# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

## FACULTAD DE CIENCIAS

### CARRERA MATEMÁTICA

# TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN LA EXISTENCIA DE EQUILIBRIO DE NASH EN LA TEORÍA DE JUEGOS

**Trabajo de Integración Curricular**

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

**MATEMÁTICO**


**AUTOR:**

CHRISTOPHER VLAD CEDEÑO CRUZ



Riobamba – Ecuador

2023

# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

## FACULTAD DE CIENCIAS

### CARRERA MATEMÁTICA

# TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN LA EXISTENCIA DE EQUILIBRIO DE NASH EN LA TEORÍA DE JUEGOS

**Trabajo de Integración Curricular**

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

**MATEMÁTICO**


**AUTOR:** CHRISTOPHER VLAD CEDEÑO CRUZ

**DIRECTOR:** MSC. CARLOS EDUARDO COVA SALAYA



Riobamba – Ecuador

2023

Yo, CHRISTOPHER VLAD CEDEÑO CRUZ, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular, el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 06 de abril de 2023

**Christopher Vlad Cedeño Cruz**
**060470383-5**

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CARRERA MATEMÁTICA**

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN LA EXISTENCIA DE EQUILIBRIO DE NASH EN LA TEORÍA DE JUEGOS**, realizado por el señor: **CHRISTOPHER VLAD CEDEÑO CRUZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

| | **FIRMA** | **FECHA** |
|---|---|---|
| Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla<br>**PRESIDENTE DEL TRIBUNAL** | | 2023-04-06 |
| Msc. Carlos Eduardo Cova Salaya.<br>**DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR** | | 2023-04-06 |
| Msc. Ramón Antonio Abancin Ospina.<br>**ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR** | | 2023-04-06 |

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo de titulación a mí, por tener el coraje, la constancia y no darme por vencido cuando estuve a punto de hacerlo, por todo el trabajo duro y las largas noches sin dormir, también se lo dedico a la memoria de mi querido amigo Andrés Carrasco, ya que gracias ah el nunca baje los brazos y espero se sienta orgulloso de mi y haya cumplido todas sus expectativas.

Christopher

## AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi tutor Msc. Carlos Cova por darme una oportunidad de elaborar este trabajo de titulación y por todo el apoyo brindado durante esta grandiosa experiencia. A mi madre Angelita Vintimilla ya que fue mi apoyo en todo momento y siempre estuvo ahí cuando mas lo necesite y de igual manera al resto de familiares por ese granito de arena que me supieron brindar. Por ultimo a mis amigos que han sido como mis hermanos los cuales estado en todos esos momentos buenos como malos.

Christopher

**ÍNDICE DE CONTENIDO**

## ÍNDICE DE ANEXOS

**RESUMEN**

La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) no cuenta con bibliografía suficiente acerca de la teoría de puntos fijos en la topología, por lo tanto, el objetivo es generar un documento de referencia, en el cual se estudie el teorema de punto fijo de Kakutani en topología y su aplicación en la existencia de equilibrio de Nash en la teoría de juegos. Con esta finalidad, hemos utilizado un diseño metodológico de tipo cualitativo no interactivo con alcance descriptivo, con el propósito de producir un documento guía para los estudiantes de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). En consecuencia se obtuvo la generación de un documento bibliográfico el cual está constituido por 3 capítulos, en el primer capítulo se tiene preliminares topológicos cómo son: conjuntos abiertos y cerrados, funciones continuas, homeomorfismos, espacios conexos, espacios métricos, espacios compactos y el teorema del valor intermedio , en el segundo capítulo se observa el teorema del punto fijo de Brouwer el cual está constituido de propiedades de punto fijo, homotopías, funciones circulares de grado y el teorema de no retracción con el cual se demuestra la equivalencia entre el teorema de punto fijo de Brouwer en dos dimensiones. Por último, en el tercer capítulo se introduce el teorema del punto fijo de Kakutani y su aplicación en la teoría de juegos, el cual está compuesto por funciones multivaluadas, correspondencias, teoría de juegos y la existencia de equilibrios de Nash. En conclusión, a partir de los resultados topológicos que se mencionan en el documento final guía se demostró el teorema de punto fijo de Brouwer en dos dimensiones. Posteriormente a través de las herramientas de la teoría de juegos y el teorema de punto fijo de Kakutani en dos dimensiones se logró la demostración del teorema de existencia de equilibrios de Nash.

**Palabras clave:** <TOPOLOGÍA>, <KAKUTANI>, <TEOREMA>, <PUNTO FIJO>, <JHON NASH>, <TEORÍA DE JUEGOS>, <EQUILIBRIO>.
0797-DBRA-UPT-2023

**ABSTRACT**

The Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) does not have enough bibliography about the fixed-point theorem in topology, therefore, the objective is to generate a reference document, in which Kakutani's fixed point theorem in topology and its application in the existence of Nash equilibrium in game theory is studied. For this purpose, we have used a non-interactive qualitative methodological design with descriptive scope, with the purpose of to produce a guiding document for mathematics students of the Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). As a result, a bibliographic document was generated, which consists of 3 chapters. In the first chapter there are topological preliminaries such as: open and closed sets, continuous functions, homeomorphisms, connected spaces, metric spaces, compact spaces and the intermediate value theorem. In the second chapter, it is observed that Brouwer's fixed point theorem which consists of fixed-point properties, homotropies, circular functions of degree and the non-retraction theorem with which the equivalence between Brouwer's fixed point theorem in two dimensions is demonstrated. Finally, the third chapter introduces Kakutani's fixed point theorem and its application in game theory, which is composed of multivalued functions, correspondences, game theory and the existence of Nash equilibrium. In conclusion, from the topological results mentioned in the final guidance paper, Brouwer's fixed point theorem was proved in two dimensions. Subsequently, through the tools of game theory and Kakutani's fixed point theorem in two dimensions, the proof of the existence theorem of Nash equilibrium was achieved.

**Keywords:** <TOPOLOGY>, <KAKUTANI>, <TEOREM>, <FIXED POINT>, <JHON NASH>, <GAME THEORY>, <EQUILIBRIUM>.

Dra. Nanci M. Inca Ch. Mgs.

0602926719

## INTRODUCCIÓN

La matemática ha sido una disciplina fundamental para el desarrollo de la ciencia y la tecnología en todas las épocas. A lo largo de la historia, se han propuesto muchos teoremas y conceptos matemáticos que han tenido un impacto significativo en la comprensión de la realidad. Uno de estos teoremas es el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, el cual se ha revelado como una herramienta valiosa en la teoría de juegos.

La motivación para desarrollar esta guía de estudios surge de la necesidad de mejorar la comprensión de los conceptos y teoremas de la topología y su relación con la teoría de juegos en los estudiantes de la carrera de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). A menudo, la enseñanza se centra en los conceptos y teoremas sin explorar adecuadamente sus aplicaciones prácticas. Además, la falta de bibliografía en idioma nativo y la escasez de material en la biblioteca central de la ESPOCH dificultan aún más el entendimiento de estos temas. Con esta guía, buscamos brindar un recurso valioso para los estudiantes de matemáticas de la ESPOCH, que les permita comprender las aplicaciones de los teoremas y conceptos de la topología y su relación con la teoría de juegos.

El Teorema de Punto Fijo de Kakutani se refiere a la existencia de un punto fijo , específicamente en un espacio topológico. Este teorema ha sido ampliamente estudiado y aplicado en diversas áreas de la matemática, incluyendo la topología, la teoría de juegos y la economía. Sin embargo, a pesar de su importancia, aún existen aspectos del teorema que requieren ser explorados más a fondo.

La teoría de juegos es otra área matemática en la que el Teorema de Punto Fijo de Kakutani ha tenido un impacto significativo. El teorema se ha utilizado para demostrar la existencia de equilibrios de Nash, los cuales son fundamentales en el análisis de equilibrios de los juegos. A pesar de esto, también existen aspectos de la teoría de juegos que requieren ser investigados más a fondo en relación con el teorema de punto fijo de Kakutani.

Es por esta razón que se ha decidido llevar a cabo una investigación bibliográfica para profundizar en el estudio del Teorema de Punto Fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos. En esta investigación se revisarán diferentes fuentes bibliográficas, como libros, tesis y artículos, para seleccionar solo lo necesario para facilitar la comprensión del teorema y su aplicación en la teoría de Juegos.

Este proyecto de integración curricular dejo como resultado una guía de estudios que tiene como objetivo principal brindar una herramienta útil para los estudiantes de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), en la que cada capitulo se describe de manera comprensible con conceptos teoremas, ejemplos e ilustraciones de manera detallada , cada especialmente en el programa académico 6, donde se imparte la materia de topología.

A través de esta guía, se busca profundizar en la comprensión de los teoremas de punto fijo de Kakutani y Brouwer y su relación con la teoría de juegos, ofreciendo una visión más completa y aplicativa de estos conceptos, que a menudo son presentados de manera teórica y abstracta en los libros de texto tradicionales. Esta guía no pretende reemplazar a la bibliografía existente, sino complementarla y proporcionar una herramienta adicional para mejorar la comprensión y el aprendizaje de estos temas en los estudiantes.

## CAPÍTULO I

# 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1. Planteamiento del problema

Actualmente, la falta de una guía documental específica sobre el teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en la existencia de equilibrio de Nash en la teoría de juegos en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo es un problema para los estudiantes de la carrera de matemáticas. Con el objetivo de brindar una herramienta valiosa para mejorar su comprensión y facilitar su estudio, este proyecto tiene como meta generar un documento referencial sobre el tema específico para los estudiantes de la ESPOCH.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. *Objetivo general*

Elaborar una guía didáctica que permita a los estudiantes de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, comprender de manera clara y profunda el teorema de punto fijo de Kakutani en topología y su relación con la existencia de equilibrios de Nash en la teoría de juegos, mediante el uso de definiciones, teoremas, ejemplos e ilustraciones. Además, el estudio servirá como referencia para futuras investigaciones en esta área.

### 1.2.2. *Objetivos específicos*

- Buscar y seleccionar las fuentes bibliográficas relevantes para el estudio del teorema de punto fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos.
- Estudiar los conceptos y la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer y Kakutani.
- Analizar cómo se aplica el teorema de punto fijo de Kakutani en la teoría de juegos para garantizar la existencia de un equilibrio de Nash en un espacio topológico compacto.
- Aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani en los equilibrios de Nash en la teoría de juegos, para verificar su existencia.
- Proporcionar una guía estructurada y fácil de seguir para el estudio del teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en los equilibrios de Nash mediante el uso del editor de texto LaTeX.

## 1.3. Justificación

La falta de una guía de estudios específica sobre el teorema de punto fijo en topología y su relación con la teoría de juegos en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo representa una limitación para el aprendizaje y comprensión de los estudiantes en esta área. A través de esta investigación bibliográfica, se busca desarrollar una guía didáctica que permita a los estudiantes de la carrera de matemáticas de la ESPOCH entender de forma clara y completa los teoremas de punto fijo de Kakutani y Brouwer y su relación con la teoría de juegos. Además, esta guía servirá como herramienta valiosa para fortalecer los conocimientos en esta área y ampliar la comprensión de las variadas aplicaciones de las matemáticas teóricas.

# CAPÍTULO II

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Referencias teóricas

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, no se ha encontrado una guía específica para el estudio de los puntos fijos en la topología y sus aplicaciones en la teoría de juegos. Por lo tanto, se ha desarrollado un documento de referencia que incluye tres capítulos con conceptos, teoremas, ejemplos e ilustraciones. En este apartado se presentarán los conceptos más importantes de nuestra investigación.

Los equilibrios de Nash en la teoría de juegos son un concepto desarrollado por el matemático y economista estadounidense John Forbes Nash Jr. en el siglo XX. En 1950, Nash presentó su teoría en un artículo titulado Equilibrio de un juego en las Annals of Mathematics. En este artículo, Nash define un equilibrio de Nash como una combinación de estrategias en un juego en el cual ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia, dado que cualquier cambio conduciría a un peor resultado para él (Nash,1951, p.286).

La teoría de Nash fue inicialmente recibida con escepticismo por parte de la comunidad académica, pero su importancia fue reconocida en 1994 cuando Nash recibió el Premio Nobel de Economía por su trabajo en teoría de juegos y economía matemática. Desde entonces, la teoría de Nash se ha utilizado ampliamente en economía, ciencia política, sociología y otras disciplinas para analizar y comprender cómo los individuos y las organizaciones toman decisiones en situaciones de conflicto y competencia.

La topología es una disciplina matemática que se encarga del estudio de las propiedades de los espacios que permanecen invariables bajo transformaciones continuas, como escalamientos, traslaciones y rotaciones. Según James Munkres en su obra (2000, p.86), esta rama de las matemáticas proporciona una introducción a los conceptos fundamentales de la topología, incluyendo espacios topológicos, continuidad, compacidad y el teorema del valor intermedio.

El libro "Topología de Espacios Métricos"de Irribaren (1973, p.15) se enfoca en el estudio de los espacios métricos y cómo estos se relacionan con los conceptos fundamentales de la topología, como la continuidad, la compacidad y la convergencia. El autor proporciona una introducción detallada a estos conceptos y cómo se aplican en la topología, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para aquellos interesados en profundizar en este tema. Además, el libro también incluye ejemplos y problemas prácticos para ayudar a los lectores a comprender mejor los conceptos presentados.

En nuestra guía, los libros de Munkres y Irribaren han sido fundamentales en el desarrollo del primer capítulo, ya que proporcionan definiciones, teoremas y ejemplos precisos y detallados sobre los conceptos básicos de la topología. Sin embargo, se han utilizado otras referencias adicionales para apoyar la comprensión de los estudiantes de la carrera de matemáticas en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Estas referencias han sido citadas en diversas partes de la guía para proporcionar una comprensión más completa del tema.

El Teorema del Punto Fijo de Brouwer es un teorema matemático que establece la existencia de un punto fijo en cualquier continuo topológico compacto y convexo. El teorema fue propuesto por el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1911 y es considerado uno de los fundamentos de la topología algebraica (Toral, 2014, p.24). Ademas el teorema establece que, si una función continua es aplicada sobre un continuo topológico compacto y convexo, entonces existe al menos un punto en el continuo que es un punto fijo de la función, es decir, un punto en el cual la función no cambia su valor.

Se llevó a cabo un estudio del teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en la existencia de los equilibrios de Nash. A través de definiciones, teoremas y ejemplos, se proporcionó una breve introducción para el desarrollo del teorema bidimencional de Kakutani y como ayuda a demostrar el teorema de Nash .

El Teorema de Kakutani es un teorema matemático que establece la existencia de un punto fijo para ciertos tipos de funciones multivariadas en espacios topológicos. El teorema fue propuesto por el matemático japonés Shizuo Kakutani en 1941 (Toral, 2014, p.25).

El teorema establece que si una función multivariada cumple con ciertas propiedades de convexidad y compacidad, entonces existe al menos un punto fijo para esa función. Estas propiedades significan que la función es continua y que el espacio topológico es compacto y convexo.

Se ha recopilado información tanto sobre la topología y cómo ésta ayuda en la demostración de los teoremas de punto fijo de Brouwer y Kakutani, así como en la comprensión de los equilibrios del teorema de John Nash en la teoría de juegos. La información recopilada se centra en la demostración de estos teoremas y cómo se relacionan con la topología, a diferencia de otras referencias que se centran principalmente en el análisis matemático. Nuestra guía se ha basado en las bases topológicas para la demostración de estos teoremas, brindando una comprensión más completa de las aplicaciones de la topología en estos temas.

La idea principal de la teoría de Nash es que cada jugador elige la estrategia que maximiza su beneficio personal, dado el conjunto de estrategias elegidas por los demás jugadores. Nash demostró que siempre existe un equilibrio de Nash en un juego, es decir, un conjunto de estrategias en el que ningún jugador puede mejorar su resultado eligiendo una estrategia diferente. Sin embargo, este equilibrio puede no ser único o puede no ser estable (Monsalve, 2003, p.140).

La teoría de Nash ha tenido un impacto significativo en la comprensión de cómo los individuos y las organizaciones toman decisiones en situaciones de incertidumbre y ha sido utilizada para analizar problemas en una variedad de campos, incluyendo la economía, la política, la negociación y la teoría de la inteligencia artificial.

La teoría de juegos es una rama de la matemática y la economía que se utiliza para analizar cómo las personas y las organizaciones toman decisiones en situaciones de conflicto y competencia. Se basa en la idea de que las decisiones de un individuo o una organización están influenciadas por las acciones y decisiones de otros individuos o organizaciones (Binmore, 1994, p.13).

Los libros y documentos utilizados como referencia para la elaboración de nuestra guía han sido fundamentales, ya que gracias a ellos, hemos podido crear una herramienta valiosa para los estudiantes de matemáticas de la ESPOCH. La guía abarca los conceptos de topología, teoremas de punto fijo y su aplicación en la teoría de juegos de John Nash, y se presenta de manera clara y accesible para facilitar el aprendizaje y la comprensión de las aplicaciones de las matemáticas puras.

# CAPÍTULO III

## 3. MARCO METODOLÓGICO

### 3.1. Enfoque de investigación

Este tipo de investigación se considera un enfoque cualitativo, ya que el enfoque está en la comprensión y la interpretación de los datos a través de la lectura y el análisis de textos relacionados con el teorema de punto fijo de Kakutani en la topología y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos. El objetivo es describir de forma secuencial cada capítulo de manera que los estudiantes de la carrera de matemáticas de la ESPOCH puedan comprender adecuadamente.

### 3.2. Nivel de investigación

La investigación propuesta es de carácter exploratoria-descriptiva. Consiste en una revisión y análisis de documentos existentes, tales como libros, artículos científicos y tesis, con el objetivo de crear una guía de referencia para estudiantes de matemáticas. Este material tiene como finalidad difundir la aplicación de la teoría del punto fijo en topología mediante la interpretación de la información recogida.

### 3.3. Tipo de estudio

El análisis de contenido utilizamos para analizar y sintetizar el contenido de un conjunto de documentos. Se basa principalmente en la revisión y la codificación de los documentos seleccionados para luego describir y analizar la información existente sobre el teorema de punto fijo de Kakutani en la topología y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos. Como resultado, se producirá una guía de estudio que incluirá los conceptos, teoremas y ejemplos más relevantes para su comprensión y desarrollo.

### 3.4. Diseño de la investigación

La investigación realizada es de tipo documental, por lo que se llevó a cabo una búsqueda de bibliografía en libros, tesis y revistas, todas digitales. Debido a que la mitad de la información recolectada estaba en inglés, se requiere un esfuerzo adicional por parte de los estudiantes de la carrera de matemáticas. Para abordar esta dificultad, se desarrolló una metodología adecuada que incluye las siguientes actividades para la creación de la guía y comprensión de los estudiantes.

