ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

CONVERGENCIA DE SERIES EN ESPACIOS NORMADOS. UN ESTUDIO DIRIGIDO A LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR:

RAUL MATEO NUÑEZ NAVARRETE

Riobamba – Ecuador

2024

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

CONVERGENCIA DE SERIES EN ESPACIOS NORMADOS. UN ESTUDIO DIRIGIDO A LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: RAUL MATEO NUÑEZ NAVARRETE

DIRECTOR: DR. CARLOS EDUARDO COVA SALAYA

Riobamba – Ecuador

2024

Yo, Raul Mateo Nuñez Navarrete, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 20 de mayo de 2024

Raul Mateo Nuñez Navarrete

1805145826

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **CONVERGENCIA DE SERIES EN ESPACIOS NORMADOS. UN ESTUDIO DIRIGIDO A LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH**, realizado por el señor: **RAUL MATEO NUÑEZ NAVARRETE**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Dr. LUIS MARCELO CORTEZ BONILLA **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		2024/05/20
Dr. CARLOS EDUARDO COVA SALAYA. **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2024/05/20
Dr. RAMON ANTONIO ABANCIN ESPINOSA **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2024/05/20

DEDICATORIA

A mis padres, Raul Nuñez y Mónica Navarrete, cuyo amor incondicional, sacrificio y constante apoyo han sido la luz que iluminó mi camino a lo largo de esta travesía académica. Su confianza en mí ha sido mi mayor motivación y inspiración.

A mi amada Katheryn Castelo, por su comprensión, paciencia y amor infinito. Tu presencia ha sido mi refugio en los momentos de incertidumbre y tu aliento mi impulso hacia el éxito.

A mi querido tutor de tesis, Carlos Cova, por su guía experta, sabiduría y dedicación. Gracias por compartir conmigo tu conocimiento y por creer en mi capacidad para alcanzar mis metas académicas.

A mis amigos y seres queridos, quienes han estado a mi lado durante este viaje, brindándome ánimo y alegría en cada paso del camino.

Esta tesis está dedicada a todos ustedes, quienes han sido mi fuerza motriz y mi inspiración. Su amor, apoyo y confianza han hecho posible este logro.

¡Gracias por ser parte de este importante capítulo de mi vida!

Raul Nuñez

AGRADECIMIENTO

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia, cuyo apoyo incondicional y amor han sido mi roca durante este viaje académico. A mis padres, quienes han sido mi inspiración y guía, y a mis hermanos, por su aliento constante y comprensión.

Agradezco sinceramente a mi respetado tutor de tesis, Carlos Cova, por su orientación experta, su paciencia infinita y su dedicación inquebrantable. Sus enseñanzas han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo y para mi crecimiento personal y profesional.

A mi amada Katheryn Castelo, gracias por ser mi fuente de inspiración, por tu apoyo inquebrantable y por comprender mis ausencias y dedicación a este proyecto. Tu amor y aliento han sido mi mayor motivación.

También quiero expresar mi gratitud a una de las personas que más me apoyó y ayudó a culminar esta etapa de mi vida, Dario Matehu, por su invaluable contribución y apoyo a lo largo de este proceso.

Finalmente, a todas las personas que de una forma u otra contribuyeron a la realización de este trabajo, mi más sincero agradecimiento. Su ayuda y colaboración fueron esenciales para alcanzar este logro.

Raul Nuñez

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

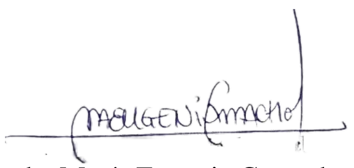
El objetivo del presente Trabajo de Integración Curricular fue generar una monografía referente a la convergencia de series en espacios normados, apoyado en bibliografía existente y más destacada. La metodología usada en el desarrollo de este trabajo de investigación se basó es un enfoque cualitativo, con un alcance descriptivo y de tipo documental, ya que se buscó, recopiló, analizó y redactó la información sobre el tópico antes mencionado, detallando las distintas definiciones de convergencia de series en espacios normados, así mismo hallando equivalencias entre las definiciones. Se dedicó especial atención al estudio de la convergencia de series en espacios de Banach y de Hilbert, considerando sus particularidades y propiedades distintivas. Al concluir esta investigación, se extraen resultados fundamentales que respaldan la relevancia y utilidad de la monografía titulada “Convergencia de series en espacios normados”. Se anticipa que dicho trabajo contribuirá significativamente a la formación de nuevos y actuales estudiantes de la carrera de Matemática en la ESPOCH, proporcionándoles un entendimiento sólido de las condiciones de convergencia de series y las diversas propiedades que estas pueden exhibir. En última instancia, se espera que esta monografía sirva como una herramienta educativa valiosa, facilitando la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos avanzados en el ámbito de los espacios normados.

Palabras clave: <CONVERGENCIA DE SERIES>, <ESPACIOS NORMADOS>, <ESPACIOS DE BANACH>, <ESPACIOS DE HILBERT>, <CONVERGENCIA DE SERIES>.
0615-DBRA-UPT-2024

ABSTRACT

The objective of this research project was to produce a monograph on the convergence of series in normed spaces, supported by existing and most outstanding bibliography. The methodology used in the development of this research work was based on a qualitative approach, with a descriptive scope and documentary in nature. This involved the search, collection, analysis, and compilation of information on the aforementioned topic, detailing various definitions of convergence of series in normed spaces, as well as identifying equivalences between these definitions. Special attention was given to the study of series convergence in Banach and Hilbert spaces, considering their particularities and distinctive properties. At the conclusion of this research, fundamental results were obtained that support the relevance and usefulness of the monograph named “Convergence of series in normed spaces”. It is expected that this work will significantly contribute to the education of new and current students of Mathematics at ESPOCH (Escuela Superior Politecnica de Chimborazo), providing them with a solid understanding of the conditions for series convergence and the various properties that these may exhibit. Ultimately, this monograph should serve as a valuable educational tool, facilitating the comprehension and application of advanced mathematical concepts in the field of normed spaces.

Keywords: <CONVERGENCE OF SERIES>, <NORMED SPACES>, <BANACH SPACES>, <HILBERT SPACES>, <CONVERGENCE OF SERIES>.



Lcda. María Eugenia Camacho, M.Sc.
C.I. 0601609597

INTRODUCCIÓN

El análisis funcional es una parte importante y amplia en el área del análisis matemático, más aún en los espacios normados. La relevancia de los espacios normados radica en proporcionar un marco estructurado para entender y estudiar conceptos fundamentales como la convergencia, la continuidad y la topología en espacios vectoriales.

La teoría de espacios normados surge entre los años 1910 y 1935 con los aportes de Riesz, Helly, Hahn y Banach, donde combinan las nociones del álgebra lineal y la idea de distancia, gracias a esto se pudo comprender de mejor manera los problemas del análisis funcional lineal con mayor generalidad y eficacia (Gamboa de Buen, 1999, pág. 34).

En 1932 Banach presentó el famoso libro *"Thérie des Opérations Linéares"* en donde expuso la teoría de operadores lineales en espacios normados, se desarrolló después de los trabajos de F. Riesz y de S. Banach. A partir del libro de Banach comenzó el estudio sistemático de los espacios normados. Y desde 1960 la investigación en el área de espacios normados y de Banach creció considerablemente. Por lo que la teoría de espacios de Banach ganó mucha profundidad y alcance.

La teoría de espacios normados tiene gran relevancia en otras teorías como: análisis armónico, teoría de aproximación, teoría ergódica, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales. Por sus muchas aplicaciones el análisis funcional se ha posicionado en una disciplina matemática muy popular (Bruzual y Domínguez, 2005, págs. 3-4).

El análisis funcional está estrechamente relacionado con el análisis matemático es por ello que la convergencia toma gran relevancia. Este es el caso de los espacios de Banach, donde gracias a la convergencia podremos ver si este espacio es de Banach o no. Hay varias formas de ver la completitud de los espacios normados, ya sea por sucesiones, por series, etc.

La carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) cuenta con material acerca del tópico de convergencia de sucesiones en espacios normados, pero esto no ocurre para convergencia de series en espacios normados, por lo que es necesario realizar una monografía referente a este tema. En este trabajo nos dedicamos a estudiar acerca de la completitud del espacio normado mediante la convergencia de series, donde la idea de una serie se origina en el estudio de la convergencia de sucesiones, pero se generaliza para el caso de espacios normados, donde las series son sumas infinitas de elementos del espacio, en lugar de simplemente sumas finitas.

Así la finalidad de este documento es investigar, documentar y destacar características importantes de las series en espacios normados, así como los criterios de convergencia de series en espacios normados, así el proyecto de investigación se estructuró de la siguiente manera:

- En el primer capítulo se habla sobre el problema de investigación, el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación y la justificación del mismo.
- En el segundo capítulo discutimos acerca del marco teórico de la investigación y las referencias teóricas que usamos al realizar el proyecto de investigación.
- En el tercer capítulo se describe el enfoque, el alcance, el diseño, el tipo y las técnicas que se empleó en el proyecto de investigación.
- En el cuarto capítulo tratamos sobre los resultados que obtuvimos, y el análisis del mismo.
- Finalmente, en el quinto capítulo se menciona las conclusiones y las recomendaciones del proyecto de investigación.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

La convergencia de series en espacios normados es un tema fundamental en el análsis funcional. Sin embargo, la falta de información acerca de este tópico genera una ausencia de conocimiento, lo cual se convierte en uno de los principales desafíos en la carrera de Matemática de la ESPOCH. La falta de una monografía clara para resolver dudas puede generar inconvenientes, especialmente en aquellos que deseen estudiar el tema en estudios de posgrado.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo General*

Desarrollar una monografía acerca de la teoría de convergencia de series en espacios normados, mediante el estudio de propiedades y resultados fundamentales de la convergencia, para contribuir a la carrera de Matemática con material bibliográfico apropiado acerca del tema.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Investigar acerca de la convergencia de series en espacios normados mediante la recolección de bibliografías para la comprensión del mismo.
- Recopilar información sobre condiciones de convergencia de series en espacios normados para el desarrollo de la teoría, en particular en los espacios de Hilbert y Banach.
- Determinar los contenidos más relevantes sobre la convergencia de series en espacios normados, a través de un análisis riguroso del contenido, con la finalidad de sintetizar la información de manera más efectiva.
- Plantear y redactar una monografía (en 4 capítulos lógicamente estructurados) de estudios con definiciones y resultados importantes, sobre la convergencia de series en espacios normados en base a la información encontrada, para que sea de ayuda a los estudiantes de la carrera de matemática de la ESPOCH, aplicando un enfoque cualitativo con una metodología y estructura

sustentada en (OBI, 2018).

1.3. Justificación

La carrera de Matemática de la ESPOCH cuenta con material acerca del tópico de convergencia de sucesiones en espacios normados, pero esto no ocurre para convergencia de series en espacios normados, por lo que es necesario realizar una monografía que sirva de apoyo a los estudiantes. Se pretende contribuir al conocimiento y comprensión acerca de la convergencia de series en espacios normados, ya que es un tema central en el análisis funcional y una herramienta valiosa para abordar problemas en matemáticas aplicadas y ciencias físicas.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

Al buscar información acerca de la convergencia de series en espacios normados nos encontramos con (Alvarez, 2020; Clark, 2022; Parra, 2006), en donde cada autor habla acerca del tema de interés y propiedades interesantes de las series. Para poder comprender mejor la información encontrada, es necesario tener conocimientos fundamentales acerca del análisis funcional, es por ello que a continuación enunciaremos definiciones importantes, y el lector interesado que desee profundizar dichas definiciones puede revisar en (5. Kreyszig, 1978).

Un espacio vectorial es una estructura matemática que consiste en un conjunto de elementos, llamados vectores, junto con dos operaciones, la suma vectorial y la multiplicación por un escalar, que cumplen ciertas propiedades. En un espacio vectorial, los vectores pueden sumarse entre sí y multiplicarse por números reales o complejos, y estas operaciones satisfacen propiedades como la asociatividad, la conmutatividad y la distributividad.

Una norma es una función que asigna un valor no negativo a un elemento de un espacio vectorial, y que satisface ciertas propiedades. En particular, una norma mide la magnitud o tamaño de un vector. Formalmente, una norma es una función $||\cdot||$ que asigna a cada vector x de un espacio vectorial un número real no negativo $||x||$, de acuerdo con las siguientes propiedades: la norma no es negativa, la norma es homogénea en cuanto a la multiplicación por escalares, desigualdad triangular.

Formalmente, un espacio normado se define como un par $(V, ||\cdot||)$, donde V es un espacio vectorial y $||\cdot||$ es una norma en V.

Para el estudio de series en espacios normados se necesitan conocimientos previos acerca del álgebra lineal, ya que se debe tener una comprensión sólida sobre espacios vectoriales, subespacios, bases, independencia lineal y operaciones entre vectores. De igual forma sobre sucesiones y límites, los tipos de convergencia; análisis matemático por los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrabilidad; sobre topología puesto que la noción de convergencia está estrechamente relacionada con la topología del espacio, y por último cálculo integral y diferencial porque hay técnicas que son aplicadas en el estudio de series en espacios normados.

2.1. Referencias teóricas

En este proyecto de investigación, se hizo una búsqueda, recopilación, y comprensión del material bibliográfico encontrado acerca de convergencia de series en espacios normados, y posteriormente se redactó una monografía. Por otro lado, cabe resaltar la bibliografía especialmente en matemática empleada al momento de desarrollar este proyecto de investigación de tipo documental, para ello, se ha considerado las siguientes referencias bibliográficas:

- La convergencia de series en un espacios de Banach, (Alvarez, 2020).
- Series en espacios lineales normados, (Clark, 2022).
- Convergencia y espacios de Banach, (Parra, 2006).

