\sigma \text{ donde } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta comprensión de la separabilidad y las propiedades de la autoconvolución, se puede avanzar hacia la interpolación de Fast Barnes. Este método se basa en la idea de utilizar una serie de convoluciones para suavizar y ajustar datos dispersos, proporcionando una técnica eficaz para la interpolación en contextos meteorológicos y otros campos donde los datos pueden ser irregulares o incompletos.

### 2.6.2. Interpolación de Barnes como serie de convoluciones

Sea  $\Phi_{\mu, \sigma}(\mathbb{x})$  la función de probabilidad normal bidimensional con vector medio  $\mu$  y varianza isotrópica  $\sigma^2$ , definida como

$$\Phi_{\mu, \sigma}(\mathbb{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}-\mu\|^2}.$$

Nótese que  $\Phi_{0, \sigma}(\mathbb{x})$  coincide con el lado derecho de la aproximación (2.39). Además, se considera  $\delta_{\mathfrak{a}}(\mathbb{x})$  como la medida de Dirac en el punto  $\mathfrak{a}$ , la cual satisface la propiedad

$$\delta_{\mathfrak{a}} * f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{x} - \mathfrak{a}).$$

Bajo estas consideraciones, se puede expresar

$$\Phi_{\mu,\sigma}(\mathbb{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}-\mu\|^2} = \delta_{\mu} * \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}\|^2} \right) = \delta_{\mu} * \Phi_{0,\sigma}(\mathbb{x}). \quad (2.40)$$

Por tanto, una suma ponderada gaussiana como la que se encuentra en el numerador de la interpolación de Barnes (2.20) en  $\mathbb{R}^2$  se puede escribir como una convolución:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N f_k \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}-\mathbb{x}_k\|^2} &= 2\pi\sigma^2 \sum_{k=1}^N f_k \cdot \Phi_{\mathbb{x}_k,\sigma}(\mathbb{x}) \\ &= 2\pi\sigma^2 \sum_{k=1}^N f_k \cdot (\delta_{\mathbb{x}_k} * \Phi_{0,\sigma})(\mathbb{x}), \end{aligned}$$

Gracias a la propiedad distributiva y a la asociatividad del operador de convolución con respecto a la multiplicación escalar, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum_{k=1}^N f_k \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}-\mathbb{x}_k\|^2} = 2\pi\sigma^2 \sum_{k=1}^N (f_k \cdot \delta_{\mathbb{x}_k}) * \Phi_{0,\sigma}(\mathbb{x}) = 2\pi\sigma^2 \left( \sum_{k=1}^N f_k \cdot \delta_{\mathbb{x}_k} \right) * \Phi_{0,\sigma}(\mathbb{x}). \quad (2.41)$$

Sustituyendo  $\Phi_{0,\sigma}(\mathbb{x})$  con la aproximación (2.39), se obtiene para  $n$  suficientemente grande que

$$\sum_{k=1}^N f_k \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{x}-\mathbb{x}_k\|^2} \approx 2\pi\sigma^2 \left( \frac{n}{12\sigma^2} \right)^n \left( \sum_{k=1}^N f_k \cdot \delta_{\mathbb{x}_k} \right) * \left( r_n^x(x) \cdot r_n^y(y) \right). \quad (2.42)$$

Para el denominador de la interpolación de Barnes (2.20), se puede usar la misma expresión, pero estableciendo los coeficientes  $f_k$  en 1. Dado que los factores comunes en el numerador y el denominador se cancelan entre sí, se puede establecer que para un  $n$  suficientemente grande, la interpolación de Barnes para el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  puede aproximarse mediante

$$f(x,y) \approx \frac{\left( \sum_{k=1}^N f_k \delta_{\mathbb{x}_k} \right) * \left( r_n^x(x) r_n^y(y) \right)}{\left( \sum_{k=1}^N 1 \delta_{\mathbb{x}_k} \right) * \left( r_n^x(x) r_n^y(y) \right)} \quad (2.43)$$

siempre que el denominador esté definido.

En resumen, la interpolación de Barnes puede aproximarse de manera eficiente utilizando el cociente de dos expresiones de convolución. Ambas expresiones consisten en una serie de medidas de Dirac distribuidas de forma irregular, seguidas por una serie de convoluciones con una función rectangular unidimensional de ancho gaussiano  $2\sigma\sqrt{\frac{3}{n}}$ , aplicadas  $n$  veces tanto en la dirección  $x$  como en la dirección  $y$ . Dado que la convolución es una operación conmutativa, el orden de las convoluciones no altera significativamente el resultado.

### 2.6.3. Generalización de la aproximación de Fast Barnes

La aproximación presentada en (2.39), calculada de izquierda a derecha, es particularmente eficiente desde el punto de vista computacional y es aplicable en contextos más generales, incluyendo leyes de probabilidad no uniformes. Específicamente, utilizando una ley normal con media 0 y varianza  $\sigma^2$ , se puede derivar una expresión de convolución que sea equivalente a la interpolación de Barnes. Para la derivación de (2.39), se utiliza una ley de probabilidad bidimensional separable que consiste en dos leyes de probabilidad uniformes unidimensionales. Este resultado puede ampliarse empleando leyes marginales más generales. Para ello, sean  $p_1$  y  $p_2$  dos leyes de probabilidad unidimensionales con media 0 y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ . Ahora, definimos la ley de probabilidad bidimensional  $p = p_1 p_2$ , la cual tiene un vector de media 0 y una matriz de covarianza  $\frac{\sigma^2}{n} \mathbb{I}$ . En consecuencia, las leyes de probabilidad  $p$  construidas de este modo satisfacen las hipótesis del Teorema Central del Límite. Por lo tanto, se deduce que, para  $n$  suficientemente grande, la interpolación de Barnes en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  puede aproximarse mediante

$$f(x,y) \approx \frac{\left( \sum_{k=1}^N f_k \cdot \delta_{x_k} \right) * \left( p_1^{*n}(x) \cdot p_2^{*n}(y) \right)}{\left( \sum_{k=1}^N 1 \cdot \delta_{x_k} \right) * \left( p_1^{*n}(x) \cdot p_2^{*n}(y) \right)} \quad (2.44)$$

siempre que el cociente esté definido.

En la práctica, es común que  $p_1$  y  $p_2$  sean idénticos. Utilizando la ley normal  $\Phi_{0,\sigma}(x)$  con media 0 y varianza  $\sigma^2$ , es decir,

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

a partir de la ecuación (2.41) se concluye que es posible expresar la interpolación de Barnes mediante una expresión de convolución en la que se mantiene la igualdad. En resumen, todo lo anterior constituye la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\Phi_{0,\sigma}(x)$  la distribución normal con vector medio 0 y varianza  $\sigma^2$ . Para la interpolación de Barnes en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , se cumple lo siguiente:*

$$f(x,y) \approx \frac{\left( \sum_{k=1}^N f_k \cdot \delta_{x_k} \right) * (\Phi_{0,\sigma}(x) \cdot \Phi_{0,\sigma}(y))}{\left( \sum_{k=1}^N 1 \cdot \delta_{x_k} \right) * (\Phi_{0,\sigma}(x) \cdot \Phi_{0,\sigma}(y))}.$$

En muchas aplicaciones de procesamiento de señales y estadísticas, se utiliza la convolución de datos con una ley de probabilidad normal para suavizar los datos. Debido a que la convolución de una ley normal con sí misma resulta en otra distribución normal, una sola aplicación de la

convolución es suficiente para lograr el suavizado deseado. Así, si los datos originales ya siguen una distribución normal, la primera convolución produce un efecto óptimo de suavización, manteniendo las propiedades de la distribución original.

Después de abordar los métodos de interpolación de Cressman, Barnes y Fast Barnes, nos enfocaremos en el análisis del error y la convergencia de las correcciones sucesivas. Este análisis es crucial para comprender la precisión y eficacia de estos métodos en la estimación de datos meteorológicos.

## **2.7. Análisis del Error y la Convergencia de las Correcciones Sucesivas**

El análisis del error y la convergencia de los métodos de interpolación basados en correcciones sucesivas, como los métodos de Cressman y Fast Barnes, es fundamental para asegurar la precisión y fiabilidad de las estimaciones en la interpolación de datos meteorológicos. Este análisis se puede desglosar en varias etapas, cada una de las cuales aborda aspectos específicos de la metodología.

### **2.7.1. Definición del Error**

El error en un método de interpolación puede definirse de diversas maneras. Una de las formas más comunes es calcular la diferencia absoluta entre las iteraciones consecutivas. Para un campo de datos  $f$ , el error en la  $j$ -ésima iteración se define como:

$$\text{Error} = |f_A^j - f_A^{j+1}|,$$

donde  $f_A^j$  es el valor interpolado en la iteración  $j$  y  $f_A^{j+1}$  es el valor interpolado en la iteración  $j + 1$ . Este error nos proporciona una medida de cuánto ha cambiado la solución entre dos iteraciones sucesivas.