A continuación se presenta la metodología que se utilizo para el desarrollo de la guía de estudio:

- Obtención del material bibliográfico: Una vez definido el tema de investigación, se llevó a cabo una búsqueda de información utilizando libros, revistas y tesis que contengan los siguientes temas: topología básica, puntos fijos en la topología, equilibrios de Nash en la teoría de juegos y que se relacionen entre si.
- Revisión y comprensión del material bibliográfico: Para el primer capitulo, se revisó toda la información encontrada en diferentes referencias bibliográficas acerca de topología básica, seleccionando solo lo necesario para facilitar su comprensión.
- Para el segundo capitulo, se analizó toda la información recolectada en diversas fuentes bibliográficas sobre el teorema de Brouwer, seleccionando solo lo esencial de los libros de topología algebraica para garantizar una fácil comprensión y su posterior demostración en discos.
- Para el tercer capítulo, ya que se debe hablar de la demostración del teorema de Kakutani bidimensional y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos, se seleccionaron varios libros que cubran diferentes aspectos relacionados con el teorema y su aplicabilidad para garantizar una adecuada comprensión.
- Redacción del documento guía: Teniendo en cuenta que nuestra guía de estudio sobre el teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en los equilibrios de Nash en la teoría de juegos está dirigida a los estudiantes de la carrera de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, se escribió de una manera clara y comprensible, estructurando los conceptos, teoremas, ejemplos e ilustraciones de manera ordenada para que sea fácil de entender.
- Discusión y conclusiones: Se discutirán los resultados obtenidos y se extraerán conclusiones sobre el teorema de punto fijo de Kakutani en la topología y su aplicación en los equilibrios de Nash.

### 3.5. Métodos, técnicas e instrumentos de investigación

Para llevar a cabo este trabajo de integración curricular , se utilizaron varios métodos, técnicas e instrumentos que ayudaron a escribir la guía para asegurar que los estudiantes comprendan correctamente los contenidos presentados.

- Métodos: La investigación teórica fue esencial para revisar y analizar la literatura existente sobre los temas de topología básica, punto fijo de Kakutani y Brouwer, equilibrios de Nash y la teoría de juegos. Además, se realizó un análisis matemático para utilizar métodos matemáticos para demostrar las propiedades del punto fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash.

- Técnicas: La técnica de lectura y anotación fue indispensable para esta investigación, ya que se resumieron los puntos más importantes de los libros, tesis y monografías seleccionados, y la información obtenida se categorizó en tres capítulos para facilitar la comprensión de los estudiantes de la carrera de matemáticas.
- Instrumentos: Para llevar a cabo esta investigación, se utilizaron varios instrumentos. En primer lugar, se utilizó el software LaTeX con el compilador de texto TeXstudio (versión 4.4.1) para dar formato al documento. Además, se utilizó una computadora Dell para investigar libros relevantes a través de Google Académico.

## CAPÍTULO IV

# 4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

## 4.1. Resultado

Esta investigación documental, con un enfoque cualitativo no interactivo, generó una guía de estudio titulada: "Teorema de Punto Fijo de Kakutani en la Topología y su Aplicación en la Existencia de Equilibrios de Nash en la Teoría de Juegos". La guía tiene como objetivo ser utilizada por los estudiantes de la carrera de Matemáticas de la ESPOCH, específicamente en el PAO 6, con el fin de dar a conocer las aplicaciones prácticas de una materia teórica como es la topología y ayudar en su formación académica. El propósito principal de esta guía es divulgar la relevancia y aplicabilidad de estos conceptos matemáticos en la vida real.

## 4.2. Discusión

En nuestra investigación bibliográfica, se analizó la literatura existente sobre el teorema de punto fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos. A través de la revisión de varios libros, tesis y artículos, se logró crear una guía de estudios para los estudiantes de la carrera de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Los resultados obtenidos indicaron que el teorema de Kakutani tiene una aplicabilidad importante en el análisis de los equilibrios de Nash en juegos con varias estrategias y se utilizaron estos hallazgos para elaborar una guía didáctica para los estudiantes en su formación académica.

Sin embargo, es importante mencionar que nuestra investigación tiene algunas limitaciones. Una de ellas es que solo se abordó el estudio del teorema de Kakutani y Brouwer bidimensional en juegos, y no se analizó de forma general su estudio en otras dimensiones o en otras áreas. Además, se sugiere que en futuras investigaciones se analice el teorema de Kakutani de forma general, con el fin de elaborar una guía más completa que incluya una mayor variedad de aspectos relacionados con el teorema.

En conclusión, nuestra investigación bibliográfica ha proporcionado una revisión detallada de la literatura existente sobre el teorema de punto fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos. Los resultados obtenidos amplían la comprensión del teorema de Kakutani y su relación con la teoría de juegos. Además, al constatar la escasez de fuentes bibliográficas que ayuden a los estudiantes de la carrera de matemáticas a comprender este tema, se proporciona una herramienta valiosa para el estudio de los equilibrios de Nash en teoría juegos para los estudiantes de la carrera de matemáticas de la ESPOCH, ya que se elaboró una guía didáctica para su estudio.

### 4.3. Estructura del documento guía

La guía de estudios resultante consta de tres capítulos, cada uno de los cuales incluye definiciones, teoremas, ejemplos e ilustraciones diseñados para ayudar al estudiante de matemáticas a comprender de manera sencilla cada tema abordado. El objetivo es que los estudiantes puedan visualizar y comprender mejor los conceptos matemáticos a través de ejemplos y ilustraciones, lo que les permitirá una mejor comprensión y retención de la información.

**CAPITULO 1:** En este capítulo se aborda el estudio básico de los temas relacionados con la topología, tales como: espacios topológicos, funciones continuas, homeomorfismos, espacios conexos, espacios métricos, espacios compactos y el teorema del valor intermedio. Con estos conceptos se lleva a cabo la demostración del teorema unidimensional de Brouwer. El objetivo es proporcionar una comprensión sólida de los conceptos básicos necesarios para entender el teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en los equilibrios de Nash en la teoría de juegos.

**CAPITULO 2:** En este capítulo se aborda el estudio básico relacionado con la topología algebraica, con el objetivo de llevar a cabo la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer bidimensional. Se aplican conceptos de retracción para lograr una comprensión sólida de los conceptos necesarios para entender la relación entre el teorema de punto fijo de Kakutani y los equilibrios de Nash en la teoría de juegos.

**CAPITULO 3:** En este capítulo se presenta la demostración del teorema de Kakutani y su relación con los equilibrios de Jhon Nash en la teoría de juegos. Además, se proporciona una breve introducción a la teoría de juegos para ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos necesarios para entender la relación entre el teorema de Kakutani y los equilibrios de Nash.

# CAPÍTULO V

## CONCLUSIONES

Se completo un ciclo entre los tres capítulos que se estudiaron, donde por último se elaboró un documento donde los estudiantes puedan revisar los resultados obtenidos y que les sirva de referencia para su posterior estudio. Lo expuesto en este proyecto de integración curricular hace ver la relación de la matemática entre áreas distintas de que existen como son la topología y la Teoría de juegos.

En conclusión, a través de la investigación realizada y los resultados obtenidos se logro crear una guía didáctica, del teorema de punto fijo de Kakutani y su relación con los equilibrios de Nash en la teoría de juegos.

El estudio de la topología y la topología algebraica permitió la demostración del teorema de Jhon Nash y la elaboración de una herramienta valiosa para mejorar la comprensión de los estudiantes de matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y futuras investigaciones en esta área. Este proyecto de integración curricular también destacó la relación entre diferentes áreas de la matemática y la importancia de estudiarlas de manera conjunta para una mejor comprensión.

**RECOMENDACIONES**

Se recomienda la elaboración de una guía de estudios para estudiantes de matemáticas en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, que incluya un análisis más generalizado de los teoremas de punto fijo de Kakutani y Brouwer, con el objetivo de ampliar el conocimiento sobre el teorema de Nash y su relación con los equilibrios en la teoría de juegos. Además se recomienda la implementación de ejercicios y problemas para que los estudiantes puedan practicar y aplicar lo aprendido en la guía.

Comprender de manera más profunda de los conceptos matemáticos relacionados con el Teorema del Punto Fijo de Kakutani y su aplicación en la teoría de juegos, especialmente en relación con la álgebra abstracta.

Analizar cómo el Teorema del Punto Fijo de Kakutani y los equilibrios de Nash pueden ser utilizados para resolver problemas en la toma de decisiones y la resolución de conflictos.

Comparar y contrastar el Teorema del Punto Fijo de Kakutani con otros teoremas matemáticos relacionados, como el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

## BIBLIOGRAFÍA

**ACCINELLI, E**. *Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibrio General.* [en línea] Universidad Autónoma Metropolitana, 2005. [Consulta: 5 octubre 2022]. Disponible en: http://hdl.handle.net/11191/1838

**AZOFEIFA, C** *Aplicación de las técnicas de punto fijo* [en línea]. Revista de Ciencia y Tecnología. 1995. [Consulta: 5 septiembre 2022]. Disponible en: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cienciaytecnologia/article/view/2703

**BAUTISTA, B** [en línea]. *Teoría de Juegos: el penalty de Nash.* 2018. [Consulta: 21 diciembre 2022]. Disponible en: https://idus.us.es/handle/11441/77496

**BINMORE, K.** *Teoría de juegos* [en línea]. Madrid: McGraw-Hill, 1994. [Consulta: 7 abril 2022]. Disponible en: https://www.casadellibro.com/libro-la-teoria-de-juegos-una-breve-introduccion/9788420662190/1946200

**BORDER, K.** *Fixed point theorems with applications to economics and game theory* [en línea]. Cambridge university press, 1985. [Consulta: 14 mayo 2022]. Disponible en: https://www.cambridge.org/core/books/fixed-point-theorems-with-applications-to-economics-and-game-theory/96CE40EA9730FAAF1000F8EF8AFF7013

**BUJALANCE, E.** *Problemas de topología* [en línea]. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1989. [Consulta: 13 noviembre 2022]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books/about/Problemas_de_Topologia.html?id=famQPQAACAAJ&redir_esc=y

**CAMPOS, F.** *Una versión didáctica de la aplicación de la Teoría de Correspondencias en el Equilibrio de Nash* [en línea]. 2008. [Consulta: 11 agosto 2022]. Disponible en: http://repositorio.unac.edu.pe/handle/20.500.12952/111

**FRANCO, J.** *Teoría de la Decisión y de los Juegos* [en línea]. Delta publicaciones, 2006. [Consulta: 7 enero 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books/about/Teoría_de_la_decisión_y_de_los_juegos.html?id=fHdnpvOeA9sC&redir_esc=y

**GARCÍA Á**. *Teoremas del punto fijo y aplicaciones*. [en línea]. 2020.[Consulta: 27 agosto 2022]. Disponible en: http://hdl.handle.net/2445/164998

**GIBBONS, R.** *Un primer curso de teoría de juegos* [en línea]. 2022. [Consulta: 1 julio 2022]. Disponible en: https://antonibosch.com/libro/un-primer-curso-de-teoria-de-juegos

**IRRIBAREN, I.** *Topología de espacios métricos* [en línea]. 1973. [Consulta: 9 julio 2022]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=HtRwAAAACAAJ&dq=inauthor:"Ignacio+L.+Irribarren+T."&hl=es&sa=X&redir_esc=y

**MUNKRES, J.** *Topology* [en línea]. New York-USA: Oxford University Press, 2021. [Consulta: 17 junio 2022]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=k5WsQAAACAAJ&dq=inauthor:"James+R.+Munkres"&hl=es&sa=X&redir_esc=y

**MONSALVE, S**. *Introducción a los conceptos de equilibrio en economía* [en línea]. Universidad. Nacional de Colombia, 1999. [Consulta: 31 julio 2022]. Disponible en: https://www.cienciared.com.ar/ra/usr/4/26/john_nash_y_la_teor_a_de_juegos.pdf

**MONSALVE, S**. *John Nash y la teoría de juegos* [en línea]. Lecturas matemáticas, 2003, vol. 24, p. 137-149. [Consulta: 7 enero 2022]. Disponible en: https://www.cienciared.com.ar/ra/usr/4/26/john_nash_y_la_teor_a_de_juegos.pdf

**MORRIS, S.** *Topology without tears* [en línea]. University of New England, 1989. [Consulta: 25 noviembre 2022]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Rina-Milad/publication/337566771_topbook/links/5dde85214585159aa44cc7a5/topbook.pdf

**NASH, J.** *Non-Cooperative Games* [en línea]. Annals of Mathematics, 1951, p. 286–295. [Consulta: 12 agosto 2021]. Disponible en: https://doi.org/10.2307/1969529

**RUBIANO, G.** *Topología general* [en línea]. Universidad Nacional de Colombia, 2000. [Consulta: 21 diciembre 2022]. Disponible en: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=lVsff1JINwYC&oi=fnd&pg=PA1&dq=rubiano+topología+general&ots=sGg23eq3kx&sig=3U2I4wNnkIuORRw_dla-_oEXMs4#v=onepage&q=rubiano%20topologá%20general&f=false

**TORAL, G.** *Una introducción a los teoremas de punto fijo ya la existencia de equilibrios en economía* [en línea]. Economía Informa, 2014, vol. 388, p. 22-35. [Consulta: 15 mayo 2022]. Disponible en: http://www.economia.unam.mx/assets/pdfs/econinfo/388/02DelgadoT.pdf

**URQUIDI, J.** *Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de nash para juegos no cooperativos* [en línea]. 2018. [Consulta: 20 mayo 2022]. Disponible en: https://lic.mat.uson.mx/tesis/146TesisUrquidi.pdf

**VENTSEL, E.** *Elementos de la teoría de los juegos* [en línea]. 1977. [Consulta: 23 abril 2022]. Disponible en: http://circulosmatematicos.org/wp-content/uploads/2017/09/Ventsel-Elementos-de-Teoria-de-Juegos.pdf

# ANEXOS

**ANEXO A:** DOCUMENTO REFERENCIAL; "TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN LA E-XISTENCIA DE EQUILIBRIO DE NASH EN LA TEORÍA DE JUEGOS"

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Facultad de Ciencias - Carrera de Matemática

# TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN LA EXISTENCIA DE EQUILIBRIO DE NASH EN LA TEORÍA DE JUEGOS

CHRISTOPHER VLAD CEDEÑO CRUZ

RIOBAMBA-ECUADOR
2022

Director: Msc. Carlos Cova
Carrera de Matemática, Facultad de Ciencias
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

# TABLA DE CONTENIDOS

# INTRODUCCIÓN

Nuestro mundo está lleno de situaciones conflictivas, el alcance de los juegos no cooperativos es por lo tanto muy amplio, ya que mediante este estudio nosotros podemos encontrar equilibrios, los cuales llamamos a las mejores estrategias que cada persona elige en alguna situación en la que se encuentra.
Usualmente las situaciones de conflicto en las que se encuentran las personas son varias desde una simple tarea cotidiana hasta algo mucho mas complejo, por ejemplo un simple juego de piedra, papel o tijera, hasta la competencia entre dos empresas. En ambos casos debes elegir la mejor estrategia para poder ganar.
Estas estrategias se llaman equilibrios de Nash, que lo introdujo el Matemático Jhon Nash en 1950, en el estudio que desarrollo de juegos finitos no cooperativos en $N$ personas (ver [Nash, 1950]). En esta guía realizamos su demostración en base a puntos fijos como lo hizo en su prueba pero limitándonos a tres personas.
El área de las matemáticas en donde se centra esta guía es la topología y Teoría de juegos, donde mediante conceptos y teoremas se da a conocer los diferentes teoremas de punto fijo, con los cuales demostraremos el celebrado teorema de Jhon Nash y de una forma practica mostraremos ejemplos varios que presenta este teorema. (ver [García Álvaro, 2020], [Urquidi, 2018]).
La teoría de juegos estudia de manera formal y abstracta las decisiones tomadas por diferentes oponentes en conflicto y puede definirse como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre entidades inteligentes de toma de decisiones. Tales decisiones se consideran estratégicas, es decir, las entidades que participan en el juego actúan en función de las acciones que realizarán los demás.
Por otro lado la Teoría de puntos fijos se enfoca en determinar las condiciones bajo las cuales se puede argumentar que una función $f$ en un dominio dado tiene un punto fijo, es decir, tiene un punto $x$ en un dominio dado tal que $f(x) = x$.

A partir de lo expuesto anteriormente, nuestra guía se divide en 3 capítulos. A continuación se presenta un breve resumen de los contenidos de cada uno de ellos.

- En el primer capítulo de esta guía presentamos lo que son los preliminares topológicos, en donde la conexidad, compacidad y teorema de valor intermedio son los temas que mas se van a utilizar para el estudio de los teoremas de punto fijo, cada uno de los temas a tratar fueron escritos con una bibliografía que se seleccionó previamente, si el lector quiere profundizar el contenido se le recomienda (ver [Munkres, 2002], [Dugundji, 1966], [Kelley, 1955], [Steen et al., 1978]).

- En el capítulo dos se desarrollo la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer lo mas claro posible y haciendo un mínimo de referencias a otras fuentes, con el propósito de dejarla al alcance del estudiante de Matemáticas, sin que tenga la necesidad de consultar numerosos libros y artículos a los cuales tal vez no tenga acceso, sin embargo si el estudiante quiere profundizar en los temas tratados se le recomienda (ver [Shashkin, 1991], [Adams and Franzosa, 2008], ).

- El tercer capítulo damos una breve introducción a funciones multivaluadas donde hacemos el uso de conceptos y algunas proposiciones para poder demostrar el teorema del punto fijo de Kakutani, posteriormente damos una introducción a los conceptos básicos de la Teoría de Juegos y los equilibrios de Nash, los contenidos se eligieron de manera que su comprensión sea clara, si el lector quiere profundizar el contenido se le recomienda (ver [Yuan, 2017], [Border, 1985], [Baum, 1991]).

# 1

# *Espacios Topológicos*

El objetivo principal de este capítulo es introducir los conceptos básicos de los espacios topológicos para la comprensión de los teoremas de punto fijo de Kakutani y Brouwer, en los capítulos posteriores, y como se relaciona con los equilibrios de Nash en la Teoría de juegos.
La topología, en términos muy generales es el estudio de la forma, la deformación de objetos, el estudio de su continuidad y la igualdad que hay entre ellos, por tal motivo las secciones a tratar hablan de funciones continuas, homeomorfismos, espacios conexos, compactos, métricos. Los temas que se han mencionado se pueden profundizar de la siguiente selección bibliográfica ver ([Munkres, 2002], [Rubiano, 2010], [Díaz and Calcines, 2005], [Pérez, 2015], [Morris, 1989]).
Este estudio de ninguna manera intenta remplazar la bibliografía de los cursos de topología. Son solo una guía para el estudiante y una motivación para la lectura del teorema de punto fijo de Kakutani y su aplicación en la teoría de juegos.

## 1.1 Topología

En este parte se introduce algunos conceptos básicos de topología y presentamos algunos resultados que se relacionan a estos concepto.