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Dada la finalidad del proyecto de investigación, este trabajo tiene un enfoque cualitativo, ya que se realizó un estudio de investigación con base a la bibliografía seleccionada, de alcance descriptivo porque el objetivo principal es detallar la información que se encuentre, y finalmente de tipo documental, ya que se buscó, recopiló y redactó información de diferentes fuentes bibliográficas certificadas.

Se realizó varios métodos para la recolección y redacción de la información acerca del tópico, que detallaremos a continuación:

- Se buscó de forma rigurosa la mayor cantidad de recursos bibliográficos acerca del tópico de convergencia de series en espacios normados de carácter formal.
- Se organizó el material obtenido, con la finalidad de obtener las mejores fuentes bibliográficas y filtrar fuentes relevantes para la investigación haciendo énfasis en la convergencia de series en espacios normados.
- Leer y comprender la información que se organizó para el entendimiento de cada sección de la convergencia de series en espacios normados.
- Al momento de la comprensión y organización de la información recolectada, se procedió a redactar en capítulos lógicamente estructurados del tema de investigación.

Por último, los instrumentos utilizados durante el proyecto de investigación fueron libros virtuales, bibliografía virtual, dispositivo electrónico (computadora), y el documento fue escrito utilizando el edito de texto LaTeX.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados

Este proyecto de investigación generó una monografía, el cual consta con 4 capítulos, los cuales fueron organizados de la mejor manera para que el lector logré una buena compresión del contenido.

Por lo que la monografía está hecha de la siguiente forma: el primer capítulo se habla acerca de los preliminares, los conocimientos necesarios para estudiar contenidos posteriores, se menciona acerca de espacios vectoriales, espacios métricos, espacios normados, espacios pre Hilbert, de igual forma acerca de la convergencia de sucesiones en cada espacio y ejemplos de los mismos, y por último de cuando se logra la completitud en los espacios. En el segundo capítulo se introduce las series en espacios normados, su definición y lo más importante la convergencia de series, así mismo se menciona varias formas de convergencia de series, como por subseries, de forma incondicional y la sumabilidad, se exponen ejemplos de la convergencia de series. En el tercer capítulo nos centramos en el espacios de los reales $\mathbb{R}$, y resaltando las equivalencias de convergencia de series entre la convergencia absoluta, incondicional, por subseries y la sumabilidad. Finalmente, en el cuarto capítulo mencionamos las series en espacios de Banach y de Hilbert, y como la convergencia absoluta nos puede ayudar a identificar si el espacios es completo o no. Este proyecto de investigación propone el siguiente esquema de contenido:

Capítulo 1. Preliminares

1.1 Espacios vectoriales.

1.2 Espacios métricos.

1.3 Espacios normados.

1.4 Espacio de Hilbert.

Capítulo 2. Series

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Una vez terminado el proyecto de investigación, podemos concluir que:

- La investigación acerca de la convergencia de series en espacios normados nos permitió conocer la bibliografía adecuada del tema, posteriormente recolectar la bibliografía del tópico. Este enfoque nos ayudó a centrarnos en la información de la convergencia de series en espacios normados.
- La recopilación detallada de las condiciones de convergencia de series en espacios normados nos ayudó a filtrar el contenido específico que se requería y más aún en los espacios de Banach y Hilbert. Este proceso favoreció a la calidad del contenido.
- El determinar los contenido más relevantes del tema, nos condujo a evualar críticamente, a una selección cuidadosa y a la correcta síntesis de la información relacionada a la convergencia de series en espacios normados.
- La redacción de la monografía de la convergencia de series en espacios normados es un recurso importante para los estudiantes de la carrera de matemática de la ESPOCH, utilizando la metodología de (OBI, 2018), que estableció un fundamento sólido. Esta propuesta buscó dar un documento de alta calidad que sirva de guía para comprender el tema de convergencia de series en espacios normados.

5.2. Recomendaciones

Debido a que la monografía “Convergencia de series en espacios normados”, va dirigida a los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH, se recomienda que el documento sea de fácil acceso para ellos, con la finalidad de que puedan expandir sus conocimientos en dicho tema. De igual forma, se sugiere un estudió más profundo acerca de la convergencia de series en espacios normados en distinto espacios, en especial el espacio de los complejos. De igual forma para complementar este trabajo se puede proponer más ejemplos didácticos para comprender el comportamiento de las series, y buscar situaciones en la vida cotidiana en donde se pueda aplicar este tema.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALVAREZ, Josefina. “La convergencia de series en un espacio de Banach”. *Lecturas Matemáticas* [En línea]. 2020, (Estados Unidos), **41**(1), 21-20. [Consulta: 10 octubre 2023]. ISSN 0120-1980. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7608041.

2. BRUZUAL, Ramón & DOMÍNGUEZ, Marisela. *Espacios de Banach.* [En línea]. Universidad Central de Venezuela, 2005 [Consulta: 5 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.dim.uchile.cl/~ceimat/Material%20Docencia/MA48D/Primavera%202007/Material%20Adicional/Guias/afb-t.pdf.

3. CLARK, Elva. Series en espacios lineales normados. [En línea]. (Trabajo de titulación) (Pregrado). Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales. Sonora-Colombia. 2022, 1-33. Disponible en: https://lic.mat.uson.mx/tesis/elva_clark.pdf.

4. GAMBO DE BUEN, Berta. “Historia del análisis funcional”. *Miscelánea Matemática* [En línea]. 1999, (México), **28**, 17-39. [Consulta: 7 octubre 2023]. Disponible en: https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.a80fe04b7c3044ce.67616d626f612e706466.pdf.

5. KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications* [En línea]. Nueva York-USA: John Wiley & Sons Inc, 1978 [Consulta: 20 noviembre 2023]. Disponible en: https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE15AF53_kov/Kreyszig%20-%20Introductory%20Functional%20Analysis%20with%20Applications%20(1).pdf.

6. ORGANIZACIÓN BACHILLERATO INTERNACIONAL, (OBI). *Monografía Guía* [En línea]. Ginebra-Suiza, 2018. [Consulta: 12 octubre 2023]. Disponible en: https://www.dsc.cl/wp-content/uploads/2018/10/Gu%C3%ADa-Monograf%C3%ADa-2018.pdf.

7. PARRA BUITRAGO, John Edwin. Convergencia y espacios de Banach. [En línea]. Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Bucaramanga-Colombia. 2006. 1-21. [Consulta: 15 octubre 2023]. Disponible en: https://es.scribd.com/document/483573906/119395.

ANEXOS

ANEXO A: CONVERGENCIA DE SERIES EN ESPACIOS NORMADOS.

CONVERGENCIA DE SERIES EN ESPACIOS NORMADOS

Raul Nuñez

Introducción

El análisis funcional es una parte importante y amplia en el área del análisis matemático, más aún en los espacios normados. La relevancia de los espacios normados radica en proporcionar un marco estructurado para entender y estudiar conceptos fundamentales como la convergencia, la continuidad y la topología en espacios vectoriales.

La teoría de espacios normados surge entre los años 1910 y 1935 con los aportes de Riesz, Helly, Hahn y Banach, donde combinan las nociones del álgebra lineal y la idea de distancia, gracias a esto se pudo comprender de mejor manera los problemas del análisis funcional lineal con mayor generalidad y eficacia [8].

En 1932 Banach presentó el famoso libro *"Thérie des Opérations Linéares"* en donde expuso la teoría de operadores lineales en espacios normados, se desarrolló después de los trabajos de F. Riesz y de S. Banach. A partir del libro de Banach comenzó el estudio sistemático de los espacios normados. Y desde 1960 la investigación en el área de espacios normados y de Banach creció considerablemente. Por lo que la teoría de espacios de Banach ganó mucha profundidad y alcance. La teoría de espacios normados tiene gran relevancia en otras teorías como: análisis armónico, teoría de aproximación, teoría ergódica, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales. Por sus muchas aplicaciones el análisis funcional se ha posicionado en una disciplina matemática muy popular [3].

El análisis funcional está íntimamente relacionado con el análisis matemático es por ello que la convergencia toma gran relevancia. Este es el caso de los espacios de Banach, donde gracias a la convergencia podremos ver si este espacio es de Banach o no. Hay varias formas de ver la completitud de los espacios normados, ya sea por sucesiones, por series, etc.

La carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) cuenta con material acerca del tópico de convergencia de sucesiones en espacios normados, pero esto no ocurre para convergencia de series en espacios normados, es por ello que es necesario realizar una monografía referente a este tema. En este trabajo nos dedicamos a estudiar acerca de la completitud del espacio normado mediante la convergencia de series, donde la idea de una serie se origina en el estudio de la convergencia de sucesiones, pero se generaliza para el caso de espacios normados, donde las series son sumas infinitas de elementos del espacio, en lugar de simplemente sumas finitas.

Por lo que la finalidad de este documento es investigar, documentar y destacar características importantes de las series en espacios normados, así como los criterios de convergencia de series en espacios normados, así el proyecto de investigación se estructuró de la siguiente manera:

- En el primer capítulo se habla sobre los conocimientos previos que necesitaremos para capitulos posteriores, acerca de espacios vectoriales, espacios métricos, espacios normados, y espacios de Banach y Hilbert.
- En el segundo capítulo discutimos acerca de las distintas definiciones de convergencia de series.
- En el tercer capítulo se describe la convergencia de series en $\mathbb{R}$ y cuales son las equivalencias entre las distintas definiciones de convergencia.
- Finalmente, en el quinto capítulo se menciona resultados importantes, siempre teniendo cuenta que los espacios sobre los que trabajamos son completos.

Índice general

.

1. Preliminares

La finalidad de este capítulo es recordar las definiciones básicas y los resultados fundamentales sobre los espacios vectoriales, los espacios métricos, los espacios normados y los espacios de Banach y de Hilbert; que serán utilizados implícitamente en el desarrollo de los capítulos posteriores, con el propósito de hacer el tratamiento del presente trabajo razonablemente autocontenido. La mayoría de estos resultados fundamentales se dan sin demostración, pero en compensación se darán ejemplos, formalmente desarrollados y demostrados, que complementarán su fácil comprensión. Aun así, se darán las demostraciones de algunos de los resultados, que el autor considera serán de gran importancia para el pleno desarrollo del tema del presente trabajo. En la sección 1.1 se dan las definiciones básicas de los espacios vectoriales. En la sección 1.2 se trataran los espacios métricos. Se darán ejemplos clásicos de tales espacios, entre ellos los espacios euclidianos. Se tratará principalmente en concepto de convergencia y los resultados fundamentales sobre este se demostrarán formalmente, con miras a establecer la idea de los espacios métricos completos. En la sección 1.3 se tratarán los espacios normados. Se darán los ejemplos clásicos de espacios normados, como los espacios euclidianos y los espacios $(1 \leq p < \infty)$, c_0 y c_{00}. Se verá a los espacios normados como espacios métricos, vía la métrica inducida por su norma, y así se establecerán formalmente los resultados de convergencia en los espacios normados. Esto con el objetivo de introducir los espacios de Banach y en la sección 1.4 a los espacios de Hilbert.

El lector interesado en ampliar los conocimientos de los temas tratados, puede referirse a [19] para espacios vectoriales, a [18] para espacios métricos y espacios de normados, a [7] para espacios de Banach y de Hilbert.

1.1 Espacios vectoriales

Definición 1.1.1 Un **espacio vectorial** sobre un campo F, es un conjunto V, con operaciones de suma y producto escalar definidas como:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (x,y) &\to x+y. \\ \cdot : F \times V &\to V \\ (\alpha,x) &\to \alpha \cdot x, \end{aligned}$$

y que satisfacen:

$A1$. Para cada par x,y de elementos en V, existe un único elemento en V denotado por $x+y$. Es decir, V es cerrado para la suma.

$A2$. Conmutatividad para la suma.
Para cada par x,y de elementos en $V : x+y = y+x$

$A3$. Asociatividad de la suma.
Dados x,y,z elementos en $V : (x+y)+z = x+(y+z)$

$A4$. Existencia del elemento neutro para la suma en V.

Existe un elemento en V, denotado por 0, tal que $x+0=0+x=x$, $\forall x \in V$

$A5$. Existencia en V del opuesto aditivo.

Para cada x en V, existe un elemento y en V tal que $x+y=y+x=0$. Este elemento y se denota como $-x$, es decir $y=-x$

$A6$. Para cada elemento x en V, y cada elemento α en el campo F, existe un único elemento en V denotado por $\alpha \cdot x$

$A7$. Para cada $x \in V : 1 \cdot x = x$, siendo 1 la unidad del campo F.

$A8$. Ley asociativa de la multiplicación escalar.

para cada par α, β de elementos del campo F y cada elemento x en V:

$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

$A9$. Distributiva de la multiplicación escalar respecto a la suma.

Para cada elemento α en el campo F, y para cada par de elementos x, y en V:

$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$A10$. Distributividad de la multiplicación escalar respecto a la suma de escalares:

$(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

■ **Ejemplo 1.1.1** $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial donde $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$ con la adición definida como:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

y el producto por un escalar como:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

■ **Ejemplo 1.1.2** El espacio $K^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial de todas las sucesiones escalares, con las siguientes operaciones, donde $(x_i), (y_i) \in K^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in K$

- $(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$;
- $\lambda(x_i)=(\lambda x_i)$.

Definición 1.1.2 Sea V un espacio vectorial y $\{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se llama **combinación lineal** de los vectores $v_1\ ,v_2,\ \dots,\ v_n$ al vector

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$$

cualquiera que sea la elección de los escalares $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$.

Definición 1.1.3 Un conjunto de vectores $\{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ de un espacio vectorial V, se llama un **conjunto generador** de V, si todo $v\in V$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n$.

