ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATEGIA PARA MEJORAR LAS HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CON ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, PARA ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA-ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: NELSON EFRAIN YAUCAN LATA

DIRECTORA: Dra. MAYRA ELIZABETH CACERES MENA, Mgtr.

Riobamba – Ecuador

2024

Yo, Nelson Efraín Yaucán Lata, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 13 de mayo de 2024

Nelson Efraín Yaucán Lata

C.I. 060574298-0

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATEGIA PARA MEJORAR LAS HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CON ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, PARA ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA-ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**, realizado por: **NELSON EFRAIN YAUCAN LATA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Ing. María de Lourdes Palacios Robalino **PRESIDENTA DEL TRIBUNAL**		2024-05-13
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena **DIRECTORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2024-05-13
Dra. Martha Ximena Dávalos Villegas **ASESORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2024-05-13

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación con profunda gratitud: a Dios, a quien agradezco por brindarme la sabiduría necesaria para adquirir conocimientos; a mi padre, Manuel, y a mi madre, Juana, por su inmenso cariño y constante motivación que ha sido mi impulso diario para perseverar en mis estudios y alcanzar cada una de mis metas.

Nelson

AGRADECIMIENTO

Primero, deseo expresar mi agradecimiento a Dios por concederme salud y sabiduría, permitiéndome enfrentar con valentía cada obstáculo y adversidad que se ha presentado a lo largo de esta trayectoria. Además, quiero extender mi profundo reconocimiento hacia mis padres, quienes no solo me han respaldado incondicionalmente, sino que también han brindado apoyo económico. Su dedicación y sacrificio han sido la motivación fundamental que ha impulsado a seguir adelante en la carrera.

Asimismo, agradezco a todas las personas que, de una manera u otra, han formado parte de mi trayectoria académica.

Nelson

ÍNDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

En la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, se ha identificado una carencia significativa en las habilidades de los estudiantes para abordar y resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta deficiencia impacta negativamente la formación integral de los estudiantes y obstaculiza la comprensión y la aplicación efectiva de conceptos claves en estas disciplinas, por lo tanto, el objetivo de la presente investigación fue evaluar la guía basado en el método de Pólya como una estrategia para mejorar las habilidades matemáticas, en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada. La metodología implementada tuvo un enfoque cuantitativo de diseño experimental y con un nivel explicativo. La población en este estudio fue con los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH, matriculados en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, de los cuales se llevó a cabo una selección para conformar tanto el grupo experimental como el de control. Los instrumentos empleados en la investigación fueron el pre-test y el post-test, los cuales facilitaron la recopilación de las calificaciones antes y después de la implementación de la guía basada en el método de Polya. Para evaluar la hipótesis planteada, se recurrió a la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon. Mediante esta metodología se logró determinar que los estudiantes que aprendieron a utilizar el método de Pólya como una estrategia en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias, incrementaron significativamente las habilidades matemáticas y el rendimiento académico. Así que, se concluye que la aplicación de la guía basado en el método de Pólya, si mejoró las habilidades matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: <ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS>, <MÉTODO DE PÓLYA>, <APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS>, <ESTRATEGIA METODOLÓGICA>, <RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS>.
0516-DBRA-UPT-2024

ABSTRACT

In the Mathematics major at the Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, a significant deficiency in students' abilities to approach and solve problems involving ordinary differential equations. This deficiency has a negative impact on the students' integral formation and impedes the understanding and effective application of key concepts in these disciplines; therefore, the goal of this research was to evaluate a guide based on Pólya's method as a strategy to improve mathematical skills for problem solving with ordinary differential equations in Applied Mathematics. The methodology implemented had a quantitative approach with an experimental design and an explanatory level. The population in this study consisted of the fourth semester students of the Mathematics major, belonging to ESPOCH, who are enrolled in the subject of Ordinary Differential Equations, from which, a selection was made to form both, the experimental and the control group. The instruments used in the research were the pre-test and post-test, which facilitated the scores collection before and after the implementation of the guide based on the Pólya method. To evaluate the hypothesis proposed, Wilcoxon signed-rank test was used. Through this methodology, it was possible to determine that the students who learned to use Polya's method as a strategy for solving problems involving differential equations, significantly increased their mathematical skills and academic performance. Thus, it is concluded that the application of the guide based on Pólya's method did improve the mathematical skills and academic performance of the students.

Keywords: <ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <Pólya's METHOD>, <APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <METHODOLOGICAL STRATEGY>, <PROBLEM SOLVING>.

Lic. Paul Rolando Armas Pesantez Ms.C.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales ordinarias ocupan una posición fundamental en el núcleo de la Matemática Aplicada y las Ciencias Naturales debido a su capacidad para describir y comprender cómo cambian las variables con respecto al tiempo. Su relevancia va más allá, ya que proporcionan el marco matemático esencial para representar diversos fenómenos dinámicos que suceden en nuestro alrededor. La importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias se manifiesta en su capacidad para capturar la esencia misma de la variabilidad y la dinámica. Ya sea modelando la trayectoria de un proyectil, describiendo el crecimiento de una población o analizando la respuesta de un circuito eléctrico, estas ecuaciones brindan un lenguaje común que conecta los principios matemáticos con la realidad observable.

La resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias constituye un desafío en el campo de las matemáticas. Este desafío va más allá de la aplicación mecánica de ecuaciones, sino que también implica desarrollar habilidades analíticas, creativas y una comprensión profunda de la naturaleza de los problemas planteados. En este caso, el método de Pólya se presenta como una estrategia pedagógica clave, no solo orientada a obtener soluciones exactas, sino a fomentar un pensamiento matemático que vaya más allá de la simple manipulación algebraica.

George Pólya, un destacado matemático, desarrolló este método como una guía para la resolución de problemas matemáticos. El método se distingue por su enfoque sistemático y metódico en la resolución de problemas, ya que esta estrategia va más allá de proporcionar respuestas correctas a los estudiantes, sino a explorar la naturaleza del problema, a identificar patrones, y a desarrollar un plan estructurado para su solución, así, el método de Pólya no solo mejora las habilidades técnicas en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que también fortalece el razonamiento lógico, la creatividad y la capacidad para abordar desafíos matemáticos de manera estratégica.

En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, su aplicación proporciona un enfoque sistemático y estructurado para enfrentar y resolver diversos problemas. Esta investigación explorará el potencial del método de Pólya como una herramienta pedagógica significativa para mejorar el rendimiento académico y las habilidades matemáticas de resolución de problemas, para los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Además, la naturaleza dinámica y compleja de las ecuaciones diferenciales ordinarias requiere no solo conocimientos teóricos sólidos, sino también un conjunto de habilidades prácticas para abordar situaciones problemáticas de manera efectiva. En este sentido, el método de Pólya no solo se centra en la obtención de soluciones, sino también en el desarrollo de un proceso de pensamiento lógico y metódico que guíe a los estudiantes en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este estudio busca, explorar y evaluar la efectividad del método de Pólya como una estrategia didáctica, en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, considerando las necesidades y características particulares de los estudiantes del cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH. Al realizar esta investigación se pretende identificar las mejoras del rendimiento académico y de las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, y por lo tanto proponer recomendaciones prácticas para la implementación exitosa de este método en el proceso educativo. Este estudio de investigación comprende de cinco secciones distribuidas de la siguiente manera:

En el Capítulo I, se aborda el problema de investigación, proporcionando una descripción del mismo, así como sus limitaciones y delimitaciones. Además, se tendrá los objetivos y la hipótesis a comprobar.

En el Capítulo II, se presentará el marco teórico, que incluye antecedentes, bases teóricas y definiciones conceptuales relacionadas con el método de Pólya como una estrategia en la resolución de problemas.

El Capítulo III se centra en el marco metodológico, detallando el enfoque de investigación, el nivel de investigación, el diseño y tipo de estudio, así como la población y muestra. Además, se describirán las técnicas e instrumentos de recolección de datos, así como los procesos de procesamiento y análisis de los datos recopilados.

En el Capítulo IV, se presentará los resultados y análisis del pre test como del pos test obtenidos, la prueba de hipótesis y la discusión de los resultados encontrados en la investigación.

Finalmente, en el Cápitulo V se presentarán las concluciones y recomendaciones de la investigacion desarrollada.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Uno de los principales propósitos de la Matemática es la resolución de problemas, ya que a ciertos estudiantes se les dificulta resolver problemas. En los últimos años se han hecho investigaciones con el método de resolución de problemas de George Pólya para solucionar problemas matemáticos, el método permite el desarrollo de nuevos conocimientos, estrategias y un buen razonamiento (Alvares y Vilma, 2018 págs. 20-21).

El presente estudio se centra en la aplicación del método de Pólya en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. A pesar de la importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias en diversos campos, la implementación específica del método de Pólya para abordar este tipo de problemas no ha sido explorada de manera exhaustiva en el entorno educativo de la institución.

La resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), es crucial en diversas áreas de la Matemática Aplicada. En la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, se ha identificado una carencia significativa en las habilidades de los estudiantes para abordar y resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta deficiencia impacta negativamente la formación integral de los estudiantes y obstaculiza la comprensión y la aplicación efectiva de conceptos clave en estas disciplinas.

Las EDO son herramientas fundamentales para modelar y entender una amplia variedad de fenómenos. Desde el crecimiento exponencial en Biología hasta la descripción de procesos químicos en Química, pasando por la predicción de comportamientos económicos en Economía, estas ecuaciones son la base teórica para explicar y prever cambios en variables a lo largo del tiempo. Sin embargo, la falta de competencia en la resolución de EDO de los estudiantes de la Carrera de Matemática plantea un desafío serio en el desarrollo de habilidades analíticas y la aplicación práctica de conocimientos adquiridos.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Evaluar la guía basado en el método de Pólya como una estrategia para mejorar las habilidades matemáticas, en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, con los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Diagnosticar las condiciones iniciales de las habilidades que poseen los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH, en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada, con ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Implementar una guía con el Método de Pólya para mejorar las habilidades en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada, con ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Aplicar la guía con el Método de Pólya, al grupo experimental, para mejorar las habilidades en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada, con ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Analizar las habilidades en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada, con ecuaciones diferenciales ordinarias, con y sin el uso de la guía con el Método de Pólya.

1.3. Justificación

En la Carrera de Matemática, la importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias se manifiesta en la oportunidad que tienen los estudiantes de especializarse, en el desarrollo de modelos matemáticos aplicados diversas áreas como la Física, la Biología, la Economía y la Ingeniería, entre otras. Esta especialización no solo implica una comprensión profunda de los principios matemáticos involucrados, sino también la capacidad de aplicar estos conocimientos de manera efectiva en la resolución de problemas concretos en distintas áreas.

En este sentido, es crucial que los estudiantes no solo adquieran conocimientos sólidos sobre la aplicabilidad y resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que también desarrollen habilidades analíticas. Estas habilidades se vuelven esenciales en la formación de profesionales capaces de abordar problemas complejos y contribuir de manera significativa al avance de la ciencia y la tecnología en sus respectivas áreas de especialización. Además, la comprensión de este tema resulta de gran relevancia, ya que no solo enriquecerá la formación académica de los futuros matemáticos de la institución, sino que también facilitará la transición hacia sus estudios de cuarto nivel. Este enfoque contribuirá a potenciar una formación académica de calidad, ampliando los conocimientos de los estudiantes y desarrollando un sólido razonamiento lógico que les permita abordar problemas complejos mediante una serie de pasos claros y secuenciales.

1.4. Hipótesis o pregunta de investigación

La aplicación del Método de Pólya como una estrategia en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, permitirá mejorar las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias, para los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecendentes

En la investigación realizada por (Alvares, 2018), nos menciona “Los resultados del cuestionario revelan que los estudiantes tienen dificultades en habilidades como matematización, representación, comunicación, formulación de estrategias, uso de expresiones simbólicas y argumentación lógica en la resolución de problemas” (pág 50). La investigación muestra que en los resultados obtenidoa, se han observado que los estudiantes enfrentan dificultades en varias habilidades relacionadas con la resolución de problemas. Estas dificultades incluyen la capacidad de traducir situaciones en problemas matemáticos (matematización), representar adecuadamente la información, comunicarse de manera efectiva, formular estrategias para abordar problemas, utilizar expresiones simbólicas y presentar argumentos lógicos.

En el estudio llevado a cabo por (Cuello et al., 2021) nos menciona, mediante la aplicación de la metodología de resolución de problemas de Pólya, el profesor logró generar un renovado interés en los estudiantes pertenecientes al grupo experimental. Este logro destacado se originó no solo a partir de la aplicación de la metodología en sí, sino también debido a la desarticulación de patrones y modelos preestablecidos que los estudiantes llevaban desde las etapas iniciales de su formación. Esto se alcanzó a través del diseño de talleres de intervención, la planificación de las sesiones de clases y la implementación de técnicas didácticas activas que fomentaron un aprendizaje significativo. (pág. 8)

De acuerdo con la investigación efectuada por (Pino y Peña, 2022) hace mención que el método de Pólya está diseñado para cultivar las habilidades requeridas en los estudiantes para abordar y resolver problemas. Proporciona una guía que permite al alumno seguir un proceso estructurado y ordenado durante el proceso de resolución de problemas. En esencia, el Método de Pólya busca desarrollar en los estudiantes un enfoque sistemático y habilidades específicas que les permitan enfrentar desafíos de manera más efectiva y organizada. (pág 66)

2.2. Referencias Teóricas

Esta investigación, se enfocará en la aplicación del método de Pólya, como una estrategia de aprendizaje en la resolución de problemas que involucren ecuaciones diferenciales ordinarias en

Matemática Aplicada. Consideramos que este tema es crucial, ya que suele generar dificultades al momento de resolver problemas de aplicación, utilizando estas ecuaciones como modelos matemáticos.

2.2.1. *Guía didáctica*

En el ámbito educativo, las guías didácticas desempeñan una función fundamental al actuar como detalladas hojas de ruta que simplifican la planificación y aplicación de estrategias pedagógicas efectivas. Estos documentos no se limitan a ser meras directrices, sino que se convierten en herramientas esenciales para los educadores al proporcionarles una estructura coherente que abarca desde la fase inicial de conceptualización hasta la evaluación final del proceso de aprendizaje.

Al proveer una estructura organizativa, las guías didácticas permiten a los educadores planificar secuencias lógicas de enseñanza, establecer objetivos de aprendizaje claros y elegir estrategias pedagógicas adecuadas para facilitar la comprensión y retención de conceptos. Además, estas guías ofrecen una perspectiva integral del proceso educativo al incorporar aspectos como la evaluación continua, la variabilidad en los métodos de enseñanza y la adaptación a las necesidades individuales de los estudiantes (Ovando, 2020 págs. 605-612).

Importancia

La importancia de la guía didáctica, consiste en su capacidad para organizar y estructurar de manera coherente el proceso de enseñanza, creando secuencias lógicas de aprendizaje y estableciendo metas claras. Adicionalmente, la guía didáctica funciona como un instrumento que guía a los educadores en la elección de estrategias pedagógicas exitosas, ajustándose a la variedad de estilos de aprendizaje y requerimientos individuales de los estudiantes. En el día a día, los docentes utilizan estas guías como valiosos recursos para organizar lecciones, elegir materiales didácticos relevantes y crear actividades que estimulen la participación activa de los estudiantes (Caisaguano, 2020 págs. 122-131).

2.2.2. *Habilidades matemáticas*

Las habilidades matemáticas comprenden el conjunto de aptitudes y destrezas que una persona adquiere para comprender, aplicar y emplear conceptos y procesos matemáticos. Estas habilidades desempeñan un papel crucial en diversos aspectos de la rutina diaria, así como en entornos académicos y profesionales (Salcedo y Prez, 2020 págs. 618-628).

De acuerdo con la investigación realizada por (Gamarra y Pujay, 2021), nos mencionan que las habilidades matemáticas no solo son herramientas cruciales para el pensamiento lógico y analítico, sino que también proporcionan una base sólida para el desarrollo del razonamiento crítico. A continuación, exploraremos las distintas habilidades.

- **Comprensión del Problema:** Es importante dedicar tiempo a una lectura cuidadosa y reflexiva. Este proceso no solo implica la simple decodificación de las palabras, sino también la interpretación profunda del significado del problema. Esto implica leer cuidadosamente el enunciado, identificar la información clave y entender la tarea que se requiere.

- **Modelización Matemática:** La habilidad de convertir situaciones específicas de la vida cotidiana a un lenguaje matemático representa un elemento fundamental. Este procedimiento no se limita únicamente a identificar variables relevantes; también exige una comprensión a fondo de las conexiones y la dinámica subyacente en la situación en consideración.

- **Selección de Estrategias:** Existen diversas tácticas para enfrentar un problema matemático, como la experimentación, la utilización de modelos, la identificación de patrones o la aplicación de fórmulas específicas. La destreza se encuentra en elegir la estrategia más adecuada.

- **Aplicación de Conocimientos Previos:** Aplicar principios y métodos matemáticos ya adquiridos para resolver aspectos particulares de un problema constituye una habilidad clave. La capacidad de emplear conocimientos previos resulta esencial al enfrentarse a desafíos más complejos.

- **Comunicación de Resultados:** Comunicar de manera precisa los pasos seguidos y los resultados obtenidos es fundamental. La efectividad en la comunicación cobra especial importancia al compartir soluciones con otros o al trabajar en entornos colaborativos.

- **Verificación y Reflexión:** Una vez hallada la solución, resulta vital comprobar su validez y reflexionar sobre su coherencia dentro del problema.

Estas habilidades no solamente son fundamentales para resolver problemas matemáticos, sino que también son aplicables a diversas áreas y juegan un papel esencial en el desarrollo del pensamiento crítico y analítico. (págs. 176-189)

2.2.3. *Proceso de aprendizaje basado en la experiencia*

Las representaciones del aprendizaje basado en la experiencia abarcan una diversidad de enfoques y modelos diseñados para comprender cómo las personas adquieren conocimientos mediante su participación activa e interacción directa con situaciones o actividades prácticas.

Al participar activamente en situaciones prácticas, las personas tienen la oportunidad de interiorizar y contextualizar el conocimiento de manera más efectiva. Este enfoque educativo reconoce la importancia de relacionar teorías abstractas con su aplicación concreta, estableciendo así una conexión significativa entre el aprendizaje teórico y su utilización en entornos reales. La reflexión continua sobre las experiencias no solo fortalece el proceso de aprendizaje, sino que también contribuye al desarrollo de habilidades críticas y al perfeccionamiento de la comprensión profunda de los conceptos (Gleason y Rubio, 2020 págs. 264–282).

Según (Rodríguez, 2020), una formulación bien reconocida del aprendizaje basado en la experiencia es el ciclo de Kolb, ideado por David Kolb, este modelo exhaustivo presenta un proceso conformado por cuatro etapas interconectadas.

- La etapa inicial implica la vivencia directa, donde los participantes se involucran directamente en situaciones prácticas. A continuación, se presenta la fase de reflexión observativa, que incentiva la contemplación sobre estas experiencias concretas, analizando los eventos y considerando diversas perspectivas.
- Después, continúa la fase de reflexión observacional, estimulando la práctica de reflexionar sobre esas experiencias concretas, analizando los eventos y teniendo en cuenta diversas perspectivas.
- Por último, el ciclo concluye con la participación activa en la experimentación, donde se ponen en práctica los conceptos y teorías recién adquiridos en situaciones concretas. Esto marca el cierre del ciclo y da inicio a nuevas experiencias prácticas. (págs. 81-88).

Este método de aprendizaje sostiene que la eficacia del proceso radica en transitar estas fases de forma continua. La exitosa fusión de la experiencia con la reflexión y la conceptualización fomenta un aprendizaje más profundo y con significado. Al adherirse a este ciclo, las personas no solo adquieren conocimientos prácticos, sino que también cultivan habilidades reflexivas y la capacidad para aplicar de manera efectiva los conceptos aprendidos en diversas situaciones (Triana y Parra, 2020 págs. 71-82).

2.2.4. *Fases de Pólya como estrategia en la resolución de problemas*

El método de Pólya, creado por el Matemático húngaro George Pólya, consiste en una estrategia para resolver problemas matemáticos. De acuerdo con Quiñones, "Esta técnica se fundamenta en una secuencia de etapas y principios que guían a los estudiantes en el abordaje sistemático y eficaz de los problemas" (Quiñones y Huiman, 2022 págs. 75-86).

En el estudio llevado a cabo por (Olivero et al., 2021), nos menciona los pasos a seguir, que tiene el método de Pólya, que se detalla a continuación: (págs. 2-13)

1. **Comprender el problema:** En este paso la comprensión del problema se refiere a la capacidad de entender completamente la naturaleza, el alcance y los detalles de una situación o desafío específico. Para lo cual se debe responder las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?
   - ¿Es posible satisfacer la condición? ¿Es la condición suficiente, insuficiente, redundante, o contradictoria, para determinar la incógnita?
2. **Planificar una estrategia:** En esta etapa, se establece la relación entre los datos proporcionados y la incógnita. Si no se identifica una conexión de manera inmediata, puede ser útil explorar problemas secundarios. Con el tiempo, se deberá desarrollar un plan concreto para resolver el problema:
   - ¿Has enfrentado previamente este problema o lo has observado en una forma ligeramente diferente?
   - ¿Estás familiarizado con algún problema similar? ¿Tienes conocimiento de algún teorema que pueda ser de utilidad?
   - ¿Existe algún problema análogo que puedas resolver?
   - ¿Puedes extraer información valiosa de los datos proporcionados? ¿Se te ocurren otros datos que podrían ser propicios para establecer la incógnita?
   - ¿Has aprovechado todos los datos proporcionados? ¿Has considerado cada componente de la condición establecida?
3. **Ejecutar el plan:** En esta etapa, se procede a la implementación del plan concebido. Se realizan los cálculos necesarios, se resuelven las ecuaciones pertinentes. Es esencial ejercer cuidado y mantener un enfoque sistemático durante esta fase, con el fin de evitar errores y garantizar el seguimiento del plan establecido.
4. **Mirar hacia átras:** Una vez que se ha obtenido una solución, el paso final implica realizar una retrospectiva y evaluar el trabajo realizado. Es fundamental verificar la coherencia y la viabilidad de la solución en relación con el problema planteado. Esta etapa permite obtener conclusiones valiosas y reflexionar sobre posibles mejoras o enfoques adicionales.