**Definición 1.1**

Sea $X$ un conjunto no vacío y $\tau$ una colección de subconjuntos de $X$. Se dice que $\tau$ es una **topología** sobre $X$ si:

i. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto $X$ pertenecen a $\tau$.

ii. La intersección finita de conjuntos cualesquiera de $\tau$ pertenece a $\tau$.

iii. La unión de cualquier familia de elementos de $\tau$ pertenece a $\tau$.

**Nota.** Vamos a denotar el espacio topológico $(X, \tau)$ como $X$

**Nota.** Los elementos de la colección $\tau$ se llaman **conjuntos abiertos** y la pareja $(X, \tau)$ se llama **espacio topológico**.

**Ejemplo 1.1.**

$$X = \{a,b,c,d,e,f\} \;\; \tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

Para que $\tau_1$ sea una topología vamos a verificar que satisface las tres propiedades de la definición 1.1

i. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto $X$ pertenecen a $\tau$.

ii. La intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\tau$ pertenece a $\tau$.

$$\{a\} \bigcap \{c,d\} = \{\emptyset\} \in \tau_1$$

iii. La unión de cualquier familia de elementos de $\tau$ pertenece a $\tau$.

$$\{a\} \bigcup \{c,d\} = a,c,d \in \tau$$

Por lo tanto $\tau_1$ es una topología en X.

**Ejemplo 1.2.**

$$X = \{a,b,c,d,e,f\} \;\; \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,e\}, \{b,c,d\}\}$$

Para que $\tau_2$ sea una topología debe verificar que satisface las tres propiedades de la definición 1.1.

Entonces $\tau_2$ no es una topología sobre de X, por que la unión

$$\{c,d\} \cup \{a,c,e\} = \{a,c,e,d\} \, \tau_2$$

no pertenece a $\tau_2$, por lo tanto $\tau_2$ no satisface la propiedad 3 de la definición 1.1.
Entonces $\tau_2$ no es una topología en X.

**Ejemplo 1.3.**

$$X = \{a,b,c,d,e,f\} \;\; \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{a,c,f\}, \{b,c,d,e,f\}\}$$

Para que $\tau_3$ sea una topología vamos a verificar que satisface las tres propiedades de la definición 1.1.

Entonces $\tau_3$ no es una topología sobre de X, por que la intersección

$$\{a,c,f\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,f\} \notin \tau_3$$

no pertenece a $\tau_3$, por lo tanto $\tau_3$ no satisface la propiedad 2 de la definición 1.1.
Entonces $\tau_3$ no es una topología en X.

**Ejemplo 1.4. Toplogía indiscreta**

Sea X un conjunto no vacio cualquiera y $\tau_i n = \{X, \emptyset\}$.
Para verificar que la topología indiscreta es un espacio topológico verificamos las tres propiedades:

i. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto $X$ pertenecen a $\tau_{in}$.

ii. La intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\tau$ pertenece a $\tau_{in}$.

$$\emptyset \cap X = \emptyset$$
$$X \cap \emptyset = \emptyset$$

iii. La unión de cualquier familia de elementos d e$\tau_{in}$ pertenece a $\tau_{in}$.

$$\emptyset \cup X = X$$
$$X \cup \emptyset = X$$

Entonces $\tau_{in}$ es un espacio topológico.

**Ejemplo 1.5. Topologia discreta**

La familia $\tau_d$ que consta de todos los subconjuntos de $X$. A esta topología se le denomina la topología discreta.
*Demostración*
La familia $\tau_d = \wp(x)$ de todos los subconjuntos de $X$ es una topología en $X$. Veamos que en efecto es una topología.

i. $\emptyset \subseteq X$ y asi $\emptyset \in \tau_d$
$X \subseteq X$ y asi $X \in \tau_d$

ii. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una subfamilia de elementos de $\tau_d$. Veamos que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_d$
como cada $U_\alpha \in \wp(x)$, entonces $U_\alpha \subseteq X$ y por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subseteq X$.
En conclusión, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \wp(x)$

iii. Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ una subfamilia de elementos de $\tau_d$.
Veamos que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_d$

Como $U_i \in \tau_d$, $U_i \subseteq X, i = 1, ..., n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq X$

En conclusión $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \wp(x)$.

Entonces que $\tau_d = \wp(x)$ es una topología en $X$.

A continuación se dan algunos ejemplos clásicos que los aceptaremos verdaderos sin demostración.

**EJEMPLOS CLÁSICOS**

**Ejemplo 1.6. La topología de Sierpinski**

Sea $X \neq \emptyset$ y $S = \{0, 1\}$ definimos

$$\tau_s = \{\emptyset, \{0\}, S\}$$

Es una topología.

**Ejemplo 1.7. Topología del punto incluido.**

Sea $X \neq \emptyset$ y $p \in X$ con $p$ fijo definimos

$$T_{pi} = \{U \in \wp(x) : p \in U \, o \, U = \emptyset\}$$

Es una topología.

**Ejemplo 1.8. Topología del punto excluido.**

Sea $X \neq \emptyset$ y $p \in X$ con $p$ fijo definimos

$$T_{pe} = \{U \in \wp(x) : p \notin U \, o \, U \in X\}$$

Es una topología.

**Ejemplo 1.9. Topología cofinita**

Sea $X \neq \emptyset$ definimos

$$\tau_c = \{A^c : A \text{ es conjunto finito }\} \cup \{\emptyset\}$$

Es una topología.

**Ejemplo 1.10. Topología conumerable**

Sea $X \neq \emptyset$ definimos

$$\tau_c = \{A^c : A \text{ es conjunto contable }\} \cup \{\emptyset\}$$

Es una topología.

## 1.2 Conjuntos abiertos y cerrados

En este parte se introduce algunos conceptos básicos de conjuntos abiertos y cerrados y presentamos algunos resultados que relacionan estos conceptos. En un espacio topológico el concepto de conjunto cerrado esta estrechamente relacionado con el concepto de conjunto abierto.

**Definición 1.2**

**Conjunto abierto.** Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Entonces los elementos de $\tau$ se dicen abiertos.

**Definición 1.3**

**Propiedades de conjuntos abiertos.**

Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico entonces

i. $\emptyset, X$ son conjuntos abiertos.

ii. La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

iii. La unión arbitraria (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Definición 1.4**

**Conjunto cerrado.** Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Un subconjunto $A$ de $X$ se dice cerrado si su complemento $A^c$ es un conjunto abierto de $(X,\tau)$.

**Nota.** Para que el lector no cometa algún error o mal interpretación con los nombres **abierto** y **cerrado**, cabe resaltar que algunos conjuntos que son abiertos también son cerrados, y algunos que no son ni abiertos ni cerrados.

**Ejemplos.**

1. En un cada espacio topológico, tanto como $X$ y $\emptyset$ son conjuntos abiertos y cerrados.

2. En un espacio indiscreto , los únicos conjuntos abiertos y cerrados son $X, \emptyset$.

3. Sea $X$ un espacio topológico y $\tau_2$

$$X = \{a,b,c,d,e,f\} \;\; \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,e\}, \{b,c,d\}\}$$

   Para este ejemplo vamos a ver cuales son conjuntos abiertos y cerrados.

*a*) El conjunto $\{a\}$ es abierto pero no cerrado.

*b*) El conjunto $\{b,c\}$ no es abierto ni cerrado.

*c*) El conjunto $\{c,d\}$ es abierto pero no cerrado.

*d*) El conjunto $\{a,b,e,f\}$ es cerrado pero no abierto.

**Teorema 1.1**

1 Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico entonces

i. $\emptyset, X$ son conjuntos cerrados.

ii. La intersección arbitraria (finita o infinita) de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

iii. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrados.

*Demostración.*

i. $\emptyset, X$ son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos $X, \emptyset$, respectivamente.

ii. Si $U_i$ es cerrado para $i = 1, ..., n$. Por las leyes de Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1} U_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i=1} U_i^{\complement}$$

el conjunto de la parte derecha de la igualdad es abierto, ya que es intersección finita de conjuntos abiertos

$$\text{Luego, } \bigcup_{i=1} U_i \text{ es cerrado.}$$

iii. Dada una colección de conjuntos cerrados $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.De acuerdo a las leyes de Morgan

$$\left(\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha\right)^{\complement} = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha^{\complement}$$

Debido a que $U_\alpha^{\complement}$ son abiertos por definición, la parte derecha de la igualdad es abierto, ya que es la unión de conjuntos abiertos.

$$\text{Por lo tanto } \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \text{ es cerrado.}$$

■

## 1.3 Subconjuntos y puntos notables

### 1.3.1 Puntos interiores

En topología, un punto interior es un punto que se encuentra dentro de un conjunto abierto.

**Definición 1.5**

Sea (x,$\tau$) un espacio topológico, $A \subset X$ y $p \in A$. Se dice que es un punto interior de $A$ si y solo si

$$\exists G \in \tau \text{ tal que } p \in G \subseteq A,$$

**Nota.** Vamos a denotar el punto interior como $\mathring{A}$

**Ejemplos.**

1. En un conjunto de números reales, cualquier número que se encuentre dentro de un intervalo abierto como [0, 1] es un punto interior.
2. En un plano, cualquier punto dentro de un círculo abierto es un punto interior.
3. En un espacio topológico, cualquier punto dentro de una bola abierta es un punto interior.
4. En una curva, cualquier punto dentro de un segmento abierto de la curva es un punto interior.

### 1.3.2 Frontera

En topología, un punto frontera es un punto que se encuentra en el límite o en la frontera de un conjunto dado. Es un punto que está en el borde entre un conjunto y su complemento. Es importante notar que en algunos casos, un punto frontera puede ser considerado tanto como punto interior o punto exterior dependiendo del contexto y de las propiedades que se le quieran dar al conjunto.

**Definición 1.6**

Sea (x,$\tau$) un espacio topológico, $A \subset X$ y $p \in A$. Se dice que es un punto de frontera de $A$ si y solo si

$$\forall G \in \tau \text{ tal que } p \in G \subseteq A, \text{ se tiene que } A \cap G \neq \emptyset \text{ y } A^C \cap G \neq \emptyset.$$

**Nota.** Se denota el punto de frontera de $A$ como $fr(A)$.

**Ejemplos.**

1. En un plano cartesiano, un punto frontera de un círculo abierto sería cualquier punto en el borde del círculo.
2. En un intervalo cerrado de números reales, un punto frontera sería cualquier número en los extremos del intervalo.
3. En un espacio topológico, un punto frontera sería cualquier punto que está en la frontera entre el espacio topológico y su complemento.
4. En una curva, cualquier punto en los extremos de un segmento cerrado de la curva es un punto frontera.
5. En una malla tridimensional, un punto frontera sería cualquier punto en los bordes de la malla.
6. En un conjunto definido geométricamente, como una esfera, un punto frontera sería cualquier punto en la superficie de la esfera.

### 1.3.3 Exterior

En topología, un punto exterior es un punto que no pertenece a un conjunto dado o que se encuentra en su frontera. En otras palabras, es un punto que no es un punto interior del conjunto.

**Definición 1.7**

Sea (X,$\tau$) un espacio topológico, $A \subset X$ . Se dice que es un punto exterior de $A$ como

$$ext(A) = int(A^C) = X \bar{\setminus} A$$

**Nota.** Se denota el punto exterior como $ext(A)$.

**Ejemplos.**

1. En un plano cartesiano, un punto exterior de un círculo abierto sería cualquier punto fuera del círculo, incluyendo el borde del círculo.
2. En un intervalo abierto de números reales, un punto exterior sería cualquier número fuera del intervalo, incluyendo los extremos del intervalo.

3. En un espacio topológico, un punto exterior sería cualquier punto que no pertenece al espacio topológico o cualquier punto que está en la frontera del espacio topológico.

4. En una curva, cualquier punto fuera de un segmento abierto de la curva es un punto exterior.

5. En una malla tridimensional, un punto exterior sería cualquier punto que se encuentra fuera de la malla, incluyendo los vértices de la malla.

### 1.3.4 Clausura

En topología, un punto de clausura es un punto que se agrega a un conjunto para formar su clausura. La clausura de un conjunto es el conjunto más pequeño que contiene al conjunto original y todos sus puntos de frontera.

**Definición 1.8**

Sea (X,$\tau$) un espacio topológico, $A \subset X$ y $p \in A$. Se dice que es un punto de clausura de $A$ si y solo si

$$\forall G \in \tau \text{ tal que } p \in G,\ G \cap A \neq \emptyset$$

**Nota.** Se denota el punto de clausura como $\bar{A}$.

**Ejemplos.**

1. Consideremos el subespacio $M = (0,1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. El conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto de $M$, su clausura en $\mathbb{R}$ es el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$ y su clausura en $M$ es el conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap M = (0, \frac{1}{2}]$

2. Considere la topología $\tau$ de $X = \{a,b,c,d,e\}$ donde los subconjuntos cerrados de $X$ son $\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}$
   Luego $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$, $\overline{\{a,c\}} = X, \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$

**Propiedades**

- $A \subset \bar{A}$
- $A$ es cerrado si y solo si $A = \bar{A}$

- $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

## 1.4 Funciones continuas

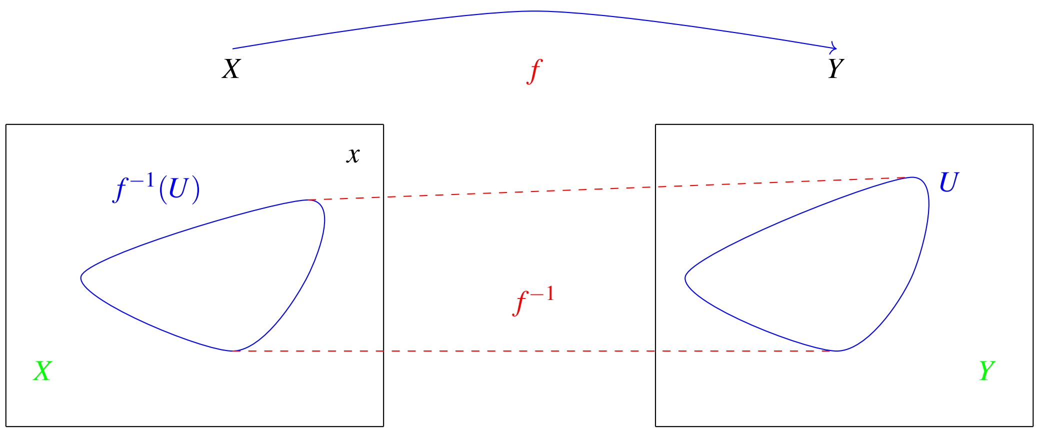
En este sección estudiamos la continuidad de funciones, caracterizamos las continuidad a través de los abiertos o de los cerrados, y presentamos las principales propiedades de las aplicaciones continuas (ver [Munkres, 2002], [Morris, 1989]).

En adelante , denotaremos las aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$, entre espacios topológicos $(X,\tau)$ y $(Y,\mu)$ como $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$

**Definición 1.9**

**Función continua.** Sean $(X,\tau)$ y $(Y,\mu)$ dos espacios topológicos, y $f$ una función de $X$ en $Y$ entonces $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ es **continua** *ssi* $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $X$ para cada conjunto abierto $U$ de $Y$.

**Nota.** $f^{-1}(U)$ es la imagen inversa de $U$,




**Ejemplo 1.11.** Consideramos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con la topología usual dada por $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces $f$ es continua.

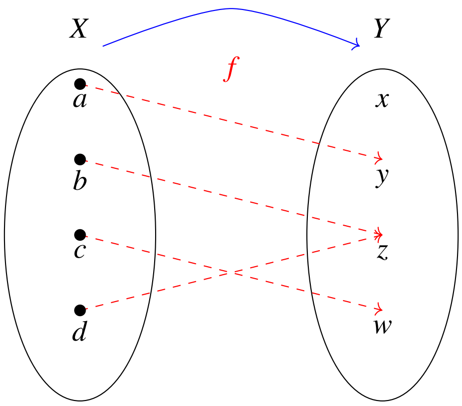
En efecto, para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}$, notemos que $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$

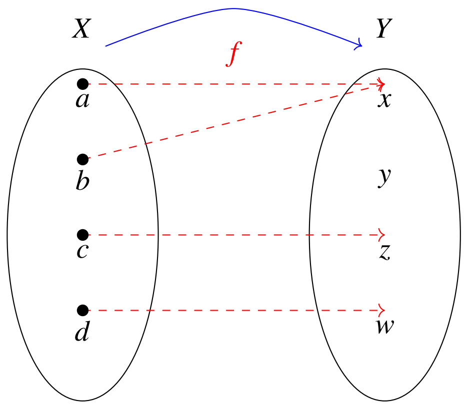
$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in U\}$$
$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : x \in U\}$$
$$f^{-1}(U) = U \in \tau_{usual}$$

**Ejemplo 1.12.** Cualquier función $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ en un espacio $Y$ con la topología indiscreta es continua, puesto que en esta topología los únicos abiertos son $\emptyset$ y $X$ y tenemos que siempre $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y $f^{-1}(Y) = X$.

**Ejemplo 1.13.** Cualquier función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$, donde $X$ tenga la topología discreta es continua, puesto que en esta topología todos los conjuntos son abiertos y, por tanto, cualquier imagen inversa es un abierto.

**Ejemplo 1.14.** Sean $X = \{a,b,c,d\}$ e $Y = \{x,y,z,w\}$ y las topologías
$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$; $\mu = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}\}$
Consideramos $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ y $g : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ definimos como:




**¿$f$ es continua?**

Ahora comprobaremos si $f$ es continua, para eso debemos comprobar todos los elementos con la definición 1.4.

$$Y \in \mu \Rightarrow f^{-1}(Y) = \{a,b,c,d\} = X \in \tau$$
$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}$$
$$f^{-1}(Y) = \{a,b,c,d\}$$

- $\emptyset \in \mu \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau.$

- $\{x\} \in \mu \Rightarrow f^{-1}(\{x\}) = \{x_0 \in X : f(x_0) \in \{x\}\}$
  $f^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \tau.$

- $\{y\} \in \mu \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{x_0 \in X : f(x_0) \in \{y\}\}$
  $f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \in \tau.$

- $\{x,y\} \in \mu \Rightarrow f^{-1}(\{x,y\}) = \{x_0 \in X : f(x_0) \in \{x,y\}\}$
  $f^{-1}(\{x,y\}) = \{a\} \in \tau.$

- $\{y,z,w\} \in \mu \Rightarrow f^{-1}(\{y,z,w\}) = \{x_0 \in X : f(x_0) \in \{y,z,w\}\}$
  $f^{-1}(\{y,z,w\}) = \{a,b,c,d\} = X \in \tau.$

Así comprobamos que $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\mu)$ es continua.

**¿$g$ es continua?**

Ahora comprobaremos si $g$ es continua para eso debemos comprobar todos los elementos cumple con la definición 1.4.