Definición 1.1.4 Se dice que V es un espacio vectorial de **dimensión finita** si tiene un conjunto generador con una cantidad finita de elementos. Es decir, V es de dimensión finita si existe una familia finita de vectores $(v_1,\ v_2,\ v_3,\dots,\ v_n)\in V$ tal que todos los vectores en V se puede expresar como combinación lineal.

Definición 1.1.5 Una **base de Hamel** B de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un subconjunto linealmente independiente de V que genera V. Esto quiere decir que B debe cumplir dos condiciones:

- **Independencia lineal:** Para cada subconjunto finito $\{v_1,\ \dots,\ v_m\}$ de B, si $c_1v_1+\cdots+c_mv_m=0$ para ciertos escalares, $c_1,\ \dots,\ c_m\in\mathbb{K}$, entonces $c_1=\cdots=c_m=0$.
- **Propiedad generadora:** Para cada vector v de V, se pueden elegir escalares $a_1,\ \dots,\ a_n\in\mathbb{K}$ y vectores de la base $v_1,\ \dots,\ v_n\in B$ tales que $u=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$.

1.2 Espacios métricos

Definición 1.2.1 Una métrica o distancia sobre un conjunto X es una función

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $x,\ y,\ z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$;
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$;

Si d es una métrica sobre X, entonces la dupla $(X,\ d)$ es llamado espacio métrico.

■ **Ejemplo 1.2.1 — La recta real $\mathbb{R}$.** Es el conjunto de todos los números reales, con la métrica usual definida como,

$$d(x,y) = |x - y|.$$

■ **Ejemplo 1.2.2 — Plano euclideano $\mathbb{R}^2$.** El espacio métrico $\mathbb{R}^2$, llamado el plano Euclideano, es obtenido si tomamos el conjunto de pares ordenados de número reales, escritos $x = (x_1,\ x_2)$ y $y = (y_1,\ y_2)$, etc., y la métrica Euclideana definida como,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Otra espacio métrico es obtenido si escogemos el mismo conjunto que antes, pero otra métrica d_1 definida por:

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

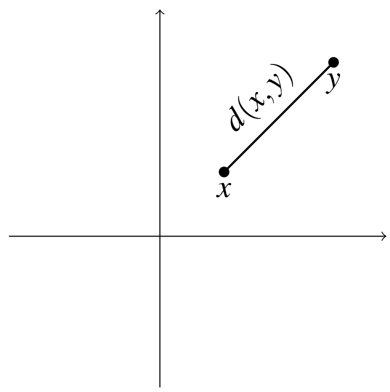


Figura 1.1: $\mathbb{R}^2$ con $d(x,y)$

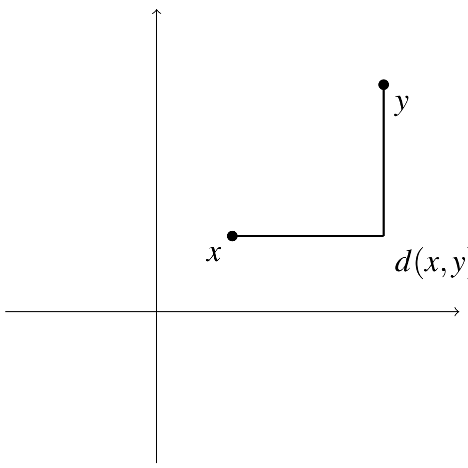


Figura 1.2: $\mathbb{R}^2$ con $d_1(x,y)$

■ **Ejemplo 1.2.3 — El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$.** El ejemplo anterior es un caso particular de el espacio Euclideano de n-dimensiones $\mathbb{R}^n$. Este espacio se obtiene si tomamos el conjunto de todas las $n-$tuplas ordenadas de numeros reales, escritas

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

y la métrica euclidiana definida como,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

■ **Ejemplo 1.2.4 — El espacio métrico discreto.** Tomamos cualquier conjunto X y sobre este conjunto la llamada métrica discreta, definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x \neq y, \\ 0 \text{ si } & x = y. \end{cases}$$

Este espacio $(X,\ d)$ es llamado espacio métrico discreto.

Definición 1.2.2 Sea (X,d) un espacio métrico. Toda función de $\mathbb{N}$ en X, se llama sucesión en X, es decir, una función

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto x(n) = x_n \end{aligned}$$

Notaremos como $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cuando no haya motivo de confusión, escribiremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplemento como (x_n).

Definición 1.2.3 Sea (X,d) un espacio métrico, la sucesión (x_n) es convergente a $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n,x) < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0$$

En este caso $x \in X$ es llamado *límite de la sucesión* y es denotado como

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \to x$$

Si (x_n) no converge, se dice que es una sucesión divergente.

■ **Ejemplo 1.2.5** Sea $x = (x_n)$ en $\mathbb{R}$ con $x_n = \frac{1}{n}$. Veamos que es convergente hacia 0. Considerando la métrica usual.

En efecto, aplicando la definición tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$d(x_n, x) = d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ si } n > n_0.$$

Se tiene que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon$. Así $\frac{1}{n} \to 0$.

■ **Ejemplo 1.2.6** La sucesión $x = (x_n)$ con $x_n = n$ es divergente. Considerando la métrica usual.

Veamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \to L$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Así,

$$d(x_n,\, x) = |n - L| < \varepsilon$$

ahora por propiedades del valor absoluto,

$$-\varepsilon < n - L < \varepsilon \quad (\forall\, n \geq n_0)$$

$$-\varepsilon + L < n < \varepsilon + L \quad (\forall\, n \geq n_0)$$

y vemos que estamos acotando a $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción ya que no podemos acotar los números naturales, así x_n diverge.

Definición 1.2.4 Sea $(X,\, d)$ un espacio métrico, una subsucesión de una sucesión dada (x_n) es otra sucesión $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$.

■ **Ejemplo 1.2.7** Consideremos la sucesión $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, podemos obtener las siguientes subsucesiones

1. $x_{n_k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k}, \;\; k \in \mathbb{N}; \, y_k = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{8},\, \ldots\right)$

2. $x_{n_k} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}, \;\; k \in \mathbb{N}; \, y_k = \left(-\frac{1}{3},\, -\frac{1}{5},\, -\frac{1}{7},\, \ldots\right)$

3. $x_{n_k} = \frac{(-1)^k}{k}$, con k primo; $y_k = \left(\frac{1}{2},\, -\frac{1}{3},\, -\frac{1}{5},\, -\frac{1}{7},\, -\frac{1}{11},\, \ldots\right)$

Proposición 1.2.8 Si $x_n \to x$, entonces $x_{n_k} \to x$ para toda subsucesión (x_{n_k}) de (x_n).

Demostración:

Ya que (x_n) converge hacia x entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x_n,\, x) < \varepsilon$. Ya que $n_k \geq k$ para todo k, si $k \geq n_0$, entonces $n_k \geq n_0$ y por lo tanto, $d(x_{n_k},\, x) < \varepsilon$. $\square$

Podemos concluir que una sucesión no converge si los términos de la sucesión no se acercan entre sí. Esto es, si $x_n \to x$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\, x_m) < \varepsilon$ si $n,\, m > n_0$. Esta condición es necesaria para la convergencia, y es llamada la condición de Cauchy.

Pero, solo en cierto espacios esta condición es suficiente, y estos espacios son los llamados espacios métricos completos.

Definición 1.2.5 Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n) \subset X$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon, \quad \forall\, n,m \geq n_0$$

■ **Ejemplo 1.2.9** La sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ es de Cauchy, considerando la métrica usual.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{2}{\varepsilon}$, y por tanto $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, si

$n, m > k$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{n+1}-\frac{m}{m+1}\right| &= \left|\frac{nm+n-nm-m}{(n+1)(m+1)}\right| \\
&= \left|\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right| \\
&\leq \left|\frac{n-m}{nm}\right|, \text{ pues } (n+1)(m+1) > nm \\
&= \left|\frac{n}{nm}-\frac{m}{nm}\right| \\
&= \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{k}+\frac{1}{k}, \text{ pues } n, m > k \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ pues } \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ es de Cauchy.

Definición 1.2.6 Sea $(M,\ d)$ un espacio métrico y $A \subset M$. A es **acotado** si existe un número $b > 0$ tal que $d(x,y) < b$, para todo $x,\ y \in A$.

Hay distintas relaciones entre la convergencia, sucesiones de Cauchy y sucesiones acotadas, la siguiente proposición nos proporcionará estas relaciones.

Proposición 1.2.10 Sea (X,d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión en X.

1. Si (x_n) converge, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy.
2. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.
3. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy y alguna subsucesión de (x_n) converge a x, entonces (x_n) converge a x.

Demostración:

1. Supongamos que $x_n \to x$ por lo que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(x_n,\ x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, si $m,\ n \geq n_0$,
$$d(x_m,\ x_n) \leq d(x_m,\ x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
2. Ya que (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m,\ n \geq n_0$ entonces $d(x_m,\ x_n) < 1$. Tomemos
$$M = \text{máx}\{d(x_1,\ x_{n_0}),\ d(x_2,\ x_{n_0}),\ \ldots,\ d(x_n,\ x_{n_0-1}),\ 1\}$$
por lo que, para todo n, $d(x_n,\ x_{n_0}) \leq M$.Así (x_n) es acotada.
3. Supongamos que $x_{n_k} \to x$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe K tal que para todo $k \geq K$, se tiene que $d(x_{n_k},\ x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ya que (x_n) es de Cauchy, existe n_0 tal que para todo $m,\ n \geq n_0$, se tiene que $d(x_m,\ x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora tomemos $N = \text{máx}\{n_K,\ n_0\}$ por lo que $n \geq N$ implica
$$d(x_n,\ x) \leq d(x_n,\ x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así (x_n) converge a x. □

Definición 1.2.7 Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

■ **Ejemplo 1.2.11** $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son completos con las métricas usuales. Más adelante en el ejemplo (1.3.9) demostramos que $\mathbb{R}$ es completo con la métrica usual.

1.3 Espacios normados

Definición 1.3.1 Sea V un espacio vectorial sobre K, donde K será siempre $\mathbb{R}$

o $\mathbb{C}$. Una norma es una función,

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : V &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto ||x||, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades, para cualesquiera $x,\ y,\ z \in X$ y para cualquier $\lambda \in K$

N_1. $||x|| \geq 0$;

N_2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N_3. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$;

N_4. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

A la dupla $(V, ||\cdot||)$ le llamaremos espacio normado.

■ **Ejemplo 1.3.1** El espacio $V = \mathbb{R}^n$ es un espacio normado, donde la norma está definida como:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Donde $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demostremos que $\|x\|_2$ es una norma. Para esto debe cumplir las cuatro condiciones.

1) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Por definición de valor absoluto $|x| \geq 0$, por lo que $|x|^2 \geq 0$, así $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$ y por último

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \geq 0.$$

Por lo tanto se cumple N_1.

2) Sea $x \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$) Supongamos que

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = 0,$$

por lo tanto
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0,$$
para que esto ocurra
$$|x_i|^2 = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$
$$|x_i| = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$
Ahora, por una propiedad del valor absoluto
$$x_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$
Ya que es para todo $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $x = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $x = 0$. Se tiene que
$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |0|^2\right)^{1/2}\\ &= (0)^{1/2}\\ &= 0\end{aligned}$$
Por lo tanto $\|x\|_2 = 0$. Así N_2 se cumple.

3) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in K$. Debemos ver que $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$
$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{por propiedades del valor absoluto,}\\ &= \left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{ya que } \lambda \text{ no depende de } i,\\ &= \left(|\lambda|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}\\ &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \, \|x\|_2 .\end{aligned}$$

Así N_3 se cumple.

4) Sea $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Para ver la desigualdad triangular usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2|x_i y_i| + |y_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2, \text{ por la desigualdad de Cauchy} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

de donde,

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Así N_4 se cumple.

Ya que $\|x\|_2$ cumple las cuatro propiedades, entonces es una norma.

■ **Ejemplo 1.3.2** El espacio l^p, con $1 \leq p < \infty$, l^p es el espacio vectorial de las sucesiones reales (x_i) donde la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p$ converge. En otras palabras, $l^p = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p < \infty\}$, y cuenta con la siguiente norma:

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Demostremos que $\|x\|_p$ es una norma.

Para ver que N_1, N_2, N_3 se cumple, el procedimiento es similar a la demostración del ejercicio anterior, y además tengamos en cuenta que la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_i|^p$ converge. Ahora para N_4 se necesita de la desigualdad de Minkowski, como veremos a continuación.

4) Sea $x,\ y \in l^p$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}, \text{ por la desigualdad de Minkowski,}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)^p$$

Ya que es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)^p$$

Así

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)^p$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

Concluyendo que $\|x_i+y_i\|_p \leq \|x_i\|_p + \|y_i\|_p$

Ya que $\|x\|_p$ cumple las 4 propiedades, entonces es una norma.

Ahora si $p=\infty$, l^∞ consiste de las sucesiones reales acotadas. En otras palabras, $l^\infty = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}$, y cuenta con la siguiente norma:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|.$$

La demostración de que es una norma es similar a las anteriores demostraciones.

■ **Ejemplo 1.3.3** Consideremos los espacios c_0 y c_{00}. Donde c_0 es el espacio vectorial de las sucesiones reales que tienden a cero, es decir

$$c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$$

y c_{00} de las sucesiones reales casi nulas, es decir

$$c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \exists\, N = N(x) \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ si } n \geq N\},$$

los dos espacios cuentan con la norma:

$$||x_n||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Al espacio normado $(V, ||\cdot||)$ lo podemos dotar de una métrica $d(x,y) = ||x-y||$, $\forall\, x,y \in V$ y así, las definiciones que mencionamos anteriormente para espacios métricos lo podemos utilizar en espacios normados.