Es relevante resaltar que el método de Pólya no sigue una estructura rígida y lineal, sino que se trata de un proceso iterativo en el que se permite retroceder y revisar los pasos anteriores según sea necesario. Asimismo, el método de Pólya fomenta el pensamiento creativo, la flexibilidad y la exploración de diversos enfoques para abordar un problema.

2.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la Matemática Aplicada

En el texto de (Ross, 2021) nos menciona:

> El tema de las ecuaciones diferenciales ordinarias constituye una rama amplia y muy importante de la Matemática Moderna. Desde los primeros tiempos del Cálculo, tal tema ha sido un área de gran investigación teórica y aplicaciones prácticas, y aún continúa siéndola en nuestros días. (pág. 1)

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son fundamentales debido a su capacidad para representar fenómenos complicados y anticipar cómo evolucionarán en el tiempo. Estas ecuaciones expresan conexiones matemáticas entre una función desconocida y sus derivadas, lo cual nos permite capturar las tasas de cambio en relación con las variables relevantes en un sistema. Las ecuaciones diferenciales ordinarias son recursos matemáticos esenciales para la representación de una diversidad de fenómenos en distintos campos de la Matemática Aplicada y se emplean para modelar procesos como la velocidad de las reacciones químicas, el comportamiento de fluidos, fenómenos cuánticos y relativistas, la evolución de poblaciones, las variaciones de precios, la inflación, así como las interacciones de la oferta y la demanda, y el funcionamiento de los mercados financieros, etc (Zill et al., 2018 págs. 19-20).

En el ámbito de la Física, estas ecuaciones son cruciales para caracterizar el comportamiento de sistemas dinámicos, incluyendo aspectos como el movimiento de cuerpos celestes, la propagación de ondas, la difusión de calor. Un ejemplo práctico sería la aplicación de una ecuación diferencial para modelar la ley de enfriamiento de Newton, la cual describe cómo varía la temperatura de un objeto en relación con el tiempo (Castrillo, 2022, pág. 7).

En el campo de la Química son diversas. En este sentido, se emplean para representar la cinética de reacciones químicas, el proceso de difusión de sustancias químicas, la transferencia de calor y masa, así como la dinámica de sistemas químicos. En particular, la aplicación extensiva de las ecuaciones diferenciales ordinarias se observa en la ley de crecimiento o decaimiento y en el ámbito de las reacciones químicas. Por ejemplo, la velocidad de descomposición de una sustancia radiactiva en un momento específico (t) es directamente proporcional a la cantidad presente en ese instante. Asimismo, la tasa de crecimiento del número de bacterias en una solución puede ser representada mediante una ecuación diferencial (Cepeda et al., 2023, págs. 336-355).

En el campo de la Biología, permitiendo modelar diversos fenómenos biológicos. Estos abarcan desde la dinámica de poblaciones hasta la cinética de reacciones bioquímicas, la difusión de sustancias químicas en organismos, la transferencia de calor y masa, hasta la dinámica de sistemas biológicos en su conjunto. Un ejemplo de aplicación de ecuaciones diferenciales es la modelación de la dinámica de poblaciones de animales y plantas, así como la propagación de enfermedades infecciosas. También se emplean para describir la dinámica de células y tejidos, y para analizar la interacción en sistemas ecológicos (Bianco et al., 2020, págs. 16-38).

En el ámbito de la Economía, permitiendo modelar una amplia gama de fenómenos económicos. Estos incluyen la evaluación temporal de productos financieros, la dinámica de sistemas económicos, la evolución de poblaciones, la variación de precios, la dinámica de la inflación, la interacción de la oferta y la demanda, y el comportamiento de los mercados financieros. Un ejemplo de aplicación de ecuaciones diferenciales es la representación de la evolución de precios de productos básicos, el comportamiento de la inflación, la interacción entre la oferta y la demanda, y la dinámica de los mercados financieros (Sánchez et al., 2020, págs. 1-7).

Dentro de otras ciencias, las ecuaciones diferenciales ordinarias encuentran aplicaciones significativas en la evaluación de estructuras, la mejora de sistemas de control y la representación matemática de procesos químicos y ambientales. La habilidad para plantear y resolver ecuaciones diferenciales ordinarias se vuelve indispensable para los ingenieros, ya que les concede la capacidad de prever y regular el comportamiento de sistemas dinámicos, aportando de manera crucial a la innovación y al diseño efectivo en múltiples sectores (Tocto et al., 2021, págs. 28-33).

2.3.1. *Dificultades en la resolución de problemas*

La tarea de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) se presenta como un desafío significativo tanto para estudiantes como para profesionales que se desempeñan en el ámbito de las matemáticas y disciplinas relacionadas. Los estudiantes, al enfrentarse a esta tarea, pueden encontrarse con obstáculos que van más allá de la simple aplicación de fórmulas y reglas estándar (Abanto et al., 2022 pág. 3).

De acuerdo con la investigación realizada por (Gutiérrez et al., 2023), otro aspecto a considerar es la interpretación y comprensión del significado práctico de las soluciones obtenidas. Las EDO a menudo modelan fenómenos del mundo real, y la capacidad de traducir las soluciones matemáticas en términos de su aplicación práctica es esencial. Por lo tanto, los desafíos no solo residen en la manipulación algebraica y cálculos, sino también en la interpretación conceptual. (pág. 16)

Las dificultades asociadas con la resolución de EDO pueden manifestarse en diversos aspectos del proceso. La identificación de la ecuación diferencial ordinaria correcta y la comprensión de sus características fundamentales pueden resultar desafiantes. Además, la elección de la metodología de resolución adecuada, que puede variar según la naturaleza específica de la ecuación, así añadiendo un nivel adicional de complejidad.

2.4. Intervención didáctica

Al comprender el contenido de la metodología de Pólya en la resolución de problemas, se llevará a cabo su implementación, en problemas de aplicación en Física, Química, Biología y Economía, los cuales nos servirán como ejemplos de la forma en que se aspira abordar el aprendizaje de la resolución de problemas, de los estudiantes en este contexto.

Con el fin de facilitar el entendimiento y la aplicación exitosa del método de Pólya en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en áreas como la Física, Química, Biología y Economía, es beneficioso que los estudiantes se familiaricen de manera progresiva con el uso de las fases de Pólya. Se enfatiza, para que el aprendizaje sea significativo, en la resolución de problemas, es fundamental introducir las cuatro fases de Pólya en situaciones específicas. La gradual exposición y práctica en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias en diferentes áreas, prepararan a los estudiantes, para comprender y aplicar eficazmente en la resolución de problemas en contextos más avanzados.

2.4.1. *Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada*

A continuación, se presenta un problema aplicado a la ley de enfriamiento de Newton, que se abordará de la siguiente manera.

Problema

Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de 70°F, al exterior, en donde la temperatura es de 10°F. Después de 12 minutos el termómetro marca 50°F.

a. ¿Cuánto marca el termómetro, cuando $t = 1$ minuto?

b. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar 15°F?

Solución.

Empezamos a partir de la experiencia que poseen los estudiantes en la resolución problemas con de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideremos los pasos del método de George Pólya.

1. **Comprender el problema**

   - ¿Cuáles son las incógnitas?
   - ¿Determinar cuántos grados Fahrenheit marca el termómetro en $t = 1$ y el tiempo t cuando el termómetro marca 15°F?
   - ¿Cuáles son las variables?

     $t =$ tiempo en minutos.

     $y =$ temperatura del termómetro.

     $k =$ constante de proporcionalidad.

     $y =$ la variable dependiente del tiempo t.
   - ¿Cuáles son los datos?

     La ecuación diferencial a utilizar es

     $$\frac{dt}{dy} = k(y - y_1). \tag{2.1}$$
   - ¿Cuáles son las condiciones?

     Las condiciones son: $y(0) = 70°F$, $y_1 = 10°F$ y $y(\frac{1}{2}) = 50°F$.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver el problema, debemos seguir los siguientes pasos:

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante variables separables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar $t = 1$ para encontrar la primera incógnita.
   - Reemplazar y_1 para encontrar la segunda incógnita.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos

   $$\frac{dt}{dy} = k(y - y_1).$$

Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.

$$\frac{dy}{(y-y_1)} = kdt$$
$$\int \frac{dy}{(y-y_1)} = \int kdt$$
$$ln(y-y_1) = kt + C$$
$$e^{ln(y-y_1)} = e^{kt+C}$$
$$y-y_1 = Ce^{kt}$$
$$y = Ce^{kt} + y_1 \tag{2.2}$$

Reemplazamos las condiciones iniciales $y(0) = 70°F$, $y_1 = 10°F$ en la ecuación general (2.2)

$$70 = Ce^{k(0)} + 10$$
$$C = 60$$

Sustituyendo C y y_1 en la ecuación (2.2) se tiene

$$y = 60e^{kt} + 10 \tag{2.3}$$

Luego como $y(\frac{1}{2}) = 50°F$ si solo $y = 50$ y $t = \frac{1}{2}$, reemplazando en (2.3) se tiene

$$50 = 60e^{k\frac{1}{2}} + 10$$
$$\frac{2}{3} = e^{k\frac{1}{2}}$$
$$k = 2ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Reemplazamos k y $t = 1$ en la ecuación (2.3)

$$y = 60\left(\frac{2}{3}\right)^{2(1)} + 10$$
$$y = 60\left(\frac{4}{9}\right) + 10$$
$$y = \frac{110}{3}$$

Por tanto, el termómetro cuando $t = 1$ minuto marcará $36,66°F$

Encontremos la segunda incógnita, reemplazando $y = 15$ en (2.3)

$$15 = 60\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + 10$$
$$\frac{1}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}$$
$$ln\left(\frac{1}{12}\right) = ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}\right)$$
$$ln\left(\frac{1}{12}\right) = 2t \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$t = \frac{ln\left(\frac{1}{12}\right)}{2ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Por tanto, el termómetro alcanzará 15°F en 3,06 minutos.

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.2).

$$\begin{aligned} y &= 60e^{kt} + y_1 \\ \frac{dy}{dx} &= k(y - y_1) \\ k60e^{kt} &= k(60e^{kt} + y_1 - y_1) \\ k60e^{kt} &= k60e^{kt} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

Cuando se llevó a cabo la aplicación, se abordó la solución de diversos problemas en varias áreas, y también se presentó ejercicios para ser resueltos en casa. De este modo, se proporcionó una explicación para cada problema que se deba resolver, abarcando todos los problemas planteados de las diferentes áreas de la matemática aplicada.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

El enfoque de la investigación es cuantitativo, ya que se realizaron mediciones, mediante un análisis estadístico de la información recopilada a través de cuestionarios, test, encuestas y otras metodologías para abordar preguntas de investigación. En nuestra investigación la recopilación de datos se llevó a cabo mediante pruebas diseñadas para evaluar las habilidades matemáticas en la resolución de problemas que abarcan ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada, el cual nos permitió llevar a cabo una comparación de las habilidades matemáticas de los estudiantes antes y después de implementar el método de Pólya.

Esta investigación tuvo como propósito principal evaluar la efectividad de la guía basada en el método de Pólya como una estrategia para mejorar las habilidades matemáticas en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. Esto se logró a través de una serie de talleres en el aula. Además, se buscó medir el impacto de la implementación de esta guía en los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática en la ESPOCH.

El nivel de este estudio fue explicativa, ya que se exploraron y explicaron las causas y los efectos de las variables. Esto se logró al manipular la variable independiente y observar los efectos resultantes en la variable dependiente.

- **Variable dependiente:** Habilidades matemáticas en la resolución de problemas.
- **Variable independiente:** Métodos de enseñanza en la resolución de problemas.

Es de un diseño experimental, ya que la asignación de participantes al grupo experimental y al de control se realizó de manera aleatoria, con el objetivo de minimizar posibles distorsiones sistemáticas que pudieran afectar los resultados. Este enfoque contribuye a fortalecer la validez interna del estudio, permitiendo una inferencia más sólida sobre la relación causal entre la manipulación de la variable independiente y los resultados observados.

Una vez que se conformó los grupos de control y el experimental, se procedió con la aplicación del pre-test a ambos grupos, para poder determinar las condiciones iniciales que poseen los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

Luego se realizó la implementación de la guía con del método de Pólya en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, solamente al grupo experimental, durante tres semanas a través de talleres áulicos. Posteriormente, se aplicó el post-test a ambos grupos, para así poder comparar los resultados de la implementación de la guía.

Tabla 3-1: Resumen del diseño de la investigación

GRUPO	PRE-TEST	TRATAMIENTO	POS-TEST
Experimental	✓	✓	✓
Control	✓	×	✓
✓ Aplicó × No aplicó			

Realizado por: Yaucan N., 2024.

Tipo de estudio

Se llevó a cabo una investigación de campo, ya que posibilitó el análisis de la problemática en su entorno natural. Esto facilitó la recopilación e interpretación directa de datos en el lugar de los acontecimientos, específicamente en la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

Población y muestra

Para esta investigación, la población de estudio seleccionada fueron los estudiantes matriculados en la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. La muestra seleccionada para este estudio, fueron los estudiantes del cuarto semestre de la Carrera de Matemática que estaban matriculados en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Es decir, la muestra estuvo compuesta por un total de 11 estudiantes.

Tabla 3-2: Conformación de grupos

GRUPOS DE ESTUDIANTES	NÚMERO DE ESTUDIANTES	DESIGNACIÓN
Experimental	6	1
Control	5	2
Total	11	

Realizado por: Yaucan N., 2024.

Técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Las principales técnicas que se utilizaron en esta investigación fueron las siguientes:

- Revisión Bibliográfica.- Esta técnica permitió recopilar, analizar y sintetizar las investigaciones y publicaciones existentes más relevantes acerca del método de Pólya como un método en la resolución de problemas en la Matemática Aplicada.

- Cuestionario.- Esta técnica posibilitó la obtención de información relevante mediante preguntas estructuradas, focalizándose en la recopilación de datos cuantitativos, es decir, se buscó obtener información numérica y objetiva relacionada con las habilidades matemáticas de los estudiantes en la resolución de problemas.

- Test.- Esta técnica facilitó la medición sistemática y estandarizada de las habilidades matemáticas en la resolución de problemas en Matemática Aplicada. Al adoptar esta técnica, se facilitó una medición rigurosa y coherente de las capacidades de los estudiantes, permitiendo una comparación precisa. Así, garantizando la evaluación con criterios uniformes, minimizando la subjetividad y ofreciendo resultados confiables.

Los instrumentos que fueron empleados en esta investigación son:

- Pre-Test.- Este instrumento facilitó la evaluación y medición de las habilidades matemáticas iniciales que poseen los estudiantes, en la resolución de problemas en la Matemática Aplicada. Al proporcionar una estructura organizada para la recopilación de datos, permitió un análisis detallado de las competencias matemáticas antes de la intervención.

- Pos-Test.- Este instrumento facilitó la evaluación y medición de las habilidades matemáticas, después de la implementación de la guía utilizando el método de Pólya en la resolución de problemas en la Matemática Aplicada. Al utilizar este recurso, se logró una evaluación detallada que abarcó tanto aspectos cuantitativos como cualitativos de las competencias matemáticas.

- Microsoft Excel.- Este instrumento facilitó realizar la organización de datos, tablas y la creación de gráficos estadísticos, después de aplicar el pre-test y el post-test. La funcionalidad de esta herramienta no solo se limitó a la recopilación de datos, sino que también abarcó la tarea crucial de estructurar la información de manera sistemática y coherente.

- RStudio.- Este instrumento desempeñó un papel fundamental al facilitar la ejecución de la prueba de hipótesis de la investigación. Al emplear esta herramienta, se logró llevar a cabo de manera eficiente y precisa la evaluación estadística necesaria para comprobar la hipótesis planteada.

- Latex.- Este instrumento, conocido como editor de texto LaTeX, desempeñó un papel fundamental en la redacción y formateo del trabajo de titulación. La utilidad de este instrumento se manifiesta no solo en la redacción del contenido sino también en la gestión eficiente de elementos cruciales como ecuaciones matemáticas.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Tras llevar a cabo la exitosa aplicación de los instrumentos de evaluación a los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH, se procedió a organizar y analizar minuciosamente los datos recopilados, con el fin de procesarlos de manera efectiva. A continuación, se presentará una explicación detallada acerca de los procedimientos estadísticos empleados y los análisis correspondientes.

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

En esta sección, se llevará a cabo el procesamiento, análisis e interpretación de los resultados obtenidos tanto del pre-test como del post-test aplicados en la investigación.

4.1.1. *Resultados de la evaluación inicial (pre-test)*

La finalidad de la evaluación inicial, fue evaluar el rendimiento académico y las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. Esta evaluación se llevó a cabo con los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática en la ESPOCH, quienes están matriculados en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias durante el periodo académico comprendido entre el 10 de octubre de 2023 y el 4 de marzo de 2024. Los resultados obtenidos en esta prueba se presentan a continuación, abarcando tanto al grupo experimental como al grupo de control.

Tabla 4-1: Resultados individuales de la evaluación inicial (pre-test)

GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
Código de estudiante	Calificación	Código de estudiante	Calificación
EDO1	5,5	EDO1	1
EDO2	1	EDO2	5,2
EDO3	6	EDO3	3,5
EDO4	5,5	EDO4	5,5
EDO5	5	EDO5	6
EDO6	2,5		
PROMEDIO	4,25		4,24
CALIFICACIÓN MÁS ALTA	6		6
CALIFICACIÓN MÁS BAJA	1		1

Realizado por: Yaucán N., 2024.

En el proceso de evaluación inicial (pre-test), realizado al grupo experimental y de control, se llevó a cabo una serie de aplicaciones repetidas para alcanzar los mismos resultados en ambas muestras, asegurando de esta manera la estabilidad de los datos iniciales en ambos conjuntos. Esta metodología no solo buscó la uniformidad, sino que también garantizó la fiabilidad de los datos iniciales en ambos grupos.

En la **Tabla 4-1**, se evidencia que las calificaciones más altas en ambos grupos alcanzan los 6 puntos, mientras que la puntuación más baja es de 1 punto. En cuanto al promedio, se observa que el grupo experimental tiene una puntuación de 4.24, y el grupo de control presenta un promedio de 4.25. Esto indica una notable paridad entre ambas muestras, destacando una semejanza en los dos grupos.

Tabla 4-2: Escala de calificaciones de la evaluación inicial (pre-test)

		GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
ESCALA CUALITATIVA	ESCALA CUANTITATIVA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
Domina los aprendizajes requeridos DAR	[9,10]	0	0 %	0	0 %
Alcanza los aprendizajes requeridos AAR	[7,9)	0	0 %	0	0 %
Esta próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos PAAR	[4,7)	4	66,67 %	3	60 %
No alcanza los aprendizajes requeridos NAR	[0,4)	2	33,33 %	2	40 %
TOTAL		6	100 %	5	100 %

Realizado por: Yaucán N., 2024.

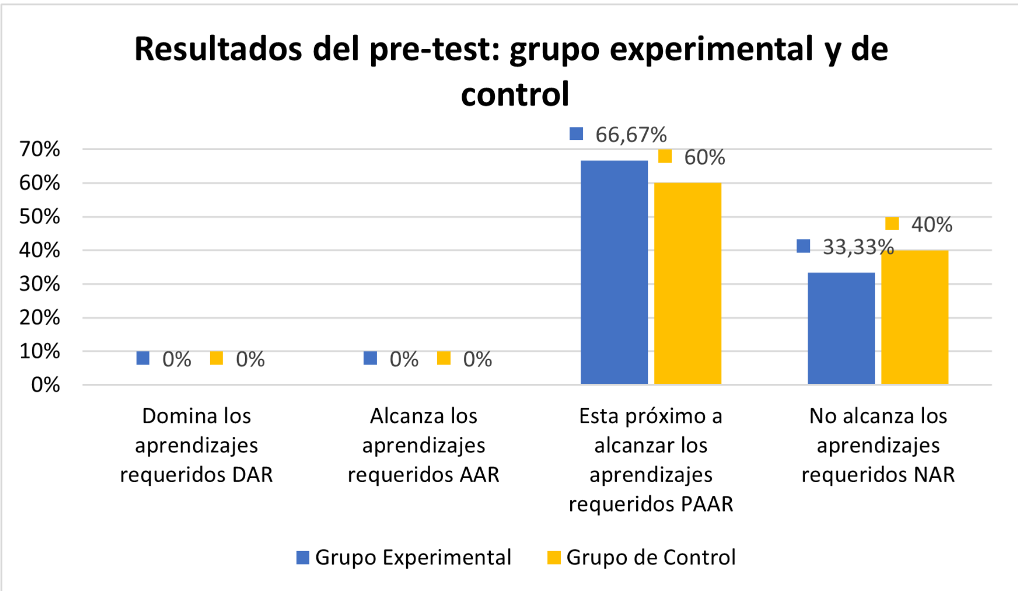

Ilustración 4-1: Resultados de la evaluación inicial (pre-test)

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-1**, nos muestra los resultados de la evaluación inicial en los grupos experimental y de control observamos similitudes significativas. Se observa que el 33,33 % y el 40 % de los estudiantes, no lograron alcanzar los niveles de aprendizaje necesarios, obteniendo calificaciones por debajo de 4 puntos. Asimismo, un 66,67 % y un 60 % de los estudiantes en ambos grupos estan próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos, con calificaciones por debajo de 7 puntos.

Es importante destacar que ningún estudiante en ninguno de los grupos logró alcanzar o dominar los niveles de aprendizaje requeridos, los cuales están representados por calificaciones de 7 a 10 puntos. Este hecho indica una limitación en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos mediante la aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias. A continuación, se expondrán los resultados de las habilidades iniciales obtenidos antes de la aplicación de la guía con el método de Pólya.