La función $g$ no es continua ya que encontramos un ejemplo que no cumple con la definición 1.4 por lo tanto notamos que:

- $\{y,z,w\}\in\mu\Rightarrow g^{-1}(\{y,z,w\})=\{x_0\in X:g(x_0)\in\{y,z,w\}\}$
  $f^{-1}(\{y,z,w\})=\{c,d\}\notin\tau.$

**Teorema 1.2**

Sean $(X,\tau)$, $(Y,\mu)$ y $(Z,\phi)$ espacios topológicos, $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\mu)$ y $g:(Y,\mu)\longrightarrow(Z,\phi)$ son continuas entonces la composición $g\circ f:(X,\tau)\longrightarrow(Z,\phi)$ es continua.

*Demostración.*

Para poder mostrar que la función compuesta es continua tenemos que que si $U\in\phi$ entonces $(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$ por la definición de continuidad.

Sea $U$ un conjunto abierto en $(Z,\mu)$, como $g$ es continua $g^{-1}(U)$ es abierto en $\tau$, entonces $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en $\tau$, pues $f$ es continua y $f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)$ por lo tanto queda demostrado que la composición $g\circ f$ es continua.

■

**Nota.** El siguiente resultado muestra que la continuidad puede ser descrita en terminos de conjuntos cerrados.

**Proposición 1.1**

Sean $(X,\tau)$ e $(Y,\mu)$ dos espacios topológicos, entonces $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\mu)$ *ssi* para cada conjunto cerrado $S$ de $Y$, $f^{-1}(S)$ es un conjunto cerrado de $X$.

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Si $S$ es cerrado, entonces $S^c$ es abierto de $Y$. Ademas $f^{-1}(S^c)$ es abierto en $X$, debido a la continuidad de $f$.

Notemos también que:

$$f^{-1}(S^c) = f^{-1}(Y \setminus S) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(S) = X \setminus f^{-1}(S) = (f^{-1}(S))^c$$

Donde $(f^{-1}(S))^c$ es cerrado de $X$.

$\Leftarrow$) Sea $G$ un subconjunto abierto de $Y$, entonces $G^C$ es cerrado de $Y$ y por lo tanto, $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ es un cerrado de $X$.

Entonces, $f^{-1}(G)$ es abierto de $X$ por lo que $f$ es continua.

Ya probada la doble implicación queda demostrado que la continuidad puede ser descrita en terminos de conjuntos cerrados.

■

**Ejemplo 1.15.** La función identidad $id : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ es continua si y solo si $\tau$ es mas fina que $\mu$.

Para poder entender cuando una topología es mas fina que otra se dará unas notas para comprendelo de manera mas clara.

**Nota.** Sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (X,\mu)$ de dice que $\tau$ es mas gruesa o mas débil que $\mu$ si $\tau \subseteq \mu$.

**Nota.** Sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (X,\mu)$ se dice que $\tau$ es mas fina o mas fuerte que $\mu$ si $\mu \subseteq \tau$.

**Nota.** Sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (X,\mu)$ se dice que $\tau$ es equivalente a $\mu$ si es fuerte y débil.

**Ejemplo 1.16.** La topología indiscreta es la mas **gruesa** de las topologías en un conjunto $X$.

$$\tau = \{\emptyset, X\}$$

Evidentemente, la topología indiscretaes la mas gruesa ya que está contenida en cualquier topología sobre $X$ ya que el $\emptyset$ y el total siempre son abiertos.

**Ejemplo 1.17.** La topología discreta es la mas **fina** de las topologías.

$$\tau = P(x)$$

Evidentemente, la topología discreta es la mas fina por ser ésta el conjunto potencia.

**Ejemplo 1.18.** Una función constante entre dos espacios topológicos siempre es continua.

**Definición 1.10**

**Función abierta.** Sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ una función. Se dice que $f$ es una función abierta si la imagen de todo conjunto abierto es abierta.

$$A \subset X, \textbf{abierto} \Longrightarrow f(A) \text{ es } \textbf{abierto}$$

**Definición 1.11**

**Función cerrada.** Sea $g : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$ una función. Se dice que $g$ es una función cerrada si la imagen de todo conjunto cerrado es cerrada.

$$B \subset X, \textbf{ cerrado} \Longrightarrow g(B) \text{ es } \textbf{cerrado}$$

**Proposición 1.2**

Sean $(X, \tau)$ e $(Y, \mu)$ dos espacios topológicos y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$ es una función biyectiva y continua, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i. $f$ es abierta

ii. $f$ es cerrada

iii. $f^{-1}$ es continua

*Demostración.*

i $\Rightarrow$ ii) Si $B \subset X$ es un cerrado entonces $f(B) = f(X - (X - B)) = Y - f(X - B)$ es un cerrado, pues $f(X - B) \in \mu$ por la hipótesis.

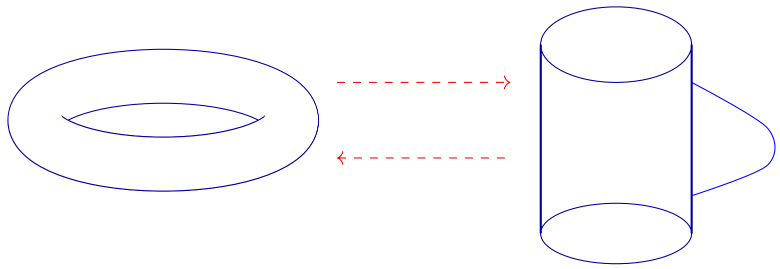
ii $\Rightarrow$ iii) Si $B \subset X$ es un cerrado entonces $(f^{-1})^{-1}(B) = f(B)$ es un cerrado por hipótesis, y por lo tanto $f^{-1}$ es continua.

iii $\Rightarrow$ i) Si $A \subset X$ es un abierto entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) =$ es un abierto, pues $f^{-1}$ es continua por hipótesis.

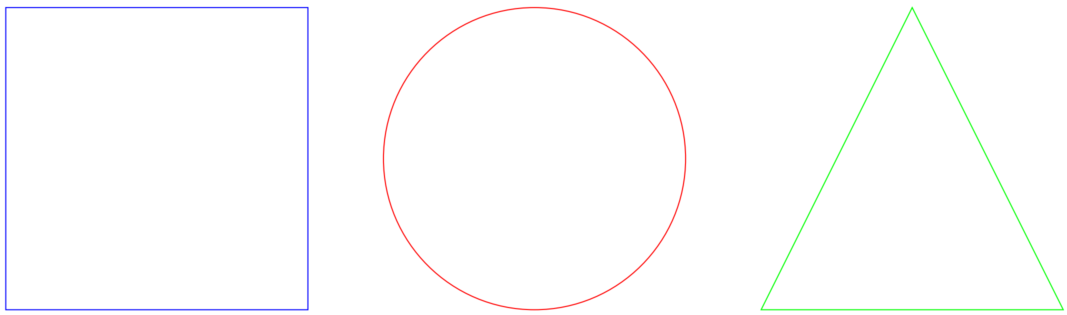
■

## 1.5 Homeomorfismos

Con la siguiente frase: Un topólogo no diferencia entre una dona y una taza se introduce a lo que son los homeomorfismos, en este sección estudiamos los homeomorfismos a partir de ejemplos,los caracterizamos a través de las funciones abiertas y cerradas y por ultimo presentamos algunas propiedades importantes de los homeomorfismos. Para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Munkres, 2002],[Morris, 1989]) especializado de Topología.



Sabemos que la continuidad es una propiedad fundamental en la topología, dos espacios los consideramos el mismo si cada uno de ellos puede deformarse de manera continua en el otro , a esto lo llamamos los espacios son homeomorfos. Un circulo es homeomorfo con un cuadrado y a la vez con un triangulo, es decir son equivalentes entre si ya que al realizar una deformación continua obtenemos uno del otro.



Como se vio que el circulo, cuadrado y triangulo son ejemplos de homeomorfismos los cuales ni la longitud, curvatura, torsión, área y volumen son propiedades geométricas no topológicas y por lo tanto no se preservan por homeomorfismos.

A continuación daremos la definición formal de homeomorfismos.

**Definición 1.12**

**Espacios homeomorfos.** Sean $(X,\tau)$ e $(Y,\mu)$ dos espacios topológicos.Entonces se dicen que son *homeomorfos ssi* existe una función $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\mu)$ tal que:

i. $f$ es biyectiva

> ii. $f$ es continua
>
> iii. $f^{-1}$ es continua
>
> Si cumple las tres propiedades decimos que es bicontinua.

**Nota.** Si existe esta función entre $(X,\tau)$ e $(Y,\mu)$, se dice que los espacios topológicos son homeomorfos y denotamos como $(X,\tau) \cong (Y,\mu)$.

**Nota.** Los espacios homeomorfos definen una una relación de equivalencia.

- **Reflexiva:** $X$ es homeomorfo a $Y$.
- **Simétrica:** $X$ es homeomorfo a $Y$ entonces $Y$ es homeomorfo a $X$ .
- **Transitiva:** $X$ es homeomorfo a $Y$ y $Y$ es homeomorfo a $Z$ entonces $X$ es homeomorfo a $Z$ .

*Comprobación*

**Reflexividad:** Ya que $f : X \longrightarrow X$ donde $x \longmapsto f(x) = x$ como $f$ es biyectiva y continua entonces $\exists f^{-1} : X \longrightarrow X$ donde $x \longmapsto f^{-1}(x)$ .

**Simetría:** Por hipótesis $X$ es homeomorfo a $Y$ entonces $\exists f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismos, tal que cumple las tres propiedades de la definición 1.5 por lo tanto hay un homeomorfisimo entre $Y$ y $X$ y hay un $\exists f^{-1} : Y \longrightarrow X$, $(f^{-1})^{-1} = f$.

**Transitividad:** Sean $(X,\tau)$, $(Y,\mu)$ y $(Z,\phi)$ espacios topológicos, $(X,\tau) \cong (Y,\mu)$ y $(Y,\mu) \cong (Z,\phi)$ entonces, existe $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ homeomorfismos y existe también $g : (Y,\mu) \longrightarrow (Z,\phi)$.

Consideramos la composición $g \circ f : (X,\tau) \longrightarrow (Z,\phi)$ es continua.

- si $f,g$ son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow \exists (g \circ f)^{-1}$.
- si $f,g$ son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es continua.

Como $g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow$ existe $(g \circ f)^{-1} : (Z,\phi) \longrightarrow (X,\tau)$ y probaremos ahora que $(g \circ f)^{-1})$ es continua.

Sea $U \in (X,\tau)$ y $(g \circ f)^{-1})(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$

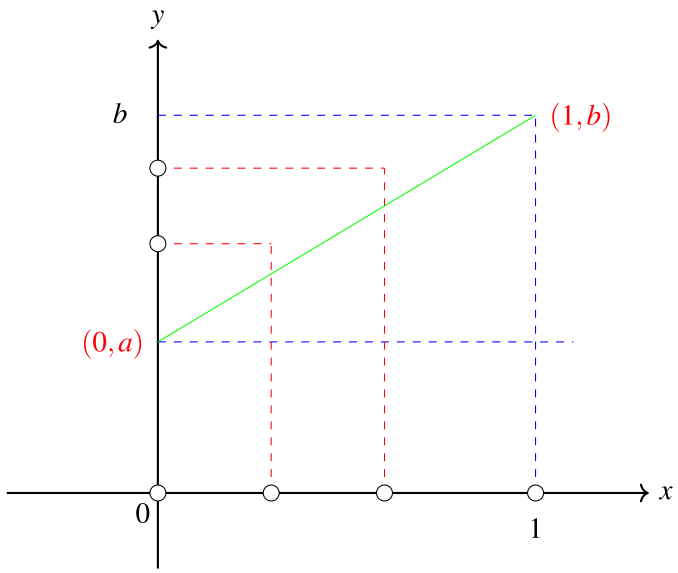
Entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \phi$

Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}$ es continua y así inferimos que $g \circ f$ es un homeomorfismo.

Con lo cual $(X,\tau) \cong (Z,\phi)$

Y así comprobamos que en los homeomorfismos hay una relación de equivalencia.

**Ejemplo 1.19.** Los intervalos $[a,b]$ y $[0,1]$ son homeomorfos con la topologia usual de $\mathbb{R}$.




Para hallar $f:[a,b]\longrightarrow[0,1]$ debemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(0,a)$ y $1,b$

$$\frac{y-b}{x-1}=\frac{b-a}{1-0}$$

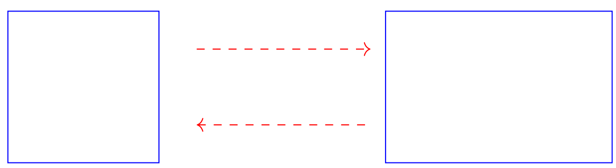
así despejamos y se obtiene $y=a(1-x)+bx$ entonces $f(x)=a(1-x)+bx$ si $x=0$, $f(0)=a$ y si $x=1$, $f(1)=b$

Ahora probaremos que que $f:[a,b]\longrightarrow[0,1]$ tal que $x\longmapsto f(x)=a(1-x)+bx$ es un homeomorfismos.

- Es evidente que $f$ es biyectiva
- $f$ es continua, puesto si tomamos un intervalo abierto $]c,d[$ dentro de $[0,1]$ se tiene $f(]c,d[)=\,]a(1-c)+bc,a(1-d)+bd[\subset(]c,d[)$
- $f^{-1}$ es continua, puesto que si consideramos un intervalo $]e,f[$ dentro de $]a,b[,f^{-1}(]e,f[)=\,]e,1-f[\subset(]0,1[)$ Por lo tanto $f:[a,b]\longrightarrow[0,1]$ tal que $x\longmapsto f(x)=a(1-x)+bx$ es un homeomorfismo.

**Nota.** Todo intervalo abierto es homeomorfo a otro intervalo abierto

**Ejemplo 1.20.** El cuadrado unidad y el rectángulo son homeomorfos por lo tanto tienen las mismas propiedades topológicas.



si tenemos un cuadrado de lado 2 y un rectángulo de base 2 y altura 4, podemos utilizar una escala de 2 en la dirección vertical para mapear el cuadrado al rectángulo. La función sería $f(x,y) = (x,2y)$ y su inversa sería $f^-1(x,y) = (x,y/2)$.

Ya que el área del cuadrado es igual a la suma de sus lados Y área del rectángulo es igual a base por la altura, por lo tanto sus áreas son distintas, entonces podemos decir que la noción de área no es una propiedad topológica.

**Ejemplo 1.21.** La composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo. Consideramos la composición $g \circ f : (X,\tau) \longrightarrow (Z,\phi)$ es continua.

- si $f,g$ son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow \exists (g \circ f)^{-1}$.
- si $f,g$ son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es continua.

Como $g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow$ existe $(g \circ f)^{-1} : (Z,\phi) \longrightarrow (X,\tau)$ y probaremos ahora que $(g \circ f)^{-1})$ es continua.

Sea $U \in (X,\tau)$ y $(g \circ f)^{-1})(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$

Entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \phi$

Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}$ es continua y así inferimos que $g \circ f$ es un homeomorfismo.

Con lo cual $(X,\tau) \cong (Z,\phi)$

**Proposición 1.3**

Sean $(X,\tau)$ e $(Y,\mu)$ dos espacios topológicos y $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ es una función biyectiva y continua, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i. $f$ es homeomorfismo

ii. $f$ es abierta

iii. $f$ es cerrada

*Demostración.*

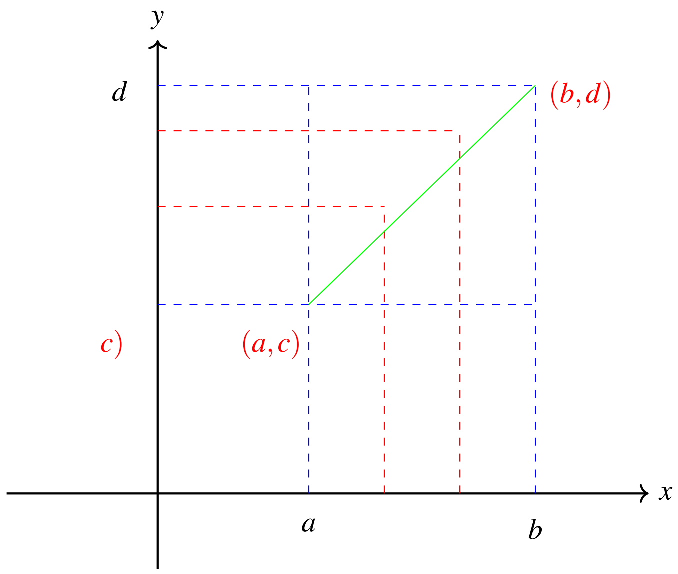
i $\Rightarrow$ ii) Si $f$ es homeomorfismo por hipótesis entonces $f$ y $f^{-1}$ son continuas por la definición 1.5 , como $f^{-1}$ es continua entonces para todo $u$ que es abierto en $X$,$(f^{-1})^{-1}(u)$ es abierto, luego $(f^{-1})^{-1}(u) = f(u)$, por lo tanto f es continua y abierta.

ii $\Rightarrow$ iii) Si $f$ es abierta y continua por hipótesis, y sea $c$ un conjunto cerrado de $X$, entonces $X - c$ es abierto,luego $f(X - c) = Y - f(c)$ es abierto por lo que $f(c)$ es cerrado, así $f$ es continua y cerrada.

iii $\Rightarrow$ i) Si f es cerrada, continua y biyectiva por hipótesis por lo que existe $f^{-1}$, luego si $c$ es un subconjunto cerrado de $X$, tenemos que $f(c)$ es cerrado en $Y$; este echo , junto con la igualdad $(f^{-1})^{-1}(c) = f(c)$ entonces se prueba que es continua y $f^{-1}$ también lo es.

$\blacksquare$

**Ejemplo 1.22.** El intervalo $]a,b[$ es homeomorfa a $]c,d[$.




**Camino 1:**

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{d-c}{b-a} \Longrightarrow f(x) = \frac{c-d}{b-a}(x-b)+d$$

donde $f$ es un homeomorfismos.

**Camino 2:**

$]a,b[ \cong ]0,1[$; $]0,1[ \cong ]c,d[$ Como $\cong$ es una relación de equivalencia, entonces $]a,b[ \cong ]c,d[$

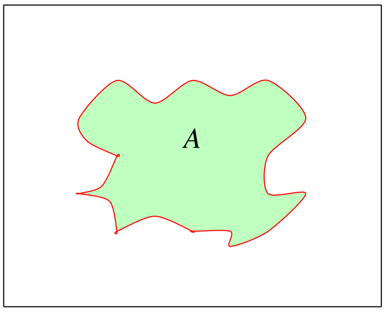
**Nota.** Es claro que cuando $f$ es un homeomorfismo, entonces un conjunto A es abierto en $X$ si y solo si su imagen es un abierto en $Y$ . Dos espacios homeomorfos son exactamente el mismo objeto a los ojos de un topólogo.