### **2.7.2. Criterio de Convergencia**

Para determinar si un método iterativo ha convergido, es necesario definir un criterio de convergencia. Generalmente, se considera que el método ha convergido cuando el error es menor que un umbral predefinido  $\varepsilon$ :

$$|f_A^j - f_A^{j+1}| < \varepsilon.$$

Este criterio asegura que las iteraciones sucesivas no producen cambios significativos en el valor interpolado, lo que indica que el método ha alcanzado una solución estable.

### 2.7.3. Análisis del Error en los Métodos de Cressman y Fast Barnes

Para el método de Cressman, el error en la interpolación puede ser analizado mediante la ponderación empírica basada en la distancia entre los puntos de observación y los puntos de la malla. La función de peso decrece con la distancia, lo que implica que las observaciones más cercanas tienen una mayor influencia en el valor interpolado. Esto puede formalizarse como:

$$f_A^{j+1}(x,y) = f_A^j(x,y) + \sum_i w_i(x,y) (f_i - f_A^j(x,y)),$$

donde  $w_i(x,y)$  es la función de peso que depende de la distancia entre el punto de observación  $i$  y el punto de la malla  $(x,y)$ .

Para el método Fast Barnes, la interpolación utiliza una función de ponderación gaussiana que proporciona una interpolación más suave y refinada mediante iteraciones sucesivas. La fórmula general para la iteración  $j + 1$  es:

$$f_A^{j+1}(x,y) = f_A^j(x,y) + \alpha \sum_i e^{-\frac{d_i^2}{2\sigma^2}} (f_i - f_A^j(x,y)),$$

donde  $\alpha$  es un factor de ajuste y  $d_i$  es la distancia entre el punto de observación  $i$  y el punto de la malla  $(x,y)$ .

### 2.7.4. Convergencia de las Correcciones Sucesivas

La convergencia de los métodos iterativos se verifica observando si el error disminuye a lo largo de las iteraciones. Esto puede expresarse como:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f_A^{j+1}(x,y) - f_A^j(x,y)| = 0.$$

Esta condición asegura que las diferencias entre iteraciones consecutivas tienden a cero, indicando que el método ha convergido.

Este análisis proporciona una base sólida para entender la precisión y la eficacia de los métodos de interpolación de datos meteorológicos, destacando la importancia del análisis del error y la convergencia en la aplicación de estos métodos en entornos prácticos.

## 2.8. Ejemplo de aplicación

Con el objetivo de explorar de manera detallada el método de Cressman, utilizado para la interpolación de variables meteorológicas, analizaremos a continuación un caso específico con el

fin de ilustrar su aplicación práctica y comprender en profundidad su funcionamiento.

**Ejemplo.** Dado un radio de influencia de 25km para la malla, con la estación meteorológica ESPOCH ubicada en la posición  $(-183.33, -8752.13)$  y algunos puntos de la malla en la posición  $(-183.99, -8743.41)$ ,  $(-180.54, -8696.41)$ ,  $(-177.85, -8740.41)$ ,  $(-175.69, -8741.22)$  y con temperaturas de  $18^\circ\text{C}$ ,  $17^\circ\text{C}$ ,  $16,5^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$  y  $15^\circ\text{C}$  respectivamente.

**Paso 1.** Inicializar la Malla

Inicializamos la malla con una estimación inicial. Usaremos una media inicial de las observaciones:

$$f_A^0(r_i) = \frac{18 + 17 + 16.5 + 20 + 15}{5} = 17.3^\circ\text{C}$$

**Paso 2.** Iterar las correcciones

Para ello usamos la fórmula (2.20) para actualizar las estimaciones en la malla:

$$f_i^{j+1} = f_A^j(r_i) + \left[ \frac{\sum_{k=1}^4 w_j(r_{ik}) [f_0(r_k) - f_A^j(r_k)]}{\sum_{k=1}^4 w_j(r_{ik})} \right].$$

Donde la función de peso se expresa:

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{25^2 - r_{ik}^2}{25^2 + r_{ik}^2} & \text{si } r_{ik} \leq 25, \\ 0 & \text{si } r_{ik} > 25, \end{cases}$$

con,

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

y a su vez  $x_i - x_j$  y  $y_i - y_j$  representan las diferencias en latitud y longitud, respectivamente.

**Iteración 1**

Calculamos la distancia euclidiana y la función de peso entre la estación meteorológica ESPOCH y los puntos de la malla.

Primer punto de la malla,

$$r_{ik} = \sqrt{[-183.33 - (-183.99)]^2 + [-8752.13 - (-8743.91)]^2}$$

$$r_{ik} = \sqrt{0.4356 + 67.5684} = 8.24645 < 25$$

Por consiguiente,

$$\omega_{ij} = \frac{25^2 - (8.24645)^2}{25^2 + (8.24645)^2} = \frac{556.996}{693.004} = 0.80374$$

Segundo punto de la malla

$$r_{ik} = \sqrt{[-183.33 - (-180.54)]^2 + [-8752.13 - (-8696.41)]^2}$$

$$r_{ik} = \sqrt{7.7841 + 3104.7184} = 55.7898 > 25$$

Por consiguiente,

$$\omega_{ij} = 0$$

Tercer punto de la malla,

$$r_{ik} = \sqrt{[-183.33 - (-177.85)]^2 + [-8752.13 - (-8740.41)]^2}$$

$$r_{ik} = \sqrt{30.0304 + 147.1369} = 13.3104 < 25$$

Por consiguiente,

$$\omega_{ij} = \frac{25^2 - (13.3104)^2}{25^2 + (13.3104)^2} = \frac{447.8333}{802.1667} = 0.5582$$

Cuarto punto de la malla,

$$r_{ik} = \sqrt{[-183.33 - (-175.69)]^2 + [-8752.13 - (-8741.22)]^2}$$

$$r_{ik} = \sqrt{58.3696 + 119.0281} = 13.3104 < 25$$

Por consiguiente,

$$\omega_{ij} = \frac{25^2 - (13.3104)^2}{25^2 + (13.3104)^2} = \frac{447.8333}{802.1667} = 0.5582$$

Luego,

$$f_A^1 = 17.3 + \frac{0.80374(17 - 17.13) + 0.5582(20 - 17.13) + 0.5582(15 - 17.13)}{0.80374 + 0 + 0.5582 + 0.5582}$$

$$f_A^1 \approx 17.29$$

### Paso 3. Error

El error en el método de Cressman se puede calcular comparando los valores interpolados con los valores conocidos en los puntos de observación:

$$Error = |f_A^j - f_i^{j+1}|,$$

es decir,

$$Error = |17.3 - 17.29|,$$

$$Error = 0.01,$$

#### **Paso 4. Convergencia**

Definimos un criterio de convergencia, que la diferencia entre iteraciones sea menor que un umbral  $\varepsilon$  :

$$\text{máx } |f_A^j - f_i^{j+1}| < \varepsilon$$

fijamos  $\varepsilon = 0.01$  y continuamos iterando hasta que se cumpla esta condición. Pero debido a que la condición se cumplió, el proceso de iteración ha culminado.

En este ejemplo específico, el método de Cressman es iterativo y se ajusta sucesivamente las estimaciones en la malla basándose en las observaciones y sus pesos. A través de iteraciones, se espera que la malla converja a una representación fiel de los datos observacionales. La convergencia se asegura si el error entre iteraciones sucesivas disminuye a un nivel aceptable.

## CAPÍTULO III

### 3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo, abordamos los pilares conceptuales que respaldan la metodología utilizada en la presente indagación sobre el método de Cressman y Fast Barnes para la interpolación de variables meteorológicas, se detalla el enfoque, diseño y alcance que se utilizaron para responder a los objetivos planteados y abordar el problema de investigación.

#### 3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

La investigación utiliza un enfoque cualitativo con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Ya que se enfocó principalmente en la revisión bibliográfica de fuentes secundarias, con el fin de comprender y detallar las Correcciones Sucesivas junto con los métodos de Cressman y Fast Barnes. En tal virtud, el presente trabajo de titulación adopta un enfoque cualitativo con el objetivo de profundizar en los fundamentos teóricos subyacentes a los métodos mencionados, buscando deducir su criterio de convergencia y error y así optar por el más adecuado.

Además, este enfoque se complementa con un alcance de investigación descriptivo que aborda los métodos de interpolación; en particular, Cressman, Fast Barnes y Splines bicúbicos, su aplicación en el relleno de datos faltantes de temperatura y precipitación contribuye a entender mejor su eficacia en el análisis climático.

El tipo de investigación llevado a cabo es de naturaleza documental, donde se realiza una revisión selectiva de documentos relacionados con la interpolación de Splines bicúbicos en una malla climatológica, específicamente asociados a los métodos Cressman y Fast Barnes. Además, se emplean recursos tecnológicos avanzados, como el lenguaje de programación Python, tanto para la implementación como para la evaluación de la eficiencia de los métodos en el proceso de rellenar datos de temperatura.