Tabla 4-3: ¿Comprendió el problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	0	0 %	0	0 %
De forma parcial	2	33 %	2	40 %
No comprendió	4	67 %	3	60 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

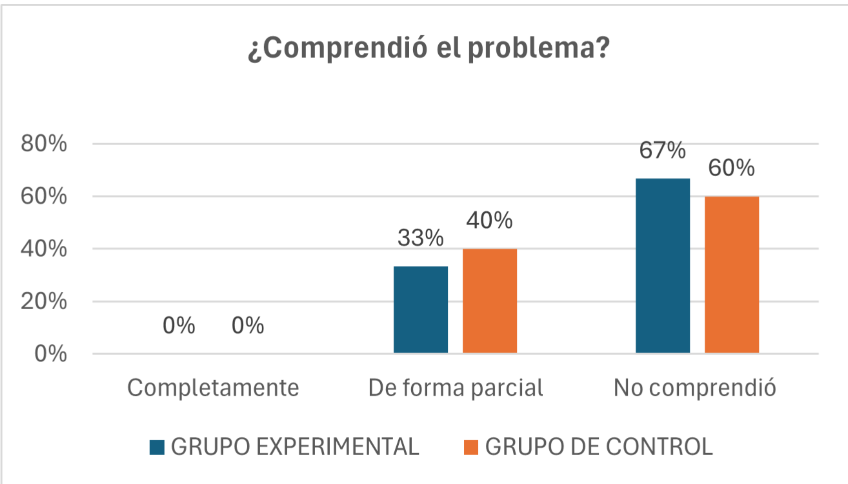

Ilustración 4-2: Pre-test de la habilidad para comprender el problema

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-2**, se observa que el 33 % de los estudiantes en el grupo experimental demostraron habilidad para comprender el problema de forma parcial, mientras que el 67 % en este grupo no lograron desarrollar dicha habilidad por completo. Por otro lado, en el grupo de control, se evidencia que el 40 % de los estudiantes demostraron habilidad para comprender el problema de manera parcial, mientras que el 60 % en este grupo no lograron desarrollar dicha habilidad. Estos resultados se refieren a la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de la Matemática Aplicada.

Tabla 4-4: ¿Identificó el modelo matemático para el problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
En su totalidad	0	0 %	0	0 %
De manera parcial	2	33 %	2	40 %
No identificó	4	67 %	3	60 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

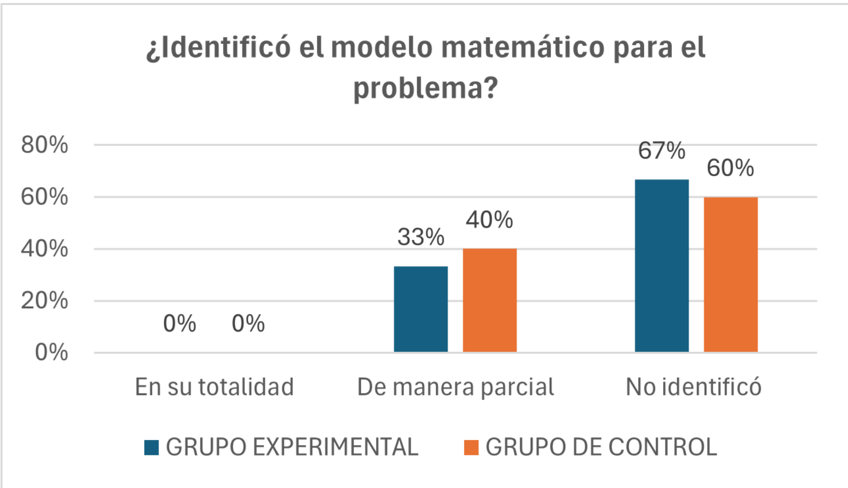

Ilustración 4-3: Pre-test de la habilidad para utilizar el modelo matemático adecuado

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-3**, se observa que el 33 % de los estudiantes en el grupo experimental demostraron habilidad para emplear el modelo matemático de manera parcial, mientras que el 67 %

en este grupo no lograron identificar el modelo matemático adecuado. Por otro lado, en el grupo de control, se evidencia que el 40 % de los estudiantes exhibieron habilidad para utilizar el modelo matemático de manera parcial, mientras que el 60 % en este grupo no lograron identificar el modelo matemático adecuado para el problema planteado.

Tabla 4-5: ¿Planteó la estrategia para abordar el problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Apropiadamente	0	0 %	0	0 %
Inadecuadamente	1	17 %	1	20 %
No planteó	5	83 %	4	80 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

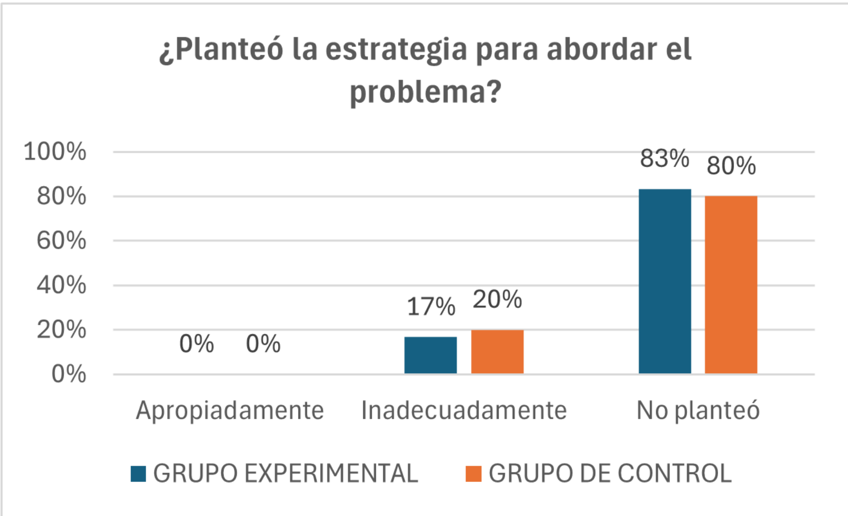

Ilustración 4-4: Pre-test de la habilidad para seleccionar la estrategia adecuada

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-4**, se observa que el 17 % de los estudiantes en el grupo experimental mostraron habilidad para seleccionar la estrategia de manera inadecuada, mientras que el 87 % en este grupo no lograron plantear una estrategia. Por otro lado, en el grupo de control, se evidencia que el 20 % de los estudiantes demostraron habilidad para seleccionar la estrategia de manera inadecuada, mientras que el 80 % en este grupo no lograron plantear una estrategia para el problema presentado.

Tabla 4-6: ¿Aplicó conocimientos previos para resolver?

	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	0	0 %	0	0 %
Parcialmente	2	33 %	2	40 %
No aplicó	4	67 %	3	60 %
Total	**6**	**1**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

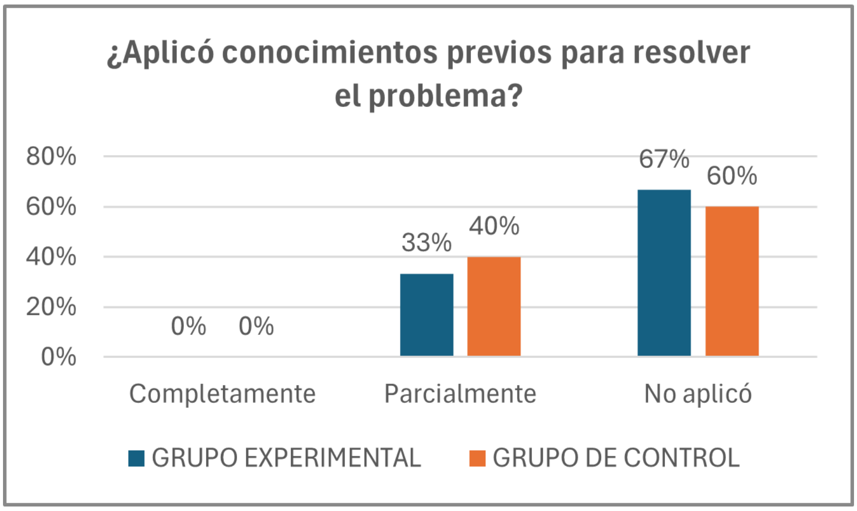

Ilustración 4-5: Pre-test de la habilidad para aplicar conocimientos previos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-5**, se evidencia que el 33 % de los estudiantes en el grupo experimental demostraron habilidad para aplicar parcialmente los conocimientos previos, mientras que el 67 % en este grupo no aplicaron dichos conocimientos. Además, en el grupo de control, el 40 % de los estudiantes tuvieron la capacidad de aplicar parcialmente los conocimientos previos, mientras que el 60 % en este grupo no lograron aplicar esos conocimientos para abordar el problema presentado.

Tabla 4-7: ¿Redactó las respuestas del problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	0	0 %	0	0 %
Parcialmente	0	0 %	0	0 %
No redactó	6	100 %	5	100 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

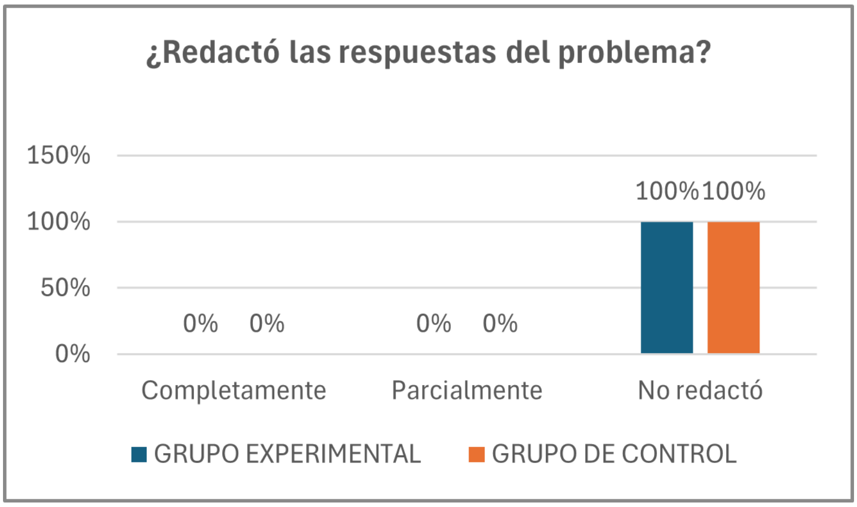

Ilustración 4-6: Pre-test de la habilidad para comunicar resultados

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-6**, se observa que el 100 % de los estudiantes, tanto del grupo experimental como del grupo de control, carecieron de la habilidad para redactar de manera clara los resultados obtenidos del problema.

Tabla 4-8: ¿Realizó la revisión de las respuestas obtenidas?

	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
En su totalidad	0	0 %	0	0 %
Parcialmente	0	0 %	0	0 %
No verificó	6	100 %	5	100 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

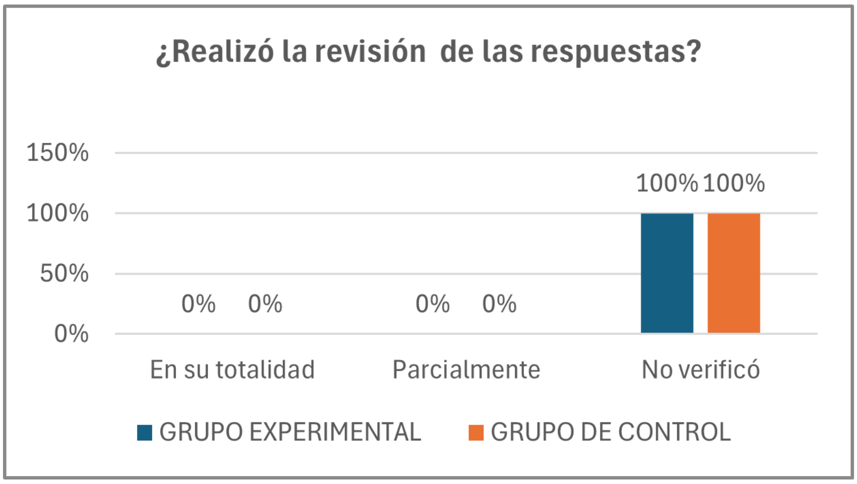

Ilustración 4-7: Pre-test de la habilidad para verificar los resultados

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-7**, se evidencia que el 100 % de los estudiantes en ambos grupos, experimental y de control, carecieron de la habilidad para verificar los resultados obtenidos del problema.

4.1.2. *Resultados de la evaluación final (post-test) del grupo experimental*

La aplicación de la prueba final al grupo experimental, posibilitó la evaluación del rendimiento académico y las habilidades matemáticas en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias la Matemática Aplicada. Esta evaluación se llevó a cabo después de implementar la guía con el método de Pólya como estrategia para la resolución de problemas.

Tabla 4-9: Resultados individuales del post-test

ESTUDIANTES-CÓDIGO	CALIFICACIÓN/10
EDO1	7,5
EDO2	9
EDO3	8
EDO4	7
EDO5	10
EDO6	7,5
PROMEDIO	8,17
CALIFICACIÓN MÁS ALTA	10
CALIFICACIÓN MÁS BAJA	7

Realizado por: Yaucán N., 2024.

En la **Tabla 4-9**, se evidencia que la calificación más alta obtenida en el grupo experimental es de 10 puntos, mientras que la puntuación más baja es de 7 puntos. En cuanto al promedio, se observa que registra una puntuación de 8,17.

Tabla 4-10: Escala de calificaciones del post-test

ESCALA CUALITATIVA	ESCALA CUANTITATIVA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
Domina los aprendizajes requeridos DAR	[9,10]	2	33 %
Alcanza los aprendizajes requeridos AAR	[7,9)	4	67 %
Esta próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos PAAR	[4,7)	0	0 %
No alcanza los aprendizajes requeridos NAR	[0,4)	0	0 %
TOTAL		6	100 %

Realizado por: Yaucán N., 2024.

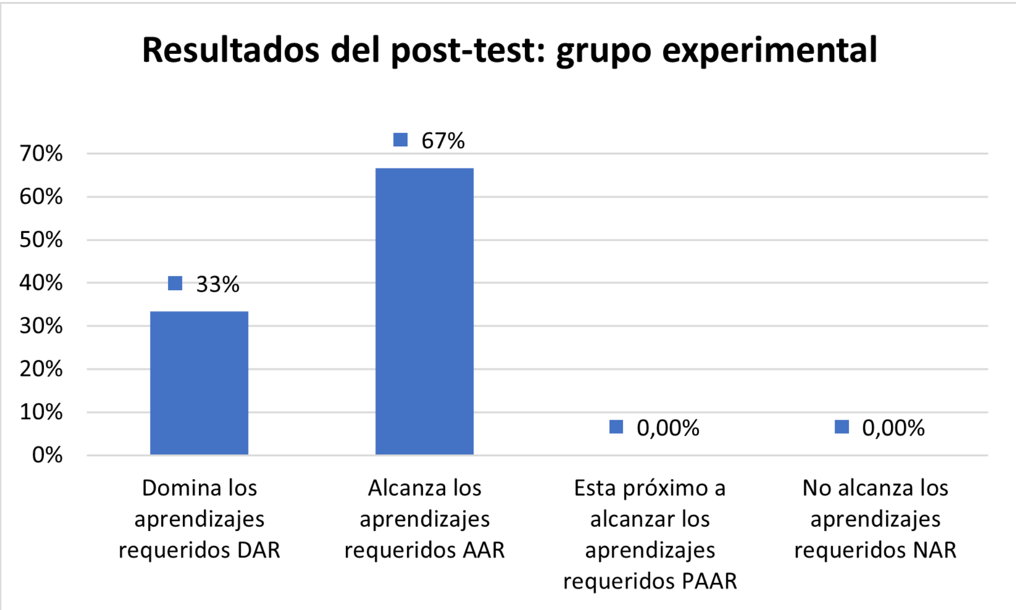

Ilustración 4-8: Resultados del post-test: grupo experimental

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-8**, se puede observar que, tras la implementación de la guía con el método de Pólya al grupo experimental. El 33 % de los estudiantes demuestra un dominio al obtener calificaciones de 9 a 10 puntos, mientras que el 67 % alcanza los aprendizajes requeridos con calificaciones de 7 a 8,99 puntos. Este resultados nos indica una mejora significativa en la capacidad de resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación, se presentará los resultados obtenidos después de la aplicación de la guía basada en el método de Pólya para abordar problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada.

Tabla 4-11: ¿Comprendió el problema?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	6	100 %
De forma parcial	0	0 %
No comprendió	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

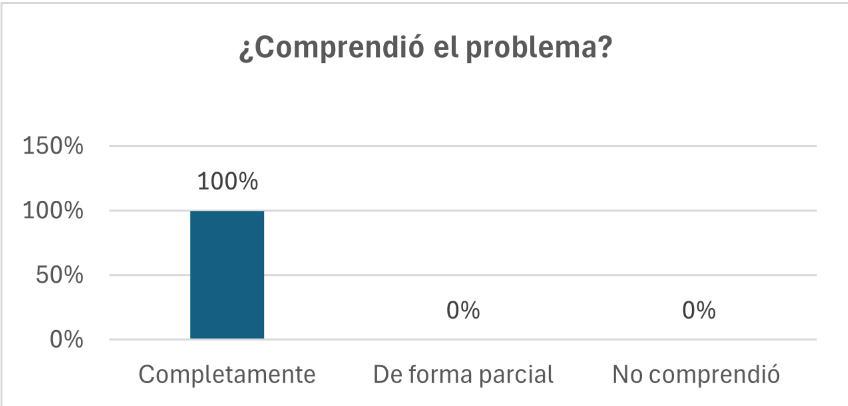

Ilustración 4-9: Post-test de la habilidad para comprender el problema

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-9**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo experimental, a quienes se les proporcionó la guía como una alternativa para resolver problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, lograron un desarrarrollar completamente la habilidad para comprender el problema planteado.

Tabla 4-12: ¿Identificó el modelo matemático?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
En su totalidad	6	100 %
De manera parcial	0	0 %
No identificó	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

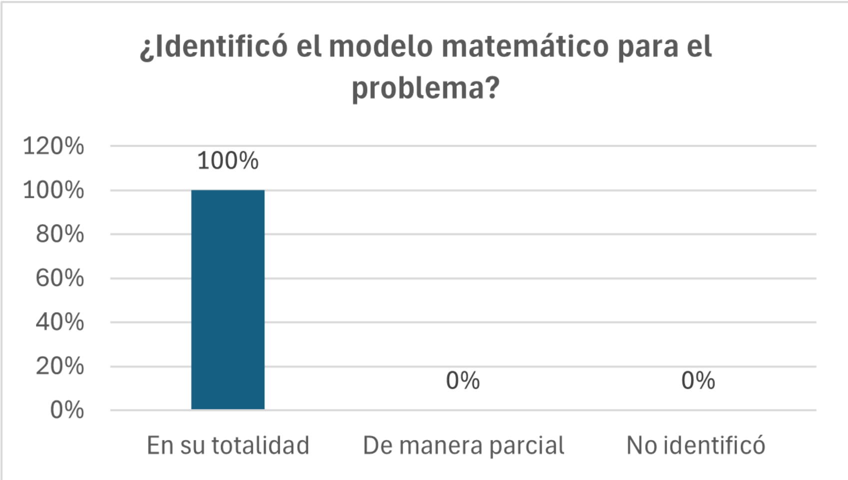

Ilustración 4-10: Post-test de la habilidad para utilizar el modelo matemático adecuado

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-10**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo experimental, a quienes se les proporcionó la guía como una alternativa para resolver problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, lograron un desarrarrollar en su totalidad la habilidad para identificar el modelo matemático del problema presentado.

Tabla 4-13: ¿Planteó la estrategia para resolver?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Apropiadamente	6	100 %
Inadecuadamente	0	0 %
No planteó	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

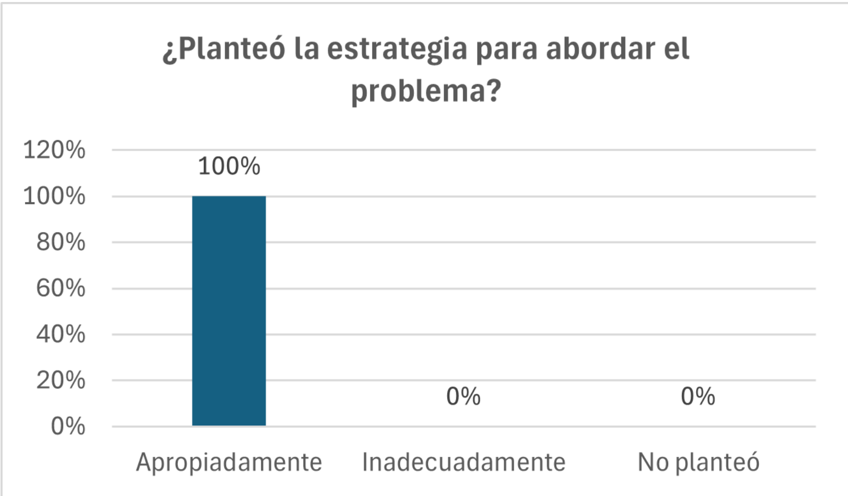

Ilustración 4-11: Post-test de la habilidad para seleccionar la estrategia adecuada

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-11**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo experimental, a quienes se les proporcionó la guía como una alternativa para resolver problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, tuvieron la habilidad para plantear una estrategia apropiada para resolver el problema.

Tabla 4-14: ¿Aplicó conocimientos previos?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	4	67 %
Parcialmente	2	33 %
No aplicó	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

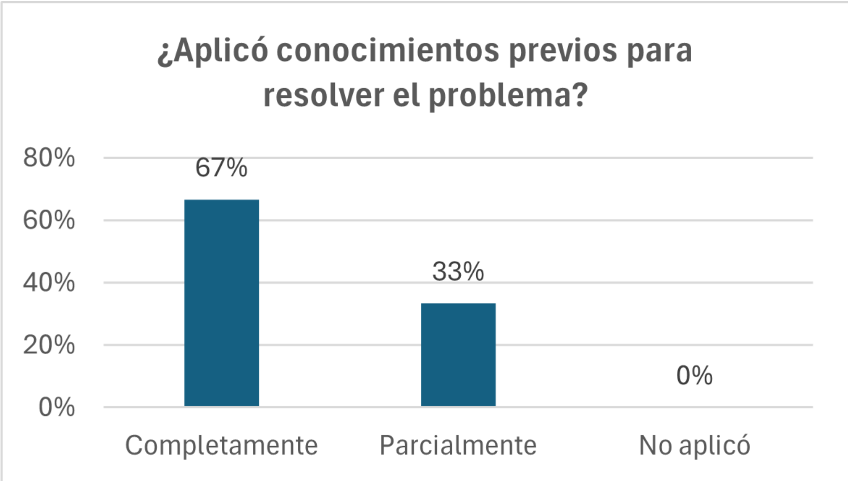

Ilustración 4-12: Post-test de la habilidad para aplicar conocimientos previos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-12**, se observa que el 67 % de los estudiantes del grupo experimental desarrollaron completamente la habilidad para aplicar los conocimientos previos, mientras que el 33 % desarrollaron parcialmente esta habilidad en la resolución de problemas.