## 1.6 Espacios Conexos

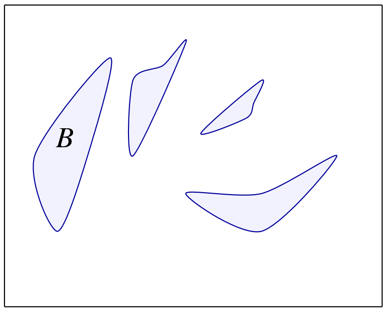
La conexidad es un concepto fundamental en la topología, en un lenguaje menos técnico conexo significa de una sola pieza o que no se puede separar, y este concepto lo introduciremos a lo que son espacios topológicos. No obstante, se darán dos definiciones que dan una idea intuitiva de conexidad, pero de diferente manera. Para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Munkres, 2002],[Morris, 1989]) o algún texto especializado de Topología.

**Definición 1.13**

Sea $X$ un espacio topológico. Una **separación** de $X$ es un par $U,V$ de abiertos disjuntos no triviales de $X$ cuya unión es $X$. El espacio $X$ se dice que es **conexo** si no existe una separación de $X$.




EL ESPACIO $A$ ES CONEXO




EL ESPACIO $B$ NO ES CONEXO

La siguiente definición de conexidad fue introducida por Mazurkiewicz en el año de de 1920. (ver en curso de topología general)

**Definición 1.14**

Sea $X$ un espacio topológico, se dirá **conexo** si y solo si los únicos subconjuntos de $X$ abiertos y cerrados en $X$ son el conjunto vacío y el propio $X$.

**Nota.** La intersección de conexos no es conexa.

Por ejemplo consideramos los siguientes conjuntos conexos, $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ y $H = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ Ahora $G \cap H = \{(1/2, \sqrt{3}/2); (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$ pero esta intersección no es conexa.

**Definición 1.15**

**Conjuntos disconexo.** Sea $X$ un espacio topológico. Una pareja $A, B$ de subconjuntos no vacíos. abiertos y disjuntos de $X$ es una disconexión de $X$, si $A \cup B = X$.

**Ejemplo 1.23.** Sea $X = \{a,b,c\}$ con la topología $T = \{X, \emptyset \{a\}\}$

Como el conjunto de cerrados que resulta es $C = \emptyset, X, \{b,c\}$ se tiene que $T \cap C = \{\emptyset, X\}$, y por lo tanto $(X, \tau)$ es conexo.

**Ejemplo 1.24.** Sea $X = \{a,b,c\}$ con la topología $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a\}\{b,c\}\}$

Como el conjunto de cerrados que resulta es $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a\}\{b,c\}\}$ se tiene que $T \cap C = \{\emptyset, X\} = T$, por lo tanto $(X, \tau)$ no es conexo.

**Nota.** La conexidad es una propiedad topológica.

**Teorema 1.3**

Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$, teniendo mas de un punto, son los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos y $\mathbb{R}$ mismo).

*Demostración.* Veamos que si $Y \subseteq \mathbb{R}$, es conexo entonces $Y$ es un intervalo.
Por reducción al absurdo, si $Y$ es un intervalo; entonces existen $a, b \in Y$ y $c \neq Y$ tales que $a < c < b$. Así $(c, \infty)$, $(-\infty, c)$ son abiertos en $\mathbb{R}$, tales que

$$Y \cap (-\infty, c) \neq \emptyset, \text{ ya que } a \in Y \cap (-\infty, c)$$

$$Y \cap (c, +\infty) \neq \emptyset, \text{ ya que } b \in Y \cap (c, +\infty)$$

$$\{Y \cap (-\infty, c)\} \text{ y } \{Y \cap (c, +\infty)\} \text{ son disjuntos y su unión es } Y.$$

Esto nos diría que $Y$ es disconexo. Luego, $Y$ debe ser un intervalo.
Ahora veamos que si $Y \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces $Y$ es conexo. Nuevamente por reducción al absurdo, supongamos que $Y$ no es conexo. Entonces existen $A, B$ conjuntos no vacíos, disjuntos y abiertos en $Y$ tales que $Y = A \cup B$.
Sean $a \in A$ y $b \in B$, supongamos sin perdida de generalidad que $a < b$.
Como $a, b \in Y = A \cup B$ y $Y$ es un intervalo, entonces $[a,b] \subseteq Y$ y así

$$[a,b] = [a,b] \cap Y = [a,b] \cap \{A \cup B\} = \{[a,b] \cap A\} \cup \{[a,b] \cap B\}$$

Pongamos $A_0 = [a,b] \cap A$ y $B_0 = [a,b] \cap B$, que son abiertos en $[a,b]$, no vacíos (ya que $a \in A_0$ y $b \in B_0$) y disjuntos y $[a,b] = A_0 \cup B_0$. Esto es, $A_0$ y $B_0$ forman una separación de $[a,b]$.
Como $A_0$ es no vacío y esta acotado superiormente ($b$ es una cota superior de $A_0$), sea $c = sup\, A_0$.
Así $a \leqslant c$. También $c \leqslant b$. Así $c \in [a,b] = A_0 \cup B_0$.
Luego $c \in A_0$ o $c \in B_0$.
Si $c \in B_0$; entonces $c \neq a$, ya que $a \in A_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Así $c \in (a,b]$. Esto es, $a < c < b$ o $c = b$.
En cualquier caso, como $B_0$ es abierto en $[a,b]$, existe $d$ tal que

$$(d,c] \subseteq B_0, \text{ esto es } (d,c] \cap A_0 = \emptyset$$

Si $c = b$; $x \leqslant c = b$ para todo $x \in A_0$ y $(d,c] \cap A_0 = \emptyset$ implica que $x \leqslant d$ para todo $x \in A_0$. Luego $d$ sería una cota superior de $A_0$ menos que $c = sup\, A_0$. Una contradicción, luego $c \neq b$.
Si $c < b$ : $(c,b] \subseteq B_0$ y así

$$(d,c] = (d,c] \cup (c,b] \subseteq B_0$$

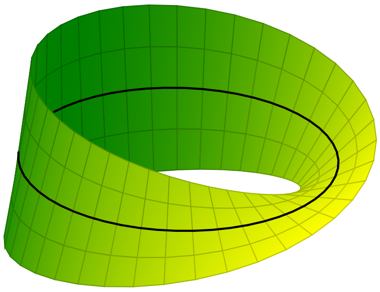
y nuevamente, $d$ sería una cota superior para $A_0$, menor que $c = sup\, A_0$. Una contradicción.
Luego no puede ser $c \in B_0$.
Así $c \in A_0$. Entonces $c \neq b$ (ya que $b \in B_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$).
Así $c \in [a,b)$. Esto es $c = a$ o $a < c < b$.
Como $A_0$ es abierto en $[a,b]$, existe $e$ tal que

$$[c,e) \subset A_0$$

Así existe $z \in [c,e)$ tal que $z \in A_0$. Luego,
$c = sup\, A_0 < z$. Una contradicción.
Luego $c \notin A_0$.
En conclusión, $c \in [a,b] = A_0 \cup B_0$ pero $c \notin A_0$ y $c \notin B_0$.
Esta contradicción viene de ser $Y$ un intervalo y suponer que no es conexo. Luego $Y$ debe ser conexo.
Hemos probado así que los únicos conexos en $\mathbb{R}$ con mas de un punto, son los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos o $\mathbb{R}$ mismo)

$\blacksquare$

**Ejemplo 1.25.** La circunferencia,la banda de Mobius, el toro, la botella de Klein, cono entre otros son espacios conexos, debido a que obtienen mediante una identificación topológica en el n-cubo. Estos temas no se presenta en el siguiente texto debido a que no es son de nuestro interés, para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Munkres, 2002]) o algún texto especializado de Topología.



**Ejemplo 1.26.** Todo espacio infinito $X$ con la topología de complementos finitos es un espacio conexo.

El siguiente resultado lo asumiremos como verdadero para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a ([Clara and Neira, 2008]) o algún texto especializado de Topología.

**Corolario 1.1**

Si $X$ e $Y$ son espacios topológicos homeomorfos, entonces $X$ es conexo si y solo si $Y$ es conexo. Esto nos dice que la conexión es un invariante topológico.

*Demostración.*

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre dos espacios topológicos $X$ e $Y$.

$\Rightarrow$ Supongamos que $X$ es conexo. Para demostrar que $Y$ es conexo, es necesario mostrar que para cualquier par de puntos $y_1, y_2 \in Y$, existe un camino continuo en $Y$ que conecta $y_1$ y $y_2$.

Para hacer esto, considere los puntos $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$ en $X$. Dado que $X$ es conexo, existe un camino continuo $g$ en $X$ que conecta $x_1$ y $x_2$. Como $f$ es un homeomorfismo, también es una función continua, lo que significa que $f \circ g$ es un camino continuo en $Y$ que conecta $y_1$ y $y_2$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $Y$ es conexo. Para demostrar que $X$ es conexo, es necesario mostrar que para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in X$, existe un camino continuo en $X$ que conecta $x_1$ y $x_2$.

Para hacer esto, considere los puntos $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ en $Y$. Dado que $Y$ es conexo, existe un camino continuo $h$ en $Y$ que conecta $y_1$ y $y_2$. Como $f$ es un homeomorfismo, también es una función continua, lo que significa que $f^{-1} \circ h$ es un camino continuo en $X$ que conecta $x_1$ y $x_2$.

El teorema se demuestra mediante la combinación de la definición de conexión y la continuidad de los homeomorfismos.

Este resultado demuestra que la conexión es un invariante topológico, es decir, que la conexión de un espacio topológico no depende de la forma particular en que se describa o se presente el espacio. ■

**Lema 1.1**
Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico no conexo, existe una aplicación $f : X \to \{0, 1\}$ continua y no constante.

*Demostración.*

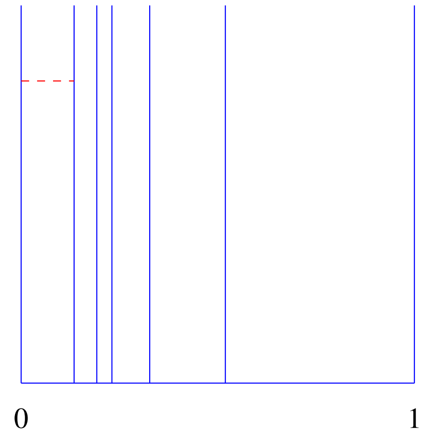
Si $(X, \tau)$ es no conexo, entonces $X = A \cup B$ con $A$ y $B$ abiertos y cerrados disjuntos. Definimos $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$. Esta aplicación es continua puesto que $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado, y lo mismo ocurre para $f^{-1}(\{1\})$ es abierto y cerrado.

■

**Ejemplo 1.27.** El espacio se Sierpinski es conexo. Sea $X \neq \emptyset$ y $S = \{0, 1\}$ definimos

$$\tau_s = \{\emptyset, \{0\}, S\} \text{ es conexo.}$$

**Ejemplo 1.28.** El espacio peine es un espacio conexo.



Cualquier pua es conexa (es como $[0, 1]$) y la union de ella con el mango tambien lo es. Como P es la union de todos estos peines unipua, de nuevo por la proposicion, es conexo.

**Ejemplo 1.29.** Todo espacio indiscreto es conexo.

En efecto, los únicos conjuntos abiertos y cerrados de la topología indiscreta son $\emptyset$ y $X$.

**Corolario 1.2**
Un subespacio es conexo si y solo si es conexo somo subespacio.

*Demostración.*

Sea $X$ un espacio topológico y $A$ un subespacio de $X$.

$\Rightarrow$ Supongamos que $A$ es conexo como subespacio de $X$. Para demostrar que $A$ es conexo en sí mismo, es necesario mostrar que para cualquier par de puntos $x, y \in A$, existe un camino continuo en $A$ que conecta $x$ y $y$.

Para hacer esto, podemos usar la inclusión $i : A \to X$ y la continuidad de $i$ para conectar $x$ y $y$ mediante un camino continuo en $X$. Específicamente, si existe un camino continuo $f$ en $X$ que conecta $x$ y $y$, entonces $f|_A$ es un camino continuo en $A$ que conecta $x$ y $y$, ya que $i \circ f|_A = f$ es continuo y $f|_A$ es el resultado de restringir $f$ a los puntos de $A$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $A$ es conexo en sí mismo. Para demostrar que $A$ es conexo como subespacio de $X$, es necesario mostrar que cualquier par de puntos de $A$ está conectado por un camino continuo en $X$.

Si $x, y \in A$, entonces existe un camino continuo en $A$ que conecta $x$ y $y$. La inclusión $i : A \to X$ es continua, lo que significa que $i$ preserva la conexión. Por lo tanto, $i \circ f$ es un camino continuo en $X$ que conecta $x$ y $y$. Esto demuestra que $A$ es conexo como subespacio de $X$.

■

**Ejemplo 1.30.** Un espacio discreto no unitario no es conexo.

Sea $X$ un espacio discreto no unitario. Sea $x \in X$ entonces $A = \{x\}$ y $B = X \setminus A$, como $X$ no es unitario , entonces $B \neq 0$. Entonces, como los conjuntos de sta topología son abiertos y cerrados a la vez, se sigue $A$ y $B$ son abiertos. Así que $A$ y $B$ son una separación de $X$, es decir $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ y por la definición de disconexo entonces $X$ no es conexo.

**Nota.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es conexo *ssi* $X$ y $\emptyset$ son los unicos subconjuntos abiertos y cerrados.

**Teorema 1.4**

Sean $(X, \tau)$ e $(Y, \mu)$ dos espacios topológicos. Si $X$ es conexo y $f : X \to Y$ es una aplicación continua entonces $f(x)$ es conexo.

*Demostración.*

Suponemos que $f(x)$ es disconexo, entonces los conjuntos $G$ y $H$ forman una disconexion, es decir, $G \cup H = f(x)$ y $G \cap H = \emptyset$.

Luego tomando imágenes reciprocas, tenemos:

$$f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(f(X)) \text{ y } f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\emptyset).$$

Luego

$$f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) = X \text{ y } f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset.$$

Debido a que $f$ es continua; $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son abiertos de $X$ y por ende forma una disconexion de $X$ que contradice el echo que $X$ es conexo.

Por lo tanto $f(X)$ es conexo. ■

## 1.7 Espacios métricos

Los espacios métricos visto de una forma intuitiva es, simplemente un conjunto en donde podemos hablar de **distancia** entre sus elementos. En este parte se introduce algunos conceptos básicos de espacios métricos y presentamos algunos resultados que relacionan estos. Para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Iribarren, 1984],[Prieto, 2005], [Clara and Neira, 2008]) o algún texto especializado de espacios métricos.

**Definición 1.16**

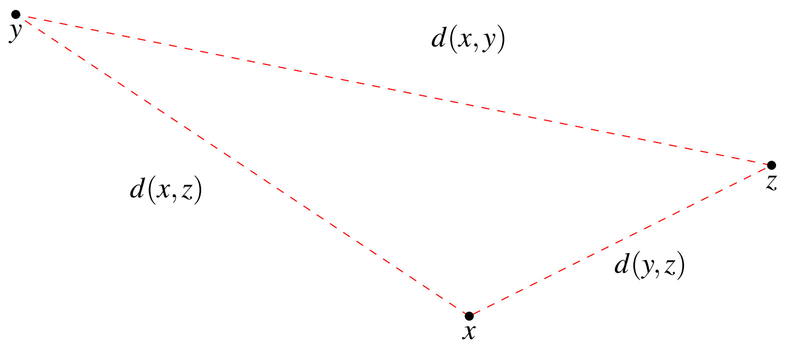
**Espacio Métrico.** Sea una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que $d$ es una métrica en $X$ *ssi* para todo $x, y, z \in X$ $d$ verifica las siguientes propiedades:

i. $d(x,y) \geq 0$

ii. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

iii. $d(x,y) = d(y,x)$ (**Simetría**)

iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (**Desigualdad triangular**)




**Nota.** Entonces $d$ es llamada **métrica** sobre $X$, $(X,d)$ es llamado **espacio métrico** y $d(x,y)$ se conoce como **distancia** entre $x$ y $y$.

No es elemental en varios de los ejemplos que se presentaran demostrar que la función d satisface los axiomas de una métrica. En algunos casos se requiere del conocimiento de ciertas desigualdades importantes.

Para poder mostrar algunas métricas se nos va a facilitar las siguientes desigualdades que las daremos por verdaderos sin demostración.

**Desigualdad de Young**

Sean $a, b, p, q$ números reales tales que:

$$a \geq 0, b \geq 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**Desigualdad de Hölder** Sean $a_k, b_k \geq 0$ números reales tales que:

$$k = 1, 2, \ldots, n, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}.$$

**Desigualdad de Minkowski** Sean $a_k, b_k \geq 0$ números reales con $k = 1, 2, \ldots, n$, y $p \geq 1$.

$$\left( \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}$$

**Ejemplo 1.31.** Sobre un conjunto no vacío $X$ definimos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \; si & x = y \\ 1 \; si & x \neq y \end{cases}$$

Esta métrica se conoce como la métrica discreta.

**Ejemplo 1.32.**

Si consideramos el conjunto $\mathbb{R}$ con la métrica

$$d(x, y) = |x - y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo 1.33.**

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, si $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ con la métrica

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

**Definición 1.17**

Sean $(E_1, d_1)$ y $(E_2, d_2)$ espacios métrico, $f$ una función de $(E_1, d_1)$ en $(E_2, d_2)$. Se dice que $f$ es una isometría de $(E_1, d_1)$ en $(E_2, d_2)$ si y solo si $f$ es biyectiva y satisface la propiedad:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y) \quad \forall x, y \in E_1$$

**Ejemplo 1.34.** La métrica del máximo $d_\infty$ son métricas equivalentes con la métrica euclidiana $d_2$.

$d_\infty \leq d_2 : d_\infty(x,y) = max|x_i - y_i| = max\{|x_1 - y_1|, |x_n - y_n|\} = |x_i - y_i|$

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^{2^{1/2}}$$

Entonces $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)$ son equivalentes.

**Definición 1.18**

**Bolas.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico cualquiera, Si tomamos un punto $a \in X$ y un numero real $r > 0$.

i. Se llama bola abierta de centro $a$ y radio $r$ al conjunto notado y definido por:

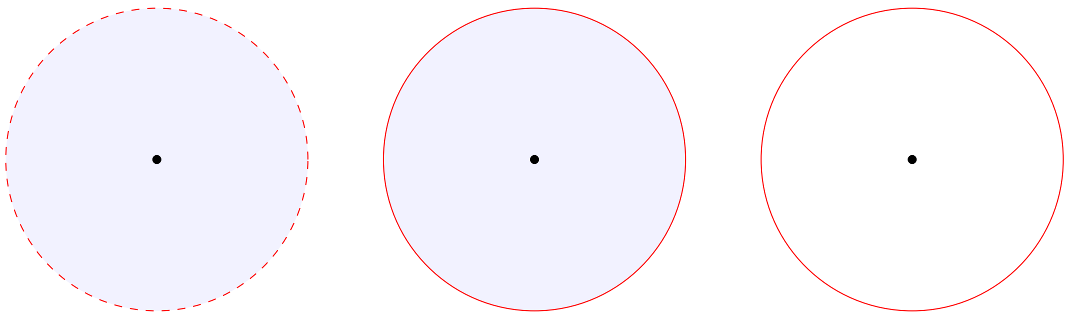
$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

ii. Se llama bola cerrada de centro $a$ y radio $r$ al conjunto notado y definido por:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

iii. Se llama esfera de centro $a$ y radio $r$ al conjunto notado y definido por:

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\}$$



**Definición 1.19**

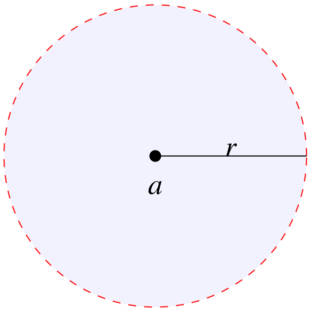
Sea $(X,d)$ un espacio métrico, $A \subset X$ $A \neq 0$. Se dice que $A$ es abierto si para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset A$.