En la elaboración de la monografía se consideraron las siguientes directrices:

1. Selección y organización del material bibliográfico.
2. Revisión bibliográfica relacionada a los métodos de Cressman, Fast Barnes, Splines bicúbicos y Correcciones sucesivas.
3. Estudio y análisis de los métodos Cressman y Fast Barnes.

4. Estudiar las cotas del error de los métodos de interpolación.
5. Aplicación de los métodos Cressman y Fast Barnes para el relleno de datos y análisis de variables climatológicas, sobre el lenguaje de programación de Python.
6. Aplicación de Correcciones sucesivas para ajustar el conjunto de datos espaciales.
7. Descripción y análisis de los resultados.
8. Consolidación del documento de titulación.

## CAPÍTULO IV

### 4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se exponen los resultados obtenidos mediante la aplicación de los métodos de Cressman y Fast Barnes para la interpolación de datos de temperatura en la provincia de Chimborazo. El método de Cressman se basa en una técnica de interpolación que utiliza un enfoque de distancia ponderada; asigna la temperatura de estaciones cercanas, ajustándola según su proximidad. Para garantizar la coherencia entre los puntos interpolados, se establece un radio de influencia específico para cada estación. Mientras que, Fast Barnes implementa una versión avanzada del algoritmo de Barnes, que aprovecha una función de ponderación gaussiana para crear campos de temperatura homogéneos y minimizar las discontinuidades en las estimaciones. Esta comparativa ofrece una base para determinar el método más adecuado y preciso para la estimación de temperaturas.

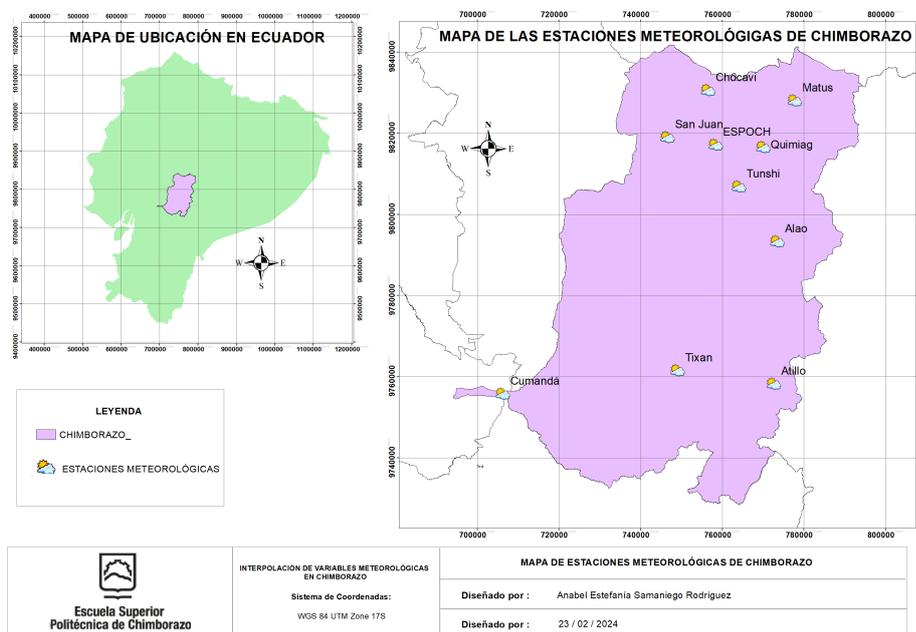
#### 4.1. Recopilación de datos de temperatura

La recopilación de datos sobre la temperatura se realizó en la provincia de Chimborazo, situada en la región interandina o sierra, abarcando un área de alrededor de  $6500,66 \text{ km}^2$ . Esta provincia limita al norte con la Provincia de Tungurahua, al sur con la provincia de Cañar, al este con la provincia de Morona Santiago y Cañar, y al oeste con la provincia de Bolívar y Guayas. Con una altitud que varía desde los 135 hasta los 6310 metros sobre el nivel del mar. Los datos de temperatura fueron obtenidos del El Grupo de Investigación de Energías Alternativas y Ambiente “GEAA” de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, que recopiló información de 11 estaciones meteorológicas distribuidas en la provincia de Chimborazo 4.1. Estos datos fueron registrados en intervalos horarios durante el período comprendido entre 2014 y 2022.

Estación Meteorológica	Latitud	Longitud	Altura (m)
Alao	9793173	773499	3064
Atillo	9758048	772610	3467
Chocavi	9830457	756526	3486
Cumandá	9755579	706262,4	330.95
ESPOCH	9816965	75398	2754
Matus	9827878	777759	2704
Multitud	9711374	722699,63	1483
Quimiag	9816392	770083,61	2709
San Juan	9818849	746596	3232
Tixan	9761332	749103	3546
Tunshi	9806678	764087	2840

**Tabla 4.1:** Ubicación de las estaciones meteorológicas de Chimborazo

Se presenta un mapa geográfico de la provincia de Chimborazo que indica la ubicación de las estaciones meteorológicas.



**Ilustración 4-1:** Mapa geográfico de las estaciones meteorológicas de la ESPOCH.  
Realizado por: Samaniego, A, 2024.

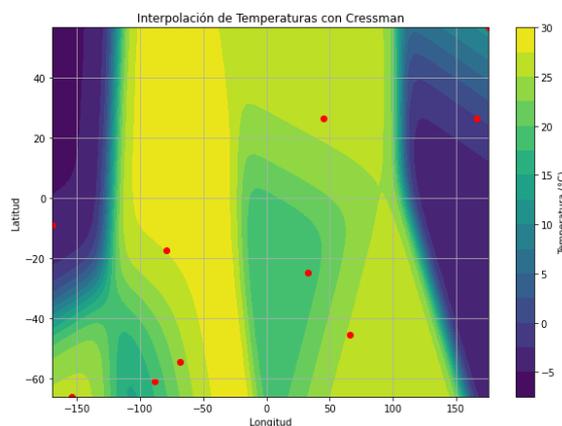
## 4.2. Simulación de los métodos de Cressman, Barnes y Fast Barnes

En esta sección, se presentan las gráficas obtenidas a partir de la simulación numérica para los métodos de Cressman y Fast Barnes para interpolar valores de temperatura, lo que nos conduce a implementar el método de correcciones sucesivas. El objetivo es determinar los perfiles adecuados para la temperatura y comparar los resultados con los métodos Cressman y Fast Barnes, para evaluar su rendimiento.

Para las gráficas obtenidas, se utilizó un conjunto de datos sintéticos para realizar las simulaciones.

### *Simulaciones con el método de Cressman*

A continuación, presentamos las gráficas obtenidas a partir de las simulaciones realizadas utilizando el método de interpolación de Cressman. Estas gráficas se generaron a partir de un conjunto de datos sintéticos, diseñados para emular condiciones de temperatura en diferentes ubicaciones geográficas. Los puntos rojos en las gráficas representan las ubicaciones de las observaciones de temperatura, mientras que el fondo muestra el campo de temperatura interpolado. La escala de colores a la derecha de cada gráfica indica las variaciones de temperatura en grados Celsius, proporcionando una visualización clara de cómo se distribuyen y cambian las temperaturas en el área simulada. La 4-2 los colores en el fondo representan las temperaturas interpoladas. La barra de colores a



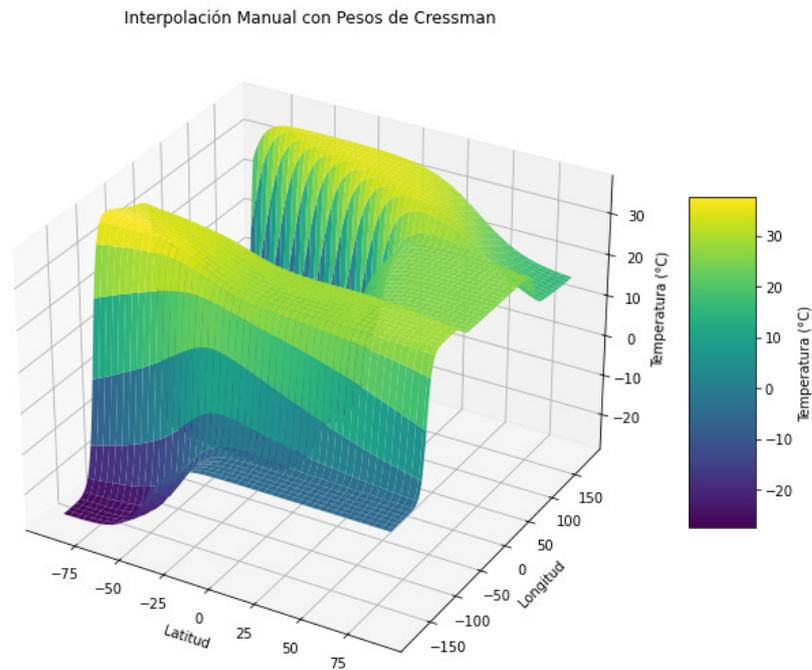
**Ilustración 4-2:** Curvas de nivel de temperatura utilizando el método de Cressman.  
**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.

la derecha indica que las temperaturas varían entre aproximadamente  $-5^{\circ}\text{C}$  y  $30^{\circ}\text{C}$ . Las líneas de contorno muestran gradientes de temperatura, indicando cómo cambian las temperaturas entre las diferentes ubicaciones. Las áreas con colores más cercanos entre sí tienen un cambio de temperatura más rápido.