Tabla 4-15: ¿Redactó las respuestas?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	6	100 %
Parcialmente	0	0 %
No redactó	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

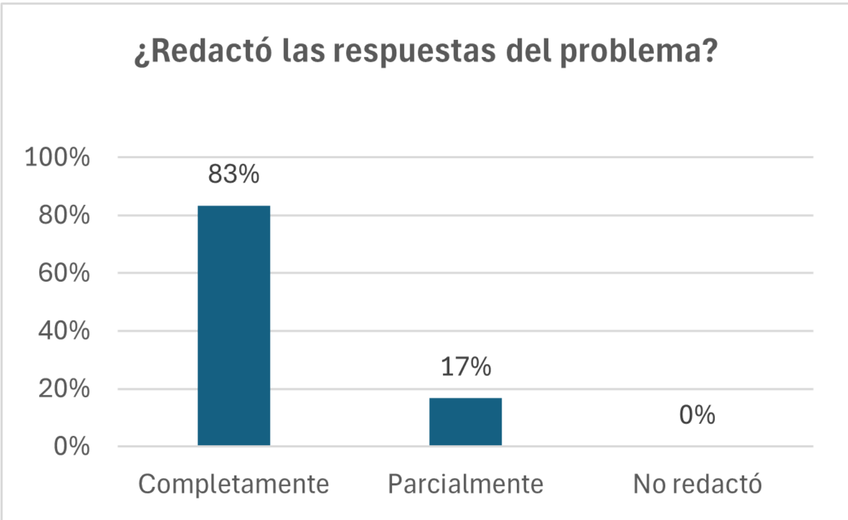

Ilustración 4-13: Post-test de la habilidad para comunicar resultados

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-13**, se observa que el 83 % de los estudiantes del grupo experimental desarrollaron completamente la habilidad para redactar los resultados obtenidos del problema y el 33 % restante desarrollaron parcialmente esta habilidad.

Tabla 4-16: ¿Realizó la revisión?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
En su totalidad	4	67 %
Parcialmente	2	33 %
No verificó	0	0 %
Total	**6**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

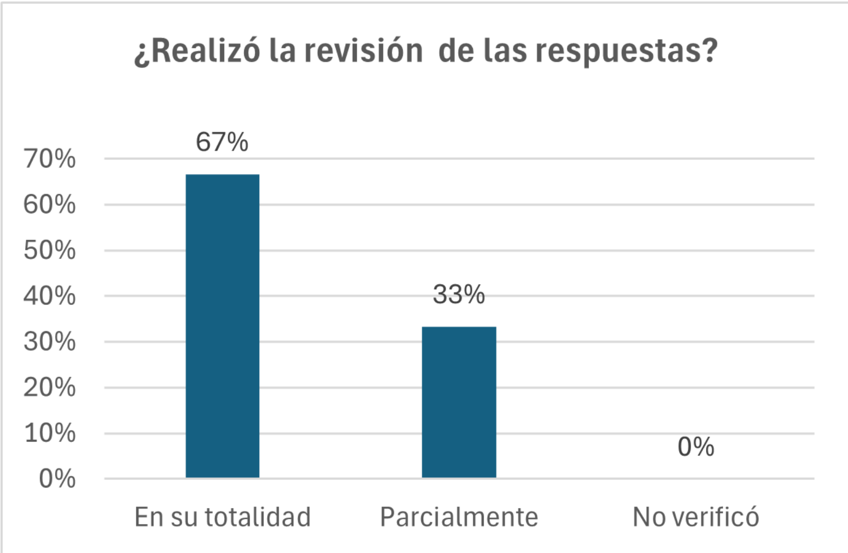

Ilustración 4-14: Post-test de la habilidad para verificar los resultados

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-14**, se observa que el 67 % de los estudiantes del grupo experimental desarrollaron en su totalidad la habilidad para verificar los resultados obtenidos del problema y mientras que el 33 % desarrollaron parcialmente esta habilidad.

4.1.3. *Resultados de la evaluación final (post-test) del grupo de control*

La aplicación de la evaluación final al grupo de control posibilitó la evaluación del nivel de conocimiento y las habilidades matemáticas en la resolución de problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. Cabe destacar que en este caso, no se implementó la guía con el método de Pólya para este grupo.

Tabla 4-17: Resultados individuales del post-test

ESTUDIANTES-CÓDIGO	CALIFICACIÓN/10
EDO1	6
EDO2	2,5
EDO3	6,3
EDO4	5
EDO5	7
PROMEDIO	5,36
CALIFICACIÓN MÁS ALTA	7
CALIFICACIÓN MÁS BAJA	2,5

Realizado por: Yaucán N., 2024.

En la **Tabla 4-17**, se evidencia que la calificación más alta obtenida en el grupo de control es de 7 puntos, mientras que la puntuación más baja es de 2,5 puntos. En cuanto al promedio, se observa que registra una puntuación de 5,36.

Tabla 4-18: Escala de calificaciones del post-test

ESCALA CUALITATIVA	ESCALA CUANTITATIVA	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
Domina los aprendizajes requeridos DAR	[9,10]	0	0%
Alcanza los aprendizajes requeridos AAR	[7,9)	1	20%
Esta próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos PAAR	[4,7)	3	60%
No alcanza los aprendizajes requeridos NAR	[0,4)	1	20%
TOTAL		5	100%

Realizado por: Yaucán N., 2024.

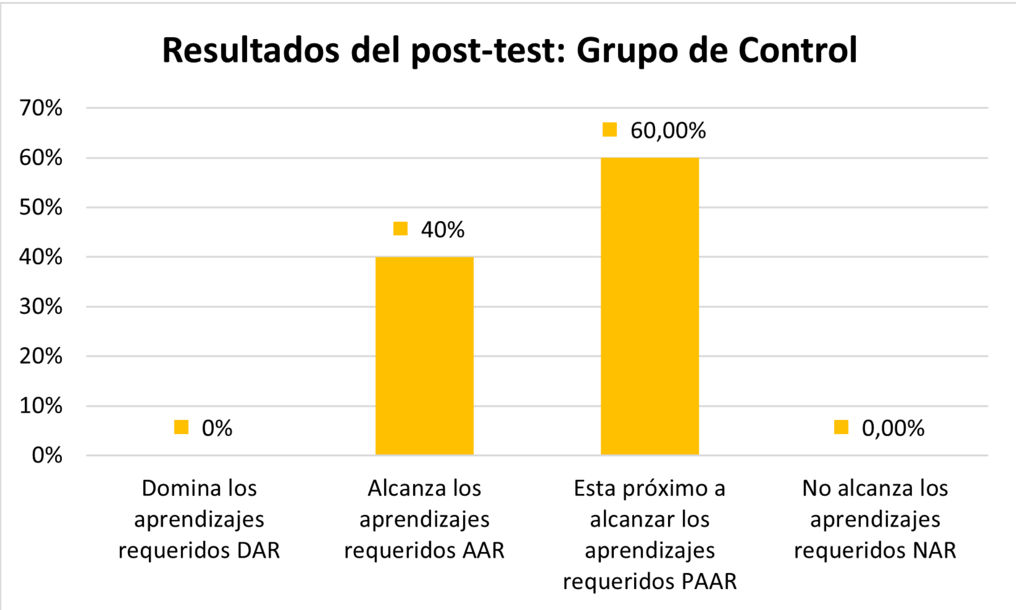

Ilustración 4-15: Resultados del post-test: grupo de control

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-15**, se puede observar que, en los resultados de la evaluación final del grupo de control al cual no se le aplicó el tratamiento, el 20 % de los estudiantes no logró alcanzar los aprendizaje requeridos, obteniendo calificaciones inferiores a 4 puntos. Además, el 60 % de los estudiantes están próximos a alcanzar los aprendizajes requeridos, obteniendo calificaciones de 4 a 6,99 puntos, mientras que el 20 % restante logra alcanzar los niveles requeridos con calificaciones de 7 a 8,99 puntos.

A continuación, se presentará los resultados acerca de las habilidades demostradas por los estudiantes, para resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. En este caso, al grupo de control no se implementó la guía basada en el método de Pólya.

Tabla 4-19: ¿Comprendió el problema?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
Completamente	1	20 %
De forma parcial	2	40 %
No comprendió	2	40 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

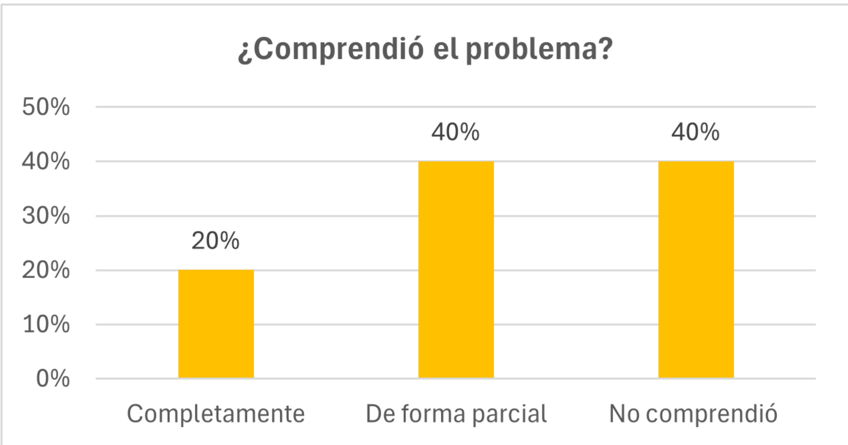

Ilustración 4-16: Post-test de la habilidad para comprender el problema

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-16**, se observa en el grupo de control, el 20 % de los estudiantes desarrollaron completamente la habilidad para comprender el problema, mientras que el 40 % lo hicieron de manera parcial, y los otros 40 % no lograron desarrollar la habilidad para comprender el problema presentado.

Tabla 4-20: ¿Identificó el modelo matemático?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
En su totalidad	0	0 %
De manera parcial	3	60 %
No identificó	2	40 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

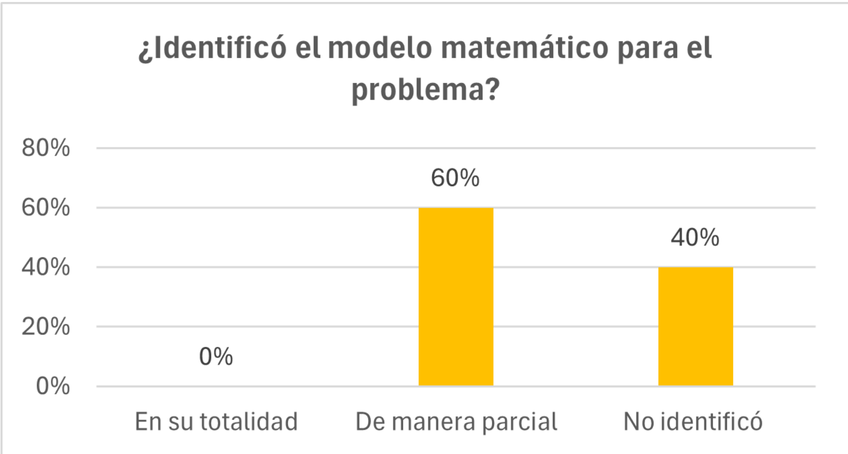

Ilustración 4-17: Post-test de la habilidad para utilizar el modelo matemático adecuado

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-17**, se observa que el 60 % de los estudiantes del grupo de control desarrollaron de manera parcial la habilidad para identificar el modelo matemático y el 40 % restante no desarrollaron esta habilidad para el problema presentado.

Tabla 4-21: ¿Planteó la estrategia para resolver?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
Apropiadamente	0	0 %
Inadecuadamente	2	40 %
No planteó	3	60 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

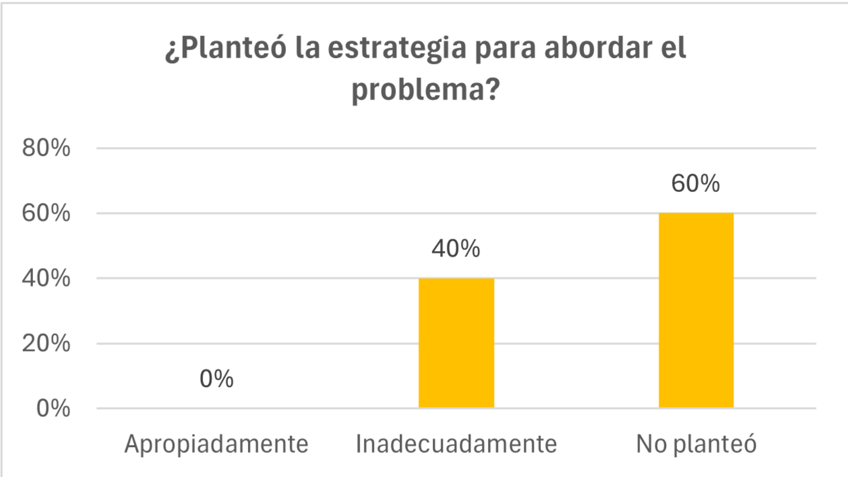

Ilustración 4-18: Post-test de la habilidad para seleccionar la estrategia adecuada

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-18**, se observa que el 40 % de los estudiantes del grupo de control tuvieron la habilidad para plantear la estrategia de manera inadecuada y el 60 % restante no tuvieron esta habilidad para resolver el problema presentado.

Tabla 4-22: ¿Aplicó conocimientos previos?

Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	0	0 %
Parcialmente	2	40 %
No aplicó	3	60 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

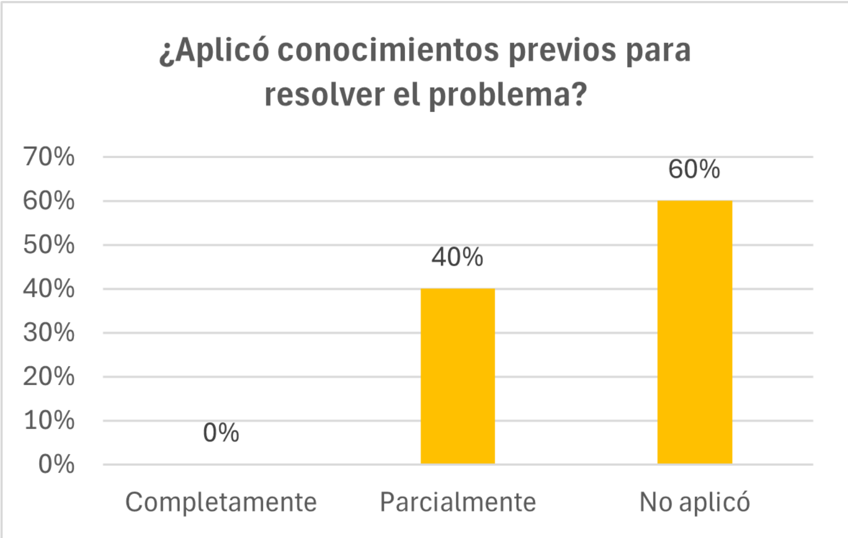

Ilustración 4-19: Post-test de la habilidad para aplicar conocimientos previos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-19**, se observa que el 40 % de los estudiantes del grupo de control demostraron parcialmente la habilidad para aplicar los conocimientos previos y el 60 % restante no desarrollaron esta habilidad para resolver el problema presentado.

Tabla 4-23: ¿Redactó las respuestas?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
Completamente	0	0 %
Parcialmente	1	20 %
No redactó	4	80 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

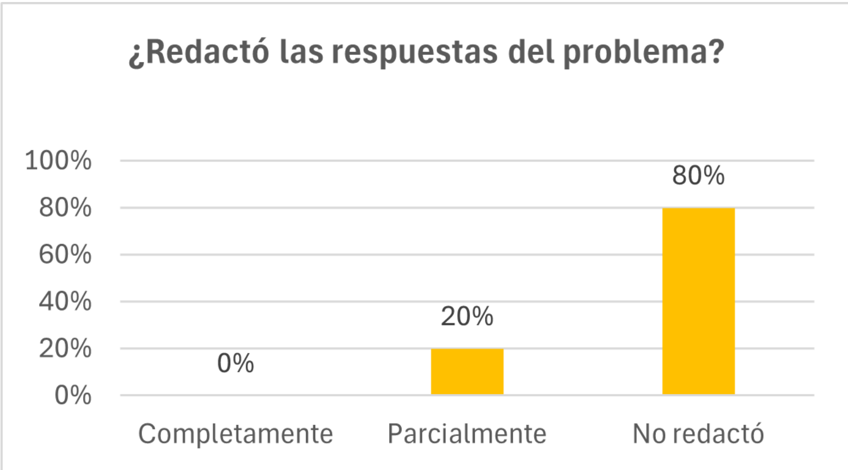

Ilustración 4-20: Post-test de la habilidad para comunicar resultados

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-20**, se puede observar que el 20 % de los estudiantes del grupo de control demostraron parcialmente la habilidad para redactar las respuestas obtenidas y el 80 % no demostraron la habilidad para redactar las respuestas para el problema presentado.

Tabla 4-24: ¿Realizó la revisión?

Variable	Frecuencia	Porcentaje
En su totalidad	0	0 %
Parcialmente	0	0 %
No verificó	5	100 %
Total	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

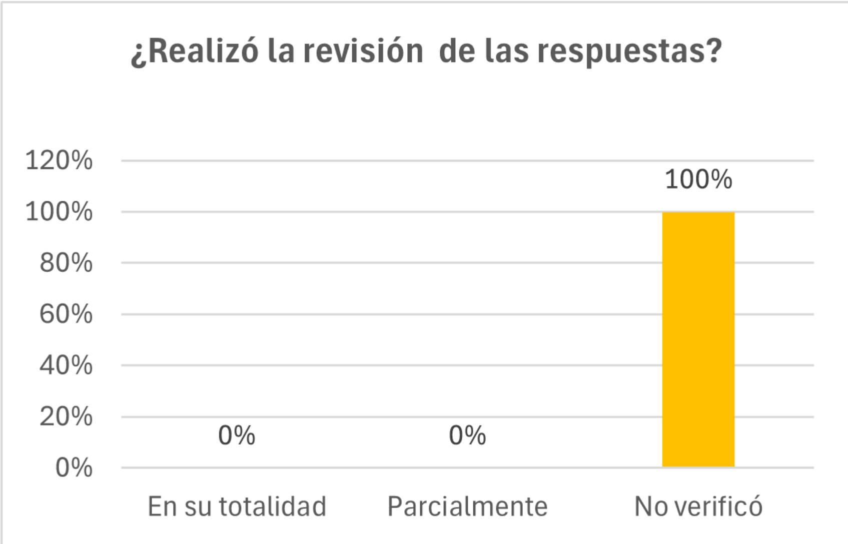

Ilustración 4-21: Post-test de la habilidad para verificar los resultados obtenidos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-21**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo de control no demostraron ninguna habilidad para verificar los resultados.

4.1.4. *Comparación de los resultados de la evaluación final (post-test) entre el grupo experimental y de control*

En esta sección, se llevará a cabo la comparación de los resultados entre los dos grupos en lo que respecta al rendimiento académico y las habilidades matemáticas en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada.

Tabla 4-25: Resultados individuales de la evaluación final (post-test)

GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
Código de estudiante	Calificación	Código de estudiante	Calificación
EDO1	7,5	EDO1	6
EDO2	9	EDO2	2,5
EDO3	8	EDO3	6,3
EDO4	7	EDO4	5
EDO5	10	EDO5	7
EDO6	7,5		
PROMEDIO	8,17		5,36
CALIFICACIÓN MÁS ALTA	10		7
CALIFICACIÓN MÁS BAJA	7		2,5

Realizado por: Yaucán N., 2024.

En la **Tabla 4-25**, se aprecia que la puntuación más elevada en el grupo experimental alcanza los 10 puntos, mientras que en el grupo de control, la puntuación máxima es de 7 puntos. Por otro lado, la calificación más baja en el grupo experimental es de 7 puntos, contrastando con la calificación más baja en el grupo de control que es de 2.5 puntos. Con respecto al promedio, el grupo experimental exhibe una puntuación media de 8.17, mientras que el grupo de control presenta un promedio de 5.36 puntos. Estos resultados indican que la aplicación de la guía con el método de Pólya ha contribuido a mejorar las habilidades en la resolución de problemas.

Tabla 4-26: Escala de calificaciones del post-test del grupo experimental y de control

		GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
ESCALA CUALITATIVA	**ESCALA CUANTITATIVA**	**NÚMERO DE ESTUDIANTES**	**PORCENTAJE**	**NÚMERO DE ESTUDIANTES**	**PORCENTAJE**
Domina los aprendizajes requeridos DAR	[9,10]	2	33 %	0	0 %
Alcanza los aprendizajes requeridos AAR	[7,9)	4	67 %	1	20 %
Esta próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos PAAR	[4,7)	0	0 %	3	60 %
No alcanza los aprendizajes requeridos NAR	[0,4)	0	0 %	1	20 %
TOTAL		6	100 %	5	100 %

Realizado por: Yaucán N., 2024.