**Teorema 1.5**

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Toda bola abierta de centro $x_0 \in X$ y radio $r > 0$ es un conjunto abierto de $X$.

**Ejemplo 1.35.** En $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana $B_r(a)$ es el intervalo abierto $(a-r, a+r)$.

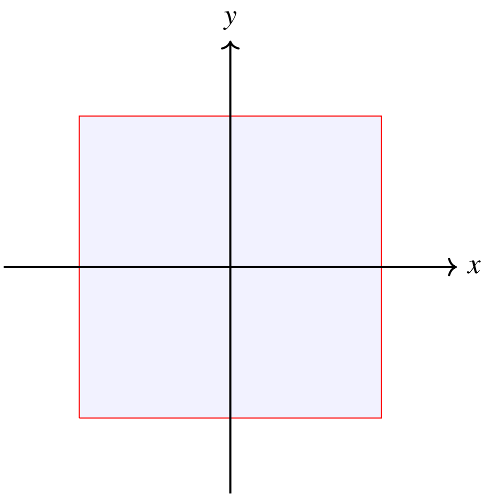
**Ejemplo 1.36.** En $\mathbb{R}^2$ con la métrica Euclidiana $B_r(a)$ es el disco abierto con centro $a$ y radio $r$.




**Ejemplo 1.37.** En $\mathbb{R}^2$ con la métrica $d_1$ dado por

$$d^* = max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

la bola abierta $B_1(0,0)$ se ve como:




**Ejemplo 1.38.** En $\mathbb{R}^2$ con la métrica $d_1$ dado por

$$d^* = \{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|\}$$

la bola abierta $B_1(0,0)$ se ve como:

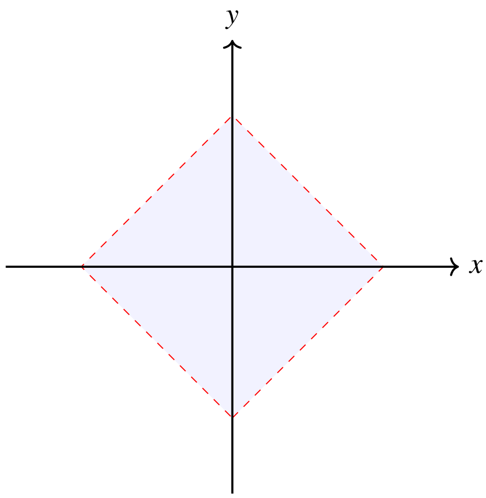



Figura 1.1: Bola abierta

**Nota.** Un grupo de métricas se dice que son equivalentes si ellas inducen la misma topología sobre $X$.

## 1.8 Espacios Compactos

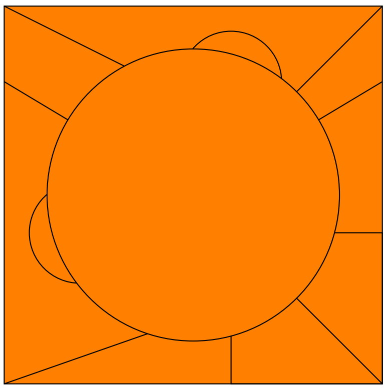
Los espacios compactos poseen una de las propiedades más importantes de los resultados fundamentales de la topología y el análisis,que en cierta forma los hace espacios topológicos, aunque no es fácil dar una idea intuitiva de qué es un espacio compacto trataremos de que el lector comprenda a base de ejemplos sencillos y detallados.

En esta parte se revisarán los conceptos básicos relacionados con la compacidad, se analizarán diversos teoremas, preposiciones y ejemplos.

Para una lectura más completa el lector interesado puede referirse a (ver [Munkres, 2002],[Díaz and Calcines, 2005], [Quevedo, 2003]) o algún texto especializado de topología.

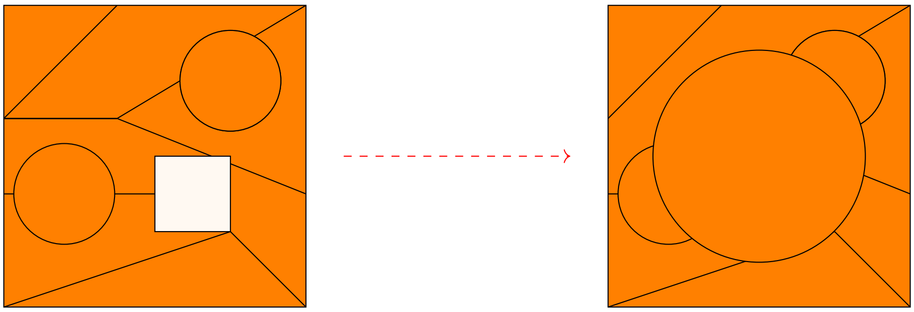
**Definición 1.20**

**Recubrimiento.** Una colección $A$ de subconjuntos de un espacio $X$ se dice que cubre $X$, o que es un recubrimiento de $X$, si la unión de los elementos de $A$ es igual a $X$. Se llama recubrimiento abierto de $X$ si sus elementos son subconjuntos abiertos de $X$.



**Definición 1.21**

**Espacio Compacto.** Se dice que un espacio X es compacto si todo recubrimiento abierto A de X contiene una subcolección finita que también cubre X.



**Nota.** La compacidad es una propiedad topológica, esto se preserva por homeomorfismos.

La siguiente visualización de la compacidad se debe a John D. Baum:
Supongamos que una gran multitud de personas posiblemente infinitas están afuera bajo la lluvia, y que cada una de estas personas usa su sombrilla, claramente ellas permanecen sin mojarse. Pero por supuesto es posible que ellas estén juntas de manera tan compacta, que no sea necesario sino que un numero finito de ellas abran sus sombrillas y todavía permanezcan sin mojarse. En este caso pensamos que ellas forman una especie de espacio compacto.(ver [Baum, 1991] )

**Ejemplo 1.39.** Cualquier espacio topológico con un numero finito de abiertos distintos, sera compacto ya que todo recubrimiento abierto es finito, y se tiene a sí mismo como sobrecubrimiento que garantiza que sea compacto.

**Ejemplo 1.40.** Todo espacio indiscreto es compacto, como consecuencia del ejemplo de arriba.

**Ejemplo 1.41.** Los únicos espacios topológicos discretos $(X,T_D)$que son compactos son los finitos, debido a que si $X$ es infinito entonces $A = x : x \in X$es un recubrimiento abierto cuyo sobrecubrimiento es el mismo, por lo que no admite ningún subrecubrimiento finito

**Ejemplo 1.42.** El espacio topológico cofinito $(X,T_{cof})$ es compacto.
Supongamos que $G_{ii \in I}$ es un recubrimiento de abiertos de X. Ahora escogemos cualquier $G \in \{G_i\}_i \in I$.Puesto que trabajamos con la topología cofinita., $X \setminus G$ es un conjunto finito, el cual lo podemos denotar como:

$$X \setminus G = \{g_1 ... g_n\} = (g_1 \cup g_2 \cup ... \cup g_n)$$

$G_i.i \in I$ es un recubrimiento abierto de $X$ por lo tanto para cada uno de los elementos de $\{g_1 ... g_n\}$ existe al menos un conjunto $G_i$tal que $g_k \in G_{i_k}$ y $G_{i_k} \in \{G_{i_k}\}_i \in I$ para $k = 1, ..., n$.
Así $X \setminus G \subset G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$ y $X = G \cup (X \setminus G) = G \cup G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$ lo que da un subcubrimiento finito y por lo tanto $X$ es compacto.

**Ejemplo 1.43.** El espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto ya que si $\{(-n,n)\}_n \in \mathbb{N}$ es un recubrimiento finito abierto no admite ningun sobrecubrimiento finito .

**Proposición 1.4**
El intervalo cerrado $[0,1]$ es compacto.

*Demostración.*

Sea $G_i$, $i \in I$,cualquier recubrimiento abierto de $[0,1]$. Entonces $x \in [o,1]$, existe un $G_i$ tal que $x \in G_i$ es un abierto alrededor de x, existe un intervalo abierto $U_x$ en $[0,1]$ tal que $x \in U_x \subseteq G_i$.
Ahora definimos un subconjunto $S$ de $[0,1]$ como sigue $S = \{z : [0,z]\}$ puede ser recubierto por un numero finito de $U_x$ así $z \in S \Leftrightarrow [0,z] \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$, para $x_1, \ldots, x_n$.
Ahora sea $x \in S$ $y \in U_x$.
Entonces como $U_x$ es un intervalo que contiene a $x$ e $y$, $[x,y] \subseteq U_x$.(Aqui asumimos sin perdida de generalidad que $x \leq y$).
Así $[0,y] \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \cup U_x$ lo que implica que $y \in S$.
Así para cada $x \in [0,1]$, $U_x \cap S = U_x$ o $\emptyset$.
Esto implica que $S = \bigcup\limits_{x\in S} U_x$ y $[0,1] \setminus S = \bigcup\limits_{x\notin S} U_x$.
Con lo cual tenemos que $S$ es abierto y $S$ es cerrado en $[0,1]$ entonces $S = [0,1]$ o $S = \emptyset$.
Sin embargo $0 \in S$ y así $S = [0,1]$ ; esto implica que $[0,1]$ puede ser recubierto por un numero finito de $U_x$. Así $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$.
Para cada $U_{x_i}$ esta contenido en un $G_i.i \in I$. Por $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$ y de esta forma se prueba que $[0,1]$ es compacto.

■

### 1.8.1 Continuidad y compacidad

La siguiente proposición nos dice que la imagen continua de un espacio compacto es compacto.

**Proposición 1.5**
Sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\mu)$ una funcion continua sobreyecctiva. Si $(X,\tau)$ es compacto, entonces $(Y,\mu)$ es compacto.

*Demostración.* Sea $G_i$, $i \in I$, cualquier recubrimiento abierto de $Y$ es decir $Y \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Entonces

$f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} G_i)$; que es,$X \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$.
Así $f^{-1}(G_i)$, $i \in I$, es un recubrimiento abierto de $X$. Como $X$ es compacto, existen $i_1, ...; i_n$ en $I$ tal que $X \subseteq f^{-1}(G_{i_1}) \cup ... \cup f^{-1}(G_{i_n})$ con lo cual

$$\begin{aligned} Y = f(X) &\subseteq f(f^{-1}(G_{i_1}) \cup ... \cup f^{-1}(G_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(G_{i_1})) \cup ... \cup f(f^{-1}(G_{i_n})) \\ &= G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n} \end{aligned}$$

debido a que f es sobreyectiva. Asi tenemos que $G_{i_n}$ es un recubrimiento finito de $G_i$.
Por lo tanto, $Y$ es compacto.

■

**Corolario 1.3**
Sean $(X,\tau)$, $(Y,\mu)$ espacios topológicos homeomorfos. Si $(X,\tau)$ es compacto, entonces $(Y,\mu)$ es compacto.

El siguiente corolario afirma que si dos espacios topológicos son homeomorfos y uno de ellos es compacto, entonces el otro también lo es, se conoce como la Invariancia de la Compactez. Este corolario se encuentra en varios libros de texto de topología, como "Topology"de James R. Munkres o "General Topology"de Stephen Willard (ver [Munkres, 2002]).

**Corolario 1.4**
Para $a$ y $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo cerrado $[a,b]$ es compacto, mientras que el intervalo abierto $]a,b[$ no es compacto.

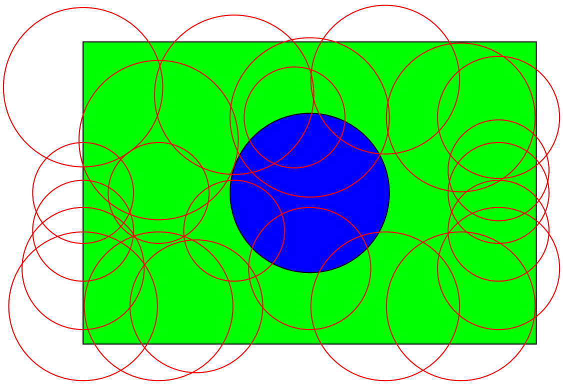
*Demostración.*

Sabemos que $[a,b]$ es homeomorfo a $[1,0]$ según lo descrito en el ejemplo (homeomorfismos) si $[0,1]$ es compacto, así por la proposición 1.4, $[a,b]$ es compacto.
Por otro lado que $]a,b[$ es homeomorfo a $]0,+\infty[$ pero $]0,+\infty[$ no es compacto entonces $]a,b[$ no es compacto.

■

### 1.8.2 Conjuntos cerrados, acotación y compacidad

**Proposición 1.6**
Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.



*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto cerrado de un espacio compacto $(X,\tau)$. Sean $G_i \in I$, $i \in I$ cualquier recubrimiento de $A$. Entonces $X \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \cap (X \setminus A)$

Donde $A$ es la parte azul, la verde es su complemento y los circulos en rojo son el recrubrimiento de $G_i$.

que es, $G_i \in I$, $i \in I$, unido al conjunto abierto $(X \setminus A)$ es un recubrimiento abierto de $X$ Por lo tanto existe un recubrimiento finito $G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}, (X \setminus A)$.

Así $X \subseteq G_{i_1} \cup, \ldots, \cup G_{i_k} \cup (X \setminus A)$. Por lo tanto, $A \subseteq G_{i_1} \cup, \ldots, \cup G_{i_k} \cup (X \setminus A)$ que claramente implica $A \subseteq G_{i_1} \cup, \ldots, \cup G_{i_k}$ ya que $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

Por ende $A$ tiene un recubrimiento finito y así es compacto. ■

**Nota.** Si $(X \setminus A)$ no esta en el recubrimiento finito entonces podemos incluirlo y seguiríamos un recubrimiento finito de $X$

**Proposición 1.7**
Un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ es acotado.

*Demostración.* La demostración la realizaremos por contraposición.
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado. Entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$.

Pero $\{]-n,n[: n \in \mathbb{N}\}$ no tiene ningún recubrimiento finito de $A$ ya que $A$ no es acotado. Por lo tanto $A$ no es compacto. Así todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ son acotados. ■

**Teorema 1.6**
**(Heine-Borel)** Cada subconjunto acotado y cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto.

*Demostración.*
Si $A$ es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, entonces $A \subseteq [a,b]$, para algún $a,b \in \mathbb{R}$. Como $[a,b]$ es compacto y $A$ es un subconjunto cerrado, por la proposición 1.8 $A$ es compacto.

■

Los siguientes ejemplos se explicaron en el colorario 1.5 si el lector quiere mas información (ver [Díaz and Calcines, 2005]).

**Ejemplo 1.44.** Los intervalos cerrados y acotados son subconjuntos compactos en la recta real.

**Ejemplo 1.45.** Los intervalos abiertos no son subconjuntos compactos en la recta real.

**Nota.** En $\mathbb{R}$ se dice que $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y solo si $A$ es cerrado y acotado.

Tambien podemos generalizar el Teorema de Heine-Borel para $\mathbb{R}^n$, solamente se enunciara su resultado si se quiere explorar mas del tema se sugiere al lector revisar la demostración (ver [Díaz and Calcines, 2005])

**Teorema 1.7**
**(Heine-Borel)** Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

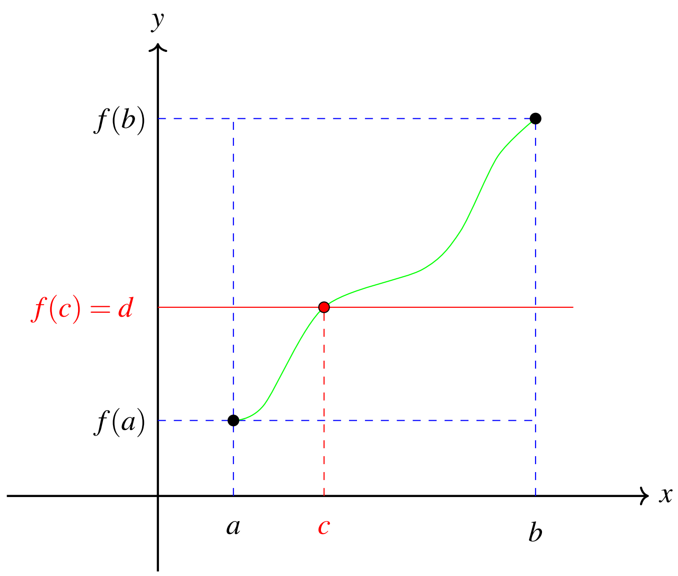
**Nota.** En general en espacios métricos, ser compacto implica ser cerrado y acotado pero su reciproco no siempre cumple.

## 1.9 Teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio es uno de los más importantes y útiles resultados en cursos de cálculo. Este establece una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$, toma cada valor entre los valores $f(a)$ y $f(b)$. Mas precisamente,

**Teorema 1.8**

**Teorema del valor intermedio sobre $[a,b]$.** Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua. Si $d$ está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=d$




Una consecuencia importante y de gran utilidad de este teorema es la garantía que da sobre la existencia de soluciones para ecuaciones del tipo $f(x)=0$, como lo muestra el siguiente colorario.

**Proposición 1.8**

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos. Entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene solución entre $a$ y $b$.

*Demostración.*

Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos entonces 0 esta entre $f(a)$ y $f(b)$.

Se sigue del teorema del valor intermedio que existe $c\in[a,b]$ talque $f(c)=0$. Esto es, la ecuación $f(x)=0$ tiene solución entre $a$ y $b$. El teorema del valor intermedio para funciones reales sobre intervalos $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$, puede ser establecido como una consecuencia de manera más general como un teorema de topología en espacios conexos.

■

**Teorema 1.9**

**Teorema del valor intermdedio en espacios topológicos.** Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico conexo y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $x, y \in f(X)$ y $x \leq c \leq y$, entonces existe $a$ en $X$ tal que $c = f(a)$.

*Demostración.*

Si $c = x$ o $c = y$, entonces el resultados se tiene de la hipótesis.

Así, veamos el caso $x < c < y$. Notemos que como $X$ es conexo y $f$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo en $\mathbb{R}$.

Probaremos por contradicción que $c \in f(X)$. Supongamos que $c \notin f(X)$.