Proposición 1.3.4 Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y consideramos la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ y (x_n) es una sucesión en V. Entonces $x_n \to x$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $x_n \to x$, ahora por definición, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\ x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Ya que $d(x,y) = \|x-y\|$ tenemos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.
$\Leftarrow$) Consideremos una sucesión (x_n) en V, por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Ya que $d(x_n,\ x) = \|x_n - x\|$, tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\ x) < \varepsilon$ para todo $n > N$, por lo tanto (x_n) converge a $x \in V$. □

En este caso $x \in V$ es llamado *límite de la sucesión* y es denotado como

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \to x$$

Si (x_n) no cumple la proposición (1.3.4), se dice que es una sucesión divergente.

Teorema 1.3.5 Sea (x_n) y (y_n) dos sucesiones convergentes a x e y respectivamente, y $\alpha \in K$, entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$.

Demostración:

1. Por hipótesis (x_n) es una sucesión que converge a x. Ahora consideremos el caso de que $\alpha = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} 0 \cdot x_n = 0 \cdot x = 0.$$

Si $\alpha \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$\|\alpha x_n - \alpha x\| = |\alpha|\|x_n - x\| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0.$$

Así $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$.

2. Por hipótesis (x_n), (y_n) son sucesiones convergente a x e y, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0, \text{ existe } n_0 \text{ tal que para todo } n > n_0 \text{ se tiene que } \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\frac{\varepsilon}{2} > 0, \text{ existe } n_1 \text{ tal que para todo } n > n_1 \text{ se tiene que } \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora tomemos $n_2 = \max\{n_0,\ n_1\}$, entonces si $n > n_2$ se tiene que

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$.

Que es lo que queríamos probar. $\square$

A partir del teorema (1.3.5) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \beta y_n = \alpha x + \beta y.$$

Teorema 1.3.6 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre K. Entonces

(a) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$ para todo $x,\ y \in X$;

(b) Si (x_n) en una sucesión en X y $x_n \to x$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Demostración:

Para (a): $\|x\| = \|x-y+y\|$ ahora por N_4 se tiene que, $\|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ por lo tanto, $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, así
(i) $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$,
por otro lado $\|y\| = \|y-x+x\|$ y por N_4 tenemos que $\|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$, pero

$$\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\|$$

Reemplazando, $\|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\|$ entonces, $\|y\| \leq \|x-y\| + \|x\|$, multiplicando por (-1) se tiene que,
(ii) $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|$,
ahora por (i) y por (ii) se conluye que $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ y por propiedad del valor absoluto, $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$.
Para (b): Por hipótesis $x_n \to x$, es decir para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Por (a) sabemos que $\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \leq \|x_n - x\|$, por lo tanto $\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| < \varepsilon$, si $n \geq n_0$, así $\|x_n\| \to \|x\|$.
Lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 1.3.7 Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y consideramos la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ y (x_n) es una sucesión en V. Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ para todo $n,\ m > N$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que (x_n) es una sucesión de Cauchy, ahora por definición, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ para todo $n,\ m \geq N$. Ya que $d(x,y) = \|x-y\|$ tenemos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n,\ m \geq N$.

$\Leftarrow$) Consideremos una sucesión (x_n) en V, por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n,\ m > N$. Ya que $d(x_n,\ x_m) = \|x_n - x_m\|$, tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ para todo $n > N$, por lo tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy. □

Definición 1.3.2 Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado se dice que es un espacio de Banach si (V,d) es un espacio métrico completo.

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario nos referiremos a la métrica d en el espacios normado, como la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$.

■ **Ejemplo 1.3.8** Veamos un ejemplo de espacio lineal normado no completo, consideremos el espacio $\mathbb{Q}$ con la siguiente norma

$$\|x\| = |x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$$

Sea la sucesión $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, en donde se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

pero e no pertenece a $\mathbb{Q}$, por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es completo y así no es de Banach.

■ **Ejemplo 1.3.9** El espacio vectorial $\mathbb{R}$, es un espacio de Banach, si definimos la siguiente norma:

$$\|x\| = |x|, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

En efecto, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto (x_n) es acotada. Así existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a $x \in \mathbb{R}$.
Ya que (x_n) es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| = |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \text{ para todo } \ m,\ n \geq n_0$$

Por otro lado ya que (x_{n_k}) converge a x, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$\|x_{n_1} - x\| = |x_{n_1} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ya que $n_1 \geq n_0$, si hacemos $m = n_1$ en $\|x_n - x_m\|$ obtenemos que

$$\|x_n - x_{n_1}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, n \geq n_0$$

Si $n \geq n_0$ se tiene que

$$\|x_n - x\| = |(x_n - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x)| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto (x_n) converge a x. Concluyendo que $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach.

Hemos dicho que al espacio normado lo podemos dotar de una métrica. Pero hay que tener cuidado, no siempre una métrica d proviene de una norma, para podernos asegurar de esto, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.3.10 Sea d una métrica sobre el espacio vectorial X. Si d es inducida por una norma. Entonces,

1. $d(x+z,\ y+z) = d(x,y)$ para todo $x,\ y,\ z \in X$
2. $d(\alpha x,\ \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ para todo $x,\ y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demostración:

1. Veamos que $d(x+z,\ y+z) = d(x,y)$ para todo $x,\ y,\ z \in X$

$$\begin{aligned} d(x+z,\ y+z) &= ||x+z-(y+z)|| \\ &= ||x+z-y-z|| \\ &= ||x-y|| \ = \ d(x,y) \end{aligned}$$

2. Ahora para $d(\alpha x,\ \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ para todo $x,\ y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(\alpha x,\ \alpha y) =& ||\alpha x - \alpha y|| \\ =& ||\alpha (x-y)|| \\ =& |\alpha| ||x-y|| \ = \ |\alpha| d(x,y) \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos probar. □

Definición 1.3.3 Sea X un espacio vectorial, y $\|\cdot\|$ una norma sobre X, se dice que $\|\cdot\|$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|_0$ sobre X, si existe números positivos a y b tal que para todo $x \in X$ se tiene que

$$a\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\| \leq b\|\cdot\|_0$$

Tenemos un resultado interesante, a partir de esta definición.

Teorema 1.3.11 Sobre un espacio vectorial de dimensión finita X, cualquier norma $\|\cdot\|$ es equivalente a cualquier otra norma $\|\cdot\|_0$.

Demostración:

La demostración puede verse en ([7], pág. 75). □

1.4 Espacio de Hilbert

Definición 1.4.1 Sea V un espacio vectorial. Un producto interior en V es una función.

$$\langle\cdot,\ \cdot\rangle : V\times V \longrightarrow K$$
$$(x,\ y) \longmapsto \langle x,\ y\rangle$$

que satisface las siguientes propiedades, para cualesquiera $x,\ y,\ z\in V$ y para cualquier $\lambda\in K$,

1. $\langle x+y,\ z\rangle = \langle x,\ z\rangle + \langle y,\ z\rangle$;
2. $\langle \alpha x,\ y\rangle = \alpha\langle x,\ y\rangle$;
3. $\langle x,\ y\rangle = \overline{\langle y,\ x\rangle}$;
4. $\langle x,\ x\rangle \geq 0$;
5. $\langle x,\ x\rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$.

Al par $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ lo llamamos un espacio prehilbertiano.

Notemos que a través del producto escalar se puede definir una norma como: $||x|| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$, y a su vez podemos definir una métrica: $d(x,y) = \sqrt{\langle x-y,\ x-y\rangle}$

Definición 1.4.2 — Espacio de Hilbert. Un espacio de prehilbertiano $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se dice un espacio de Hilbert si el espacio $(V,||\cdot||)$ es completo.

Definición 1.4.3 Un elemento x de un espacio pre-Hilbert V, se dice que es ortogonal a un elemento $y\in V$ si

$$\langle x,\ y\rangle = 0.$$

También decimos que x y y son ortogonales, y escribimos $x\perp y$.

Definición 1.4.4 Un conjunto ortogonal M en un espacio pre-Hilbert V es un subconjunto $M \subset V$ cuyos elementos son ortogonales dos a dos. Un conjunto ortonormal $M \subset X$ es un conjunto ortogonal cuyos elementos tienen norma 1, es decir, para todo $x,\ y \in M$

$$\langle x,\ y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \neq y, \\ 1 & \text{si } \ x = y. \end{cases}$$

Teorema 1.4.1 — Desigualdad de Bessel. Sea E un espacio pre-Hilbert y $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\dots\} \subset E$ un sistema ortonormal. Entonces, para todo $x \in E$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,\ x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Demostración:

Sea $n > 0$ natural y llamemos $y_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle\, x_k$. Entonces, para $m = 1, 2\dots, n$

$$\langle y_n, x_m\rangle = \langle x, x_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle \langle x_k, x_m\rangle = \langle x, x_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle\, \delta_{km} = 0.$$

Es decir, $\{y_n, \langle x, x_1\rangle x_1, \dots, \langle x, x_n\rangle x_n\}$ es un sistema ortogonal. Usando el teorema de Pitágoras y que $\|x_k\|^2 = 1$,

$$\|x\|^2 = \left\| y_n + \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle\, x_k \right\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \|x_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 .$$

Tenemos por tanto $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ y tomando supremos sobre n obtenemos la desigualdad de Bessel. $\square$

2. Series

El primer caso que registra el uso de una suma infinita de términos de una sucesión, se remonta hasta la antigua Grecia, con Arquímedes, quien probablemente usó este tipo de ideas para determinar el área encerrada bajo el arco de una parábola. Otras ideas relacionadas con el uso de series y sucesiones para la representación de determinadas funciones se concibieron en India durante el siglo XIV, época en que se destaca el trabajo de Madhava. Madhava también fue de los primeros en considerar el problema de la convergencia de una serie, es decir, determinar si la suma infinita de los términos de una sucesión es igual a algún número real. Madhava desarrolló algunos métodos y test de convergencia. En Europa, sin embargo, este tipo de problemas fueron estudiados en profundidad solo a partir del siglo XIX con los trabajos, entre otros, de Euler, Cauchy y Gauss. Cabe destacar el estudio de Fourier sobre las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas. Estas se conocen hoy como series de Fourier, y son herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Además, la investigación de funciones que pudieran ser iguales a series de Fourier llevó a Cantor al estudio de los conjuntos infinitos y a una aritmética de números infinitos. En la sección 2.1 se habla sobre la convergencia habitual de una serie, tomando en cuenta la sucesión de sumas parciales, así mismo, se demuestra la unicidad de la suma y la la unicidad de la suma de dos series por escalares; en la sección 2.2 se trata acerca de la convergencia absoluta y se expone ejemplos en donde ya se tiene la noción de la importancia de la completitud del espacio; en la sección 2.3 se menciona la convergencia incondicional de las series y como esta convergencia depende del ordenamiento; en la sección 2.4 se da la convergencia por subseries, se expone un ejemplo y se demuestra que la suma de cada subserie es única; y por último en la sección 2.5 se explica otra forma de convergencia de series, en este caso la sumabilidad y se demuestra su unicidad.

En la actualidad la convergencia de series es un concepto fundamental en el análisis matemático y tiene diversas aplicaciones en la teoría de números, cálculo, álgebra y otras ramas de las matemáticas. El propósito de este capítulo es presentar los conceptos y formas de convergencia de series en espacios normados.

Vamos a tener las siguientes consideraciones, el espacio normado X es real, $\|\cdot\|$ es la norma en X.

Definición 2.0.1 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un par de sucesiones (x_n), (s_n) en X se llama una **serie** en X si sus elementos x_n, s_n están relacionados de la siguiente forma:

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \text{para cada } \ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

A x_n se denomina término $n-$ésimo de la serie y a s_n la suma parcial $n-$ésima de la serie.

En vez de referirnos a las series como un par (x_n), (s_n) es usual hablar de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

■ **Ejemplo 2.0.1** En $\mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, con $x_n = 2^n$ y $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

■ **Ejemplo 2.0.2** En c_0, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, con $x_n = \frac{1}{n}$ y $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2.1 Convergencia

Definición 2.1.1 Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, si la sucesión de sumas parciales (s_n) converge a algún $s \in X$. Esto es $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y denotamos como

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \tag{2.1}$$

Si la serie no es convergente, decimos que es divergente.

Esto también puede abreviarse como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Pero las expresiones anteriores, significan

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - s \right\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = 0.$$

Notemos que (s_n) es una sucesión, por lo que de de forma equivalente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a $s \in X$, si la sucesión de sumas parciales converge a s, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - s \right\| < \varepsilon \tag{2.2}$$

para todo $n \geq n_0$. Si no existe $s \in X$ que satisfaga (2.2), entonces la serie diverge.

Sin peligro de confusión denotaremos a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ como $\sum x_n$ o $\sum_{n\geq 1} x_n$

Lema 2.1.1 Si la serie $\sum x_i$ converge, la suma de la serie es única.

Demostración:

Por reducción al absurdo.

Supongamos que su suma suma no es única, es decir existen $s, s' \in X$, donde $s \neq s'$ tales que $\sum x_n = s$ y $\sum x_n = s'$, por (2.2), tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - s\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{y} \quad \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - s'\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, n \geq n_0$$

Por desigualdad triangular de la norma tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
||s - s'|| &= \left|\left| s + \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i - s' \right|\right| \\
&= \left|\left| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - s'\right) + \left(s - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \right|\right| \\
&\leq \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s' \right|\right| + \left|\left| s - \sum_{i=1}^{n} x_i \right|\right| \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s' \right|\right| + \left|\left| (-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - s\right) \right|\right| \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s' \right|\right| + |-1| \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s \right|\right| \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s' \right|\right| + \left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i - s \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$||s - s'|| < \varepsilon, \ \forall\, \varepsilon > 0$$

de donde se sigue que

$$||s - s'|| = 0$$

Y por propiedades de la norma $s = s'$, y es una contradicción ya que antes mencionamos que $s \neq s'$. Así la suma de la serie es única. □

El término “serie convergente” es gracias al matemático escocés James Gregory en 1668. En cuanto al término “ serie divergente” fue dado por Nicolaus Bernoulli en 1713 y la definición formal de serie convergente aparece en *Cours d’Analyse* por Auustin L. Cauchy en 1821, ver en ([9]).