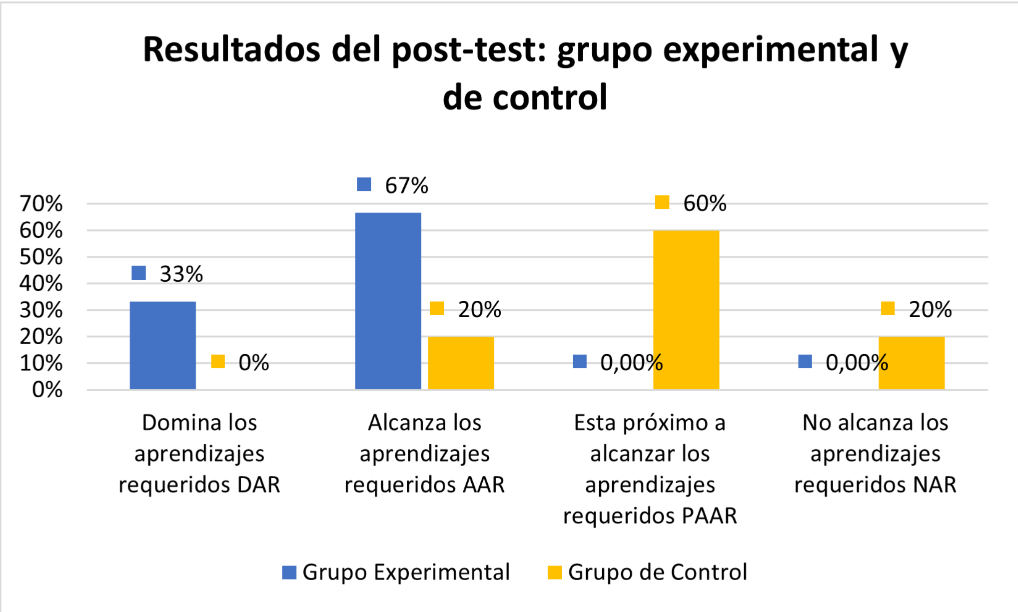

Ilustración 4-22: Resultados del post-test: grupo experimental y de control

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-22**, se puede observar los resultados obtenidos despúes de la evaluación final, al cual se le aplicó el tratamiento, y en el grupo de control, donde no se aplicó dicho tratamiento. Se evidencia una mejora significativa en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el grupo experimental, el 33 % de los estudiantes domina los aprendizajes requeridos con calificaciones de 9 a 10 puntos. Además, el 67 % de los estudiantes del grupo experimental y el 20 % del grupo de control, logran alcanzar los aprendizajes requeridos con calificaciones de 7 a 8,99 puntos. Por otro lado, el 60 % de los estudiantes en el grupo de control están proximos a alcanzar los aprendizajes requeridos, con calificaciones de 4 a 6,99 puntos, mientras que el 20 % restante en este grupo no logró alcanzar los aprendizajes requeridos.

A continuación, se presenta una comparación de los resultados obtenidos en relación con las habilidades desarrolladas para la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada, del grupo experimental y del grupo de control.

Tabla 4-27: ¿Comprendió el problema planteado?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	6	100 %	1	20 %
De forma parcial	0	0 %	2	40 %
No comprendió	0	0 %	2	40 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

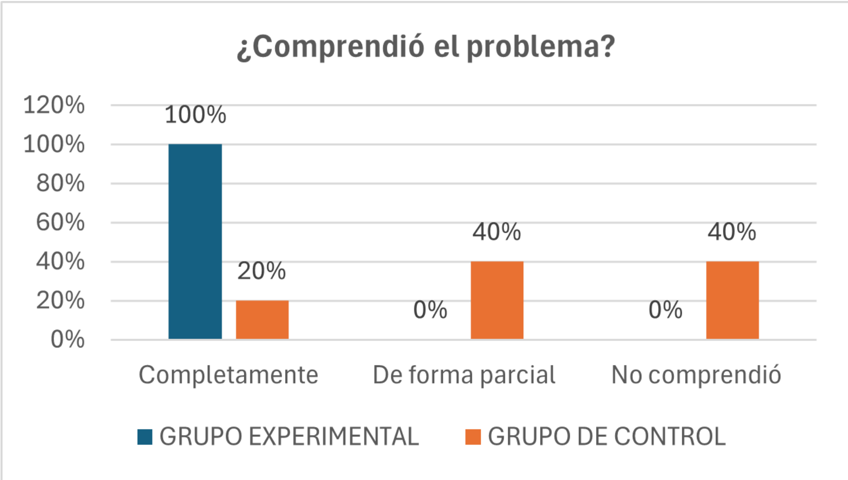

Ilustración 4-23: Post-test de la habilidad para comprender el problema

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-23**, se observa que los estudiantes del grupo experimental desarrollaron completamente la habilidad para comprender el problema, alcanzando un 100 % de éxito. En cambio, en el grupo de control, solo el 20 % de los estudiantes desarrollaron completamente la habilidad para comprender el problema, mientras que el 40 % lo hicieron de manera parcial y el 40 % no alcanzaron desarrollar la capacidad para comprender el problema presentado.

Tabla 4-28: ¿Identificó el modelo matemático para el problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
En su totalidad	6	100 %	0	0 %
De manera parcial	0	0 %	3	60 %
No identificó	0	0 %	2	40 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

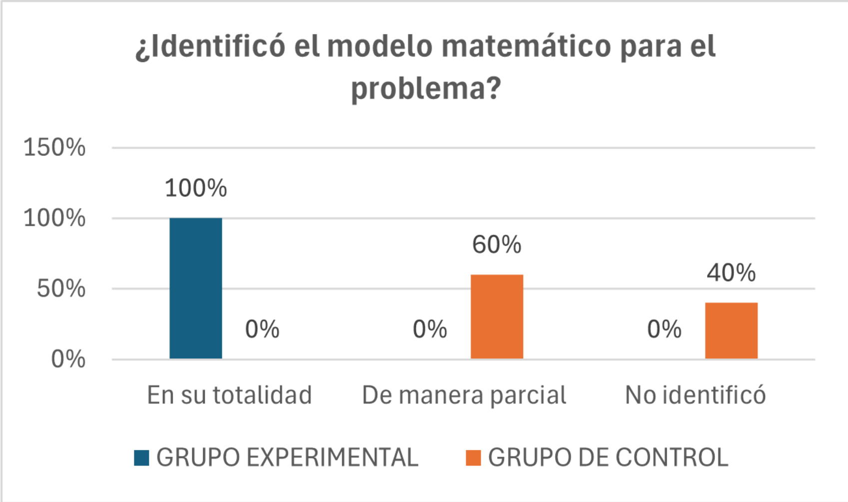

Ilustración 4-24: Post-test de la habilidad para utilizar el modelo matemático adecuado

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-24**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo experimental lograron desarrollar completamente la habilidad de identificar el modelo matemático. En cambio, en el grupo de control, el 60 % de los estudiantes lograron desarrollar parcialmente esta habilidad, mientras que el 40 % restante no pudieron adquirir la habilidad de identificar el modelo matemático.

Tabla 4-29: ¿Planteó la estrategia para abordar el problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Apropiadamente	6	100 %	0	0 %
Inadecuadamente	0	0 %	2	40 %
No planteó	0	0 %	3	60 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

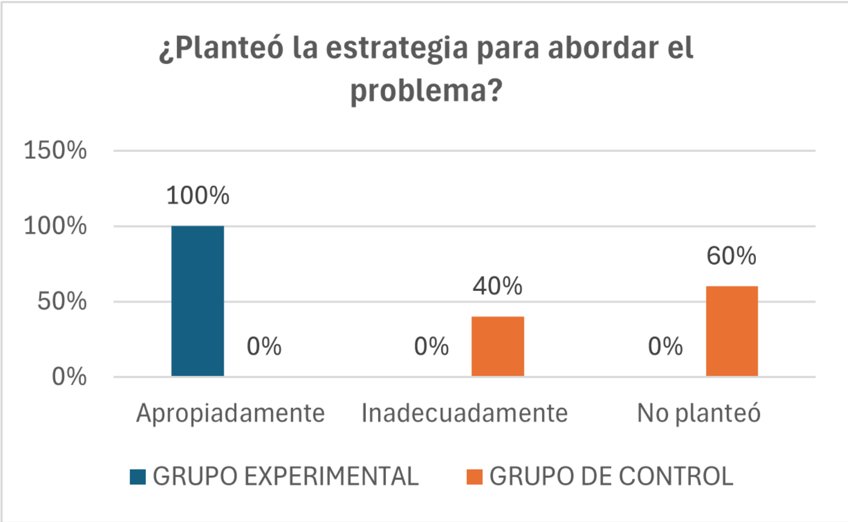

Ilustración 4-25: Post-test de la habilidad para seleccionar la estrategia adecuada

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-25**, se observa que el 100 % de los estudiantes del grupo experimental demostraron la habilidad de plantear una estrategia apropiada. En cambio, en el grupo de control, el 40 % de los estudiantes plantearon una estrategia inadecuada, mientras que el 60 % restante no tuvieron la habilidad de plantear ninguna estrategia para abordar el problema presentado.

Tabla 4-30: ¿Aplicó conocimientos previos para resolver?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	4	67 %	0	0 %
Parcialmente	2	33 %	2	40 %
No aplicó	0	0 %	3	60 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

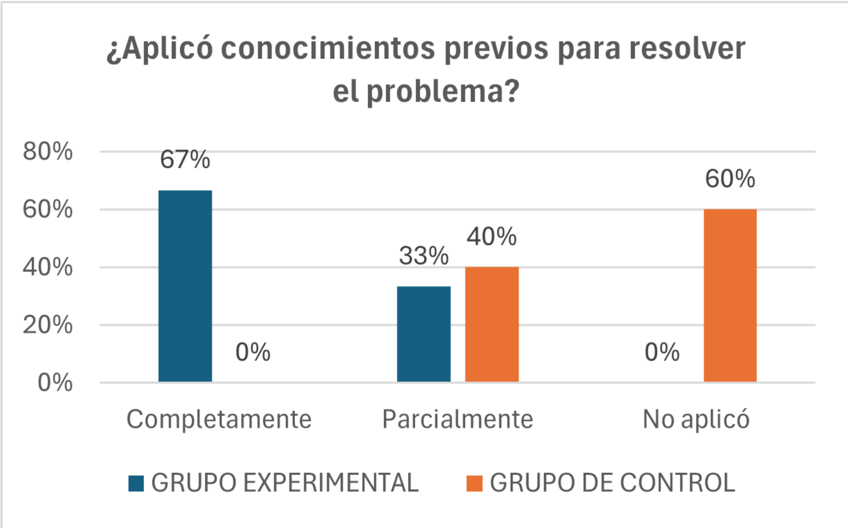

Ilustración 4-26: Post-test de la habilidad para aplicar conocimientos previos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-26**, se observa que en el grupo experimental, el 67 % de los estudiantes lograron un desarrollar completamente la habilidad de aplicar sus conocimientos previos, mientras que el 33 % lo hicieron de manera parcial. En cambio, en el grupo de control, el 40 % de los estudiantes desarrollaron parcialmente esta habilidad, y el 60 % restante no pudieron aplicar ningún conocimiento previo para resolver el problema presentado.

Tabla 4-31: ¿Redactó las respuestas del problema?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Completamente	6	100 %	0	0 %
Parcialmente	0	0 %	1	20 %
No redactó	0	0 %	4	80 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

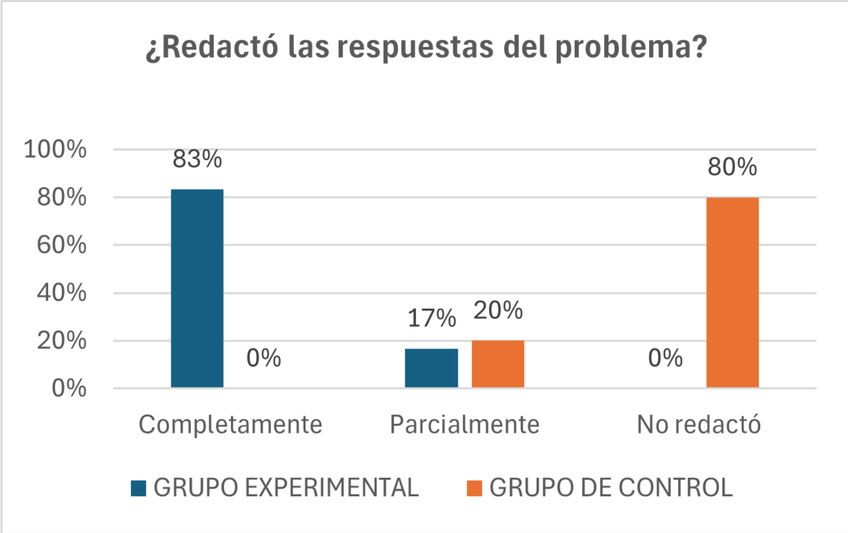

Ilustración 4-27: Post-test Habilidad para comunicar resultados obtenidos

Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación

En la **Ilustración 4-27**, se observa que en el grupo experimental, el 83 % de los estudiantes lograron desarrollar completamente la habilidad de redactar los resultados obtenidos, mientras que el 17 % restante lo hicieron de manera parcial. En cambio, en el grupo de control, solo el 20 % de los estudiantes desarrollaron parcialmente esta habilidad, y el 80 % restante no pudieron redactar de manera clara las respuestas obtenidas.

Tabla 4-32: ¿Realizó la revisión de las respuestas?

	GRUPO EXPERIMENTAL		**GRUPO DE CONTROL**	
Variable	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
En su totalidad	4	67 %	0	0 %
Parcialmente	2	33 %	0	0 %
No verificó	0	0 %	5	100 %
Total	**6**	**100 %**	**5**	**100 %**

Realizado por: Yaucán N., 2024.

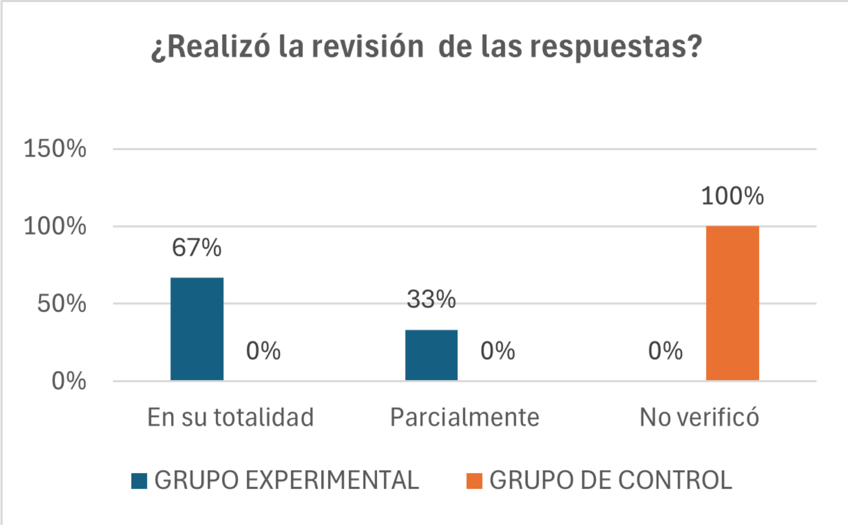

Ilustración 4-28: Post-test de la habilidad para verificar los resultados
Realizado por: Yaucán N., 2024.

Análisis e interpretación
En la **Ilustración 4-28**, se observa que en el grupo experimental, el 67 % de los estudiantes lograron desarrollar completamente la habilidad para verificar los resultados obtenidos, mientras que el 33 % restante lo hicieron de manera parcial. En cambio, en el grupo de control, el 100 % de los estudiantes no adquirieron ninguna habilidad para verificar los resultados obtenidos.

4.2. Discusión

Los resultados del pre-test muestran que tanto el grupo experimental como el grupo de control tenían habilidades de resolución de problemas similares en la Matemática Aplicada. Esta similitud inicial constituyó un factor crucial para garantizar la comparabilidad entre ambos conjuntos, mitigando cualquier sesgo potencial en esta investigación. En su mayoría, los estudiantes no tenían una comprensión parcial ni completa del problema, lo que indicaba un nivel de aprendizaje por debajo de los 6 puntos. Además estas similitudes nos permitieron evaluar de manera equitativa el impacto de la intervención planificada, destacando la importancia de la implementación de esta estrategia dirigida a mejorar la comprensión y las habilidades matemáticas en la resolución de problemas.

Los análisis estadísticos nos muestran que el grupo experimental que recibió la implementación de la guía con el método de Pólya, tienen una relación significativa entre la variable independiente, métodos de enseñanza en la resolución de problemas y la variable dependiente, habilidades matemáticas en la resolución de problemas. Estos resultados indican que los estudiantes que forman parte de este grupo experimentaron un desarrollo notable en sus habilidades matemáticas y nivel de aprendizaje en la resolución de problemas que implican ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. Por tanto, se puede afirmar que la guía desempeñó un papel significativo en la mejora de estos aspectos para el grupo experimental. Mientras tanto, el grupo de control, al cual no se le implementó la guía, mantuvo las mismas habilidades que al inicio del estudio.

La guía con el método de Pólya ayudó a mejorar las habilidades como; comprender le problema, utilizar el modelo matemático adecuado, elegir la estrategia adecuada, aplicar conocimientos previos, comunicar resultados y verificar los resultados obtenidos.

Después de la implementación de la guía basada en el método de Pólya, se observó un aumento en el promedio de calificaciones de los estudiantes pertenecientes al grupo experimental, alcanzando una media de 8,17 puntos. En cambio, en el grupo de control mantuvo un promedio de 5,36 puntos. Este incremento significativo en el rendimiento promedio del grupo experimental muestra la eficacia de la intervención, resaltando cómo la aplicación del método de Pólya ha contribuido de manera significativa al avance académico de los estudiantes en comparación al grupo de control, quienes no recibieron la implementación de esta estrategia.

4.3. Comprobación de la hipótesis

A continuación, se realizará paso a paso la comprobación de la hipótesis. Se empieza planteando la hipótesis nula y la alterna.

- H_0: La aplicación del Método de Pólya como método en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, no mejora las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias, para los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

- H_1: La aplicación del Método de Pólya como método en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, mejora las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias, para los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

El nivel de significancia a considerado es $\alpha = 0.05$

Para la verificación de la hipótesis utilizaremos la prueba de Shapiro-Wilks, en el cual se considera los siguientes criterios:
Si el valor de $p < \alpha$ rechazamos la H_0 y se acepta la H_1.
Si el valor de $p > \alpha$ aceptamos la H_0 y se rechaza la H_1.

Cálculo estadístico en RStudio

Prueba de rangos con signos de Wilcoxon

Tabla 4-33: Hipótesis

Prueba Estadística	
W	0.95008
p valor	0.0105

Realizado por: Yaucán N., 2024.

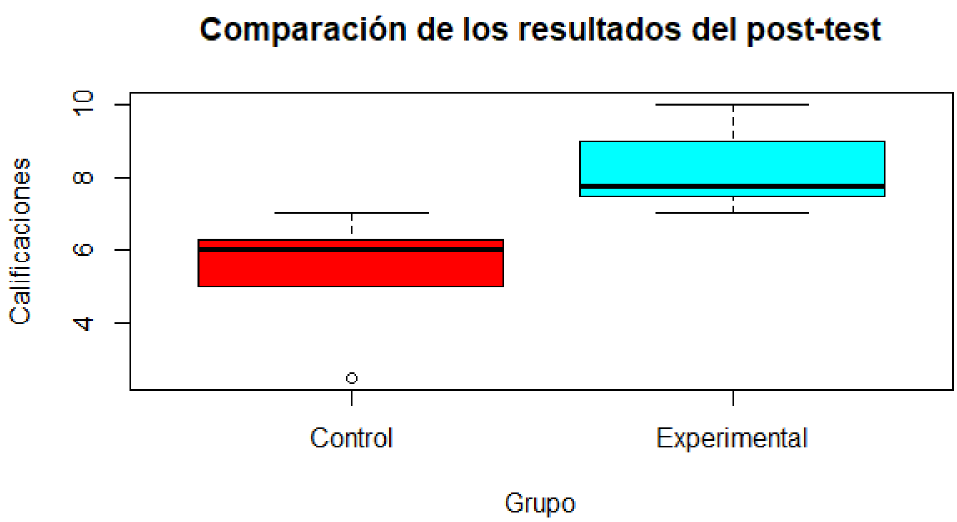

Ilustración 4-29: Prueba de hipótesis en RStudio

Realizado por: Yaucán N., 2024.

En la **Ilustración 4-29**, el resultado del ANOVA es significativo; es decir, hay diferencia entre los promedios de las muestras del grupo experimental y de control.

Además, en la **Tabla 4-33** se observa que el valor p es menor que la significancia, es decir

$$p = 0.0105 < 0.05 = \alpha,$$

por tanto, se rechaza la hipótesis nula (H_o) y se acepta la alterna (H_1).

Se concluye que la aplicación de la guía basado en el método de Pólya en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales en la Matemática Aplicada si mejoró las habilidades matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes.

Al tener los siguiente resultados, se puede decir que la hipótesis planteada de la siguiente manera, “La aplicación del Método de Pólya como estrategia en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, permitirá mejorar las habilidades matemáticas en la resolución de problemas, con ecuaciones diferenciales ordinarias, para los estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Matemática de la ESPOCH”, queda comprobada y es válida, ya que la mayoría de los estudiantes que recibieron esta intervención experimentaron un aumento significativo en sus habilidades matemáticas para enfrentar problemas, mostrando una mejora en sus niveles de aprendizaje, con calificaciones superiores a los 7 puntos. Estos resultados demuestran la eficacia de la guía, en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

- Se comprobó que los estudiantes poseían un bajo nivel de conocimientos y habilidades con respecto a la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada durante la aplicación del pre-test al grupo experimental y al grupo de control.

- Se elaboró una guía con el método de Pólya que funcionó como una herramienta pedagógica fundamental para llevar a cabo la implementación de esta guía para los estudiantes del grupo experimental.

- Se llevó a cabo la implementación exitosa de una guía basada en el Método de Pólya, enfocada en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de la Matemática Aplicada. Esta guía fue aplicada de manera efectiva al grupo experimental a través de talleres áulicos, demostrando así su utilidad y eficacia como herramienta pedagógica para mejorar las habilidades en la resolución de problemas en este campo específico.

- Después de llevar a cabo los análisis correspondientes sobre las habilidades desarrolladas por los estudiantes del grupo de control en la resolución de problemas, se concluye que la guía utilizada ha tenido un impacto positivo. Mientras tanto, los estudiantes del grupo de control al que no se les implementó la guía continuaron teniendo las mismas habilidades que poseían al inicio del estudio.