Entonces $(-\infty, c)$ y $(c, +\infty)$ son subconjuntos abiertos(no triviales) y disjuntos de $\mathbb{R}$ tal que

$$f(X) \subset (-\infty, c) \cap (c, +\infty).$$

Así, $f(X) = [(-\infty, c) \cup (c, +\infty)] \cap f(X) = [(-\infty, c) \cap f(X)] \cup [(c, +\infty) \cap f(X)]$ con $(-\infty, c) \cap f(X)$, $(c, +\infty) \cap f(X)$ abiertos en $f(X)$, no triviales (pues $x \in (c, +\infty) \cap f(X), y \in (c, +\infty) \cap f(X)$), disjuntos. Esto es, $(-\infty, c) \cap f(X)$, $(c, +\infty) \cap f(X)$ es una separación de $f(X)$ en $f(X)$, lo que es una contradicción; pues $f(X)$ es conexo.

En consecuencia; tiene que ser $c \in f(X)$. ■

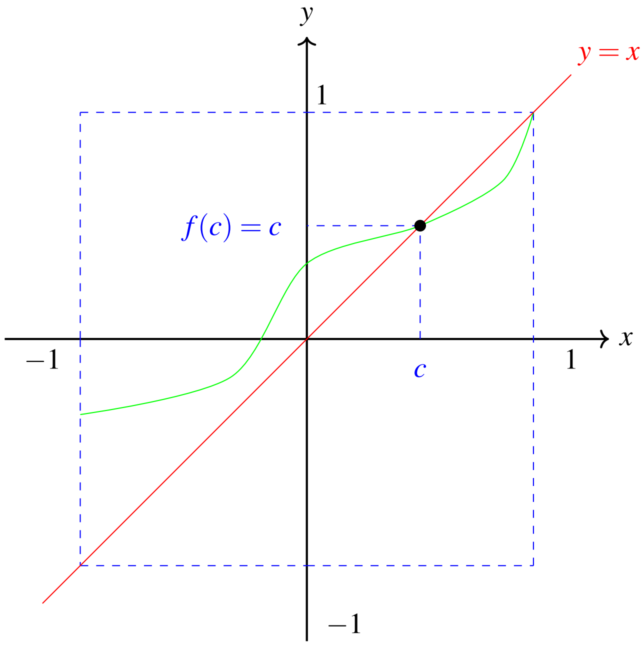
De este teorema del valor intermedio en espacios topológicos se sigue el teorema del valor intermedio para funciones reales sobre intervalos $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, ya que $[a, b]$ es conexo en $\mathbb{R}$.

Una consecuencia útil del teorema del valor intermedio es la siguiente versión unidimensional del teorema del punto fijo de Brouwer.

**Teorema 1.10**

**Teorema unidimensional del punto fijo de Brouwer.** Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ continua. Entonces, existe $c \in [-1, 1]$ talque $f(c) = c$. (Este punto c es llamado un punto fijo de $f$).

Podemos visualizar gráficamente por que se tiene el teorema.




Por ser $f$ continua, su gráfico va de manera continua del lado izquierdo del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ a su lado derecho y por tanto debe contar a su diagonal $y = x$ $(x \in [-1,1])$ en algún punto $(c,c) = (c, f(c))$ con $c \in [-1,1]$.

Así, $f(c) = c$.

*Demostración*

Definamos la función $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, $g$ es continua. Además,

$-1 \leqslant f(-1) \wedge f(1) \leqslant 1$ implican que $0 \leqslant f(-1) - (-1) = g(-1) \wedge g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

Esto es $g(-1)$ y $g(1)$ tiene signos opuestos y por tanto 0 esta entre $g(-1)$ y $g(1)$.

Se sigue del teorema del valor intermedio que existe $c \in [-1,1]$ tal que $g(c) = f(c) - c = 0$ y por tanto $f(c) = c$.

El teorema del punto fijo de Brouwer (n-dimensional) establece que cada función continua $f : B^n \longrightarrow B^n$ de la bola n-dimensional en si misma, tiene un punto fijo. Para los intereses de nuestro trabajo daremos una prueba de la versión 2-dimensional del teorema del punto fijo de Brouwer.

# 2

# *Teorema del punto fijo de Brouwer*

Como puede observarse, este capítulo consiste de muchas definiciones y unos cuantos resultados que finalmente culminan en la demostración del Teorema de punto fijo Brouwer para discos. En este capítulo estudiaremos y y daremos una demostración del teorema de punto fijo de Brouwer 2-dimensional. La demostración está basada en probar su equivalencia con el Teorema de no existencia de espacios (Retracts) del disco unitario $B^2$ en el circulo unitario $S^1$. Este resultado forma parte de estudios avanzados en Topología Algebraica. Puesto que estos estudios en Topología Algebraica son propios de niveles de posgrado y no son tratados en nuestros estudios de pregrado, nos permitiremos aquí, enunciar sin demostración algunos resultados propios de esta área, esto con el fin de alcanzar de manera rigurosa los objetivos del capítulo.

Los teoremas de punto fijo son algunas de las herramientas matemáticas básicas que se utilizan para demostrar la existencia de conceptos de solución, o de equilibrio.

Luego estableceremos algunos resultados generales tanto definiciones, teoremas, proposiciones y ejemplos. Utilizando estos resultados y los del capítulo anterior podremos demostrar el teorema. Para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Shashkin, 1991],[Adams and Franzosa, 2008], [Agarwal et al., 2001]) o algún texto especializado de Topología Algebraica.

## 2.1 Espacios con la propiedad del Punto Fijo

**Definición 2.1**

Sea $f : X \longrightarrow X$ una función. Un punto $x \in X$ se llama un punto fijo de $f$ si $f(x) = x$.

Un espacio topológico $X$ se dice que tiene la propiedad del punto fijo si cada función continua $f : X \longrightarrow X$ tiene un punto fijo.

**Ejemplos.**

- $[-1, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo, por el teorema de punto fijo de Brouwer unidimensional; ya demostrado antes.
- La recta real $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad del punto fijo, ya que existen funciones continuas de $\mathbb{R}$

en $\mathbb{R}$ que no tienen punto fijo. Por ejemplo la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+1$, es continua y no tiene punto fijo.

La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica, como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 2.1**
Si los espacios $X$ e $Y$ son homeomorfos, entonces $X$ tiene la propiedad de punto fijo si y sólo sí $Y$ la tiene.

*Demostración.*
$\Rightarrow$) Si $X$ tiene la propiedad del punto fijo Veamos que una función $f:Y\longrightarrow Y$ continua tiene punto fijo.
Por hipótesis tenemos que $X$ e $Y$ son homeomorfos
luego existe $h:X\longrightarrow Y$ es biyectiva y bicontinua, es decir homeomorfismo
La composición $h^{-1}\circ f\circ h:X\longrightarrow X$ es continua, ya que $h$ es homeomorfismo, $f$ es continua y $h^{-1}$ es continua. (Como se muestra en la figura)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f\ cont."] \arrow[r, bend left] & Y \arrow[dl, "h^{-1}"] \arrow[dl, bend left] \\ X \arrow[u, "h"] \arrow[u, bend left] & \end{tikzcd}$$

Como $X$ tiene la propiedad de punto fijo, entonces la composición $h^{-1}\circ f\circ h$ tiene un punto fijo, es decir $\exists x\in X$ talque $h^{-1}\circ f\circ h(x)=x$

$$h^{-1}(f(h(x)))=x$$

$$h\cdot h^{-1}(f(h(x)))=h(x)$$

$$f(h(x))=h(x)$$

entonces $h(x)$ es punto fijo de $f$
Así $Y$ tiene la propiedad del punto fijo.
$\Leftarrow$) Se manera analoga a la prueba anterior. Si $Y$ tiene la propiedad del punto fijo. Veamos que la función $f:X\longrightarrow X$ continua entonces tiene punto fijo.

■

El teorema de punto fijo de Brouwer establece que la bola cerrada $n-$dimensional $B^n$ tiene la propiedad del punto fijo (L.E.J. Brouwer). Mostraremos en este capítulo que el teorema de punto fijo de Brouwer es equivalente al teorema de no existencia de retracciones de $B^n$ en $S^{n-1}$ 2-dimensional (esto es, el caso $n = 2$), su enunciado es como sigue.

**Teorema 2.2**

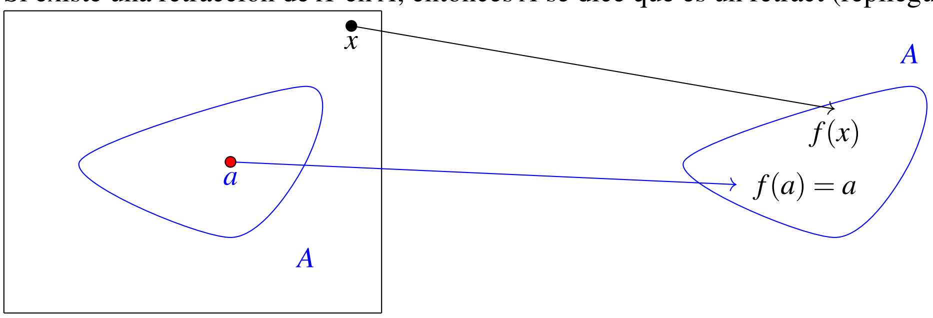
**Teorema de la no-retracción 2-dimensional.** No existe una retracción del disco $B^2$ sobre su disco frontera $S^1$.

Como comentamos al principio del capítulo, este teorema forma parte de estudios avanzados en Topología Algebraica, más precisamente de Homotopías y teoría del grado. Así comenzaremos donde algunas nociones básicas.

**Definición 2.2**

Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Una retracción de $X$ en $A$, es una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$.

Si existe una retracción de $X$ en $A$, entonces $A$ se dice que es un retract (repliegue) de $X$.



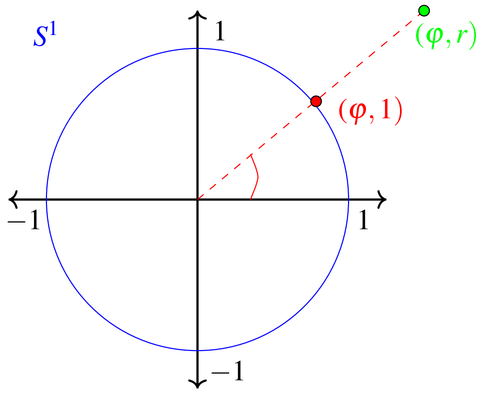

**Ejemplo 2.1.** Si $A = \{a\}$ es un subconjunto del espacio topológico $X$, entonces $A = \{a\}$ es un retract de $X$, ya que la función $f : X \longrightarrow A$ dado por $f(x) = a$ es una retracción de $X$ en $\{a\}$.

**Ejemplo 2.2.** El círculo $S^1$ es un retract de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Usando coordenadas polares $(\theta, r)$ para los puntos de $\mathbb{R}^2$, la función

$f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow S^1$

$(\theta, r) \longrightarrow f(\theta, r) = (\theta, 1)$

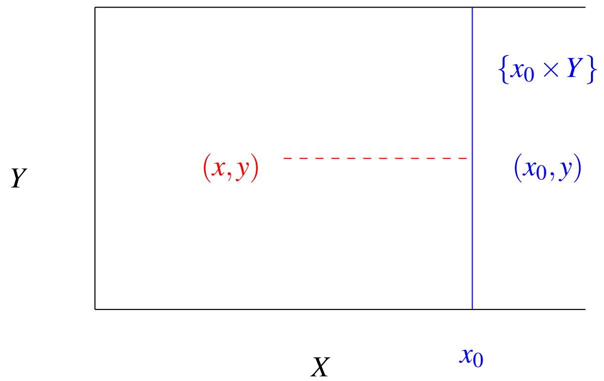
es una retracción.



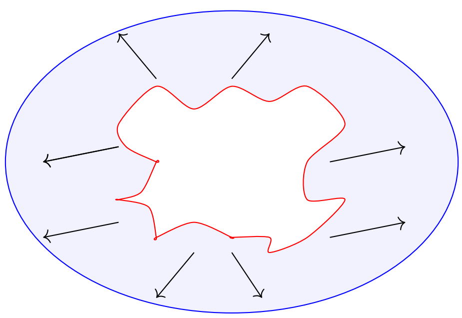

**Ejemplo 2.3.** Sean $X, Y$ espacios y consideremos el espacio producto $X \times Y$. Si $x \in X$ es fijado. El subconjunto $A = \{x_0\} \times Y = \{(x_0, y) \in X \times Y : y \in Y\}$ es un retract de $X \times Y$, vía la retracción.

$r : X \times Y \longrightarrow \{x_0\} \times Y$

$(\alpha, y) \longrightarrow r(x, y) = (x_0, y)$




Ahora, consideremos el disco $B$ del plano. Podemos pensar que no existe una retracción de $B$ a su circulo frontera, es como esperar que no es posible deformar la piel entera de un tambor a su anillo, manteniendo los puntos del anillo fijado, pero sin romper la piel.



Deformar la piel del tambor a su anillo la rompería, demostrando que no hay retracción de $B$ a $S^1$.

De hecho, no existe retracción de la $n-$bola $B^n$ en $\mathbb{R}^n$ sobre su $(n-1)-$esfera frontera, $S^{n-1}$. Este resultado general es conocido como el teorema de no-Retracción. La versión $1-$dimensional del teorema de no retracción es una sencilla consecuencia de resultados básicos de la teoría de los espacios Conexos, como veremos a continuación.

**Teorema 2.3**

**Teorema $1-$dimensional de no Retracción.** No existe retracción de $B^1 = [-1,1]$ sobre su esfera frontera $S^0 = \{-1,1\}$.

*Demostración.*

Si existiese una retracción $r : [-1,1] \longrightarrow \{-1,1\}$, esto es $r$ continua con $r(-1) = 1$, $r(1) = 1$. Entonces $r([-1,1]) = \{-1,1\}$.

■

Siendo $r$ continua y $[-1,1]$ conexo, tendríamos que la imagen $r([-1,1]) = \{-1,1\}$ es un conexo en $\mathbb{R}$. Lo que es una contradicción, pues los conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos. Con el uso de herramientas apropiadas de topología algebraica, probaremos la versión $2-$dimensional del Teorema de no Retracción; que es de interés para este trabajo. Con este objetivo, a continuación presentaremos, como mencionamos en la introducción de esta parte, de manera breve y sin demostración algunos conceptos y resultados fundamentales de Topología algebraica, más precisamente de homotopías y teoría de grado. Para una lectura completa de este tema, el lector interesado puede referirse a Munkres (ver [Munkres, 2002]), Topología parte II, Topología algebraica o algún texto especializado de Topología algebraica.

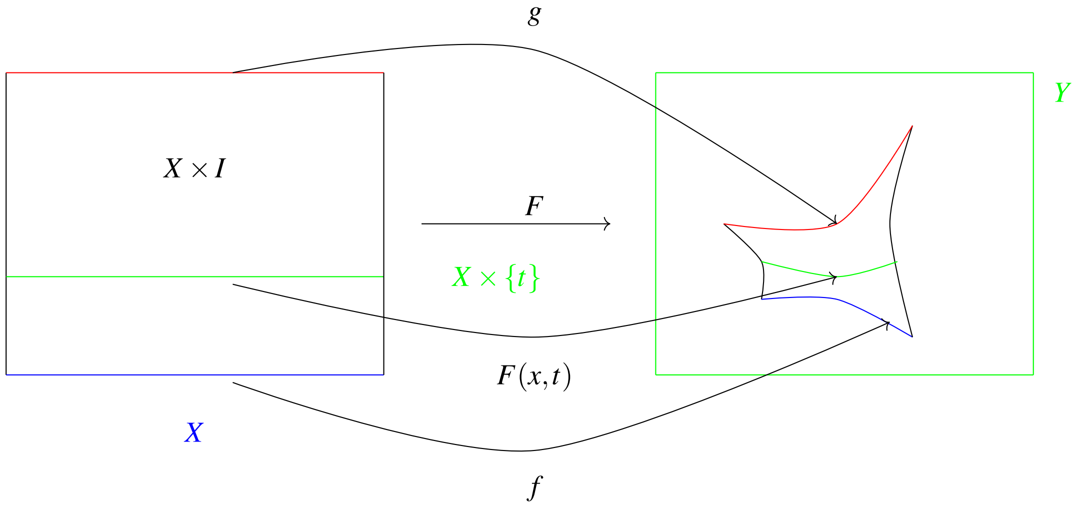
## 2.2 Homotopías

El concepto de homotopía precisa lo que significa **deformar** continuamente una función continua en otra.

**Definición 2.3**

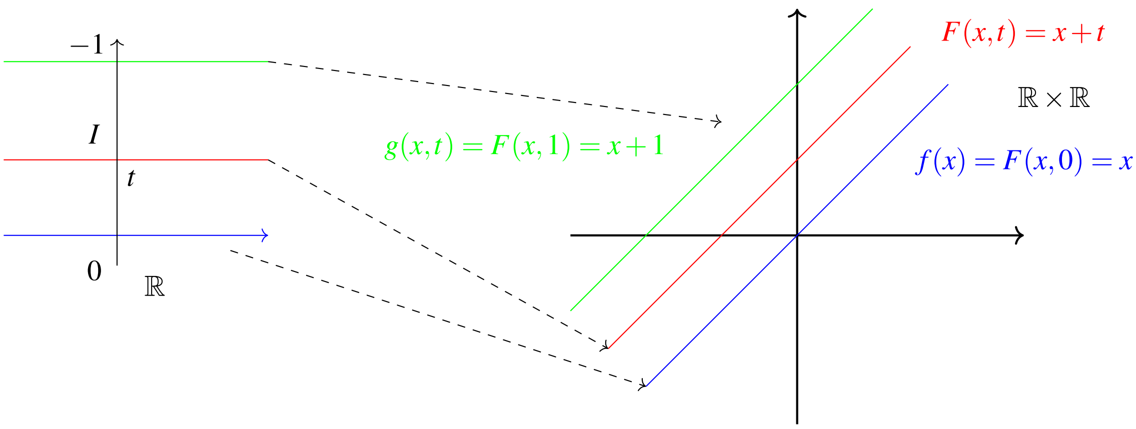
Sean $f,g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Consideremos $I = [0,1]$ el subespacio topológico de $\mathbb{R}$ y que $X \times I$ tiene la topología producto. Diremo que $f$ y $g$ son homotopícos si existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. Tal función $F$ es llamada una homotopía entre $f$ y $g$. Demotaremos esto como $f \approx g$ (ya que más adelante veremos que sobre el conjunto de las funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$, ser homotópicos establece una relación de equivalencia)

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica $F(x,t)$ continua en el parámetro $t \in [0,1]$. Si pensamos en el parámetro $t$ como representante del tiempo, entonces la homotopía $F$ describe la "deformación"continua en el tiempo de 0 a 1; de la aplicación $f$ en la aplicación $g$.