Los puntos rojos marcan las ubicaciones donde se midieron las temperaturas. La interpolación se basa en estos puntos de datos y su proximidad a otros puntos en la cuadrícula. Cada punto de

observación influye en la interpolación en un radio  $R = 20$ , y esta influencia disminuye con la distancia según la fórmula de los pesos.

Además, los pesos  $W_i$  disminuyen a medida que la distancia  $d_i$  aumenta, lo que significa que las observaciones más cercanas a un punto dado tienen una mayor influencia en la temperatura interpolada en ese punto. La interpolación de Cressman produce curvas de nivel pocas suaves, es decir, que se obtiene curvas con irregularidades, o cambios abruptos en su derivada (esquinas), que refleja las variaciones de temperatura observadas. Las transiciones de color en la imagen indican cambios graduales en la temperatura, correspondientes a las mediciones y su distribución espacial. La 4-3 presenta una superficie 3D de interpolación de temperatura utilizando el método de Cressman. La superficie muestra cómo varían las temperaturas en función de la latitud y la longitud, con una escala de colores que varía de aproximadamente  $-5^{\circ}\text{C}$  a  $25^{\circ}\text{C}$ . La superficie en la gráfica presenta irregularidades o cambios abruptos, lo que indica que las interpolaciones de Cressman pueden producir transiciones bruscas en las temperaturas debido a la alta influencia de las observaciones cercanas.



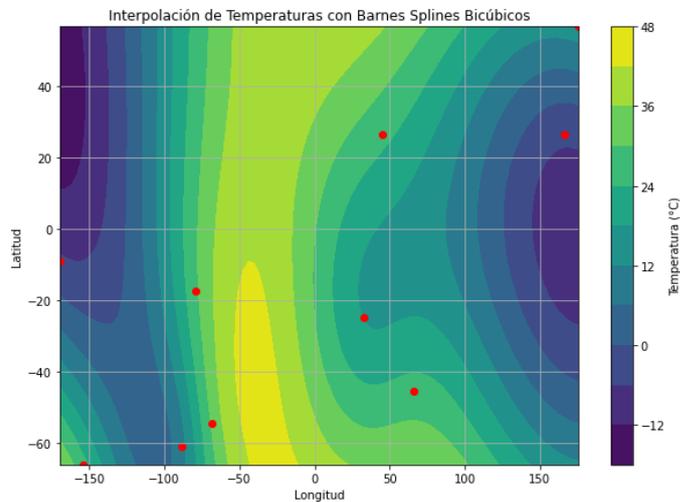
**Ilustración 4-3:** Superficie de temperatura utilizando el método de Cressman.

Realizado por: Samaniego, A, 2024.

A continuación, para contrastar los resultados obtenidos con el método de Cressman, exploraremos la simulación utilizando el método de Barnes.

### *Simulaciones con el método de Barnes*

El método de Barnes, aunque también se basa en la ponderación de las observaciones en función de su proximidad, emplea un enfoque diferente que puede producir superficies interpoladas con características distintas en términos de suavidad y continuidad. Seguidamente, en la 4-4 se presentan las gráficas obtenidas a partir de las simulaciones realizadas utilizando el método de interpolación de Barnes. Los puntos rojos en las gráficas representan las ubicaciones de las observaciones de temperatura, mientras que el fondo muestra el campo de temperatura interpolado. La escala de colores a la derecha de cada gráfica indica las variaciones de temperatura en grados Celsius, proporcionando una visualización clara de cómo se distribuyen y cambian las temperaturas en el área simulada.



**Ilustración 4-4:** Curvas de nivel de temperatura utilizando el método de Barnes.

**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.

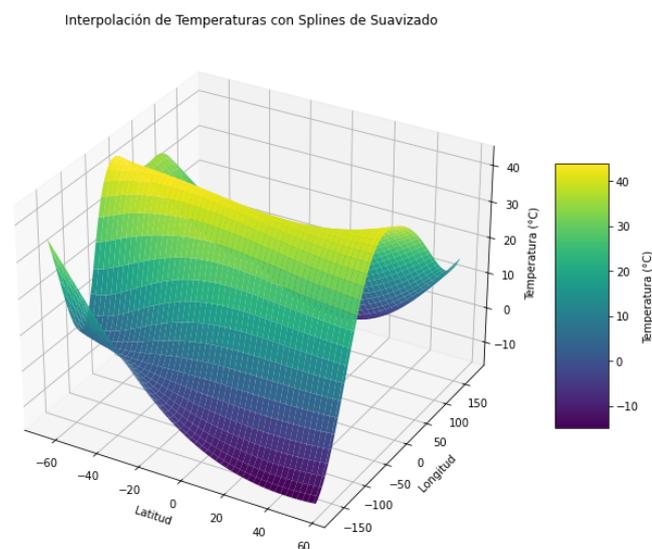
La gráfica presenta una interpolación de temperaturas utilizando el método de Barnes. Esta técnica ajusta los valores de las temperaturas en función de su proximidad a los puntos de observación, utilizando un factor de suavización que controla la influencia de las observaciones cercanas. En esta simulación, se consideró un radio de influencia  $R = 20$ .

Los colores en la gráfica representan la temperatura, con una escala que varía hasta  $48^{\circ}\text{C}$ . Las curvas de nivel en la gráfica son suaves, lo que indica transiciones graduales y continuas en la temperatura. Esto es resultado del uso de splines bicúbicos, que minimizan las irregularidades y las discontinuidades en la superficie interpolada. Las transiciones de color reflejan cambios graduales en la temperatura, correspondiendo a las mediciones y su distribución espacial.

Los pesos en el método de Barnes disminuyen exponencialmente con la distancia, lo que significa que las observaciones más cercanas tienen una mayor influencia en la temperatura interpolada. El parámetro de suavización permite ajustar el grado de suavidad en la superficie interpolada. En

conjunto, la gráfica demuestra cómo el método de Barnes con splines bicúbicos genera un campo de temperatura continuo y suave, proporcionando una representación fluida y precisa de las variaciones de temperatura observadas.

La 4-5 muestra una superficie de interpolación de temperatura utilizando el método de Barnes. En la superficie, se observa una variación de temperaturas de hasta 48°C. La figura presenta una superficie sin irregularidades ni cambios abruptos, lo que indica que las interpolaciones de Barnes pueden describir mejor las transiciones en las temperaturas, incluso con la alta influencia de las observaciones cercanas.



**Ilustración 4-5:** Superficie de temperatura utilizando el método de Barnes.

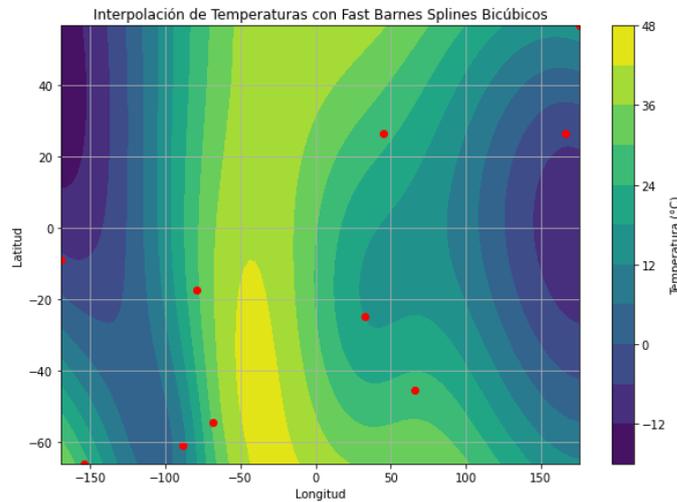
Realizado por: Samaniego, A, 2024.

A continuación, para contrastar los resultados obtenidos con el método de Cressman y Barnes, exploraremos la simulación utilizando el método de Fast-Barnes.