- Finalmente, la evaluación de la guía basada en el método de Pólya como estrategia para mejorar las habilidades matemáticas en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias en Matemática Aplicada, implementada a los estudiantes, ha proporcionado valiosas percepciones sobre su eficacia. Los resultados indican un impacto positivo en el desarrollo de habilidades y conocimientos matemáticos entre los estudiantes participantes. Este enfoque se presenta como una herramienta para fortalecer las capacidades analíticas y la comprensión profunda de los conceptos, ofreciendo oportunidades significativas para la mejora continua en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el ámbito de la Matemática Aplicada.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda hacer uso de la guía basada en el método de Pólya como un material complementario para los estudiantes matriculados en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Esta guía abarca una variedad de problemas que hacen el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias, proporcionando así una herramienta efectiva para fortalecer la comprensión y aplicación de los conceptos aprendidos en el curso.

Se recomienda incrementar la cantidad de problemas con un nivel de dificultad más elevado en las tareas asignadas, así ofreciendo a los estudiantes oportunidades continuas para aplicar y perfeccionar sus habilidades de resolución de problemas.

Se recomienda a los lectores que estén interesados en la guía, tener conocimientos previos de los topicos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

BIBLIOGRAFÍA

1. ABANTO, César; et al. *Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la transformada de Laplace* [en línea]. Guayaquil-Ecuador: Savez Editorial, 2022. [Consulta: 4 enero 2024]. Disponible en: https://savezeditorial.com/index.php/savez/article/view/127

2. ALVARES DE NIEVES, Angela Vilma. Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil [en línea]. (Trabajo de titulación). (Maestría) Universidad César Vallejo, Facultad de Derecho y Humanidades. Chiclayo-Perú. 2018. págs 13-140. [Consulta: 2023-07-11]. Disponible en: https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/32464

3. BIANCO, José; et al. "Modelo epidemiológico SIR: Una aplicación de las ecuaciones diferenciales al SARS-CoV-2 (COVID-19)". *Revista de Investigación en Modelos Matemáticos aplicados a la Gestión y la Economía* [en línea], 2020, (Argentina), vol. 7 (1), págs. 16-38. [Consulta: 8 enero 2024]. ISSN 2362 3225. Disponible en: https://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/04/Gache-Andrea-.pdf

4. CAISAGUANO, Paulo. "Guía didáctica para potenciar la conciencia fonológica en el aprendizaje de la lectoescritura en el segundo grado de Educación General Básica de la unidad educativa Archidona". *Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma* [en línea], 2020, (Cuba), vol. 16 (1), págs. 122-131. [Consulta: 31 diciembre 2023]. ISSN 2074-0735. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7414316

5. CASTRILLO, Jerry. "Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en física utilizando tecnología". *Revista Torreón Universitario* [en línea], 2022, (Nicaragua), vol. 11 (31), pág. 7. [Consulta: 27 diciembre 2023]. ISSN 2410-5708. Disponible en: https://www.camjol.info/index.php/torreon/article/view/14223

6. CEPEDA, Lidia; et al. "Aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para la solución de problemas físicos". *Dominio de las Ciencias* [en línea], 2023, (Ecuador), vol. 9 (3), págs. 336-355. [Consulta: 8 enero 2024]. ISSN 2477-8818. Disponible en: https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/3446

7. CUELLO, et al. "Método de Pólya: Una alternativa en la resolución de problemas matemáticos". *Revista de investigación interdisciplinar en biodiversidad y desarrollo sostenible, ciencia, tecnología e innovación y procesos productivos industriales* [en línea], 2021, (Colombia), vol. 8 (2), pág. 8. [Consulta: 27 diciembre 2023]. ISSN 2389-9484. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8742480

8. GAMARRA, Guillermo. & PUJAY, Oscar. "Resolución de problemas, habilidades y rendimiento académico en la enseñanza de la matemática". *Revista Educación* [en línea], 2021, (Costa Rica), vol. 45 (1), págs. 176-189. [Consulta: 31 diciembre 2023]. ISSN 2215-2644. Disponible en: https://www.scielo.sa.cr/pdf/edu/v45n1/2215-2644-edu-45-01-00170.pdf

9. GLEASON, Miriam. & RUBIO, Julio. "Implementación del aprendizaje experiencial en la universidad, sus beneficios en el alumnado y el rol docente". *Revista Educación* [en línea], (2020), (Costa Rica), vol. 44 (2), págs. 264–282. [Consulta: 3 enero 2024]. ISSN 2215-2644. Disponible en: https://doi.org/10.15517/revedu.v44i2.40197

10. GUTIÉRREZ, Milton; et al. *Inteligencias múltiples de Gardner aplicadas en el sistema de educación superior* [en línea]. Lima Peru: Mar Caribe, 2023 . [Consulta: 4 enero 2024]. Disponible en: https://hcommons.org/deposits/item/hc:59429/

11. OLIVEROS, Darwing; et al. "Método de Pólya: Una alternativa en la resolución de problemas matemáticos". *Ciencia e Ingeniería: Revista de investigación interdisciplinar en biodiversidad y desarrollo sostenible, ciencia, tecnología e innovación y procesos productivos industriales* [en línea], 2021, (Colombia), vol. 8 (2), págs. 1-13. [Consulta: 3 enero 2024]. ISSN 2389-9484. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8742480

12. OVANDO, Ramiro. "Guía didáctica de lectura comprensiva". *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación* [En línea], 2020, (Bolivia), vol. 4 (16), págs. 605-612. [Consulta: 31 diciembre 2023]. ISSN 2616-7964. Disponible en: http://scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttextpid=s2616-79642020000400020

13. PINO, Carmen. & PEÑA, Reynaldo. "Resolución de problemas mediante la aplicación del método de Pólya en la carrera de Administración". *MEMORIAS SUCRE REVIEW* [en línea], 2022, (Ecuador), vol. 2 (1), pág. 66. [Consulta: 27 de diciembre 2023]. Disponible en: https://ojs.estudiantesucre.edu.ec/index.php/memorias_sucre_review/article/view/86

14. QUIÑONES, Augusto. & HUIMAN, Hugo. "Resolución de problemas con el método matemático de Pólya: La aventura de aprender". *Revista de Ciencias Sociales (Ve)* [en línea]. 2022, (Venezuela), vol. 28 (5), págs.75-86. [Consulta: 3 enero 2024]. ISSN 1315-9518. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28071845006

15. RODRÍGUEZ, Luis. "Estilos de aprendizaje basados en la teoría de Kolb predominantes en los universitarios". *Revista Científica Internacional* [en línea], 2020, (Guatemala), vol. 3 (1), págs. 81-88. [Consulta: 3 enero de 2024]. ISSN 2708-8103. Disponible en: https://revista-cientifica-internacional.org/index.php/revista/article/view/22

16. ROSS, Shepley. *Ecuaciones diferenciales* [en línea]. 2^a ed. Barcelona-España: Reverté, 2021. [Consulta: 4 enero 2024]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=wOAbEAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

17. SALCEDO, Medalit. & PREZ, Mateo. "Relación entre inteligencia emocional y habilidades matemáticas en estudiantes de secundaria". *Mendive. Revista de Educación* [en línea], 2020, (Cuba), vol. 18 (3), págs. 618-628. [Consulta: 31 diciembre 2023]. ISSN 1815-7696. Disponible en: http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1815-76962020000300618script=sci_arttext

18. SALVADOR, Amado. *Ejemplario: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* UNAM, Facultad de Química, 2023. [Consulta: 4 enero 2024]. Disponible en: https://www.libros.unam.mx/ejemplario-ecuaciones-diferenciales-ordinarias-9786070251580-libro.html

19. SÁNCHEZ, Marco; et al. "Las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la economía". *E-IDEA Journal of Business Sciences* [en línea], (Ecuador), 2020, vol. 2 (4), págs. 1-7. [Consulta: 8 enero 2024]. ISSN 2600-5913. Disponible en: https://revista.estudioidea.org/ojs/index.php/eidea/article/view/17

20. TOCTO, Paul; et al. "Aplicación de las Tecnologías de Información en el Desarrollo del Curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias". *INDUSTRIA, SOCIEDAD Y SISTEMAS* [en línea], 2021, (Perú), vol. 1. págs. 28-33. [Consulta: 8 enero 2024]. ISSN 2309-0413. Disponible en: https://riunet.upv.es/handle/10251/152201

21. TRIANA, Claudia. & PARRA, Jhon. "Estudio cualitativo del aprendizaje experiencial para equipos de trabajo organizacional". *Revista de Ciencias Sociales (Ve)* [en línea], 2020, (Venezuela), vol. 26 (3), págs. 71-82. [Consulta: 3 enero 2024]. ISSN 1315-9518. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28063519003

ANEXOS

ANEXO A: EVALUACIÓN INICIAL (PRE-TEST)

Indicación: Contestar las preguntas y resolver de manera ordenada y detallada, el sigueinte problema propuesto, acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la Matemática Aplicada.

Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de $70°$**F, al exterior, en donde la temperatura es de** $10°$**F. Después de 12 minutos el termómetro marca** $50°$**F.**

a. ¿Cuánto marca el termómetro, cuando $t = 1$ minuto?

b. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar 15°F?

Para resolver el siguiente problema conteste las preguntas:

1. ¿Cuál es la variable independiente?
2. ¿Cuál es la variable dependiente?
3. ¿Cuál es la condición inicial?
4. ¿Cuál es el modelo matemático?
5. ¿Cómo se resuelve esta EDO?
6. Resolver la ecuación diferencial ordinaria (Detallar todo el proceso)
7. ¿Cuáles son las respuestas del problema?
8. ¿La solución satisface la condición inicial?

ANEXO B: EVALUACIÓN FINAL (POST-TEST)

Indicación: Contestar las preguntas y resolver de manera ordenada y detallada, el sigueinte problema propuesto, acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la Matemática Aplicada.

Si $P(t)$ es la cantidad de dinero en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual de $r\%$ compuesto continuamente. Suponga que el interés es de 5 % anual, $P(0) = \$1000$ **y que no hay retiros.**

a. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 años?

b. ¿En qué momento tendrá la cuenta $4000?

Para resolver el siguiente problema conteste las preguntas:

1. ¿Cuál es la variable independiente?
2. ¿Cuál es la variable dependiente?
3. ¿Cuál es la condición inicial?
4. ¿Cuál es el modelo matemático?
5. ¿Cómo se resuelve esta EDO?
6. Resolver la ecuación diferencial ordinaria (Detallar todo el proceso)
7. ¿Cuáles son las respuestas del problema?
8. ¿La solución satisface la condición inicial?

ANEXO C: ENLACES DE CLASES REALIZADAS POR MICROSOFT TEAMS

Miércoles 29 de noviembre de 2023

Presentación del método de George Pólya como estrategia en la resolución de problemas.
https://liveespochedu-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/nelson_yaucan_espoch_edu_ec/EbT1UdDAWP5FrCqa5ocRWfkBLiJBheZmLls8kpDWzFkyOA?nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=Evw0KG

Jueves 30 de noviembre de 2023

Resolución de EDOs mediante el método de Pólya aplicado a la Química.
https://liveespochedu-my.sharepoint.com/:v:/r/personal/nelson_yaucan_espoch_edu_ec/Documents/CLASE%202.mp4?csf=1&web=1&nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=3sOrbZ

Miércoles 6 de diciembre de 2023

Resolución de EDOs mediante el método de Pólya a la Biología.
https://liveespochedu-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/nelson_yaucan_espoch_edu_ec/ESTwC3jLtO5MjuWt_P0mAoUBgAfPhAMF2QUX3EGVo8C32w?nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=pjByhi

Jueves 7 de diciembre de 2023

Resolución de EDOs mediante el método de Pólya aplicado a la Economía.

https://liveespochedu-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/nelson_yaucan_espoch_edu_ec/ESk_mh3BnOtImwbkTrXdMPABCQL8-Ztd79D8HoRXVwXi2g?nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=VljNbi

Lunes 11 de diciembre de 2023

Recuperación (método de Pólya Aplicado a Física y a Química)

https://liveespochedu-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/nelson_yaucan_espoch_edu_ec/ET0l43ldIt9IlnBwCd4gV3gB0vVTAJpgIFY-xoFXl0ivEA?nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=yq45Ls

ANEXO D: GUÍA BASADO EN EL MÉTODO DE PÓLYA

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATEGIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CON ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN LA MATEMÁTICA APLICADA

AUTOR:

NELSON EFRAIN YAUCAN LATA

Riobamba – Ecuador

2024

Contenidos

Prefacio

En nuestro guía de estudio, nos embarcaremos en un apasionante viaje a través de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en otras ciencias, mediante la resolución de problemas prácticos, con el método de resolución de problemas de George Pólya.
En esta exploración de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, examinaremos cómo estas ecuaciones se utilizan, para resolver una variedad de problemas prácticos, mediante el método de resolución de problemas de George Pólya. Veremos cómo se aplican en la cinética química, para estudiar las reacciones químicas. Exploraremos su uso en la dinámica de poblaciones, ayudándonos a comprender, la evolución y la interacción de las especies en un ecosistema. Además, veremos cómo las ecuaciones diferenciales son esenciales en la mecánica de fluidos, permitiéndonos analizar y predecir el flujo de líquidos y gases en diversos sistemas. También examinaremos su aplicación en el estudio de circuitos eléctricos y electrónicos, donde las ecuaciones diferenciales nos permiten comprender cómo se comportan las corrientes y las tensiones en estos sistemas.
Así que, adéntrate en las páginas de este libro y prepárate para desvelar los secretos y maravillas que las ecuaciones diferenciales nos revelan en las diferentes ciencias.

¡Bienvenido a un mundo de aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en otras ciencias!

El autor

1

Método de Pólya como estrategia en la resolución de problemas

1.1 Método de George Pólya

El método de Pólya ha sido ampliamente utilizado en la educación Matemática, debido a que proporciona una estructura clara para resolver problemas. Su enfoque se ha extendido más allá de las matemáticas y se aplica en diversos campos donde la resolución de problemas es fundamental [5].

El método de resolución de problemas propuesto por George Pólya, ha sido una herramienta influyente en la resolución de problemas y más allá, fue un matemático prolífico y destacado que realizó importantes contribuciones a diversas áreas de las matemáticas, incluyendo su interés en la enseñanza de las matemáticas y en cómo los estudiantes podían aprender a resolver problemas de manera efectiva. El método se desarrolló a lo largo de la vida y la carrera de Pólya, quien nació el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría, y falleció el 7 de septiembre de 1985 en Palo Alto, California [2].

El método de resolución de problemas de George Pólya se desarrolló principalmente para problemas matemáticos en general, sus principios y pasos pueden adaptarse para abordar ecuaciones diferenciales ordinarias de manera sistemática y efectiva. A continuación, se describe cómo se puede aplicar el método de Pólya a la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

1. **Comprender el problema**.- En este paso, es fundamental comprender completamente la Ecuación Diferencial Ordinaria y su contexto. Se deben

identificar las variables involucradas, el orden de la ecuación, las condiciones iniciales o de contorno, y cualquier otra información relevante. También es importante determinar qué tipo de ecuación diferencial ordinaria se tiene: lineal, no lineal.

2. **Planificar una estrategia**.- En esta etapa, se deben explorar diferentes enfoques para resolver la ecuación diferencial. Pueden aplicarse técnicas específicas según el tipo de ecuación, como separación de variables, sustituciones, transformadas integrales, métodos de series o métodos numéricos. Es importante considerar las características de la ecuación y elegir la estrategia más adecuada.

3. **Ejecutar el plan**.- Una vez que se ha seleccionado una estrategia, se debe llevar a cabo de manera sistemática y precisa. Se deben seguir los pasos correspondientes a la técnica elegida y aplicar las transformaciones necesarias para simplificar la ecuación diferencial ordninaria. Esto puede implicar integrar, derivar, resolver sistemas de ecuaciones o aplicar métodos numéricos, según sea necesario.

4. **Mirar hacia atrás**.- En este último paso, se debe revisar la solución obtenida y verificar su validez. Es fundamental comprobar si la solución satisface las condiciones iniciales o de contorno establecidas en el problema. Además, se puede analizar si existen otras soluciones posibles o si se pueden realizar aproximaciones o simplificaciones adicionales.

2

EDO en la Matemática Aplicada

En este cápitulo aplicaremos el método de Pólya para la resolución de problemas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, estas ecuaciones son una herramienta fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos y su aplicación se extiende a una amplia gama de campos científicos y de ingeniería, los cuales proporcionan una base matemática sólida para describir, modelar y predecir el cambio y la variación en diversos fenómenos, brindando una comprensión más profunda del mundo que nos rodea.

2.1 Aplicaciones en Física

Las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales constituyen los medios matemáticos para estudiar la dinámica de los sistemas físicos. Es decir dichas ecuaciones pueden ser analizadas y resueltas analíticamente por métodos clásicos.

2.1.1 Ley de enfriamiento de Newton

Problema de aplicación 2.1

Ejemplo 1. Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de 70°F, al exterior, en donde la temperatura es de 10°F. Después de 12 minutos el termómetro marca 50°F.

a. ¿Cuánto marca el termómetro, cuando $t = 1$ minuto?

b. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar 15°F?

Solución.

1. **Comprender el problema**

   - ¿Cuáles son las incógnitas?
     Determinar cuantos grados Fahrenheit marca el termometro en $t = 1$ y el tiempo t cuando el termómetro marca 15°F.
   - ¿Cuáles son las variables?
     $t =$ tiempo en minutos.
     $y =$ temperatura del termómetro.
     $k =$ constante de proporcionalidad.
     $y =$ la variable dependiente del tiempo t.
   - ¿Cuáles son los datos?
     La ecuación diferencial a utilizar es
     $$\frac{dt}{dy} = k(y - y_1). \tag{2.1}$$
     Además, se tiene las condiciones iniciales
     $y(0) = 70°F$, $y_1 = 10°F$ y $y(\frac{1}{2}) = 50°F$.

2. **Planificar una estrategia**
   Para resolver el problema, debemos seguir los siguientes pasos:

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante variables separables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar $t = 1$ para encontrar la primera incógnita.
   - Reemplazar y_1 para encontrar la segunda incógnita.

3. **Ejecutar el plan**
   Tenemos
   $$\frac{dt}{dy} = k(y - y_1).$$

Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{(y-y_1)} &= kdt\\ \int \frac{dy}{(y-y_1)} &= \int kdt\\ ln(y-y_1) &= kt+C\\ e^{ln(y-y_1)} &= e^{kt+C}\\ y-y_1 &= Ce^{kt}\\ y &= Ce^{kt}+y_1\end{aligned}$$

Reemplazamos las condiciones iniciales $y(0) = 70°F$, $y_1 = 10°F$ en la ecuación general

$$\begin{aligned}70 &= Ce^{k(0)}+10\\ C &= 60\end{aligned}$$

Sustituyendo C y y_1 en la ecuación se tiene

$$y = 60e^{kt}+10 \tag{2.2}$$

Luego como $y(\frac{1}{2}) = 50°F$ si solo $y = 50$ y $t = \frac{1}{2}$ Reemplazando se tiene

$$\begin{aligned}50 &= 60e^{k\frac{1}{2}}+10\\ \frac{2}{3} &= e^{k\frac{1}{2}}\\ k &= 2ln\left(\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Reemplazamos k y $t = 1$ en la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}y &= 60\left(\frac{2}{3}\right)^{2(1)}+10\\ y &= 60\left(\frac{4}{9}\right)+10\\ y &= \frac{110}{3}\end{aligned}$$

Por tanto el termómetro cuando $t = 1$ minuto marcará $36,66°F$

Encontremos la segunda incógnita, donde $y = 15$.

$$15 = 60\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + 10$$
$$\frac{1}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}$$
$$ln\left(\frac{1}{12}\right) = ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}\right)$$
$$ln\left(\frac{1}{12}\right) = 2t \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$t = \frac{ln\left(\frac{1}{12}\right)}{2ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Por tanto, el termómetro alcanzará 15°F en 3,06 minutos.

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.1).

$$y = 60e^{kt} + y_1$$
$$\frac{dy}{dx} = k(y - y_1)$$
$$k60e^{kt} = k(60e^{kt} + y_1 - y_1)$$
$$k60e^{kt} = k60e^{kt}$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.1.2 Circuitos eléctricos

Problema de aplicación 2.2

Se aplica una fuerza electromotriz de $30V$ a un circuito en serie LR con 0.1 henrys de inductancia y 50 ohms de resistencia.

a. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$.

b. Determine la corriente conforme $t \to \infty$

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de ley de mallas de kirchoff al circuito.

   $$L\frac{di}{dt} + iR = E(t). \tag{2.3}$$

   Además, tenemos la condición inicial $i(0) = 0$, y la incógnita a determinar es $i(t)$ cuando $t \to 0$.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Reemplzar las constantes en la LR y E
   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante factor integrante.
   - Sustituir la condición inicial.
   - Encontrar el valor de la constante C y remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar C en la ecuación general, para encontrar la primera incógnita.
   - Aplicar el límite cuando $t \to 0$ en $i(t)$ para encontrar la segunda incógnita.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos

   $$L\frac{di}{dt} + iR = E(t)$$
   $$0.1\frac{di}{dt} + 50i = 30 \tag{2.4}$$

   Utilizaremos el método de factor integrante.

   $$\frac{di}{dt} + 500 = 300. \tag{2.5}$$

   A partir de la forma estandar de la ecuación (2.5) se obtiene el factor integrante.

   $$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int 500dt} \\ e^{\int P(x)dx} &= e^{500t} \end{aligned}$$

   La solución es de la forma

   $$y = y_c + y_p \quad \Rightarrow \quad i(t) = itr(t) + ips(t)$$

Encontremos $itr(t)$ y $ips(t)$

$$
\begin{aligned}
y_c = Ce^{-\int P(x)dx} \quad &\Rightarrow \quad itr(t) = Ce^{-\int 500dt} \\
&\Rightarrow \quad itr(t) = Ce^{-500t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_p = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}} \int e^{\int P(x)dx} f(t)dx \quad &\Rightarrow \quad ips(t) = \frac{1}{e^{500t}} \int e^{500t} \cdot 300dt \\
&\Rightarrow \quad ips(t) = \frac{300}{e^{500t}} \int e^{500t} dt \\
&\Rightarrow \quad ips(t) = \frac{300}{500 \cdot e^{500t}} \quad {}^{500t} \cdot 500dt \\
&\Rightarrow \quad ips(t) = \frac{3}{5} \cdot e^{-500t} [e^{500t}] \\
&\Rightarrow \quad ips(t) = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Por tanto la corriente (total en el circuito), buscada es:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= itr(t) + ips(t) \\
i(t) &= Ce^{-500t} + \frac{3}{5} \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Reemplazamos la condición inicial $i(0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
i(t) &= Ce^{-500t} + \frac{3}{5} \\
0 &= Ce^{-500(0)} + \frac{3}{5} \\
0 &= C(1) + \frac{3}{5} \\
0 &= C + \frac{3}{5} \\
C &= -\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la corriente $i(t)$ es:

$$
i(t) = -\frac{3}{5} e^{-500t} + \frac{3}{5}
$$

Por último si $t \to \infty$, se tiene

$$
i(t) = \frac{3}{5}
$$

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación general y obtener la igualdad. Tenemos la solución

$$
\begin{aligned}
i(t) &= -\frac{3}{5}e^{-500t} + \frac{3}{5} \\
0.1(300)e^{-500t} + 50i &= 30 \\
30e^{-500t} + 50\left(-\frac{3}{5}e^{-500t} + \frac{3}{5}\right) &= 30 \\
30e^{-500t} + \left(-30e^{-500t} + 30\right) &= 30 \\
30e^{-500t} - 30e^{-500t} + 30 &= 30 \\
30 &= 30
\end{aligned}
$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.1.3 Dinámica de fluidos

Problema de aplicación 2.3

Una solución de salmuera de sal fluye a razón constante de $6l$ mín . hacia el interior de un depósito que inicialmente contine sal de solución de salmuera, el cual se disolvio $5kg$ de sal. La solución contenida en el deposito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de la sal en la salmuera que entra en el depósito es de $0.5Kg$Ł. Determinar la cantidad de sal presente en el depósito al cabo t minutos.

a. ¿ Cuándo alcanzará la consentración de sal en el depósito el valor de $0.3Kg/L$?