Teorema 2.1.2 Sean $\sum x_n$ y $\sum y_n$ dos series que convergen a x e y respectivamente. Entonces para cada par de escalares α y β, la serie $\sum(\alpha x_i + \beta y_i)$ converge hacia $(\alpha x + \beta y)$

Demostración:

Ya que $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen entonces,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = x \text{ y } \lim_{n\to\infty} s'_n = y$$

Donde (s_n) y (s'_n) son sucesiones parciales n-ésimas de $\sum x_n$ y $\sum y_n$ respectivamente. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha s_n = \alpha x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \beta s'_n = \beta y$, para cualquier $\alpha,\ \beta \in K$. Además $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha s_n + \beta s'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha s_n + \lim\limits_{n\to\infty} \alpha s'_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} s_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \alpha x + \beta y$, así la serie $\sum(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge a $\alpha x + \beta y$. $\square$

2.2 Convergencia absoluta

La convergencia absoluta de series es de gran relevancia, ya que nos va a ayudar a caracterizar los espacios de Banach.

Definición 2.2.1 La serie $\sum x_i$ converge absolutamente, si la serie de términos reales $\sum ||x_i||$ converge. Es decir, si la sucesión (r_n)

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \tag{2.3}$$

converge.

Notemos que cuando hablamos de la sucesión (s_n) definimos una sucesión de vectores, mientras que (2.3) es una sucesión de números reales positivos. La convergencia de cada una de éstas no necesariamente implica la convergencia de la otra.

■ **Ejemplo 2.2.1** Consideremos la sucesión en $\mathbb{R}$,

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

La serie $\sum x_n$ converge en $\mathbb{R}$, pero no converge absolutamente, ya que la sucesión de sumas parciales de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge.

■ **Ejemplo 2.2.2** Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$$

Pero esto se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Y así forman una serie convergente.

Es conocido que si una serie en $\mathbb{R}$ es absolutamente convergente, entonces converge, pero el recíproco no se cumple, como se ve en el ejemplo (2.2.1). Esto resulta ser equivalente a la completitud de los número reales, que veremos más adelante.

2.3 Convergencia incondicional

La serie
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
converge a $\ln(2)$. Si reordenamos la serie como:
$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{1/2}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{1/6}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{1/10}-\frac{1}{12}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}_{1/14}-\frac{1}{16}+\cdots,$$
obtenemos
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right),$$
que ahora es la mitad que al principio. Esto demuestra que el valor de una suma infinita puede depender del orden de la suma.

Definición 2.3.1

• Sea la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ y la función
$$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{N}&\to\mathbb{N}\\ k&\longmapsto\sigma(k)\end{aligned}$$
σ es biyectiva. La serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ se llama *reordenamiento o arreglo* de la serie original. Tengamos en cuenta que $x_{\sigma(k)}$ son términos de la serie original.

• La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge incondicionalmente* a $x \in X$, si la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge a x, para cada biyección $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

• Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge a $x \in X$, pero existe al menos una biyección σ tal que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ no converge a x, entonces se dice que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge condicionalmente*.

Un dato interesante acerca de las series condicionalmente convergentes fue dado por Riemann en 1854 (ver en [10], pág 6), el menciona que para cualquier número real A es posible reordenar los términos de

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

de tal forma que la serie resultante converja a A. La razón es que la suma de los términos positivos y la suma de los términos negativos,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

son ambas divergentes.

La idea es tomar primero los términos positivos $1+\frac{1}{3}+\cdots$ hasta que la suma supere A (esto ocurre ciertamente porque la serie con términos positivos diverge). Luego, tomamos los términos negativos hasta que estemos por debajo de A (esto ocurre ciertamente porque $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots$ diverge). Entonces, seguimos añadiendo términos positivos hasta que se vuelva a superar A, y así sucesivamente. De este modo, obtenemos una serie reordenada que converge a A. De la siguiente forma

$$1.2 = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\cdots$$

$$1.5 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots$$

2.4 Convergencia por subseries

Definición 2.4.1 Sea (x_{j_k}) una subsucesión de (x_j). A la serie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ se le llama subserie de $\sum_{j\geq 1} x_j$

■ **Ejemplo 2.4.1** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es una subserie de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ya que $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Definición 2.4.2 La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge por subseries, si para cada subsucesión (x_{j_k}) de (x_j), la serie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ converge.

Recordemos que (x_{j_k}) es una subsucesión de (x_j) si la función $k \mapsto j_k$, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, es estrictamente creciente.

Lema 2.4.2 La suma de cada subserie es única.

Demostración:

Por reducción al absurdo.
Sea la subserie $\sum x_{i_k}$ de la serie $\sum x_i$. Supongamos que existen $x, y \in X$ tal que, $x \neq y$ y la subserie $\sum x_{i_k}$ converge a x e y, pero por el lema 2.1.1 se tiene que converge a una única sum por lo que $x = y$, lo cual es una contradiccíon. Por lo tanto la suma de la subserie es única. $\square$

2.5 Sumabilidad

Definición 2.5.1 La familia (x_n) es sumable, con suma $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{n\in F} x_n - x \right\| < \varepsilon, \tag{2.4}$$

para todo conjunto finito F tal que $F_\varepsilon \subseteq F \subset \mathbb{N}$.

Lema 2.5.1 Si la familia (x_n) es sumable, su suma es única.

Demostración:

Por reducción al absurdo.
Supongamos que su suma suma no es única, es decir existen $s,\ s' \in X$, donde $s \neq s'$,

que cumplen (2.4), tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe existe un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{y} \quad \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por desigualdad triangular de la norma tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|s-s'\| &= \left\| s + \sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - \sum_{n\in F_\varepsilon} -s' \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right) + \left(s - \sum_{n\in F_\varepsilon} x_i\right) \right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right\| + \left\| s - \sum_{n\in F_\varepsilon} x_i \right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right\| + \left\| (-1)\left(\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s\right) \right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right\| + |-1| \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s\right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s'\right\| + \left\|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_i - s\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$||s-s'|| < \varepsilon, \ \ \forall\, \varepsilon > 0$$

de donde se sigue que

$$||s-s'|| = 0$$

Y por propiedades de la norma $s = s'$, y es una contradicción ya que antes mencionamos que $s \neq s'$. Así la suma de la serie es única. □

Habitualmente estaremos usando la definición 2.5.1, la definición de sumabilidad puede definirse para una familia $(x_n)_{n\in\Lambda}$, donde Λ es un conjunto arbitrario. Nos limitaremos al caso de familias numerables (x_n), es decir al caso $\Lambda = \mathbb{N}$.

Observemos que la definición de sumabilidad no menciona ninguna ordenación en el índice n tomando valores en F. Así, se puede pensar que la sumabilidad es una forma "incondicional" de convergencia. Pero la sumabilidad no depende del orden de los términos, de algún modo se puede decir que no hay un orden. Es lo que Pete Clark llama suma desordenada (ver [11], pág. 299).

3. Convergencia de series en $\mathbb{R}$

En ciertos casos, cuando se busca determinar si una serie converge o diverge, trabajar directamente con la definición puede resultar bastante complicado. Por esta razón, se opta por explorar la existencia de algún tipo de equivalencia, en este caso en $\mathbb{R}$ y así buscamos dar un contexto a las relaciones que queremos estudiar, en el caso de un espacio de Banach.

Se comenzará a estudiar las series absolutamente convergentes.

Proposición 3.0.1 — Criterio de Cauchy. La serie $\sum x_k$ converge si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $k \geq N$ implica que $\left|\sum_{i=k}^{k+p} x_i\right| < \varepsilon$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Por hipótesis la serie $\sum x_k$ converge, es decir la sucesión de sumas parciales (s_n) converge y por la proposición 1.2.10, s_n es de Cauchy, por lo tanto para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 0$ tal que $|s_m - s_n| < \varepsilon$ para todo $m,n \geq N$. Para cualquier $p \in \mathbb{N}$, sea $m = k + p$ y $n = k - 1$. Ya que $m,n \geq N$ es equivalente a $p \in \mathbb{N}$ y $k > N$. Entonces, la serie converge si y sólo

$$|s_m - s_n| = |s_{k+p} - sk - 1| = \left|\sum_{i=k}^{k+p}\right| < \varepsilon$$

Para todo $p \in \mathbb{N}$ y $k > N$. $\square$

Proposición 3.0.2 Si la serie de términos reales $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente, cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto valor $x \in X$. En particular, convergencia absoluta implica convergencia.

Demostración:

Primero demostraremos que, convergencia absoluta implica convergencia. Consideremos las sumas parciales de ambas series,

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \ , \ \ t_n = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Sea p, q, sin pérdida de generalidad $q < p$,

$$|s_p - s_q| = \left|\sum_{j=q+1}^{p} x_j\right| \leq \sum_{j=q+1}^{p} |x_j| = t_p - t_q = |t_p - t_q| \tag{3.1}$$

Por hipótesis (t_n) es convergente, y por la proposición 1.2.10 es de Cauchy, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_p - t_q| < \varepsilon$, para todo $p,\ q > n_0$, por (3.1) $|s_p - s_q| < \varepsilon$ para todo $p,\ q > n_0$, por lo que (s_n) es de Cauchy, y por el criterio de Cauchy en $\mathbb{R}$, (s_n) converge.

Por otro lado, sea $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ un reordenamiento de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$. Consideremos $\beta = \sum_{j\geq 1} |x_j|$ de donde $\sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma(k)}| \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión de sumas parciales es acotado entonces la serie $\sum x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente a algún $x \in \mathbb{R}$.

Por lo demostrado anteriormente, existe $y = \sum_{j\geq 1} x_j$. Si escribimos

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \ , \ \ t_n = \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma(k)}| \ ,$$

por la definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$|y - s_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Escojamos una suma parcial t_r tal que $|x - t_r| < \frac{\varepsilon}{3}$ y de tal forma que $x_1, \ldots, x_N$ todos ocurren en t_r. Luego

$$|x - y| \leq |x - t_r| + |t_r - s_N| + |s_N - y|$$

Ya que $s_N = \sum_{j=1}^{N} x_j$ y cada uno de $x_1, \ldots, x_N$ está en t_r, el mínimo j en $t_r - s_N$, es $j = N+1$; entonces $|t_r - s_N| \leq \sum_{k \geq N+1} |x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. De aqui se sigue que

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Por lo tanto $x = y$. Lo que concluye la demostración. □

El siguiente resultado, nos brinda una definición alternativa de convergencia absoluta en el caso de series términos reales.

Proposición 3.0.3 Dada una serie $\sum_{j \geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalente:

1. La serie converge absolutamente.
2. Para cada sucesión (ε_j) tal que $\varepsilon_j = 1$ o -1, la serie $\sum_{j \geq 1} \varepsilon_j x_j$ converge.

Demostración:

Probemos que $1) \Rightarrow 2)$. Notemos que $|\varepsilon_j x_j| = |x_j|$ y por la proposición (3.0.2) que nos asegura que toda serie absolutamente convergente es convergente, por lo tanto $\sum_{j \geq 1} \varepsilon_j x_j$ converge.

$2) \Rightarrow 1)$. Supongamos que $2)$ se cumple, elegimos la sucesión (ε_j) de la siguiente forma,

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_j \geq 0, \\ -1 & \text{si} \quad x_j < 0. \end{cases}$$

por lo tanto $\sum_{j\geq 1}\varepsilon_j x_j=\sum_{j\geq 1}|x_j|$, así la serie converge absolutamente. $\square$

El matemático Gustav L. Dirichlet (1805-1859), demostró en 1837 que si una serie de términos reales converge absolutamente, todos sus reordenamientos convergen, a una misma suma ([10], pág. 192). Aunque no parece haber en la literatura una mención específica de cuándo y quién introdujo las nociones de convergencia absoluta y convergencia incondicional, el resultado de Dirichlet indica que ambas ya estaban siendo estudiadas alrededor del año 1830.

Vimos que si la serie converge absolutamente, también converge incondicionalmente. Â¿Pero qué sucede si la serie converge pero no absolutamente? Para esto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.0.4 Si la serie $\sum_{j\geq 1}x_j$ de términos reales converge, pero no absolutamente, entonces para cada $y\in\mathbb{R}$ existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1}x_{\sigma(k)}$ que converge a y. Además, existen reordenamientos que divergen

Demostración:

Para probar el teorema basta ver que si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ de tal manera que

$$-\infty\leq\alpha\leq\beta\leq\infty,$$

entonces existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1}x_{\sigma(k)}$ con las sumas parciales tal que

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)}=\alpha \quad \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)}=\beta. \tag{3.2}$$

En particular si $\alpha=\beta$ se tiene entonces que $\sum_{k\geq 1}x_{\sigma(k)}$ converge a $\alpha=\beta$ y como α,β son arbitrarios, se cumple que la serie $\sum_{k\geq 1}x_{\sigma(k)}$ converge a y para toda $y\in\mathbb{R}$, donde $y=\alpha=\beta$.

En el caso cuando $\alpha\neq\beta$, son los reordenamientos que divergen de los que habla el teorema.

Definiendo p_n y q_n de la siguiente manera

$$p_n := \frac{|x_n| + x_n}{2}, \quad q_n := \frac{|x_n| - x_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $p_n - q_n = x_n,\ p_n + q_n = |x_n|, p_n, q_n \geq 0$. Observemos que ambas series $\sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ divergen, pues si ambas convergieran entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) < \infty$$

lo cual contradice la hipótesis. Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n,$$

si la serie $\sum_{n\geq 1} p_n$ diverge y la serie $\sum_{n\geq 1} q_n$ converge (o viceversa) esto implicaría la divergencia de $\sum_{n\geq 1} x_n$ y de nuevo estaríamos contradiciendo la hipótesis.