### ***Simulaciones con el método de Fast Barnes***

El método de Fast Barnes, aunque también se basa en la ponderación de las observaciones en función de su proximidad, emplea un enfoque diferente, la estandarización de los datos, que puede producir superficies interpoladas con características distintas en términos de suavidad y continuidad. Además, este método es conocido por su eficiencia computacional, lo que permite realizar interpolaciones más rápidas y manejar grandes conjuntos de datos de manera más eficaz. La estandarización de los datos ayuda a mejorar la precisión y consistencia de la interpolación, reduciendo los efectos de las variaciones extremas en las observaciones. Seguidamente, en la 4-6 se presentan las curvas de nivel obtenidas a partir de las simulaciones realizadas utilizando el método de interpolación de Fast Barnes. Los puntos rojos en las gráficas representan las ubicaciones de las

observaciones de temperatura, mientras que el fondo muestra el campo de temperatura interpolado. La escala de colores a la derecha de cada gráfica indica las variaciones de temperatura en grados Celsius, proporcionando una visualización clara de cómo se distribuyen y cambian las temperaturas en el área simulada.



**Ilustración 4-6:** Curvas de nivel de temperatura utilizando el método de Fast Barnes.

**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.

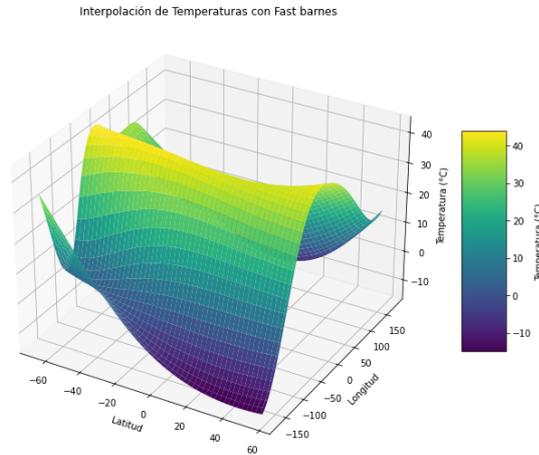
La gráfica presenta una interpolación de temperaturas utilizando el método de Fast Barnes. Esta técnica ajusta los valores de las temperaturas en función de su proximidad a los puntos de observación, utilizando un factor de suavización que controla la influencia de las observaciones cercanas. En esta simulación, se consideró un radio de influencia  $R = 20$ . Además de su capacidad para ponderar las observaciones según su proximidad, el método de Fast Barnes emplea la estandarización de los datos, lo que mejora la precisión y consistencia de la interpolación.

Los colores en la gráfica representan la temperatura, con una escala que varía hasta  $48^{\circ}\text{C}$ . Las curvas de nivel en la gráfica son suaves, lo que indica transiciones graduales y continuas en la temperatura. Esto es resultado del uso de splines bicúbicos, que minimizan las irregularidades y las discontinuidades en la superficie interpolada. Las transiciones de color reflejan cambios graduales en la temperatura, correspondiendo a las mediciones y su distribución espacial.

Los pesos en el método de Fast Barnes disminuyen exponencialmente con la distancia, lo que significa que las observaciones más cercanas tienen una mayor influencia en la temperatura interpolada. El parámetro de suavización y la estandarización permiten ajustar el grado de suavidad en la superficie interpolada. En conjunto, la gráfica demuestra cómo el método de Fast Barnes con splines bicúbicos genera curvas de nivel de temperatura continuas y suaves, proporcionando una representación fluida y precisa de las variaciones de temperatura observadas.

La 4-7 muestra una superficie de interpolación de temperatura utilizando el método de Fast Barnes.

En la superficie, se observa una variación de temperaturas de hasta 48°C. La figura presenta una superficie sin irregularidades ni cambios abruptos, lo que indica que las interpolaciones de Barnes pueden describir mejor las transiciones en las temperaturas, incluso con la alta influencia de las observaciones cercanas.



**Ilustración 4-7:** Superficie de temperatura utilizando el método de Fast Barnes.  
**Realizado por:** Samaniego, A, 2024.

Finalmente, al comparar las gráficas obtenidas con los métodos de Cressman, Barnes y Fast Barnes, se observa que el método de Cressman tiende a producir curvas de nivel con irregularidades y cambios abruptos, reflejando variaciones de temperatura con posibles discontinuidades. Por otro lado, las interpolaciones con los métodos de Barnes y Fast Barnes generan curvas de nivel y superficies más suaves y continuas, sin irregularidades evidentes. Esto indica que los métodos de Barnes y Fast Barnes son más eficaces para capturar transiciones graduales y precisas en las temperaturas, incluso con la alta influencia de las observaciones cercanas, gracias a su enfoque de estandarización de datos y mayor eficiencia computacional.

#### 4.3. Análisis de Validación Cruzada para Métodos de Interpolación

En este estudio, se ha llevado a cabo una validación cruzada utilizando el método *leave-one-out* para evaluar la precisión de tres técnicas de interpolación: Cressman, Barnes y Fast Barnes. La validación cruzada *leave-one-out* implica excluir un punto de datos a la vez, realizar la interpolación con los puntos restantes y luego calcular el error de interpolación en el punto excluido. Este proceso se repite para todos los puntos de datos y se calcula el error cuadrático medio residual (RMS) para cada método y se utilizó el siguiente conjunto de datos sintéticos de latitud, longitud y temperatura:

Punto	Latitud	Longitud	Temperatura (°C)
1	-54.51784538	-68.20226944	30.87458407
2	-9.15393066	-169.30569167	-5.0974499
3	26.28072611	44.79923295	25.59662305
4	-24.93249509	33.02193607	17.77083873
5	-45.75064316	66.03500885	26.33997112
6	56.64646867	175.35570261	15.24838327
7	-66.20277498	-154.4991895	26.11538965
8	-17.67818366	-79.39527977	28.46483243
9	26.26141456	166.53505017	-4.65256915
10	-61.18261798	-88.4977665	9.89846029

**Tabla 4.2:** Datos de latitud, longitud y temperatura utilizados en la validación cruzada

Los resultados obtenidos muestran diferencias significativas en la precisión de los métodos de interpolación. El método de Cressman, que utiliza un enfoque de ponderación local, mostró un error RMS relativamente bajo. Esto se debe a su capacidad para capturar las variaciones locales y los cambios abruptos en los datos de temperatura, lo que le permite ajustar con mayor precisión los valores en las ubicaciones específicas de los puntos de datos.

Por otro lado, el método de Barnes, conocido por producir superficies interpoladas más suaves, presentó un error RMS más alto en comparación con el método de Cressman. Aunque la suavidad visual de la interpolación de Barnes es evidente, la generalización y el alisado pueden llevar a errores más grandes en puntos específicos donde existen variaciones locales pronunciadas que el método no puede capturar con la misma precisión que Cressman. Cabe recordar que en el Capítulo II se mencionó que los splines cúbicos generan curvas suaves pero no necesariamente precisas. Además, las correcciones sucesivas emplean métodos de interpolación lineales, cuadráticos o bicúbicos para realizar la corrección y por ende, va a influir en el cálculo del RMS.

El método Fast Barnes, una variante del método Barnes que también incorpora una técnica de suavizado, mostró un rendimiento intermedio. Aunque produce superficies suavizadas similares a Barnes, el ajuste de los parámetros de suavizado puede ayudar a capturar algunas variaciones locales, reduciendo el error en comparación con Barnes, pero aún así, en general, es mayor que el de Cressman.

En conclusión, aunque los métodos de Barnes y Fast Barnes son más eficaces para visualizar tendencias generales y transiciones suaves, el método de Cressman resulta más adecuado para aplicaciones que requieren una captura precisa de las variaciones locales en los datos. Estos

hallazgos subrayan la importancia de seleccionar el método de interpolación adecuado en función de las características específicas de los datos y los requisitos del análisis.

<b>Método de Interpolación</b>	<b>Error cuadrático medio residual</b>
Cressman	17.555978304202615
Barnes	37.22703320533993
Fast Barnes	37.225094316558966

**Tabla 4.3:** Errores RMS de Validación Cruzada para los Métodos de Interpolación

De esta validación cruzada se desprende la siguiente tabla comparativa para los tres métodos.

<b>Método</b>	<b>Precisión</b>	<b>Suavidad</b>	<b>Eficiencia Computacional</b>
Método de Cressman	Alta	Baja	Moderada
Método de Barnes	Baja	Alta	Alta
Método de Fast Barnes	Baja	Alta	Alta

**Tabla 4.4:** Comparación de métodos de interpolación.

En resumen, los análisis realizados mediante la validación cruzada han permitido evaluar la precisión de los métodos de interpolación Cressman, Barnes y Fast Barnes en la estimación de temperaturas. Los resultados demuestran que, aunque el método de Barnes y su variante Fast Barnes producen superficies más suaves y visualmente continuas, el método de Cressman ofrece una mayor precisión en la captura de variaciones locales, reflejada en un menor error RMS. Esto subraya la importancia de seleccionar el método de interpolación adecuado según las características específicas del conjunto de datos y los objetivos del análisis. La comprensión de las fortalezas y limitaciones de cada método proporciona una base sólida para la aplicación efectiva de técnicas de interpolación en futuros estudios meteorológicos y climáticos.