Solución. Consideremos los siguientes pasos, para resolver el problema, mediante el método de resolución de problemas George Pólya.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de dinámica de fluidos.

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{75 - 3x}{25}. \tag{2.7}
$$

Además, se tiene la siguiente condición inicial $x(0) = 5$, y la incógnita es determinar, el tiempo que alcanzará la consentración de sal en el depósito.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante variables separables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y debemos remplazar en la ecuación general.
   - Encontrar el tiempo t.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos
   $$\frac{dx}{dt} = \frac{75-3x}{25}$$
   Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.
   $$\begin{aligned} \frac{dx}{(75-3x)} &= \frac{dt}{25} \\ \int \frac{dx}{(75-3x)} &= \int \frac{dt}{25} \\ -\frac{1}{3} ln(75-3x) &= \frac{t}{25} + c \\ ln(75-3x) &= -\frac{3t}{25} + c \\ 75 - 3x &= Ce^{-\frac{3t}{25}} \\ x(t) &= 25 + Ce^{-\frac{3t}{25}} \end{aligned}$$
   Reemplazamos en la siguiente condición inicial $x(0) = 5$, en la ecuación general.
   $$5 = 25 + C$$
   $$C = -20$$
   entonces
   $$x(t) = 25 - 20e^{-\frac{3t}{25}}$$

Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{x(t)}{50} \\
0 &= \frac{25 - 20e^{-\frac{3t}{25}}}{50} \\
0 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{5}e^{-\frac{3t}{25}} \\
-\frac{1}{2} &= -\frac{2}{5}e^{-\frac{3t}{25}} \\
\frac{5}{4} &= e^{-\frac{3t}{25}} \\
ln\left(\frac{5}{4}\right) &= -\frac{3t}{25} \\
t &= \frac{25ln\left(\frac{5}{4}\right)}{3} \\
t &\approx 1,85
\end{aligned}
$$

La concentración de la sal en el depósito alcanzará en un tiempo $t \approx 1,85$.

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación general y obtener la igualdad. Tenemos la solución

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{75 - 3x}{25} \\
-20e^{-\frac{3}{25}t}\frac{-3}{5} &= \frac{75 - 3(25 - 20e^{-\frac{3}{25}t})}{25} \\
\frac{60}{25}e^{-\frac{3}{25}t} &= \frac{75 - 75 + 600e^{-\frac{3}{25}t})}{25} \\
\frac{60}{25}e^{-\frac{3}{25}t} &= \frac{60}{25}e^{-\frac{3}{25}t}
\end{aligned}
$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.2 Aplicaciones en Química

Estas ecuaciones proporcionan herramientas matemáticas para describir y analizar una variedad de fenómenos químicos, permitiendo comprender y predecir el comportamiento de las reacciones, las disoluciones y los sistemas químicos en general.

2.2.1 Cinética química

Problema de aplicación 2.4

Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia C. Inicialmente hay 40 *gramos* en A y 50 *gramos* en B, y se sabe que por cada gramo de B se necesita 2 *gramos* de A. Se observa que se forman 10 *gramos* de C en 5 minutos. ¿Cuánto se formará en 20 minutos?

Solución

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de cinética química.

   $$\frac{dx}{dt} = k[\alpha - a(t)][\beta - b(t)] \tag{2.8}$$

   Además, se tiene las siguiente condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x(5) = 10$, y la incógnita es, determinar la cantidad de gramos en 20 minutos .

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Encontrar los valores de $a(t)$ y $b(t)$, con las siguientes ecuaciones

   $$a(t) = \left(\frac{A}{A+B}\right)x(t) \tag{2.9}$$

   $$b(t) = \left(\frac{B}{A+B}\right)x(t) \tag{2.10}$$

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante variables separables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y debemos remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar la cantidad de C despúes de 20 min.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = k[\alpha - a(t)][\beta - b(t)]$$

   Empezemos encontrando $a(t)$ y $b(t)$ a partir de la ecuación (2.9) y (2.10).

$$a(t) = \frac{1}{3}x(t)$$
$$b(t) = \frac{2}{3}x(t)$$

   Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= k\left(40 - \frac{2x}{3}\right)\left(50 - \frac{x}{3}\right) \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{k}{9}(120 - 2x)(50 - x) \\
\frac{dx}{(120 - 2x)(50 - x)} &= \frac{k}{9}dt \\
\frac{1}{90(120 - 2x)} - \frac{1}{180(150 - x)} &= \frac{k}{9}dt \\
\int \frac{1}{90(120 - 2x)} - \frac{1}{180(150 - x)} &= \int \frac{k}{9}dt \\
\frac{1}{180}ln\left(\frac{150 - x}{120 - 2x}\right) &= \frac{k}{9}t + M \\
\frac{150 - x}{120 - 2x} &= Me^{20kt}
\end{aligned}$$

$$\frac{150 - x}{120 - 2x} = Me^{20kt} \tag{2.11}$$

   Reemplazamos en la siguiente condición inicial $x(0) = 0$, en la ecuación general (2.11).

$$\frac{150 - 0}{120 - 0} = Me^{20k(0)}$$
$$M = \frac{5}{4}$$

   entonces

$$\frac{150 - x}{120 - 2x} = \frac{5}{4}e^{20kt} \tag{2.12}$$

Encontrar k con la siguiente condición $x(5) = 10$ en (2.12).

$$
\begin{aligned}
\frac{150-10}{120-20} &= \frac{5}{4}e^{20(5)k} \\
\frac{140}{100} &= \frac{5}{4}e^{100k} \\
\frac{28}{25} &= e^{100k} \\
ln\left(\frac{28}{25}\right) &= 100k \\
k &= \frac{ln\left(\frac{28}{25}\right)}{100} \\
k &\approx 113X10^{-5}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
x(t) = 150\frac{1-e^{226X10^{-4}t}}{1-7.5e^{225X10^{-4}t}}
$$

Finalmente la cantidad de C que habra formado despúes de 20 minutos es

$$
\begin{aligned}
x(20) &= 150\frac{1-e^{226X10^{-4}(20)}}{1-7.5e^{225X10^{-4}(20)}} \\
x(20) &\approx 29.27\text{gr}
\end{aligned}
$$

Por lo cual se concluye que se forman $C \approx 29.27$gr en $t = 20$min.

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación general y obtener la igualdad.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= k(120-2x)(50-x) \\
\frac{dx}{dt} &= k\left(120-2\left(\frac{150(-1+e^{20kt})}{-1+7.5e^{20kt}}\right)\right)\left(50-\frac{150(-1+e^{20kt})}{-1+7.5e^{20kt}}\right) \\
-\frac{3000ke^{20kt}}{(1-7.5e^{20kt})^2} &= -\frac{3000ke^{20kt}}{(1-7.5e^{20kt})^2}
\end{aligned}
$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.2.2 Descomposición radiactiva

Problema de aplicación 2.5

Inicialmente había 100 *miligramos* de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas su masa disminuyó en un 3 %. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 *horas*.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Tenemos que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, por ende se tiene

$$\frac{dC}{dt} = kC. \tag{2.13}$$

   Las condiciones iniciales a utilizar es $C(0) = 100$ y$C(6) = 97$, y debemos determinar la cantidad de sustancia que queda despúes de $24h$.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Encontrar los *miligramos* cuando $t = 6$ y disminuye en un 3 %
   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante variables separables.
   - Sustituir las condiciones iniciales para encontrar A y k.
   - Determinar la cantidad de C para $t = 24$

3. **Ejecutar el plan**

   Inicialmente tenemos 100 mg de sustancia radiactiva. Si $C(t)$ denota la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t, sabemos que al cabo de $t = 6h$ quedan

$$C(6) = 100 - 3 = 97gr$$

Tenemos

$$\frac{dC}{dt} = kC \tag{2.14}$$

Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.

$$dc = kCdt$$
$$\int \frac{dC}{C} = \int kdt$$
$$ln(C) = kt$$
$$C = Ae^{kt}$$

Reemplazamos la condición inicial $C(0) = 100$

$$100 = Ae^{k(0)}$$
$$A = 100$$

Entonces

$$C(t) = 100e^{kt} \tag{2.15}$$

Determinemos k, sustituyendo $C(6) = 97gr$ en (2.15),

$$97 = 100e^{6k}$$
$$e^{6k} = \frac{97}{100}$$
$$k = \frac{ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}$$

En conclusión, la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t es

$$C(t) = 100e^{\frac{ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t} \tag{2.16}$$

Por tanto, la cantidad $C(t)$ transcurridas $24h$ es

$$C(t) = 100e^{\frac{ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t}$$
$$C(24) = 100e^{\frac{ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}(24)}$$
$$C(24) = 100e^{-0.12}$$
$$C(24) \approx 88.5\text{mg}.$$

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.14) y cumpla la igualdad.

$$\frac{dC}{dt} = kC$$
$$kAe^{kt} = kAe^{kt}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.2.3 Mezclas y disoluciones

Problema de aplicación 2.6

Un tanque está lleno de 100 *litros* de agua en los que se ha disuelto 20 *kilogramos* de sal. Otra mezcla que contiene 1 *kilogramo* de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 *litros* por *minuto*. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 *litros* por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Para el problema, debemos considerar la siguiente ecuación diferencial del modelo para mezclas y disoluciones.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{v_1}{V_0(v_1 - v_2)t} y = v_1 a \tag{2.17}$$

   Las condición inicial a utilizar es $A = y(0) = 20$ y$C(6) = 97$, y la incógnita a determinar es la función que da la cantidad de sal en cada instante.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Reemplazar A, V_o, v_1, v_2 y a

- Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante factor integrante.
- Sustituir las condición inicial $A = y(0) = 20$ para encontrar la función que da la cantidad de sal en cada instante.

3. **Ejecutar el plan**

A partir del enunciado tenemos lo siguiente $A = 20kg$, $a = 1kg/L$, $V_0 = 100L$, $v_1 = 7L/min$ y $v_2 = 8L/min$.

Remplazando en la ecuación (2.17) se tiene

$$\frac{dy}{dt} + \frac{8}{100(7-8)t}y = 7 \cdot 1$$

Utilizaremos factor integrante, para obtener la solución general.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{8}{100-t}y = 7$$
$$\frac{dy}{dt} + \frac{8}{100-t}y = 7$$

La ecuación anterior admite como factor integrante

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{8}{100-t}dt} &= e^{-8\int \frac{8}{100-t}dt} \\ &= e^{Ln(100-t)^{-8}} \\ &= \frac{1}{(100-t)^8} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{(100-t)^8}\right) + \frac{8}{100-t}y\left(\frac{1}{(100-t)^8}\right) &= 7\left(\frac{1}{(100-t)^8}\right) \\ \frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{(100-t)^8}\right) + \left(\frac{8}{(100-t)^9}\right)y &= \frac{7}{(100-t)^8} \\ \frac{d}{dt}[\frac{1}{(100-t)^8}y] &= \frac{7}{(100-t)^8} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \left(d[\frac{1}{(100-t)^8}y]\right) &= \int \frac{7}{(100-t)^8}dt \\ \frac{1}{(100-t)^8}y &= \frac{1}{(100-t)^7} + C \\ y(t) &= (100-t) + (100-t)^8C \\ y(t) &= (100-t) + (100-t)^8C \\ y(t) &= (100-t) + (100-t)^8C \end{aligned}$$

Para hallar C tenemos en cuenta que la concentración inicial es $A = 20$, es decir $y(0) = 20$,

$$20 = (100) + (100)^8 C$$

$$(100)^8 C = -80$$

Por tanto, la cantidad de sal presente en el tanque en cada instante es

$$y(t) = (100 - t) - 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^8$$

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.3 Aplicaciones en Biología

Estas ecuaciones proporcionan herramientas matemáticas para describir y analizar los fenómenos biológicos en función del tiempo y de las variables relevantes, permitiendo comprender y predecir el comportamiento de los sistemas biológicos.

2.3.1 Modelos de crecimiento y población

Problema de aplicación 2.7

La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial es de 500, aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Reconocemos que la ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de crecimiento de población.

$$\frac{dp}{dt} = kp. \tag{2.18}$$

   Además se tiene las condiciones, donde $t = 0$ y $p = 500$, y la incognita es determinar la población dentro de 30 años.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante separación de variables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y remplazar en la ecuación general.
   - Encontrar el valor de la constante k y remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar $t = 30$ para determinar la población.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

   Utilizaremos variables separables, para obtener la solución general.

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int kdt$$

$$ln(p) = kt + C$$

$$p = Ce^{kt} \tag{2.19}$$

   Sustituyendo $t = 0$ y $p = 500$ en la ecuación (2.19)

$$500 = Ce^{k(0)}$$

$$C = 500$$

   entonces

$$p = 500e^{kt} \tag{2.20}$$

   Sabemos que la población inicial es de 500 aumenta 15 % en 10 años, es decir

$$p(10) = 500 + \frac{15(500)}{100}$$

$$p(10) = 575$$

Observamos que $p(10) = 575$ se cumple sí y solo si $t = 10$ y $p = 575$

$$\begin{aligned} 575 &= 500e^{10k} \\ e^{10k} &= \frac{575}{500} \\ 10k &= ln\left(\frac{23}{20}\right) \\ k &= \frac{ln\left(\frac{23}{20}\right)}{10} \end{aligned}$$

Sustituimos k en la ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} p &= 500e^{\frac{ln\left(\frac{23}{20}\right)}{10}t} \\ p &= 500\left(\frac{23}{20}\right)^{\frac{t}{10}} \end{aligned}$$

Por último determinamos la población dentro de 30 años con $t = 30$.

$$\begin{aligned} p &= 500\left(\frac{23}{20}\right)^{\frac{30}{10}} \\ p &= 500\left(\frac{23}{20}\right)^{3} \\ p &\approx 760,43 \end{aligned}$$

Por tanto, la población dentro de 30 años es de 760 personas.

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.18) y obtener la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= kp \\ 500ke^{kt} &= k500e^{kt} \\ 500ke^{kt} &= 500ke^{kt} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.3.2 Crecimiento Biológico

Problema de aplicación 2.8

Un cultivo bacteriano experimenta un crecimiento biológico descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

,donde N es la población de bacterias en un momento dado y k es una constante de proporcionalidad positiva.

Si se sabe que en el momento inicial $t = 0$, la población de bacterias es $N(0) = 100$, y que después de 4 horas la población se ha duplicado, es decir, $N(4) = 200$, encuentra la solución a la ecuación diferencial y determina la población de bacterias después de 6 horas.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Reconocemos que la ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de crecimiento biológico.

   $$\frac{dN}{dt} = kN. \tag{2.21}$$

   Además se tiene las condiciones, donde $N(0) = 100$ y $N(4) = 200$, y la incognita es determinar la población de baterias después de 6 horas.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Resolver la ecuación diferencial y obtener la solución general, mediante separación de variables.
   - Sustituir las condiciones iniciales.
   - Encontrar el valor de la constante C y remplazar en la ecuación general.
   - Encontrar el valor de la constante k y remplazar en la ecuación general.
   - Reemplazar $t = 6h$ para determinar el crecimiento biológico.

3. **Ejecutar el plan**

Tenemos

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Utilizaremos variables separables, para obtener la solución.

$$\frac{dN}{dt} = kN$$
$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt$$
$$ln(N) = kt + C$$
$$N = Ce^{kt} \tag{2.22}$$

Sustituyendo $t = 0$ y $N = 100$ en la ecuación (2.22)

$$100 = Ce^{k(0)}$$
$$C = 100$$

entonces

$$N = 100e^{kt} \tag{2.23}$$

Sabemos que después de 4 horas la población se ha duplicado, $N(4) = 200$

$$N = 100e^{kt}$$
$$200 = 100e^{4k}$$
$$2 = e^{4k}$$
$$2 = e^{4k}$$
$$k = \frac{ln(2)}{4}$$

Sustituimos k en la ecuación (2.23)

$$N = 100e^{kt}$$
$$N = 100e^{\frac{ln(2)}{4}t}$$

Por último determinamos la población de bacterias después de 6 horas con $t = 6$.

$$N = 100e^{\frac{ln(2)}{4}6}$$
$$N = 100e^{1.03}$$
$$N \approx 280,10$$

Por tanto, la población de bacterias después de 6 horas, es de 280 bacterias.

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución estó correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.21) y obtener una igualdad

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= kN \\ 100ke^{kt} &= k100e^{kt} \\ 100ke^{kt} &= 100ke^{kt} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.3.3 Problema en Epidemiologia

Problema de aplicación 2.9

En una población de 5000 habitantes, diez de ellos tienen una enfermedad contagiosa. La velocidad a que se propoga la enfermedad es proporcional al producto de personas contagiadas por las no contagiadas todavía, con una constante de proporcionalidad 0.2. Determinar la ecuación diferencial correspondiente en cualquier instate.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de epidemologia.

$$\frac{dP}{dt} = kP(P_0 - P). \tag{2.24}$$

   La condición inicial $P(0) = 10$, y la incógnita es determinar la ecuación diferencial que describe la enfermedad contagiosa.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

- Reemplazar las condiciones en la ecuación diferencial, mediante separación de variables.
- Sustituir las condiciones iniciales $P(0) = 10$.
- Encontrar el valor de la constante C.
- Determinar la ecuación diferencial que describe la enfermedad contagiosa.

3. **Ejecutar el plan**

   Tenemos
$$\frac{dP}{dt} = 0.2P(5000 - P)$$
   Utilizaremos variables separables, para obtener la solución general.
$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= 0.2P(5000 - P) \\
\frac{dP}{P(5000 - P)} &= 0.2dt \\
\int \frac{dP}{P(5000 - P)} &= \int 0.2dt \\
\frac{1}{5000}((Ln((P) - Ln(5000 - P))) &= 0.2t + C \\
Ln((P) - Ln(5000 - P)) &= 5000 \cdot 0.2t + C \\
P(t) &= \frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t} + C}
\end{aligned}$$
   Determinemos C con $P(0) = 10$
$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t} + C} \\
10 &= \frac{5000e^{0}}{e^{0} + C} \\
10 &= \frac{5000}{1 + C} \\
1 + C &= 500 \\
C &= 499
\end{aligned}$$
   Por tanto, la ecuación diferencial que describe la enfermedad contagiosa es.
$$P(t) = \frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t} + 499}$$

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.24) y obtener una igualdad.

$$\frac{dP}{dt} = 0.2P(5000 - P)$$
$$\frac{dP}{dt} = 1000P - 0.2P^2$$
$$\frac{dP}{dt} = 1000\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right) - 0.2\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right)^2$$
$$1000\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right) - 0.2\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right)^2 = 1000\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right) - 0.2\left(\frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t}+499}\right)^2$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.3.4 Absorción de drogas en órganos

Problema de aplicación 2.10

La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de $3cm^3|seg$ y sale con la misma razón. El órgano tiene un volumen líquido de $125cm^3$. ¿Cuál debe ser la concentración del medicamento en la sangre que entra al órgano para que a los $29seg$ la concentración del medicamento en el órgano sea de $0.2grs|cm^3$; si inicialmente no había rastros de dicho medicamento?

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial para resolver el problema, es el modelo de abasorción de órganos.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{75 - 3x}{125} \tag{2.25}$$

   La condición inicial $P(0) = 10$, y la incógnita es determinar la ecuación diferencial que describe la enfermedad contagiosa.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

- Determinar la cantidad de medicamento que entra en el órgano.
- Determinar la ecuación diferencial, mediante separación de variables.
- Sustituir las condiciones iniciales $x(0) = 10$.
- Encontrar el valor de la constante C.
- Determinar la ecuación diferencial que describe la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante.