Ahora, supongamos que $P_1, P_2, \ldots$ denota los términos no negativos de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$, en el orden en que aparecen, y sea $Q_1, Q_2, \ldots$ el valor absoluto de los términos negativos de la sucesión $\sum_{n\geq 1} x_n$, también en su orden original.

Las series $\sum_{n\geq 1} P_n,\ \sum_{n\geq 1} Q_n$ difieren de $\sum_{n\geq 1} p_n,\ \sum_{n\geq 1} q_n$ solo en términos cero y, por lo tanto, son divergentes.

Construimos sucesiones $(m_n), (k_n)$, de la siguiente manera a fin de considerar la serie

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} + \ldots \quad (3.3)$$

Escogemos sucesiones reales $\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\}$ tal que $\alpha_n \to \alpha,\ \beta_n \to \beta,\ \alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 > 0$. Sean m_1, k_1 los enteros más pequeños tal que

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} > \beta_1$$

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} < \alpha_1$$

Sean m_2, k_2 los enteros más pequeños tal que

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} > \beta_2$$

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} < \alpha_2;$$

y continuamos de esta manera. Esto es posible ya que $\sum_{n\geq 1} P_n$ y $\sum_{n\geq 1} Q_n$ divergen. Probaremos que (3.3) es un reordenamiento de la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$, que satisface (3.2).

Si a_n, b_n denotan las sumas parciales de (3.3) cuyos últimos términos son $P_{m_n}, -Q_{k_n}$, entonces

$$|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \quad |\alpha_n - b_n| \leq Q_{k_n}.$$

Pues si no se cumpliera que $|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$, entonces $|a_n - \beta_n| > P_{m_n}$, y por la construcción de los β_n se tiene que $a_n > \beta_n$ es decir $a_n - \beta_n > 0$. Entonces podemos escribir la desigualdad $|a_n - \beta_n| > P_{m_n}$ como $a_n - \beta_n > P_{m_n}$ de aquí obtenemos lo siguiente

$$\beta_n < a_n - P_{m_n} = P_1 + \ldots + P_{m_n} - P_{m_n} = P_1 + \ldots + P_{m_n-1}$$

contradiciendo la elección de m_n. Por lo tanto $|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$.

De manera análoga se prueba que $|\alpha_n - b_n| \leq Q_{kn}$.

Como $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, $P_n \to 0$ y $Q_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Y por las desigualdades anteriores se tiene que $a_n \to \beta, b_n \to \alpha$.

Por último, veremos que ningún número menor que α o mayor que β puede ser un límite subsecuencial de sumas parciales de (3.3).

Supongamos que $L < \alpha$ y que L es límite subsecuencial de la sucesión de sumas parciales asociadas a (3.3); así, existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales asociada a (3.3), llamémosla S_L tal que S_L converge a L.

Será suficiente suponer que, o bien, S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de términos P_k 's o bien, S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de Q_j 's.

Analicemos el caso en el que S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de Q_j 's.

Dado que $S_L \to L$, entonces cualquier subsucesión de S_L converge a L, por lo cual, existe una subsucesión de S_L que consta solamente de sumas incompletas de Q_j 's y que converge a L, digamos que la subsucesión se llama σ_L.

Existe un índice N_1 a partir del cual todos los términos de σ_L se encuentran en el intervalo $(L-r, L+r)$, donde $r = \frac{1}{2}(\alpha - L)$.

Por otra parte, puesto que $\alpha_n \to \alpha$, existe otro índice N_2 a partir del cual α_n se encuentra en el intervalo $(L+r, \alpha+r)$.

Eligiendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ podemos observar que para índices mayores que N tendremos que

$$\begin{aligned} P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + \ldots + P_{m_s+1} + \ldots + P_{m_{s+1}} \\ -Q_{k_s+1} - \ldots - Q_{k_{s+1}-j} < L + r < \alpha_{k_{s+1}} \end{aligned}$$

lo cual contradice la minimalidad de k_{s+1}.

De modo análogo se puede analizar el caso en el que $L > \beta$.

Esto concluye la demostración. $\square$

Este resultado se debe a Bernhard Riemann (1826 - 1866), quien lo introdujo en su tesis, que fue defendida en Göttingen en 1854 (ver [10], pág 192). A partir del teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.0.5 Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, si

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \text{ es la suma de una reordenación } \sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)} \right\}$$

entonces, S es, o el conjunto vacío, o un número, o $\mathbb{R}$.

Demostración:

Esta prueba se realizará en tres casos, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente y si $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge.
Primero, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, por el teorema (3.0.4), se tiene que $S = \mathbb{R}$.
Segundo, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente hacia $x \in \mathbb{R}$, por la proposición (3.0.2) se tiene que $S = \{x\}$.
Tercero, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge, sus reordenamientos tampoco van a converger, ya que si existiera un reordenamiento de $\sum_{j\geq 1} x_j$ que convergiera, la serie correspondiente a tal reordenamiento es condicionalmente convergente, ya que la serie original $\sum_{j\geq 1} x_j$ es un reordenamiento del reordenamiento. Y como ningún reordenamiento converge, entonces $S = \emptyset$. $\square$

Corolario 3.0.6 La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales converge absolutamente si y sólo si converge incondicionalmente.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente, por la proposición (3.0.2) cada reordenamiento de la serie converge absolutamente e incondicionalmente a un cierto valor $x \in X$, así la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente.
$\Leftarrow$) Lo realizaremos por reducción al absurdo. Supongamos que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente a $x \in \mathbb{R}$, pero que no converge absolutamente. Por el teorema (3.0.4) existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ que converge a y y que $y \neq x$, pero es una contradicción porque la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente. Por lo tanto, la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente. $\square$

Ya que estamos trabajando sobre $\mathbb{R}$, hay equivalencias entre la convergencia por subseries y convergencia absoluta.

Proposición 3.0.7 Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. La series es sumable.
2. La serie converge por subseries.
3. La serie converge absolutamente.

Demostración:

$1) \Rightarrow 2)$: Supongamos que $(x_j)_{j\geq 1}$ es sumable con suma $x \in X$, es decir para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j\in F} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo conjunto finito F tal que $F_\varepsilon \subseteq F \subset \mathbb{N}$.
Sea $G \subset \mathbb{N}$ infinito, si $M \geq N > \text{máx}(F_\varepsilon)$ y sean $F_1 = \{n \in \mathbb{N} : n < N\}$,
$F_2 = F_1 \cup \{n \in \mathbb{N} : n \leq M \text{ y } n \in G\}$, entonces

$$\left| \sum_{n\in F_1} x_n - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{n\in F_2} x_n - x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{n=N \\ n\in G}}^{M} x_n \right| &= \left| \left(\sum_{n\in F_2} x_n - x \right) - \left(\sum_{n\in F_1} x_n - x \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n\in F_2} x_n - x \right| + \left| \sum_{n\in F_1} x_n - x \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La subserie generada por G cumple con la condición de Cauchy, por lo tanto convergerá.

$2) \Rightarrow 3)$: Supongamos que la serie converge por subseries. Sea $k \in \mathbb{N}$, y sean

$P = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0\}$, $N = \{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$, por lo que $\sum\limits_{n\in P} x_n$ y $\sum\limits_{n\in N} x_n$ convergen. Pero

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j| = \sum_{n\in P} x_n - \sum_{n\in N} x_n, \quad n \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\},$$

haciendo $k \to \infty$ se tiene que la serie $\sum |x_j|$ converge. $3) \Rightarrow 1)$: Supongamos que la serie converge absolutamente. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x = \sum x_j$. Entonces existe M tal que

$$\left| \sum_{n\geq M} x_n - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya que $\sum |x_j|$ converge, existe un N tal que $\sum\limits_{n>N} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $F_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : n \leq \text{máx}\{M,\ N\}\}$. Si $F_\varepsilon \subset F$ y $G = F \setminus F_\varepsilon$, entonces

$$\left| \sum_{n\in G} x_n \right| \leq \sum_{n\in G} |x_n| \leq \sum_{n>N} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$\left| \sum_{n\in F} x_n - x \right| = \left| \sum_{n\in F_\varepsilon} x_n - x + \sum_{n\in G} x_n \right| \leq \left| \sum_{n\in F_\varepsilon} x_n - x \right| + \left| \sum_{n\in G} x_n \right| < \varepsilon.$$

□

Del corolario (3.0.6) y de la proposición (3.0.7), tenemos el siguiente corolario:

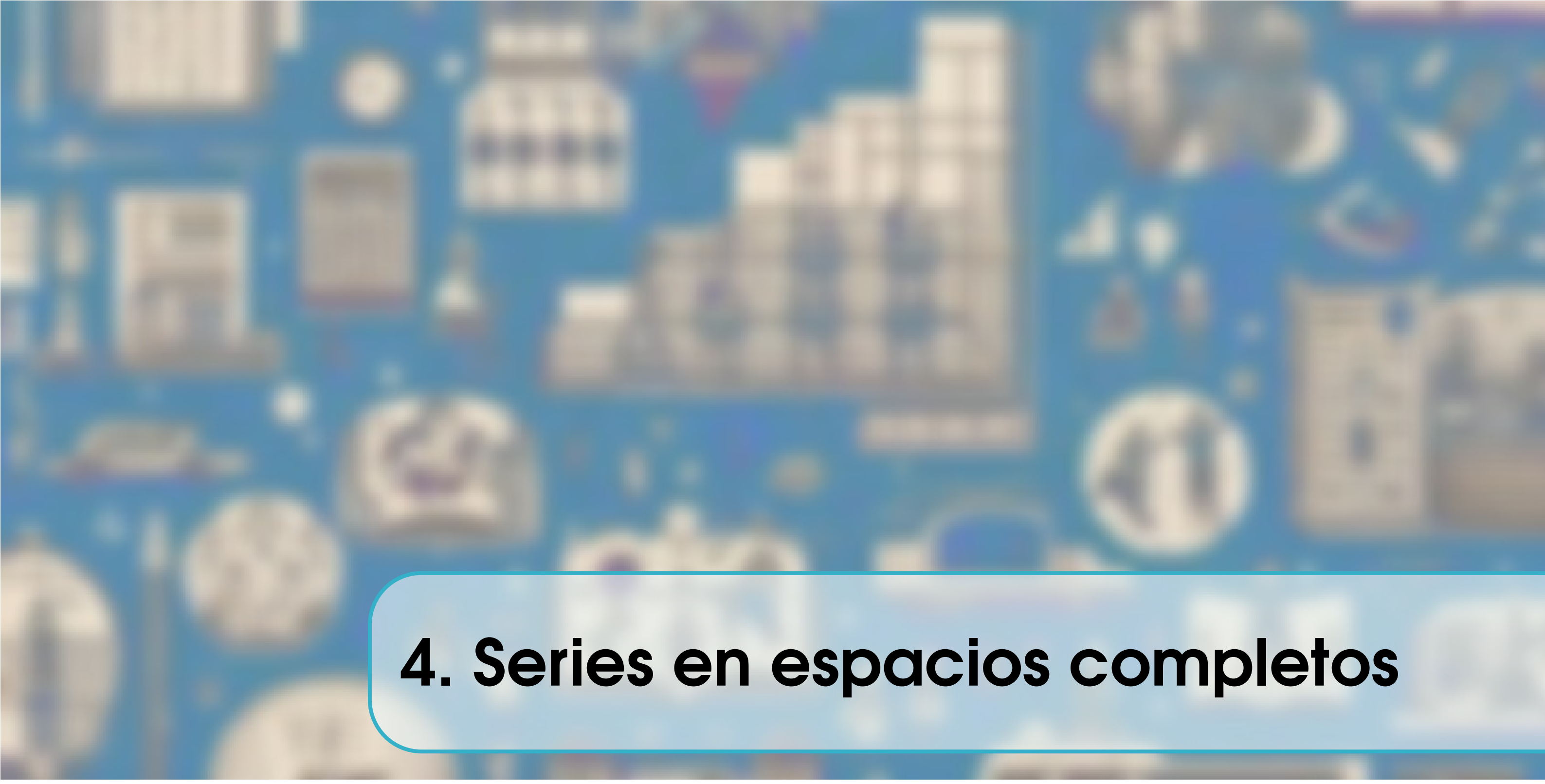
Corolario 3.0.8 Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La serie converge absolutamente.
2. La serie converge incondicionalmente.
3. La serie converge por subseries.
4. La serie es sumable.

Demostración:

La demostración la haremos utilizando el corolario (3.0.6) y la proposición (3.0.7). $1) \Rightarrow 2)$: Supongamos que la serie converge absolutamente, entonces por el corolario (3.0.6) tenemos que la serie converge incondicionalmente.

$2) \Rightarrow 3)$: Supongamos que la serie converge incondicionalmente, por el corolario (3.0.6) la serie va a converger absolutamente y por la proposición (3.0.7) por equivalencia la serie converge por subseries.
$3) \Rightarrow 4)$: Supongamos que la serie converge por subseries, por las equivalencias de la proposición (3.0.7), la serie es sumable.
$4) \Rightarrow 1)$: Supongamos que la serie es sumable, por las equivalencias de la proposición (3.0.7), la serie converge absolutamente. $\square$



4. Series en espacios completos

Comenzaremos dando una caracterización de espacios de Banach por la convergencia de series en el espacio. Probaremos que en un espacio de Banach la convergencia absoluta de una serie, implica la convergencia absoluta e incondicional de cualquier reordenamiento de ella. Al tratar de responder a la pregunta de cuando en el enunciado anterior se cumple el recíproco, obtenemos el famoso resultado de Dvoretsky-Rogers. Daremos una demostración de una de las implicaciones de este resultado. Finalizaremos este capítulo dando resultados que caracterizan la convergencia de series a través del concepto de familias sumables en espacios de Banach; y a través de familias ortonormales para espacios de Hilbert.