## CAPÍTULO V

### 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del estudio de los métodos de Cressman, Barnes y Fast Barnes. Asimismo, se ofrecen recomendaciones que podrían ampliar y mejorar el uso de las correcciones sucesivas junto con la interpolación en el relleno de datos meteorológicos. A través de estas conclusiones y recomendaciones, se busca proporcionar un cierre al Trabajo de Integración Curricular y orientar futuras investigaciones en este campo.

#### 5.1. CONCLUSIONES

1. Los fundamentos teóricos de los métodos de Cressman, Fast Barnes, splines bicúbicos y correcciones sucesivas son esenciales para comprender cómo cada técnica aborda la interpolación de datos meteorológicos. El método de Cressman se basa en ponderaciones empíricas que dependen de la distancia entre las observaciones y los puntos de la malla, permitiendo una interpolación sencilla y efectiva para datos dispersos. Por otro lado, el método de Fast Barnes emplea un factor de ponderación derivado de una ley de probabilidad gaussiana, proporcionando una interpolación más suave y refinada mediante iteraciones sucesivas. Los splines bicúbicos, en cambio, utilizan funciones polinómicas para garantizar una interpolación suave y continua, adecuándose especialmente a superficies bidimensionales. La comprensión de estos fundamentos teóricos permite seleccionar la técnica más adecuada según las características del problema y la naturaleza de los datos disponibles.
2. La caracterización de los elementos que componen las correcciones sucesivas y la interpolación de datos meteorológicos incluye identificar los puntos de observación, los puntos de la malla de interpolación, los radios de influencia, y las funciones de ponderación. En el método de Cressman, las ponderaciones se ajustan empíricamente para reflejar la influencia decreciente de las observaciones con la distancia. En el método de Fast Barnes, las iteraciones sucesivas refinan la interpolación inicial utilizando una función de ponderación gaussiana. Estos elementos trabajan en conjunto para mejorar la precisión de la estimación de los valores de la variable de interés en puntos no observados, asegurando que las correcciones sucesivas se adapten a la variabilidad espacial de los datos meteorológicos.
3. La relación sistémica entre los elementos que componen las correcciones sucesivas y la interpolación se manifiesta en la manera en que los pesos, los puntos de observación, y los

puntos de la malla interactúan durante el proceso de interpolación. Tanto en los métodos de Cressman como en los de Fast Barnes, los pesos juegan un papel crucial al determinar la influencia de cada observación en la estimación final. La iteración sucesiva de Fast Barnes refina continuamente la interpolación, integrando las diferencias entre los valores observados y los valores interpolados. Esta interrelación sistémica asegura que el proceso de interpolación sea dinámico y adaptativo, mejorando la precisión y consistencia de las estimaciones en contextos meteorológicos complejos.

4. El método de Cressman demuestra ser el más preciso entre los tres métodos evaluados, con el menor error cuadrático medio residual 17.555978304202615. Esto indica que este método es más eficaz en la captura de las variaciones locales de la temperatura, proporcionando estimaciones más cercanas a los valores observados.
5. Tanto el método de Barnes como su variante, el método de Fast Barnes, generan superficies de interpolación más suaves y visualmente continuas. A pesar de su mayor error cuadrático medio residual 37.22703320533993 y 37.225094316558966, respectivamente; estos métodos son preferibles cuando la suavidad y la continuidad de la superficie interpolada son prioritarias, como en el análisis de patrones meteorológicos amplios.
6. Los resultados resaltan un compromiso entre precisión y suavidad. El método de Cressman, aunque menos suave, proporciona una mayor precisión, lo que es crucial para aplicaciones que requieren una alta resolución y detalle local. En contraste, los métodos de Barnes y Fast Barnes, aunque menos precisos, ofrecen una mayor suavidad, lo cual es beneficioso para representaciones más generales y menos detalladas.
7. La elección del método de interpolación adecuado debe basarse en las características específicas del conjunto de datos y los objetivos del análisis. Para estudios que requieren una alta precisión y captura de detalles locales, el método de Cressman es más adecuado. Por otro lado, para estudios que valoran la suavidad y la continuidad en la interpolación, los métodos de Barnes y Fast Barnes son más apropiados.
8. La comprensión de las fortalezas y limitaciones de cada método proporciona una base sólida para la aplicación efectiva de técnicas de interpolación en futuros estudios meteorológicos y climáticos. Esta evaluación comparativa ayuda a seleccionar la herramienta más adecuada para diferentes contextos y necesidades, optimizando así los resultados y la interpretación de los datos meteorológicos.

## 5.2. RECOMENDACIONES

1. Antes de seleccionar el método adecuado para la interpolación de datos, es esencial evaluar las características del conjunto de datos y los requisitos específicos del análisis. El método de Cressman es ideal para escenarios que requieren eficiencia y adaptación a la densidad de observaciones. Fast Barnes debe ser elegido cuando la precisión es una prioridad y se pueden realizar iteraciones adicionales. Los Splines Cúbicos son más adecuados para interpolaciones que requieren suavidad y flexibilidad.
2. Se recomienda utilizar el método de Cressman cuando la precisión y la capacidad de capturar variaciones locales son prioritarias. Este método es especialmente adecuado para estudios de alta resolución donde los detalles finos son esenciales, como en la detección de microclimas o en la modelización de fenómenos meteorológicos de pequeña escala.
3. Estos métodos son preferibles cuando se requiere una superficie interpolada suave y continua. Son adecuados para estudios a gran escala que buscan identificar patrones amplios y menos detallados, como el análisis de frentes meteorológicos o la creación de mapas climáticos generales.
4. Dado que los métodos de Barnes y Fast Barnes muestran una alta eficiencia computacional, se recomienda su uso en aplicaciones donde el tiempo de procesamiento es crítico, como en sistemas de monitoreo en tiempo real o en simulaciones meteorológicas de gran escala.
5. Independientemente del método seleccionado, es crucial realizar pruebas y validaciones con datos observacionales para calibrar adecuadamente los parámetros de interpolación, como el radio de influencia en el método de Cressman o el parámetro  $\sigma$  en el método de Barnes. Esto garantizará que el método seleccionado esté optimizado para las condiciones específicas del estudio.
6. En situaciones donde se necesita un balance entre precisión y suavidad, se puede considerar una combinación de métodos. Por ejemplo, usar el método de Cressman para áreas de alta densidad de datos y los métodos de Barnes para áreas con menos datos puede proporcionar una interpolación equilibrada.
7. Al aplicar estos métodos, es fundamental documentar detalladamente los parámetros utilizados y los resultados obtenidos. Esto incluye los errores cuadráticos medios residuales y las características del conjunto de datos. Una documentación clara facilita la reproducibilidad y la comparación de resultados en estudios futuros.

8. Se recomienda continuar investigando y desarrollando mejoras en estos métodos de interpolación. Las nuevas tecnologías y enfoques, como el aprendizaje automático, pueden integrarse para mejorar aún más la precisión y eficiencia de las interpolaciones meteorológicas.
9. Se debe fomentar el uso de herramientas y software actualizados que faciliten los ajustes iterativos y la estimación precisa de valores en puntos no observados, garantizando así la máxima precisión y utilidad de las estimaciones meteorológicas. En particular, se recomienda el uso del paquete Fast Barnes de Python, que permite implementar de manera eficiente el método de Fast Barnes, aprovechando las capacidades de procesamiento moderno y mejorando la eficiencia computacional y la precisión de los resultados.