3. **Ejecutar el plan**

La cantidad de medicamento que entra en el órgano por segundo es:

$$0.2(3) = 0,6gramos$$

Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t se tendrá, puesto que la sangre abandona el órgano a la misma velocidad a la que entra $3cm^3|seg$, que la cantidad de medicamento que abandona el órgano por segundo será de

$$\frac{3x(t)}{125} = \frac{3}{125}x(t)$$

En consecuencia, puesto que la variación por unidad de tiempo de la cantidad de medicamento viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0.6 - \frac{3}{125}x(t) \\ &= \frac{75-3x}{125} \end{aligned}$$

Esta ecuación es de variables separables

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{75-3x}{125} \\ \frac{dx}{75-3x} &= \frac{1}{125}dt \\ \int \frac{dx}{75-3x} &= \int \frac{1}{125}dt \\ -\frac{1}{3}ln|75-3x| &= \frac{t}{125} + C \\ ln|75-3x| &= -\frac{3t}{125} + C \\ 75-3x &= Ce^{-\frac{3t}{125}} \\ x &= -Ce^{-\frac{3t}{125}} + 25 \end{aligned}$$

Puesto que, inicialmente, no había ninguna cantidad de medicamento en el órgano, la condición inicial para $x(0) = 0$, lo que conduce,

$$\begin{aligned} 0 &= -Ce^{-\frac{3(0)}{125}} + 25 \\ C &= 25 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función que nos da la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante es

$$x = -25e^{-\frac{3t}{125}} + 25$$

La concentración es la cantidad de medicamento dividido por el volumen del órgano, es decir

$$\begin{aligned} \frac{x}{125} &= -\frac{25e^{-\frac{3t}{125}}}{125} + \frac{25}{125} \\ &= -\frac{e^{-\frac{3t}{125}}}{5} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la contestación en el instante t es

$$-\frac{e^{-\frac{3t}{125}}}{5} + \frac{1}{5}$$

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación (2.25)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{75 - 3x}{125} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{75 - 3(-25e^{-\frac{3t}{125}} + 25)}{125} \\ \frac{75 - 3(-25e^{-\frac{3t}{125}} + 25)}{125} &= \frac{75 - 3(-25e^{-\frac{3t}{125}} + 25)}{125} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.4 Aplicaciones en Economía

Estas ecuaciones proporcionan herramientas matemáticas para modelar y analizar fenómenos económicos complejos, teniendo en cuenta su dinámica y la interacción entre múltiples variables econímicas.

2.4.1 Modelos de oferta y demanda

Problema de aplicación 2.11

La oferta y la demanda de un bien están dados en miles de unidades respectivamente por $S = 160 - 5p(t) - 3p'(t)$ y $D = 40 + 3(t) + p'(t)$. El precio del bien en $t = 0$, es $US\$20$.

a. Encontrar el precio en cualquier tiempo t.

b. Determinar si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Tenemos dos ecuaciones diferenciales de la modelación de oferta y demanda. La condición inicial es $p(0) = 20$. Además debemos encontrar una ecuación, que nos permita encontrar el precio en cualquier tiempo t y el precio de equilibrio.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Igualar las dos ecuacioones diferenciales $S = D$.
   - Determinar la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de factor integrante.
   - Sustituir la condición inicial $p(0) = 20$.

3. **Ejecutar el plan**

   De acuerdo con el principio económico de oferta y demanda, podemos tener lo siguiente $S = D$

$$
\begin{aligned}
160 - 5p(t) - 3p'(t) &= 40 + 3p(t) + p'(t) \\
120 - 8p(t) - 4p'(t) &= 0 \\
p'(t) + 2p(t) &= 30
\end{aligned}
$$

   Encontremos la solución de la ecuación diferencial.

   Por tanto, la ecuación que nos permita encontrar el precio en cualquier tiempo t

es

$$p(t) = Ce^{-2t} + 15 \tag{2.26}$$

Luego reemplazamos la condición inicial $p(0) = 20$ en (2.26)

$$p = Ce^{-2t} + 15$$
$$20 = Ce^{-2(0)} + 15$$
$$C = 5$$

entonces

$$p = 5e^{-2t} + 15$$

Se puede concluir que cuando $t \to \infty$ y en este caso se presenta estabilidad de precio, y el precio de equilibrio es $US\$15$.

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación (2.26) y verificar la igualdad.

$$\begin{aligned} p'(t) + 2p(t) &= 30 \\ -2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x} + 15) &= 30 \\ -2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} + 30 &= 30 \\ 30 &= 30 \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.4.2 Modelos de consumo e inversión

Problema de aplicación 2.12

Supongamos que queremos estudiar, el crecimiento económico de un país, utilizando el modelo de Harrod-Domar. Consideramos que no hay depreciación del capital y que la tasa de inversión es 0.2 unidades monetarias por año. Asuma que en el tiempo inicial $t = 0$ el producto interno bruto es igual a 200 unidades monetarias, y la propensión marginal a consumir es 0.8.

Determinar la ecuación del consumo en función del tiempo.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferecial a considerar en nuestro problema es

$$\frac{dC}{dt} = \alpha(I - C) \tag{2.27}$$

   La condición inicial es $I(0) = 200$. Además, $\alpha = 0.5$ $\rho = 0.2$.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver el problema consideremos el siguiente plan:

   - Reemplazar los datos del problema en la ecuación (2.27).
   - Determinar la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de factor integrante.
   - Sustituir la condición inicial $I(0) = 200$ en la solución general.
   - Obtener la ecuación del consumo en función del tiempo.

3. **Ejecutar el plan**

   Empecemos obteniendo el cálculo de inversión

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \rho I \\
\frac{dI}{dt} &= 0.2I \\
\int \frac{dI}{I} &= \int 0.2dt \\
ln(I) &= 0.2t \\
I &= I_0 e^{0.2t}
\end{aligned}$$

   Reemplazamos la condición inicial $I(0) = 200$

$$200 = I_0 e^{0.2(0)}$$

$$I_0 = 200$$

Entonces

$$I = 200e^{0.2t}$$

Obtengamos la ecuación del consumo en función del tiempo (

$$)\frac{dC}{dt} + \alpha C = \alpha I \tag{2.28}$$

Encontremos la solución general de la ecuación (2.28), mediante el método de factor integrante.

$$e^{\int C dt} = e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha t}$$

Multiplicamos $e^{\alpha t}$ a toda la ecuación (2.28)

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt}e^{\alpha t} + \alpha C e^{\alpha t} &= \alpha I e^{\alpha t}\\
\frac{dC}{dt}(\alpha e^{\alpha t}) &= \alpha I e^{\alpha t}\\
\int (Ce^{\alpha t})' &= \int \alpha I e^{\alpha t} dt\\
Ce^{\alpha t} &= Ie^{\alpha t} + C_0\\
C &= Ie^{\alpha t} + C_0 e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

Tenemos que la condición $C(0) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 200e^{0.2(0)}e^{\alpha(0)} + C_0 e^{-\alpha(0)}\\
C_0 &= -200
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del consumo en función de tiempo es

$$\begin{aligned}
C &= 200e^{0.2t}e^{0.5t} - 200e^{-0.5t}\\
C &= 200(e^{0.7t} - e^{-0.5t})
\end{aligned}$$

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es, reemplazar en la ecuación (2.28)

$$\frac{dC}{dt} + \alpha C = \alpha I$$

$$200e^{0.7t} + 100e^{-0.5t} + (100(-e^{0.7t} - e^{-0.5t})) = 0.5(200e^{0.2t})$$

$$200e^{0.2t}e^{0.5t} + 100e^{-0.5t} + (100(-e^{0.2t}e^{0.5t} - e^{-0.5t})) = 0.5(200e^{0.2t})$$

$$200e^{0.2t} + 100e^{-0.5t} - 100e^{0.2t} - 100e^{-0.5t} = 100e^{0.2t}$$

$$100e^{0.2t} = 100e^{0.2t}$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.4.3 Interés Compuesto

Problema de aplicación 2.13

Si $P(t)$ es la cantidad de dinero en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual de $r\,\%$ compuesto continuamente, entonces

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Suponga que el interés es de $5\,\%$ anual, $P(0) = \$1000$ y que no hay retiros.

a. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 años?

b. ¿En qué momento tendrá la cuenta \$4000?

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferecial a considerar en nuestro problema es

$$\frac{dP}{dt} = rP \tag{2.29}$$

   La condición inicial es $P(0) = 1000$. Además el interes a considerar es $r = 0.05$.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver el problema consideremos el siguiente plan:

   - Reemplazar los datos del problema en la ecuación (2.29).

- Determinar la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de separación de variables.
- Sustituir la condición inicial $P(0) = 1000$ en la solución general.
- Encontrar la cantidad de dinero, después de 2 años.
- Encontrar el tiempo cuando genere \$4000.

3. **Ejecutar el plan**

Obtengamos la solucíon genral de la ecuación (2.29)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \\ \frac{dP}{dt} &= 0.05P \\ \int \frac{dP}{P} &= \int 0.05dt \\ ln(P) &= 0.05t \\ P &= P_0 e^{0.05t} \end{aligned}$$

Reemplazamos la condición inicial $P(0) = 1000$

$$1000 = I_0 e^{0.05(0)}$$

$$P_0 = 1000$$

Entonces

$$P = 1000e^{0.05t}$$

El dinero que tendrá la cuenta, después de 2 años es

$$P = 1000e^{0.05t}$$

$$P = 1000e^{0.05(2)}$$

$$P = 1000e^{0.1}$$

$$P \approx \$1105, 17$$

El tiempo en el que tendrá \$4000 es

$$4000 = 1000e^{0.05t}$$

$$4 = e^{0.05t}$$

$$t = \frac{ln(4)}{0.05}$$

Por tanto, el tiempo $t \approx 27, 8$ años

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación (2.29)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \\ (0.05)1000e^{0.05t} &= (0.05)1000e^{0.05t} \\ 50e^{0.05t} &= 50e^{0.05t} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.5 Aplicaciones en diversas áreas

Estas ecuaciones proporcionan herramientas matemáticas fundamentales para describir y analizar fenómenos y sistemas ingenieriles, permitiendo comprender y predecir su comportamiento y facilitando el diseño y la optimización de sistemas y procesos ingenieros.

2.5.1 Mecánica de fluidos

Problema de aplicación 2.14

Considere que un tanque contiene 1000 L de agua pura, y está conectada a líneas de abasto y de descarga. En $t = 0$, tanto la línea de abasto como la de descarga están abiertas, y la solución de agua con sal que contiene $0.1kg$ de sal por litro, entra y sale del tanque a razón de $50L|min$, después de mezclarse perfectamente con el agua del tanque. Suponga que la sal disuelta no cambia el volumen del agua. Como es de esperarse, el contenido de sal en el tanque aumenta con el tiempo, aun cuando el volumen de agua permanezca constante.

a. Obtenga la relación para la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

b. Determine la cantidad máxima de sal que el tanque contendrá finalmente.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   La ecuación diferencial a considerar es

$$\frac{dM}{dt} = V_o(S) - V_f\left(\frac{M}{C}\right) \tag{2.30}$$

   Debemos considerar la condición inicial $M(0) = 0$ para determinar las incognitas y a partir de ello aplicar el límite para obtener la cantidad máxima de sal que el tanque.

2. **Planificar una estrategia**

   Para resolver dicho problema, debemos seguir lo siguiente:

   - Reemplazar los valores de $V_0 = 50L/min$, $S = 0.1kg/L$, $V_f = 50L/min$ y $E = 100L$ en la ecuacíon (2.30).
   - Determinar la solucion general de la ecuación diferencial, mediante el método de factor integrante.
   - Sustituir la condición inicial $M(0) = 0$.
   - Aplicar $\lim_{t\to\infty} M$ para determinar la cantidad de M.

3. **Ejecutar el plan**

   Sea M la masa de sal en el tanque en un determinado tiempo t. El principio de conservación de la masa para la sal en el tanque puede expresarse como

$$\frac{dM}{dt} = V_o(S) - V_f\left(\frac{M}{C}\right)$$
$$\frac{dM}{dt} = (50L/min)(0.1kg/L) - (50L/min)\left(\frac{M}{100}kg/L\right)$$

$$\frac{dM}{dt} + 0.05M = 5$$

   Encontremos el factor integrante

$$M(T) = e^{\int 0.05dt} = e^{0.05t}$$

$$\frac{dM}{dt}e^{0.05t} + 0.05Me^{0.05t} = 5e^{0.05t}$$
$$\frac{dM}{dt}(Me^{0.05t}) = 5e^{0.05t}$$
$$\int (Me^{0.05t})dM = \int 5e^{0.05t}dt$$
$$Me^{0.05t} = 100e^{0.05t} + M_0$$
$$M = 100e^{0.05t} + \frac{M_0}{e^{0.05t}}$$

Reemplazamos la condicón inicial $M(0) = 0$

$$0 = 100 + \frac{M_0}{e^{0.05(0)}}$$
$$M_0 = -100$$

Por tanto, la relación para la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t es

$$M = 100 - 100e^{-0.05t}$$
$$M = 100 - 100e^{-0.05t}$$
$$M = 100(1 - e^{-0.05t})$$

Para encontrar la máxima cantidad de sal en el tanque, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} M = \lim_{n\to\infty} 100(1 - e^{-0.05t})$$
$$= 100(1 - 0)$$
$$= 100(1 - 0)$$

Por tanto la sal que contiene el tanque es $M = 100kg$ de sal.

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación 2.30 y obtener una igualdad.

$$\frac{dM}{dt} + 0.05M = 5$$
$$100(1 - e^{-0.05t})5e^{-0.05t} + 5(1 - e^{-0.05t}) = 5$$
$$5e^{-0.05t} + 5 - 5e^{-0.05t} = 5$$
$$5 = 5$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.5.2 Absorción de luz

Problema de aplicación 2.15

El coeficiente de absorción del agua para la luz roja es cercano a $0.5m^{-1}$. Determine a qué distancia puede viajar la luz roja en agua antes de que se absorba 90 % de ella.

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Tenemos la ecuación diferencial de la radiación

   $$\frac{dE}{ds} = -\alpha E \tag{2.31}$$

   donde, α es el coeficiente de absorción, s es la distancia que la luz viaja en dirección del haz, y E es la energía radiante de la luz roja.

2. **Planificar una estrategia**

   Consideremos los siguientes pasos para encontrar la distancia que puede viajar la luz roja.

   - Determinar la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de separación de variables.
   - Reemplazar $\frac{E}{E_0} = 0.1$ en la solución general de la ecuación diferencial.

3. **Ejecutar el plan**

   Encontremos la solución general de

   $$\frac{dE}{ds} = -\alpha E$$

mediante separación de variables.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{E} &= -\alpha ds \\
\int \frac{dE}{E} &= \int -\alpha ds \\
Ln(E) &= -\alpha s \\
E &= E_0 e^{-\alpha s} \\
\frac{E}{E_0} &= e^{-\alpha s}
\end{aligned}$$

donde, E_0 es la energía radiante del haz cuando toca el medio de transmisiónmen $s = 0$. La relación $\frac{E(s)}{E_0}$ será 0.1 en la ubicación S cuando se absorba 90 % de la radiación. Entonces,

$$\begin{aligned}
0.1 &= e^{-0.5s} \\
Ln(0.1) &= -0.5s \\
s &= \frac{Ln(0.1)}{0.5} \\
s &\approx 4.64m
\end{aligned}$$

Por tanto, el agua absorberá 90 % de la luz roja antes de que esta viaje una distancia de $4.64m$

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación (2.31)

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{ds} &= -\alpha E \\
\left(E_0 e^{-\alpha s}\right)' &= -\alpha E_0 e^{-\alpha s} \\
-\alpha E_0 e^{-\alpha s} &= -\alpha E_0 e^{-\alpha s}
\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.5.3 Modelo de un solenoide del arranque de un motor

Problema de aplicación 2.16

El circuito es un modelo de solenoide, como el que se usa para embragar el engrane de la marcha de un automóvil con el volante del motor. El solenoide se construye devanando alambre alrededor de un núcleo de hierro para hacer un electroimán. La resistencia R es la del alambre, y la inductancia L se debe al efecto electromagnético. Conectando el voltaje de suministro V se activa el imán, el cual mueve el engrane de la marcha. Desarrolle un modelo de la corriente i suponiendo que $v_s = V$, constante.

a. Determine el valor de estado estacionario de la corriente.

b. ¿Cuánto tardará la corriente en alcanzar este valor?

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Para este problema se tiene una ecuación diferencial lineal y, debemos usar la ley de voltaje de Kirchhof, la cual establece que la suma de voltajes alrededor de un circuito cerrado debe ser cero debido a la conservación de la energía.

$$v_s - R_i - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{2.32}$$

   Como condición inicial tenemos $i(0) = 0$.

2. **Planificar una estrategia**

   Consideremos los siguientes pasos para encontrar la corriente de estado estacionario.

   - Determinar la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de factor integrante.
   - Reemplazar $i(0) = 0$ en la solución general de la ecuación diferencial.
   - Encontrar la corriente de solenoide.

3. **Ejecutar el plan**

Encontremos la solución general de

$$v_s - R_i - L\frac{di}{dt} = 0$$

mediante factor integrante. Primero debemos considerar $v_s = V$ constante, la ecuación se convierte en

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{2.33}$$

Factor integrante

$$i(t) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$$

Luego multiplicamos en toda la igualdad de la ecuación (2.33)

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}ie^{\frac{R}{L}t} &= \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}\\
\frac{di}{dt}\left(ie^{\frac{R}{L}t}\right) &= \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}\\
\int \left(ie^{\frac{R}{L}t}\right)di &= \int \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt\\
ie^{\frac{R}{L}t} &= \frac{V}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\\
ie^{\frac{R}{L}t} &= \frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\\
i &= \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Reemplazamos el valor inicial en la (2.33)

$$\begin{aligned}
o &= \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}o}\\
C &= -\frac{V}{R}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
i &= \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\\
i &= \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})
\end{aligned}$$

4. **Mirar hacia atrás**

Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación (2.33) y obtener la igualdad.

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i&=\frac{V}{L}\\ \frac{V}{L}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{L}-\frac{V}{L}e^{-\frac{R}{L}t}&=\frac{V}{L}\\ \frac{V}{L}&=\frac{V}{L}\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

2.5.4 Trayectorias ortogonales

Problema de aplicación 2.17

Halle las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas rectangulares

$$y=\frac{C_1}{x}$$

Solución.

1. **Comprender el problema**

   Dado un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos buscar las soluciones que generan trayectorias ortogonales, donde necesitamos encontrar una función $f(x,y)$ que satisface la condición de ortogonalidad

2. **Planificar una estrategia**

   Consideremos los siguientes pasos para resolever el problema.

   - Obtener la solución general de la ecuación diferencial, mediante el método de separación de variables.
   - En este caso los valores que pueden tomar C deben se arbitrarios.

3. **Ejecutar el plan**

   La derivada de

$$y=\frac{C_1}{x}$$

   es

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{C_1}{x^2}$$

Reemplazando C_1 por $C_1 = xy$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia dada

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

En tal caso, la ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Luego, resolvamos la ecuación diferencial, mediante separación de variables.

$$\begin{aligned} ydy &= xdx \\ \int ydy &= \int xdx \\ y^2 &= x^2 + C \end{aligned}$$

Por tanto, las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas rectangulares es

$$y^2 - x^2 = C$$

4. **Mirar hacia atrás**

   Una vez realizado las revisiones pertinentes, se observa que nuestra resolución está correcta. Otra manera de comprobar la respuesta es reemplazar en la ecuación diferencial y obtener la igualdad.

$$\begin{aligned} y &= \frac{C_1}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{C_1}{x^2} \\ \frac{C_1}{x^2} &= \frac{C_1}{x^2} \end{aligned}$$

   Por tanto, se concluye que la respuesta obtenida es la correcta.

Conclusiones

- Para la elaboración de la guía se logró mediante una investigación documental, en la cual se analizaron diversos documentos, como libros y artículos científicos, con el propósito de explicar de manera clara y sencilla a los lectores.

- El método de Pólya proporciona un enfoque sistemático y estructurado para resolver problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en la Matemática Aplicada. Al seguir los pasos del método, fomenta una estrategia de resolución que ayuda a organizar y enfocar el proceso de solución de problemas.

- Comprender plenamente el problema es una etapa fundamental en el método de Pólya, esto implica la total comprensión de las condiciones, la identificación y análisis de las incógnitas, así como el establecimiento de las relaciones matemáticas pertinentes. Mediante este minucioso análisis del problema, se establece una base sólida desde la cual abordar la resolución de problemas de la ecuación diferencial ordinaria en la Matemática Aplicada.

- El aplicar el método de Pólya a las ecuaciones diferenciales ordinarias, se tuvo una comprensión más profunda y una solución más eficaz en los problemas abordados en la guía.

- El método de Pólya resalta la importancia de reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas y validar las soluciones obtenidas, esto implica revisar minuciosamente las soluciones encontradas para verificar si cumplen con las condiciones iniciales o de frontera y restricciones del problema, y determinar si se obtiene una solución general o particular. La reflexión y la verificación constante, garantizan la precisión y confiabilidad de las soluciones obtenidas.

Bibliografía

[1] **EDWARDS, C; & PENNEY, D**. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera* [en línea]. 4^a ed. México: Pearson Educación, 2009. [Consulta: 7 junio 2023]. Disponible en: https://mathunam.files.wordpress.com/2018/10/edwards-ecuaciones diferenciales.pdf

[2] **ESPINAL E; et al**."Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos". Zona Próxima [en línea]. 2019, (31), pp. 7-25. [Consulta 7 de junio de 2023]. ISSN: 1657-2416. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=85362906002

[3] **MURRAY R. SPIEGEL**. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. 3^a ed. Naucalpan de Juárez-México. Cámara Nacional de la Industria Editorial. ISBN (968-880-053-8), pp 3-162.

[4] **NAGLE, R. K**. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* [en línea]. 4^a ed. México: Pearson Educación, 2005. [Consulta: 7 junio 2023]. Disponible en: https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/04/03.-Ecuaciones-Diferenciales-y-probs-con-vals-a-la-front-Nagle-4ta-ed.pdf

[5] **ZILL, D. G; & CULLEN, M. R**. *Matemáticas avanzadas para ingeniería, vol. 1: ecuaciones diferenciales* [en línea]. 3^a ed. México: Interamericana, 2008. [Consulta: 7 junio 2023]. Disponible en: https://marihendtqm.files.wordpress.com/2014/08/ecuaciones-diferenciales-zill-vol-1.pdf

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 14/06/2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Nelson Efraín Yaucán Lata
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena **Directora del Trabajo de Integración Curricular** **Dra. Martha Ximena Dávalos Villegas** **Asesora del Trabajo de Integración Curricular**