4.1 Series en espacios de Banach

Como se mencionó antes el concepto de convergencia absoluta es de gran interés ya que provee una definición equivalente de la completitud de un espacio normado, en otras palabras:

Proposición 4.1.1 Dado un espacio normado X, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El espacio X es un espacio de Banach.
2. Toda serie con términos en X que es absolutamente convergente, es también convergente.

Demostración:

$1) \Rightarrow 2)$. Supongamos que X es espacio de Banach. Sea $\sum_{j\geq 1}\left\|x_j\right\| < \infty$ y $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $n > k$, por la desigualdad del triángulo

$$\|s_n - s_k\| = \left\|\sum_{i=k+1}^{n} x_i\right\| \leq \sum_{i=k+1}^{n} \|x_i\|$$

entonces (s_n) es una sucesión de Cauchy y como X es completo, (s_n) debe converger a un punto en X.

$2) \Rightarrow 1)$. Sea (x_j) una sucesión de Cauchy en X. Eligiendo una subsucesión $\{x_{j_k}\}$ que satisfaga $\left\|x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$, se cumplirá entonces que la serie $\sum_{k\geq 1}\left(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right)$ es absolutamente convergente ya que $\sum_{k\geq 1}\left\|x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right\| \leq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k} < \infty$.

Como estamos suponiendo (2) la serie $\sum_{k\geq 1}\left(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right)$ converge a $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[(x_{j_2} - x_{j_1}) + (x_{j_3} - x_{j_2}) + \cdots + (x_{j_n} - x_{j_{n-1}}) + (x_{j_{n+1}} - x_{j_n})\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x_{j_{n+1}} - x_{j_1}\right)
\end{aligned}$$

es decir la subsucesión $\left(x_{j_k}\right)$ converge a $x + x_{j_1}$. Ya que $\left(x_j\right)$ es de Cauchy y

$x_{j_k} \to x + x_{j_1}$, se sigue que la sucesión original $(x_j)_{j\geq 1}$ converge al mismo límite. Por lo tanto X es de Banach. $\square$

Resulta de gran importancia suponer que el espacio sea completo. Para ilustrar este hecho, se presentará el siguiente ejemplo de un espacio normado en donde una serie absolutamente convergente no es convergente.

■ **Ejemplo 4.1.2** Sea c_{00} el espacio de las sucesiones reales $(x_j)_{j\geq 1}$ que tienen un número finito de términos distintos de cero.

Si para cada $k \geq 1$, e^k es la sucesión en c_{00} definida como

$$e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{para } j = k \\ 0 & \text{para } j \neq k \end{cases}.$$

la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

converge absolutamente, puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|e^k\|_\infty}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup_{j\geq 1} \left|e_j^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

es convergente. Sin embargo, la serie no converge en c_{00} con respecto a la norma $\|\cdot\|_{l^\infty}$. En efecto, supongamos que existe $e = \{e_j\}_{j\geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{k\geq 1} \frac{e^k}{k^2} = e$ en c_{00}. Para esa sucesión en particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que $e_j = 0$ para $j > M$. Es decir, para $j > M$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_j^k}{k^2} = 0$$

lo cual no puede ser, debido a cómo hemos definido e_j^k.

En particular, este ejemplo muestra que c_{00} no es un espacio de Banach y que la Proposición (3.0.2) no puede extenderse a cualquier espacio lineal normado.

Sin embargo, si el espacio X es de Banach, podemos extender a estos espacios la Proposición (3.0.2) como se muestra a continuación.

Proposición 4.1.3 Sea X un espacio de Banach. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X converge absolutamente, entonces cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto $x \in X$.

Demostración:

A partir de la proposición (4.1.1), la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge en X a un cierto $x \in X$.

Si consideramos un reordenamiento $k \to \sigma(k)$ de $\mathbb{N}$ y si fijamos $N_n \geq 1$ tal que todos los términos en la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ aparecen en la suma parcial $\sum_{j=1}^{N_n} x_j$, tenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{j=1}^{N_n} \left\|x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j\right\|$$

Como toda sucesión de números reales acotada y no decreciente converge (ver [14], pág. 28, teorema 11), la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente. Por lo tanto, volviendo a usar la proposición (4.1.1), resulta que la serie $\sum_{k>1} x_{\sigma(k)}$ converge en X, a un cierto $y \in X$. Afirmamos que $x = y$.

Para verlo, dado $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ fijamos $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - x\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{j\geq N+1} \left\|x_j\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Además, podemos seleccionar una suma parcial $\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ aparecen en ella. En efecto, como σ es una biyección, deben de existir $n_1, \ldots, n_N$ tal que $\sigma\left(n_j\right) = j$, para $1 \leq j \leq N$. Reordenando los valores n_j, si es necesario, podemos suponer que $n_1 < \ldots < n_N$. Finalmente, agregamos a $\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}$, si es necesario, todos los valores intermedios, a fin de obtener

$$\{1, \ldots, N\} \subset \{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}$$

Eligiendo $M \geq n_N$ se sigue que

$$\left\|\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y\right\| = \left\|\sum_{k=M+1}^{\infty} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así,

$$\|x-y\| \leq \left\|x - \sum_{j=1}^{N} x_j\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_\sigma(k)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y\right\|$$

La elección de N implica que el

$$\left\|x - \sum_{j=1}^{N} x_j\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

. Ahora trabajemos sobre $\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_\sigma(k)\right\|$

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{\text{ciertos } \sigma(\text{k}) \geq \text{N}+1} \|x_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M.

$$\left\|\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es decir,

$$0 \leq \|x-y\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Concluimos entonces que $x = y$. Esto prueba la convergencia incondicional y así completa la prueba de la proposición. □

Resulta natural preguntarse si la recíproca es válida. Si así fuera, entonces tenemos que en cualquier espacio de Banach, si la serie converge incondicionalmente entonces la misma serie converge absolutamente. Stefan Banach $(1892-1945)$

propuso este problema en (ver [12], pág. 240). Este problema estuvo sin resolver por casi 20 años, hasta que fue resuelto por Aryev Dvoretsky $(1916-2008)$ y Ambrose Rogers $(1920-2005)$ en un famoso artículo (ver [15]).

La implicación, $(1) \Rightarrow (2)$ del siguiente teorema, la prueba es muy profunda y compleja, por lo que no se abordará en este trabajo, ya que usa conceptos y resultados avanzados del análisis funcional como el dual topológico del espacio y las topologías débil $*$, que están lejanos al alcance de este trabajo (ver [21], pág 59). El lector interesado puede consultar (ver [20], pág. 440, Teorema 1) cuya demostración es de naturaleza geométrica basada en la teoría de los operadores que suman absolutamente (ver [20], pág. 431, capítulo IV, sección 30). A partir de este resultado, inspiró nuevos problemas y resultados e, indirectamente originó una rama del análisis funcional, denominado análisis funcional geométrico.

Teorema 4.1.4 — Dvoretsky y Rogers. Si X es un espacio de Banach, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Las series incondicionalmente convergentes en X son exactamente aquellas series que convergen absolutamente en X.

2. El espacio X tiene dimensión finita.

Demostración:

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea X un espacio de Banach con dimensión algebraica finita.

Sabemos que cuando un espacio normado tiene dimensión finita, todas las normas en X son equivalentes, esto es, si $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$ son cualesquiera dos normas en X, entonces existen constantes C_0 y C_1 tales que

$$C_0\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq C_1\|x\|_0 \quad (\forall x \in X)$$

En particular, esto implica que si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X converge con respecto a una norma dada a un elemento $x \in X$, entonces también converge a x con respecto a cualquier otra norma en X.

Sea $\|\cdot\|_X$ la norma original considerada en X. Supongamos que $\dim X = n$ y sea $\{u_j\}_{j=1}^n$ una base de Hamel ordenada en X.

Dado cualquier $x \in X$, existen escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

Se puede demostrar fácilmente que la función $\|\cdot\|_* : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$x \mapsto \|x\|_* := \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$

define una norma en X. De este modo, cualquier sucesión que converja con respecto a la norma original de X, convergerá al mismo elemento en la norma $\|\cdot\|_*$, y viceversa.

Enseguida, consideremos una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ en X que es incondicionalmente convergente a un elemento $x \in X$ con respecto a la norma original $\|\cdot\|_X$ de X.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen escalares únicos $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ tales que

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} u_j$$

Si

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

entonces para cada biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tendremos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\|_X \to 0 \quad \text{si } m \to \infty$$

lo que implica que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\|_* \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

De aquí, tenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\sigma(k))} u_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\|_* \to 0 \quad \text{si } m \to \infty$$

Pero

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\sigma(k))} u_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\|_* &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha^{(\sigma(k))} u_j - \alpha_j u_j \right] \right\|_* \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right) u_j \right] \right\|_* \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Notemos que para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right)^2 \right)^{1/2} \to 0 \text{ si } m \to \infty.$$

Se sigue de esto que para cada $j = 1, \ldots, n$, la serie de números reales $\sum_{k \geq 1} \alpha_j^{(\sigma(k))}$ converge al número real α_j y esta convergencia es independiente de la biyección σ. De este modo, la serie de números reales $\sum_{m \geq 1} \alpha_j^{(m)}$ converge incondicionalmente a α_j para cada $j = 1, \ldots, n$. Por el Corolario (3.0.6) se sigue que la serie $\sum_{m \geq 1} \alpha_j^{(m)}$ converge absolutamente para cada $j = 1, \ldots, n$.

Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ y dado $j = 1, \ldots, n$ existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $s > l \geq N = \text{máx}_{1 \leq j \leq n} N_j$

$$\left| \sum_{m=1}^{l} \alpha_j^{(m)} - \sum_{m=1}^{s} \alpha_j^{(m)} \right| \leq \sum_{m=l+1}^{s} \left| \alpha_j^{(m)} \right| < \varepsilon$$

uniformemente en $j = 1, \ldots, n$.

Usando la desigualdad $(a+b)^r \leq a^r + b^r$ para a, b reales no negativos y $0 < r < 1$, se sigue que si $s > l \geq N$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=l+1}^{s} \|x_m\|_* &= \sum_{m=l+1}^{s} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} u_j \right\|_* \\
&= \sum_{m=l+1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{m=l+1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} \right| \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=l+1}^{s} \left| \alpha_j^{(m)} \right| \\
&< n\varepsilon,
\end{aligned}$$

y por consiguiente, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ converge absolutamente respecto a la norma $\|\cdot\|_*$, y por tanto, converge absolutamente respecto a la norma original $\|\cdot\|_X$, debido a que ambas normas son equivalentes. $\square$

A continuación, presentamos el siguiente resultado, cuya prueba omitimos por encontrarse fuera del alcance de este trabajo. El lector interesado puede consultar (ver [15]).

Teorema 4.1.5 Dado un espacio de Banach X y dada una serie $\sum_{j \geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La serie converge incondicionalmente.

2. La serie converge por subseries.

3. La familia $\{x_j\}_{j \geq 1}$ es sumable.

La completitud del espacio X juega un papel importante en la prueba de la implicacion $(1) \Rightarrow (2)$. Veremos en el ejemplo (4.2.4) un espacio normado incompleto que no cumple con la condición $(1) \Rightarrow (2)$.

La equivalencia de que la sumabilidad es una forma "incondicional" de convergencia se cumple para espacios que no son necesariamente secuencialmente completos como se muestra a continuación.

Proposición 4.1.6 Dado un espacio lineal normado X y dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La serie converge incondicionalmente en X.
2. La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable en X.

Demostración:

$1) \Rightarrow 2)$. Lo haremos por reducción al absurdo. Para ello supondremos que 2) no se cumple, es decir que la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge, podemos concluir que 1) no se cumple. Si la serie converge, digamos que converge a $x \in X$. Por hipótesis, la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable en x. Entonces debe existir $\varepsilon_0 > 0$, existe subconjunto finito F de $\mathbb{N}$, tal que para todo conjunto finito $F \subseteq F' \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j\in F'} x_j - x \right\| \geq \varepsilon_0 \tag{4.1}$$

Por otra parte, la convergencia de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ a x, significa que existe $N = N_{\varepsilon_0} \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{4.2}$$

para todo $n \geq N$. A partir de esto construiremos un reordenamiento de la serie que no converge a x. Esto mostrará que la serie no converge incondicionalmente debido a la unicidad del límite.

De acuerdo con (4.2),

$$\left\| \sum_{1\leq j\leq N} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Para $F_1 = \{1, \ldots, N\}$, elegimos $F_1' \supseteq F_1$ de modo que satisfaga (4.1). Si $F_2 = \{1, \ldots,$ máx $_{j\in F_1'}\}$

$$\left\| \sum_{j\in F_2} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

de acuerdo con (4.2).

Como en el primer paso, seleccionamos $F_2' \supseteq F_2$ de modo que satisfaga (4.1). Siguiendo inductivamente obtenemos dos familias $\{F_s\}_{s\geq 1}$ y $\{F_s'\}_{s\geq 1}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $F_s' \supseteq F_s$, para todo $s \geq 1$. Como la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no es sumable, este proceso no puede terminar. Es decir, que la familia $\{F_1, F_1' - F_1, F_2' - F_2, \ldots,\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

Entonces, podemos definir una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enumerando sucesivamente los elementos en los conjuntos $F_1, F_1' - F_1, F_2' - F_2, \ldots$.