## BIBLIOGRAFÍA

1. **BARNES, Stanley.** “A technique for maximizing details in numerical weather map analysis”. *Journal of Applied Meteorology and Climatology* [en línea], 1964, vol. 3 (4), págs. 396-409.[Consulta: 15 septiembre 2023]. ISSN 0021-8952. Disponible en: [doi:10.1175/1520-0450\(1964\)003%3C0396:atfmdi%3E2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1964)003%3C0396:atfmdi%3E2.0.co;2).
2. **BECH, Joan. & PLA, María del Mar.** Técnicas de análisis objetivo aplicadas al campo de precipitación mesoescalar. *Asociación Española de Climatología* [en línea], 1999, (España), vol. 4 (1), págs. 73-80. [Consulta: 14 noviembre 2023]. ISSN 84-281-0979-6. Disponible en: <http://hdl.handle.net/20.500.11765/9265>
3. **BELK, James.** *Probability II*. [En línea]. s.f. [Consulta: 7 enero 2024]. Disponible en: <https://e.math.cornell.edu/people/belk/measuretheory/Probability2.pdf>
4. **CHICA, José.** Interpolación Spline y aplicación a las curvas de nivel. [En línea]. (Trabajo de titulación) (Pregrado). Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas e Informática. Barcelona-España. 2018. págs. 25-28. [Consulta: 2023-11-23]. Disponible en: <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/122512/2/memoria.pdf>
5. **CRESSMAN, George.** “An operational objective analysis system”. *Monthly Weather Review* [en línea], 1959, vol. 87 (10), págs. 367-374. [Consulta: 20 septiembre 2023]. ISSN 1520-0493. Disponible en: [https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/87/10/1520-0493\\_1959\\_087\\_0367\\_aooas\\_2\\_0\\_co\\_2.xml](https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/87/10/1520-0493_1959_087_0367_aooas_2_0_co_2.xml)
6. **DALEY, Roger.** *Atmospheric data analysis*. 4ª ed. New York-United States of America: Cambridge University Press, 1993. ISBN 0521458250.
7. **DE BOOR, Carl.** “Bicubic spline interpolation”. *Journal of Mathematics and Physics* [en línea], 1962, vol. 41 (1-4), págs 212-218 [Consulta: 10 noviembre 2023]. ISSN 0097-1421. Disponible en: [doi:10.1002/sapm1962411212](https://doi.org/10.1002/sapm1962411212)
8. **EPPERSON, James.** *An introduction to numerical methods and analysis*. John Wiley & Sons, Incorporates, Jhon, 2013. ISBN 9781118626245.
9. **HALL, Charles & MEYER, Weston.** “Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation”. *Journal of Approximation Theory* [en línea], 1976, vol. 16 (2), págs. 105-122 [Consulta:

20 noviembre 2023]. ISSN 0021-9045. Disponible en: doi:10.1016/0021-9045(76)90040-x

**10. HÖLLIG, Klaus & HÖRNER, Jörg.** *Approximation and modeling with B-splines* [en línea]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. [Consulta: 16 noviembre 2023]. ISBN 9781611972948. Disponible en: doi:10.1137/1.9781611972955

**11. KOCH, Steven E., DESJARDINS, Mary & KOCIN, Paul J.** “An Interactive Barnes Objective Map Analysis Scheme for Use with Satellite and Conventional Data”. *Journal of Climate and Applied Meteorology*, 1983, vol. 22 (9), págs. 1487–1503. [Consulta: 20 octubre 2023]. ISSN 0733-3021. Disponible en: doi:10.1175/1520-0450(1983)022%3C1487:aiboma%3E2.0.co;2

**12. LIMONGELLI, M. P. & CARVELLI, V.** “Damage localization in a glass fiber reinforced composite plate via the surface interpolation method”. *Journal of Physics: Conference Series* [en línea], 2015, vol. 628, 012095 [Consulta: 09 octubre 2023]. ISSN 1742-6596. Disponible en: doi:10.1088/1742-6596/628/1/012095

**13. SAUSSEREAU, Bruno.** *Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs* [en línea]. 2014. [Consulta: 30 noviembre 2023]. Disponible en: <https://bichgame.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/01/ctu-1314-saussereau-theorie-des-probabilites.pdf>

**14. ZOU, Haibo et al.** “The application of Barnes filter to positioning the center of landed tropical cyclone in numerical models”. *Advances in Meteorology* [en línea], 2018, vol. 1, págs. 1-9. [Consulta: 14 noviembre 2023]. ISSN 1687-9309. Disponible en: doi:10.1155/2018/1747530

**15. ZÜRCHER, Bruno K.** “Fast Barnes Interpolation: illustrated by Python-Numba implementation fast-barnes-py v1.0”. *Geoscientific Model Development Discussions* [en línea], 2022, vol. 16 (6), págs. 1697-1711. [Consulta: 22 septiembre 2023]. ISSN 1991-9603. Disponible en: doi:10.5194/gmd-16-1697-2023

Total 15 referencias bibliográficas.



0954-DBRA-UPT-2024



## ANEXOS

Se incluye un código detallado para la implementación de las técnicas de interpolación de Cressman, Barnes y Fast Barnes. Este código no solo muestra la lógica y el proceso detrás de cada método, sino que también incluye la generación de gráficos ilustrativos que visualizan los resultados de la interpolación. Además, se ha incorporado el cálculo del Error Cuadrático Medio para evaluar la precisión de cada método de interpolación. Estas herramientas y análisis proporcionan una comprensión integral y práctica de cómo aplicar estas metodologías en estudios meteorológicos y otros campos relacionados.

### Anexo A: MÉTODO DE CRESSMAN, BARNES Y FAST BARNES PARA LA INTERPOLACIÓN DE VARIABLES METEOROLÓGICAS

```
1 import numpy as np
2 from scipy.interpolate import Rbf
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 # Datos de latitud, longitud y temperatura proporcionados anteriormente
7 lat_lon = np.array([[ -54.51784538, -68.20226944],
8                    [ -9.15393066, -169.30569167],
9                    [26.28072611,  44.79923295],
10                   [-24.93249509,  33.02193607],
11                   [-45.75064316,  66.03500885],
12                   [56.64646867, 175.35570261],
13                   [-66.20277498, -154.4991895],
14                   [-17.67818366, -79.39527977],
15                   [26.26141456, 166.53505017],
16                   [-61.18261798, -88.4977665]])
17 temperaturas = np.array([30.87458407, -5.0974499, 25.59662305, 17.77083873,
18 26.33997112, 15.24838327, 26.11538965, 28.46483243, -4.65256915, 9.89846029])
19
20 # Separar los datos de latitud y longitud
21 lat, lon = lat_lon[:,0], lat_lon[:,1]
22
23 # Definir funciones para calcular distancias y pesos
24 def cressman_weight(distance, radius):
25     weights = (radius**2 - distance**2) / (radius**2 + distance**2)
26     weights[weights < 0] = 0 # Asegurar que los pesos sean no negativos
```

```

27     return weights
28
29 def barnes_weight(distance, kappa):
30     return np.exp(-(distance / kappa)**2)
31
32 def fastbarnes_weight(distance, sigma):
33     mu = 0
34     return 1 / np.sqrt(2 * np.pi * sigma**2) *
35     np.exp(-(distance - mu)**2 / (2 * sigma**2))
36
37 # Funcion para realizar interpolacion manual con pesos de Cressman
38 def interpolate_with_cressman(lat_lon, temperaturas, lat_grid, lon_grid, radius):
39     temp_grid = np.zeros(lat_grid.shape)
40     for i in range(lat_grid.shape[0]):
41         for j in range(lat_grid.shape[1]):
42             distances = np.sqrt((lat_lon[:,0] -
43             lat_grid[i,j])**2 + (lat_lon[:,1] -
44             lon_grid[i,j])**2)
45             weights = cressman_weight(distances, radius)
46             weighted_temps = weights * temperaturas
47             if weights.sum() > 0:
48                 temp_grid[i, j] = weighted_temps.sum() / weights.sum()
49             else:
50                 temp_grid[i, j] = 0
51     return temp_grid
52
53 # Preparar la cuadrícula de interpolacion
54 lat_grid, lon_grid = np.meshgrid(np.linspace(np.min(lat), np.max(lat), 100),
55                                 np.linspace(np.min(lon), np.max(lon), 100))
56
57 # Validacion cruzada leave-one-out para calcular el error de interpolacion
58 def cross_validation_cressman(lat_lon, temperaturas, radius):
59     errors = []
60     for i in range(len(lat_lon)):
61         # Dejar fuera un punto
62         lat_lon_train = np.delete(lat_lon, i, axis=0)
63         temperaturas_train = np.delete(temperaturas, i)
64         lat_test, lon_test = lat_lon[i]
65         temp_test = temperaturas[i]
66
67         # Interpolacion con los datos restantes
68         temp_grid = interpolate_with_cressman(lat_lon_train,

```

```

69     temperaturas_train, lat_grid, lon_grid, radius)
70
71     # Encontrar el valor interpolado para el punto dejado fuera
72     lat_idx = np.abs(lat_grid[:,0] - lat_test).argmin()
73     lon_idx = np.abs(lon_grid[0,:] - lon_test).argmin()
74     interpolated_temp = temp_grid[lat_idx, lon_idx]
75
76     # Calcular el error
77     errors.append((temp_test - interpolated_temp)**2)
78
79     # Calcular el RMS error
80     rms_error = np.sqrt(np.mean(errors))
81     return rms_error
82
83 # Crear una instancia de Rbf para Barnes
84 def interpolate_with_barnes(lat_lon, temperaturas, lat_grid, lon_grid, kappa):
85     rbf_interpolator = Rbf(lat_lon[:,0], lat_lon[:,1],
86     temperaturas, function='cubic', smooth=kappa)
87     return rbf_interpolator(lat_grid, lon_grid)
88
89 def cross_validation_barnes(lat_lon, temperaturas, kappa):
90     errors = []
91     for i in range(len(lat_lon)):
92         # Dejar fuera un punto
93         lat_lon_train = np.delete(lat_lon, i, axis=0)
94         temperaturas_train = np.delete(temperaturas, i)
95         lat_test, lon_test = lat_lon[i]
96         temp_test = temperaturas[i]
97
98         # Interpolacion con los datos restantes
99         temp_grid = interpolate_with_barnes(lat_lon_train,
100     temperaturas_train, lat_grid, lon_grid, kappa)
101
102         # Encontrar el valor interpolado para el punto dejado fuera
103         lat_idx = np.abs(lat_grid[:,0] - lat_test).argmin()
104         lon_idx = np.abs(lon_grid[0,:] - lon_test).argmin()
105         interpolated_temp = temp_grid[lat_idx, lon_idx]
106
107         # Calcular el error
108         errors.append((temp_test - interpolated_temp)**2)
109
110     # Calcular el RMS error

```

```

111     rms_error = np.sqrt(np.mean(errors))
112     return rms_error
113
114 # Crear una instancia de Rbf para Fast Barnes
115 def interpolate_with_fastbarnes(lat_lon, temperaturas, lat_grid, lon_grid, sigma):
116     rbf_interpolator = Rbf(lat_lon[:,0], lat_lon[:,1], temperaturas,
117                             function='cubic', smooth=sigma)
118     return rbf_interpolator(lat_grid, lon_grid)
119
120 def cross_validation_fastbarnes(lat_lon, temperaturas, sigma):
121     errors = []
122     for i in range(len(lat_lon)):
123         # Dejar fuera un punto
124         lat_lon_train = np.delete(lat_lon, i, axis=0)
125         temperaturas_train = np.delete(temperaturas, i)
126         lat_test, lon_test = lat_lon[i]
127         temp_test = temperaturas[i]
128
129         # Interpolacion con los datos restantes
130         temp_grid = interpolate_with_fastbarnes(lat_lon_train,
131                                                 temperaturas_train,
132                                                 lat_grid, lon_grid, sigma)
133
134         # Encontrar el valor interpolado para el punto dejado fuera
135         lat_idx = np.abs(lat_grid[:,0] - lat_test).argmin()
136         lon_idx = np.abs(lon_grid[0,:] - lon_test).argmin()
137         interpolated_temp = temp_grid[lat_idx, lon_idx]
138
139         # Calcular el error
140         errors.append((temp_test - interpolated_temp)**2)
141
142         # Calcular el RMS error
143         rms_error = np.sqrt(np.mean(errors))
144     return rms_error
145
146 # Ejecutar la validacion cruzada
147 radius_cressman = 20 # Ajustar segun sea necesario para tus datos y escala
148 kappa_barnes = 10 # Ajustar segun sea necesario para tus datos y escala
149 sigma_fastbarnes = 5 # Ajustar segun sea necesario para tus datos y escala
150
151 rms_error_cv_cressman = cross_validation_cressman(lat_lon,
152 temperaturas, radius_cressman)

```

```

153 rms_error_cv_barnes = cross_validation_barnes(lat_lon,
154 temperaturas, kappa_barnes)
155 rms_error_cv_fastbarnes = cross_validation_fastbarnes(lat_lon,
156 temperaturas, sigma_fastbarnes)
157
158 print(f'Error cuadratico medio residual (RMS)
159 con validacion cruzada Cressman: {rms_error_cv_cressman}')
160 print(f'Error cuadratico medio residual (RMS)
161 con validacion cruzada Barnes: {rms_error_cv_barnes}')
162 print(f'Error cuadratico medio residual (RMS)
163 con validacion cruzada Fast Barnes: {rms_error_cv_fastbarnes}')
164
165 # Visualizacion con plt.contourf para ver la superficie interpolada con Cressman
166 plt.figure(figsize=(10, 7))
167 temp_grid_cressman = interpolate_with_cressman(lat_lon, temperaturas, lat_grid,
168 lon_grid, radius_cressman)
169 plt.contourf(lon_grid, lat_grid, temp_grid_cressman, levels=15, cmap='viridis')
170 plt.colorbar(label='Temperatura (C)')
171 plt.scatter(lat_lon[:, 1], lat_lon[:, 0], color='red',
172 marker='o', label='Datos originales')
173 plt.xlabel('Longitud')
174 plt.ylabel('Latitud')
175 plt.title('Interpolacion de Temperaturas con Cressman')
176 plt.legend()
177 plt.show()
178
179 # Visualizacion en 3D para Cressman
180 fig = plt.figure(figsize=(12, 9))
181 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
182 surf = ax.plot_surface(lon_grid, lat_grid,
183 temp_grid_cressman, cmap='viridis', edgecolor='none')
184 fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5, label='Temperatura (C)')
185 ax.set_title('Interpolacion Manual con Pesos de Cressman')
186 ax.set_xlabel('Latitud')
187 ax.set_ylabel('Longitud')
188 ax.set_zlabel('Temperatura (C)')
189 plt.show()
190
191 # Visualizacion con plt.contourf para ver la superficie interpolada con Barnes
192 plt.figure(figsize=(10, 7))
193 temp_grid_barnes = interpolate_with_barnes(lat_lon, temperaturas,
194 lat_grid, lon_grid, kappa_barnes)

```

```

195 plt.contourf(lon_grid, lat_grid, temp_grid_barnes, levels=15, cmap='viridis')
196 plt.colorbar(label='Temperatura (C)')
197 plt.scatter(lat_lon[:, 1], lat_lon[:, 0], color='red',
198 marker='o', label='Datos originales')
199 plt.xlabel('Longitud')
200 plt.ylabel('Latitud')
201 plt.title('Interpolacion de Temperaturas con Barnes Splines Bicubicos')
202 plt.legend()
203 plt.show()
204
205 # Visualizacion en 3D para Barnes
206 fig = plt.figure(figsize=(12, 9))
207 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
208 surf = ax.plot_surface(lat_grid, lon_grid, temp_grid_barnes,
209 cmap='viridis', edgecolor='none')
210 fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5, label='Temperatura (C)')
211 ax.set_title('Interpolacion de Temperaturas con Barnes Splines Bicubicos')
212 ax.set_xlabel('Latitud')
213 ax.set_ylabel('Longitud')
214 ax.set_zlabel('Temperatura (C)')
215 plt.show()
216
217 # Crear una instancia de Rbf
218
219 #rbf_interpolator_fastbarnes = Rbf(lat, lon, temperaturas, function='cubic', smooth=weight
220
221 # Crear una malla para la interpolacion
222 lat_grid, lon_grid = np.meshgrid(np.linspace(np.min(lat), np.max(lat), 100),
223                                 np.linspace(np.min(lon), np.max(lon), 100))
224
225 # Realizar la interpolacion en la malla
226 temp_grid_fastbarnes = interpolate_with_fastbarnes(lat_lon,
227 temperaturas, lat_grid, lon_grid, sigma_fastbarnes)
228
229 # Visualizacion con plt.contourf para ver la superficie interpolada con Fast Barnes
230 plt.figure(figsize=(10, 7))
231 plt.contourf(lon_grid, lat_grid, temp_grid_fastbarnes, levels=15, cmap='viridis')
232 plt.colorbar(label='Temperatura (C)')
233 plt.scatter(lat_lon[:, 1], lat_lon[:, 0],
234 color='red', marker='o', label='Datos originales') # Puntos de datos
235 plt.xlabel('Longitud')
236 plt.ylabel('Latitud')

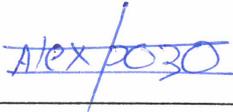
```

```
237 plt.title('Interpolacion de Temperaturas con Fast Barnes Splines Bicubicos')
238 plt.legend()
239 plt.show()
240
241 # Visualizacion en 3D para Fast Barnes
242 fig = plt.figure(figsize=(12, 9))
243 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
244 surf = ax.plot_surface(lat_grid, lon_grid, temp_grid_fastbarnes,
245 cmap='viridis', edgecolor='none')
246 fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5, label='Temperatura (C)')
247 ax.set_title('Interpolacion de Temperaturas con Fast Barnes')
248 ax.set_xlabel('Latitud')
249 ax.set_ylabel('Longitud')
250 ax.set_zlabel('Temperatura (C)')
251 plt.show()
```



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**  
**CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA**  
**NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO**

**Fecha de entrega:** 18/07/2024

<b>INFORMACIÓN DEL AUTOR</b>
<b>Nombres – Apellidos:</b> Anabel Estefanía Samaniego Rodríguez
<b>INFORMACIÓN INSTITUCIONAL</b>
<b>Facultad:</b> Ciencias
<b>Carrera:</b> Matemática
<b>Título a optar:</b> Matemática
<p style="text-align: center;"> _____</p> <p style="text-align: center;"><b>Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, MSc.</b> <b>Director del Trabajo de Integración Curricular</b></p> <p style="text-align: center;"> _____</p> <p style="text-align: center;"><b>Ing. Cristina Estefanía Ramos Araujo, MSc.</b> <b>Asesora del Trabajo de Integración Curricular</b></p>