Afirmamos que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ así obtenida no converge en X. Para verlo, es suficiente probar que sus sumas parciales no forman una sucesión de Cauchy en X. Es decir que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que dado $M \geq 1$, se pueden elegir $m = m_{M,\varepsilon_1} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_1} \geq 1$ tales que

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+l} x_{\sigma(k)} \right\| \geq \varepsilon_1 \tag{4.3}$$

En efecto, por la manera de construir los conjuntos F_s y F_s', podemos decir, para todo $s \geq 1$,

$$\left\| \sum_{j \in F_s' - F_s} x_j \right\| \geq \left\| \sum_{j \in F_s'} x_j - x \right\| - \left\| \sum_{j \in F_s} x_j - x \right\| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Por otra parte, por la forma en que se definió σ y por ser σ una biyección, dado $M \geq 1$, deben de existir $m = m_{M,\varepsilon_0} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_0} \geq 1$ tales que $\{\sigma(m+1), \dots, \sigma(m+l)\} = F_s' - F_s$ para algún $s \geq 1$. Es decir, que (4.3) se cumple para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Esta contradicción prueba lo que queriamos.

2) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que la familia $\{x_j\}_{j \geq 1}$ es sumable, por definición debe de existir un único $x \in X$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ con

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j - x \right\| < \varepsilon$$

para todo conjunto finito $\mathbb{N} \supset F \supseteq F_\varepsilon$.

Si fijamos una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, debe existir $M = M_\varepsilon$ tal que $\{\sigma(1), \dots, \sigma(M)\} \supseteq F_\varepsilon$. Entonces, para cada $m \geq M$, tendremos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\| < \varepsilon$$

Esto muestra que la serie $\sum_{j \geq 1} x_j$ converge incondicionalmente. Así, concluimos la prueba de la proposición. □

4.2 Series en espacios de Hilbert

En esta sección estaremos suponiendo siempre que los espacios de Hilbert son reales.

Proposición 4.2.1 Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces

1. Los siguientes enunciados son equivalentes:
   a) La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge.
   b) La serie real $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge.
   c) La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge incondicionalmente.
2. La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge absolutamente si y sólo si la serie real $\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|$ converge.

Demostración:

$1a) \Rightarrow 1b)$. Supongamos que la serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge en H, a un cierto $x \in H$. Es decir, supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|_H^2 = 0$$

Por la continuidad del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, se tiene que

$$\langle x_k, x \rangle_H = \left\langle x_k, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \right\rangle_H = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle x_k, x_j \rangle_H = \alpha_k$$

para todo $k \geq 1$. Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x \rangle_H^2 \underset{(i)}{\leq} \|x\|_H^2$$

para todo $n \geq 1$, donde la desigualdad (i) es la desigualdad de Bessel. Esto muestra que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge ya que la suma parcial $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2$ es acotada.

$1b) \Rightarrow\ 1a)$. Supongamos que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j x_j\right\|_H^2 &= \left\langle \sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j x_j, \sum_{k=n}^{n+m}\alpha_k x_k\right\rangle_H = \sum_{j=n}^{n+m}\sum_{k=n}^{n+m}\alpha_j\alpha_k\left\langle x_j, x_k\right\rangle_H \\ &= \sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j^2\left\|x_n\right\|^2 = \sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

uniformemente en $m\geq 1$. Puesto que H es un espacio de Banach, resulta que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$ converge.

Esto prueba que 1a) y 1b) son equivalentes.

$1b) \Rightarrow 1c)$. Supongamos que la serie real $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge, el Corolario (3.0.8) nos dice que esta serie también converge incondicionalmente. Por lo tanto, dada una biyección $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la serie $\sum_{k\geq 1}\alpha_{\sigma(k)}^2$ converge, lo cual equivale a decir que la serie $\sum_{k\geq 1}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}$ converge. Sólo nos falta probar que converge a $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$. Veamos esto.

Dado $\varepsilon > 0$ fijamos $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j x_j\right\|_H < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2$$

Además, consideramos una suma parcial $\sum_{1\leq k\leq M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_N x_N$ aparecen en ella y

$$\left\|\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)} - y\right\|_H < \frac{\varepsilon}{3}$$

Así,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jx_j-y\right\|_H\leq\underbrace{\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_jx_j\right\|_H}_{(i)}+\underbrace{\left\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_jx_j-\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}\right\|_H}_{(ii)}$$
$$+\underbrace{\left\|\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}-y\right\|_H}_{(iii)}$$

La elección de N implica que el término (i) es $<\frac{\varepsilon}{3}$. En cuanto a (ii),

$$\left\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_jx_j-\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}\right\|_H^2=\sum_{\text{ciertos}\,\sigma(k)\geq N+1}\alpha_{\sigma(k)}^2\leq\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j^2<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también $<\varepsilon$. Es decir

$$0\leq\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jx_j-y\right\|_H<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

para todo $\varepsilon>0$, lo cual muestra que $1b)$ implica $1c)$.

$1c)\Rightarrow 1a)$. Supongamos que la serie $\sum_{j\geq1}\alpha_jx_j$ converge incondicionalmente, ahora por el corolario (3.0.8) va a converger absolumante, puesto que H es un espacios de Banach $\sum_{j\geq1}\alpha_jx_j$ la serie converge. Esto concluye la prueba de (1).

La prueba de (2), es una consecuencia de la desigualdad

$$\left\|\alpha_jx_j\right\|_H=\left|\alpha_j\right|.$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

Recordemos que la "convergencia de $\sum_{j\geq1}\alpha_j^2$ " define l^2, un espacio de Hilbert de sucesiones, que es espacio de Hilbert original, estudiado por David Hilbert (1862-1943), ver en ([17]).

Y con la condición de "convergencia de $\sum_{j\geq1}\left|\alpha_j\right|$ " define l^1, que es un espacio de Banach de sucesiones reales $(\alpha_j)_{j\geq1}$

A partir de la proposición (4.2.1) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.2 Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge incondicionalmente pero no absolutamente.
2. La sucesión $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ pertenece a l^2 pero no pertenece a l^1.

Para verlo de mejor manera, veamoslo con un ejemplo.

■ **Ejemplo 4.2.3** Sea $\{e^k\}_{k\geq 1}$ la familia ortonormal en l^2 definida, para cada $k \geq 1$, como

$$e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{para } j = k \\ 0 & \text{para } j \neq k \end{cases}. \tag{4.4}$$

Entonces, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k} \tag{4.5}$$

converge incondicionalmente en l^2, pero no converge absolutamente.

Es interesante observar que la misma serie (4.5) da un ejemplo en l^p para $1 < p \leq \infty$.

En efecto, de la igualdad

$$\left\| \frac{e^k}{k} \right\|_{l^p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{e_j^k}{k} \right|^p \right)^{1/p} = \left(\left| \frac{1}{k} \right|^p \right)^{1/p} = \frac{1}{k}$$

es claro que la serie (4.5) no converge absolutamente en l^p, para $1 \leq p \leq \infty$.

Para probar la convergencia incondicional, comenzamos fijando una biyección

$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ arbitraria y un valor de $p, 1 < p < \infty$. Afirmamos que la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}$ converge a $x = \left\{\frac{1}{j}\right\}_{j\geq 1}$. En efecto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \\ -\frac{1}{j} & \text{si } j \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^{p} = \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right)_j\right|^p\right)^{1/p}\right]^p = \sum_{j\notin\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \frac{1}{j^p}$$

Como $p > 1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $M = M_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} < \varepsilon^p \tag{4.6}$$

(nótese que el caso $p = 1$, no se cumple ya que la estimación (4.6) no es cierta. Como en la prueba de la proposición (4.1.3), existe $N = N_M \geq 1$ tal que

$$\{1, \ldots, M\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$$

para $n \geq N$. Es decir, para estos valores de n,

$$\mathbb{N} - \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subseteq \mathbb{N} - \{1, \ldots, M\} = \{j \in \mathbb{N} : j \geq M + 1\}$$

de donde resulta que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^{p} = \sum_{j\notin\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \frac{1}{j^p} \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} < \varepsilon^p$$

para todo $n \geq N$.

A continuación, veremos en el siguiente ejemplo que no siempre, en un espacio lineal normado, convergencia incondicional implica convergencia por subseries.

■ **Ejemplo 4.2.4** Consideremos el espacio c_{00} pero esta vez como subespacio de l^2. Sabemos que c_{00} es un subespacio incompleto de l^2.
Recordemos que dado un número real a, la notación $\lfloor a \rfloor$ indica el mayor número entero que es $\leq a$. Con esta notación, definimos en c_{00} la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} \tag{4.7}$$

donde $e^{\lfloor m/2 \rfloor}$ es la sucesión definida como en (4.4), para $k = \lfloor m/2 \rfloor$ y cada $m \geq 2$.
Observemos que si $m = 2j$ para $j \geq 1$.

$$(-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = 2^{-j} e^j, \tag{4.8}$$

mientras que si $m = 2j + 1$ para $j \geq 1$,

$$(-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = -2^{-j} e^j, \tag{4.9}$$

Es decir la serie (4.7) converge absolutamente en l^2. De acuerdo con la proposición (4.1.3), la serie (4.7) converge incondicionalmente en l^2. De (4.8) y (4.9) concluimos que fijando $n \geq 2$,

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = \begin{cases} 2^{-q} e^q & \text{si } n \text{ es par, } n = 2q, \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2q+1 \end{cases}$$

para $q \geq 1$.
Usando otra vez la proposición (4.1.3), resulta que la serie (4.7) converge incondicionalmente a cero en l^2 y por lo tanto también en c_{00}.
Por otra parte, de (4.8) tenemos que la subserie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{2j} 2^{-\lfloor 2j/2 \rfloor} e^{\lfloor 2j/2 \rfloor} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{2^j}$$

converge absolutamente y por lo tanto, de acuerdo a la proposición (4.1.3), converge en el espacio de Banach l^2. Sin embargo, la serie $\sum_{j \geq 1} 2^{-j} e^j$ no converge en c_{00}.

El razonamiento es similar a lo dicho en el ejemplo (4.2.3). En efecto, supongamos que existe $e = \{e_j\}_{l\geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{j\geq 1} 2^{-j} e^j = e$, en c_{00}. Para esta sucesión en particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que paral $> M$, $e_l = 0$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} e_l^j = 0$$

para $l > M$, lo cual no puede ser, debido a como hemos definido e_l^j. O sea, que la serie (4.7) no es convergente por subseries, en c_{00}.

Conclusiones

Al concluir este trabajo, es evidente que la convergencia de series en espacios normados resulta fundamental para las caracterizaciones de los espacios, ya que a partir de las definiciones presentadas anteriormente son equivalentes dependiendo del espacio en el que se trabaje, es por ello que tenemos resultados de gran importancia; es bien conocido que en $\mathbb{R}$, si una serie es absolutamente convergente entonces es covergente esto lo podemos ver de forma más general en la proposición (4.1.1), donde la condición más importante es que el espacio sea completo bajo la norma del espacio; o como el teorema de Dvoretsky y Rogers donde nos ayuda a saber si el espacio de Banach es de dimensión finita a partir de la convergencia incondicional y la convergencia absoluta.

Como vemos lo fundamental de las proposiciones y teoremas, se basa en que el espacio sea completo de ahi en adelante ya podremos trabajar en las equivalencias de las distintas formas de convergencia de series y ver como actua cada espacio.

Bibliografía

[1] Aizpuru Tomás, A. (2009). *Apuntes completos de Análisis Funcional.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

[2] Fuster, E. L. Análisis Funcional.

[3] Bruzual, R y Domínguez, M. (2005). *Espacios de Banach*. Universidad Central de Venezuela.

[4] Alvarez, J. La convergencia de series en un espacio de Banach. (2020). *Lecturas Matemáticas*, vol. 41 (1), págs. 21-40.

[5] Clark, E. (2022). *Series en espacios lineales normados.* [Trabajo de titulación, pregrado]. Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales.

[6] Parra Buitrago, J. *Convergencia y espacios de Banach.* [Trabajo de titulación, pregrado]. Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

[7] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons Inc.

[8] Gamboa de Buen, B. Historia del análisis funcional. (1999). *Miscelánea Matemática*, vol. 28, págs. 17-39.

[9] Whittaker, E. T. y Watson, G. N. (1945). *A Course Of Modern Analysis*. American Edition, Cambridge University Press.

[10] Hairer, E. y Wanner G. (2008). *Analysis By Its History*. Springer.

[11] Clark, P. L. (2014). *Honors Calculus*. `math.uga.edu/~pete/2400full.pdf`.

[12] Banach, S. (1932). *Théorie Des Opérations Linéaires*. Warsaw.

[13] Swartz, C. (1994). *Integration And Function Spaces*. World Scientific.

[14] DePree, J. y Swartz, C. (1988). *Introduction To Real Analysis*. John Wiley & Sons.

[15] Dvoretsky, A. y Rogers, C. (1950). Absolute and uncondicional convergence in normed linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36, págs, 192-197, `http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063160`.

[16] Hildebrandt, T. H. Unconditional convergence in normed vec tor spaces. (1940). *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46, págs. 959-962, `www.ams.org/journals/bull/1940-46-12/S0002-9904-1940-07344-6/S0002-9904-1940-07344-6.pdf`.

[17] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. *The MacTutor History Of Mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`.

[18] Iribarren, I. (1973). *Topología de espacios métricos*. Limusa-Wiley.

[19] Lang, S. (1986). *Introducción al álgebra lineal*. (Segunda Edición). Springer-Verlag New York Inc.

[20] Sinclair, P. (2008). Equivalence of definition of absolute convergence. Mathematics Stack Exchange, https://math.stackexchange.com/questions/2732626/equivalence-of-definition-of-absolute-convergence

[21] Diestel, J. (1984). *Sucesiones y Series en espacios de Banach*. (Primera Edición). Springer-Verlag New York Inc.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 20/ 06 / 2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Raul Mateo Nuñez Navarrete
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
Dr. Carlos Eduardo Cova Salaya **Director del Trabajo de Integración Curricular** **Ms.C. Ramón Antonio Abancín Ospina** **Asesor del Trabajo de Integración Curricular**