**Nota.** Como observamos en el grafico la homotopía $F$ deforma continuamente la $f$ en $g$ .

Defina $F : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,t) = x+t$. $F$ es continua, pues "$t$"es continua. Así $F$ es una homotopía entre $f(x) = F(x,0) = x$ y $g(x) = F(x,1) = x+1$, $f$ es la identidad de $\mathbb{R}$ sobre si mismo la recta $y = x$ o diagonal principal del plano, enviando cada $x$ en $\mathbb{R}$ en si mismo, $g$ es la traslada la diagonal principal una unidad en dirección positiva. Para un valor fijado $t \in I$, la homotopía $F(x,t)$ traslada la recta real una distancia $t$. Podríamos representar geográficamente como:




Como información adicional, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.4**

La relación $f \approx g$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$.

*Demostración.*

Para poder ver que es una relación de equivalencia se demuestra tres propiedades: reflexividad, simetría y transitividad.

1. **Reflexividad.** $f \approx f$ :

   Sea $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ es continua y $F(x,t) = f(x)$.

   Por lo que $F(x,0) = f(x)$ y $f(x,1) = f(x)$.

   Entonces $f \approx f$

2. **Simetría** $f \approx g \Rightarrow g \approx f$ :

   Sea $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ existe un $F(x,0) = f(x) \wedge F(x,1) = g(x)$.

   Entonces $F' : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, $F'(x,0) = F(x,1-t)$ es continua ya que $F$ lo es.

   Y $F'(x,0) = F(x,1-0) = F(x,1) = g(x)$, $F'(x,1) = F(x,1-1) = F(x,0) = f(x)$.

   Entonces $f \approx g \Rightarrow g \approx f$ :

3. **Transitividad** $f \approx g \wedge g \approx h \Rightarrow f \approx h$ :

   Sean $F_1 : X \times [0,1] \longrightarrow Y$

   $F_1(x,0) = f(x) \wedge F_1(x,1) = g(x)$.

   Y $F_2 : X \times [0,1] \longrightarrow Y$

   $F_2(x,0) = f(x) \wedge F_2(x,1) = h(x)$.

   Entonces $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$

   $$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t) \ si & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_1(x,2t-1) \ si & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   es continua y $F(x,0) = F_1(x,0 \times 2) = F_1(x,0) = f(x)$

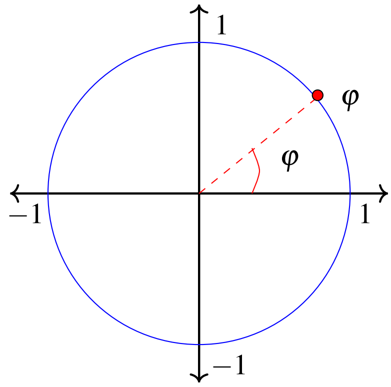
   $F(x,1) = F_2(x,2 \times 1 - 1) = F_2(x,1) = h(x)$

■

## 2.3 Funciones Circulares y Grado

En esta sección nos enfocaremos en funciones continuas $f : S^1 \longrightarrow S^1$, del circulo unitario en si mismo. Tales funciones son llamadas **funciones círculos**.

Por comodidad representamos los puntos sobre el circulo usándola variable $\varphi$, donde $\varphi$ es la medida angular usual tomada desde el eje x positivo del plano.




Asumimos que dos valores $\varphi$ y $\varphi_2$ representar el mismo punto sobre el circulo si difieren por un múltiplo entero de $2\pi$; esto es $\varphi_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

## 2.4 El grado de una función circulo

El grado de una función circulo nos da una medida de cuantas veces una función circulo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ envuelve o enrolla el circulo alrededor de si mismo. Pensemos que esta medida es igual a 1 para la función identidad $i_d : S^1 \longrightarrow S^1$ ($S_1$ se envuelve sobre si mismo una sola vez), es igual a $-1$ para la función $f(\varphi) = -\varphi$, y de manera mas general , es igual a $n$ para la función $C_n(\varphi) = n\varphi$ ($n$ veces enrollado sobre si mismo).

Es claro que no todas las funciones circulo son tan agradables como $C_n(\varphi)$. Podrían ser enrollados oscilatorios alrededor del circulo; o enrollados en un sentido y luego enrollados en otro sentido; o enrollados de diversa variedad de los anteriores o de otros tipos mas complicados.

El siguiente teorema, concerniente a homotopías entre funciones círculos, nos facilitara el concepto de grado de una función circulo.

**Teorema 2.5**
Para cada función circulo $f : S^1 \longrightarrow S^1$, existe un único numero $n \in \mathbb{Z}$ tal que f es homotópico a $C_n(\varphi) = n\varphi$.

**Definición 2.4**

El único $n \in \mathbb{Z}$ asociado a $f : S^1 \longrightarrow S^1$ en el teorema anterior es definido como el grado de $f$ y será denotado por $grad(f) = m$.

**Teorema 2.6**

Dos funciones circulos $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ son homotópicas si y solo si, $grado\, f = grado\, g$.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ Si $grad\, f = n$

$f \approx C_n$ y $f \approx g$ entonces por la transitividad $g \approx C_n$ por lo que $grad\, g = n$

$\Leftarrow$ Sea $grado\, f = grado\, g = n$. Entonces $f \approx C_n$ y $g \approx C_n$ por lo que $f \approx g$

■

El siguiente teorema de la teoría de grado para funciones círculo, es el resultado fundamental para demostrar el teorema de no retracción $2-$dimencional.

**Teorema 2.7**

Una función círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ tiene grado 0 sí y sólo sí, $f$ se puede extender continuamente sobre el disco $B^2$ (esto es, si existe una función continua $F : B \longrightarrow S^1$ tal que $F|_{S^1} = f$ ).

*Demostración.* A través de la demostración trabajamos con coordenadas polares $(r, \theta)$.

$\Rightarrow$) Si $f$ tiene grado 0 entonces $f$ es homotópica a $C_0(\theta) = 0 * \theta = 0 = (0,1)$.

Esto es, existe una homotopía

$$G : S^1 \times I \longrightarrow S^1$$

tal que $G(\theta, 0) = C_0(\theta)$ y $G(\theta, 1) = f(\theta)$.

Definamos $F : B \longrightarrow S^1$

$$(r, \theta) \longmapsto F(r, \theta) = G(\theta, r)$$

Observemos que para $r = 0$, $(0, \theta) = (0, 0)$ $\forall \theta \in [-2\pi, 2\pi]$

y

$$F(0, \theta) = G(\theta, 0) = C_0(\theta) = 0 \; \forall \theta \in [-2\pi, 2\pi]$$

Esto nos garantiza que $F$ esta bien definida en $r = 0$.

Ahora, como $G$ es continua, $F$ también lo es.

Finalmente, observemos que para $(1,\theta) \in S^1$

$$F(1,\theta) = G(\theta,1) = f(\theta)$$

esto es $F|_{S^1} = f$.

Así $F$ es una extensión continua de $f$ al disco $B^2$.

$\Rightarrow$) $f$ se extiende continuamente a $F : B^2 \longrightarrow S^1$.

Definamos $G : S^1 \times I \longrightarrow S^1$

$$(\theta,t) \longmapsto G(\theta,t) = F(t,\theta)$$

ya que $F$ es continua, también lo es G.

Ademas

$$G(\theta,0) = F(0,\theta) = F(0,0) \text{ ya que } (0,\theta) = (0,0)\ \forall\theta \in [-2\pi,2\pi]$$

$$G(\theta,0) = 0 = C_0(\theta) = 0 * \theta = 0$$

Así $G(\theta,0) = 0$ es una función círculo constante 0 y por tanto tiene grado 0.

Pero $G(\theta,1) = F(1,\theta) = f(\theta)$, ya que $F|_{S^1} = f$.

Así $G(\theta,0) = C_0(\theta)$ y $G(\theta,1) = f(\theta)$ son homotópicas y grado de $G(\theta,0)$ es 0. Luego grado de $f$ es 0. ■

**Teorema 2.8**

**Teorema de la no-retracción 2-dimensional**

No existe una retracción del disco $B^2$ sobre su círculo frontera $S^1$.

*Demostración.* Probaremos el teorema por contradicción. Supongamos que existe una retracción $F : B^2 \longrightarrow S^1$. Esto es $F$ es continua y $F|_{S^1} = id$ $(F(\theta) = 0\ \forall\theta \in S^1)$.

$F$ sería una extensión continua de la identidad $id : S^1 \longrightarrow S^1$ definida por $id(\theta) = \theta$. **Lo que es una contradicción**, con el teorema que establecería que $grad(id)$ sería 0.

Pero $grad(id) = 1$.

Luego no existe retracción de $B^2$ sobre $S^1$. ■

**Corolario 2.1**

No existe retracción de $\mathbb{R}^2$ sobre $S^1$.

*Demostración.* Por reducción al absurdo. Si existese una retracción $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$, esto es; $G$ continua y $G|_{S^1} = id_{S^1}$. Entonces la restricción $F : G|_{B^2} : B^2 \longrightarrow S^1$ sería continua y $F|_{S^1} = G|_{S^1} = id_{S^1}$.

Esto es, $F$ sería una retracción de $B^2$ sobre $S^1$. Lo que contradice al teorema de no retracción 2-dimensional.

Luego, no existe retracción de $\mathbb{R}^2$ sobre $S^1$. ■

Ahora probaremos la equivalencia entre el teorema de no retracción 2-dimensional y la propiedad del punto fijo del disco $B^2$.

**Teorema 2.9**

El disco $B^2$, como subespacio de $\mathbb{R}^2$, tiene la propiedad del punto fijo sí, y sólo sí, no existe retracción de $B^2$ sobre su círculo frontera $S^1$.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Por reducción al absurdo, supongamos que existe un retracción $F : B^2 \longrightarrow S^1$. Consideremos la función continua

$$q : S^1 \longrightarrow B$$

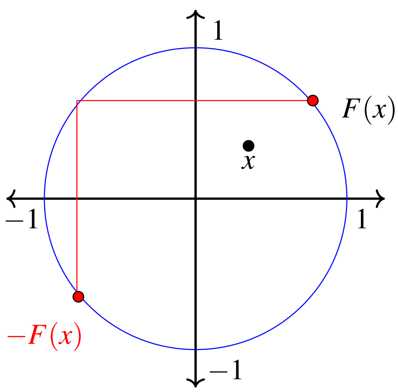
$$x \longmapsto q(x) = -x$$

Sea la función $q \circ F : B^2 \longrightarrow B^2$, que es continua, pues $F$ y $q$ lo son.

$q \circ F$ no tiene punto fijo pues

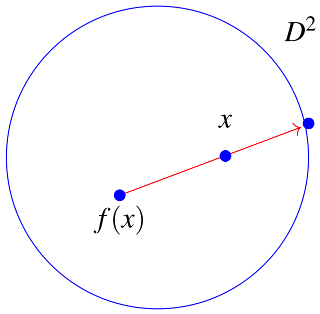
$$x = q \circ F(x) = q(F(x)) = -F(x)$$

para algún $x \in B^2$ implicaría una contradicción



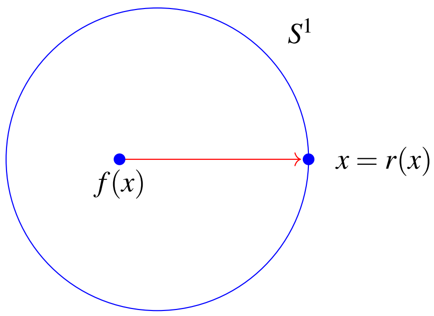
Luego, no existe retracción del disco $B^2$ del plano real sobre su círculo frontera $S^1$.

$\Leftarrow$) Nuevamente, supongamos por reducción al absurdo que el disco $B^2$ no tiene la propiedad del punto fijo. Esto es, existe una función continua $f : B^2 \longrightarrow B^2$ que no tiene punto fijo.

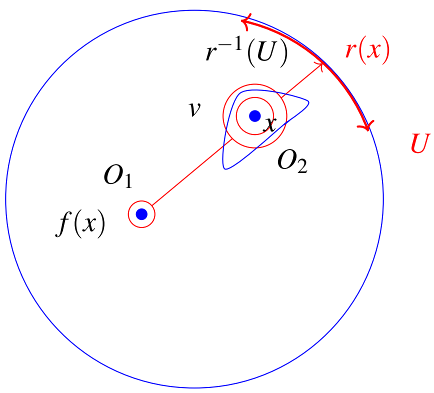



Definamos $r : B^2 \longrightarrow S^1$ como sigue: Para $x \in B^2$, como $f$ no tiene punto fijo, $f(x) \neq x$. Así consideremos el rayo desde $f(x)$ pasando por $x$, y sea $r(x)$ el punto de intersección de este rayo con $S^1$. (Como ilustra la figura anterior)

Claramente $r : B^2 \longrightarrow S^1$ esta bien definida y $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$




$r$ es continua. En efecto sea $U$ abierto en $S^1$.




Probaremos que $r^{-1}(U)$ es abierto en $B^2$. Para esto, sea $x \in r^{-1}(U)$ y probaremos que existe $v$ abierto en $B^2$ tal que $x \in V \subset r^{-1}(U)$.

Escojamos, $O_1 = M(f(x))$, $O_2 = M(x)$ bolas abiertas centradas en $f(x)$ y $x$, respectivamente; contenidas en $B^2$ y tales que todo rayo comenzando en $O_1$ y pasando a través de $O_2$ intersecta a $S^1$ en $U$.

Ya que $f : B^2 \longrightarrow B^2$ es continua, podemos encontrar a $V$ abierto en $B^2$ tal que $x \in V \subset O_2$ y $f(V) \subset O_1$.
Así, para todo $v \in V$, $v \in O_2$ y $f(v) \in f(V) \subset O_1$.
Por lo tanto, el rayo comenzando en $f(v)$ y pasando por $v$ intersecta a $S^1$ en $U$. Esto es, $r(v) \in U$.
Esto prueba que $v \subset r^{-1}(u)$.
En conclusión, hemos probado que si $x \in r^{-1}(u)$, existe $V$ abierto en $B^2$ tal que

$$x \in V \subset r^{-1}(u)$$

Esto es, $r^{-1}(u)$ es abierto en $B^2$. Como queríamos probar.
Así $r : B^2 \longrightarrow S^1$ es una retracción, lo que contradice nuestra hipótesis.
Luego $B^2$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Este teorema, que da la equivalencia entre el teorema de no retracción y la propiedad del punto fijo para el disco $B^2$, establece el teorema de punto fijo 2- dimensional.

**Teorema 2.10**

**Teorema de Punto fijo de Brouwer $2-$dimensional**

Cada función continua $f : B^2 \longrightarrow B^2$ tiene un punto fijo.

# 3

# *Teorema del Punto fijo de Kakutani y su aplicación*

En este ultimo capítulo, nuestro propósito es demostrar el Teorema de Kakutani, el cual es un teorema de punto fijo para funciones multivaluadas, esto solo es posible debido al trabajo previo que se realizo en los capítulos anteriores y utilizando estos resultados y los del capítulo anterior podremos demostrar el teorema.

Dada la demostración del teorema de Kakutani se introduce la teoría de juegos donde daremos algunos conceptos y resultados como juego, juegos no cooperativos y cooperativos, equilibrios entre otros, para poder llevar acabo la demostración del celebrado teorema de Nash que lo propuso en su tesis doctoral de 1925 (ver [Nash, 1950]).

Para una lectura mas completa el lector interesado puede referirse a (ver [Baum, 1991],[Border, 1985], [Yuan, 2017]) o algún texto especializado Teoría de juegos, y puntos fijos.

## 3.1 Teoremas de punto fijo

El teorema del punto fijo brinda las condiciones necesarias para garantizar la existencia de puntos $x$ tales que $f(x) = x$, donde $f$ es una función definida de un espacio topológico en sí mismo y que tiene la propiedad de punto fijo. Esta propiedad establece que cada función continua definida en el espacio tiene un punto fijo.

Los teoremas de punto fijo establecen condiciones para la existencia de de funciones entre espacios, por ejemplo el teorema del punto fijo de Banach en análisis, los teoremas de punto fijo en espacios métricos y en particular de nuestro interés el teorema de punto fijo de Kakutani en espacios topológicos.

## 3.2 El Teorema de punto fijo de Kakutani

En 1941, Shizuo Kakutani (1911-2004) probó una generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer que ha tenido poderosas aplicaciones desde entonces. En lugar de aplicarse a funciones de la $n$-bola $B^n$ a sí misma, el teorema del punto fijo de Kakutani se aplica a las llamadas funciones multivaluadas.

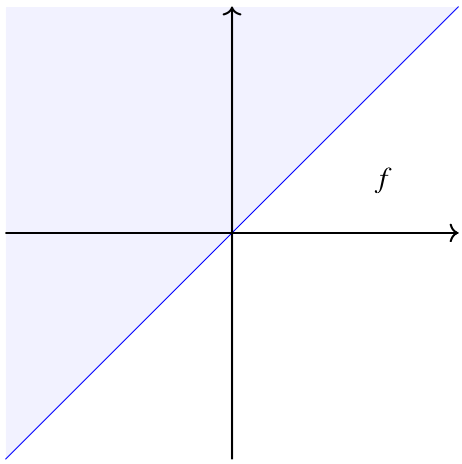
Por lo general, las funciones asocian un punto $x$ en un dominio $X$ con un punto y en el rango $Y$. Aquí, veremos funciones que toman un punto $x$ en el dominio $X$ y lo envían a un subconjunto $A$ no vacío del rango $Y$.

Denotamos tal función multivaluada por $f : X \to_S Y$, (En esta sección llamamos a nuestras funciones usuales, cuyos valores son puntos, funciones de valores puntuales, para distinguirlas de las funciones multivaluadas)

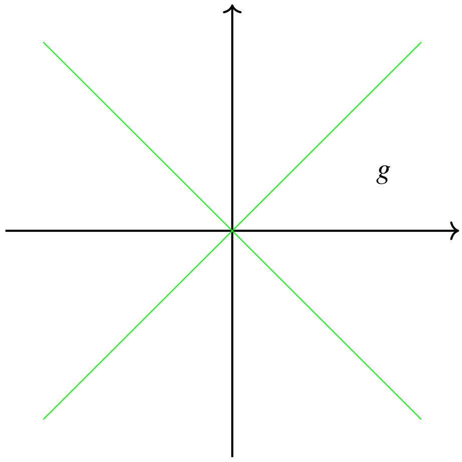
**Ejemplo 3.1.** Considere el conjunto de todas las personas que alguna vez han vivido. Sea $f$ asignando a cada persona el conjunto de todas las personas que esa persona ha visto alguna vez. Este es un ejemplo de una función multivaluada. A cada punto (persona) la función $f$ le asocia un conjunto de puntos (el conjunto de personas que esa persona ha visto alguna vez).

Los siguientes ejemplos son funciones multivaluadas:

**Ejemplo 3.2.** Sea $f$ que asigna a cada número real $x$ el conjunto de todos los números reales mayor o igual que $x$. Escribimos $f(x) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq x\}$

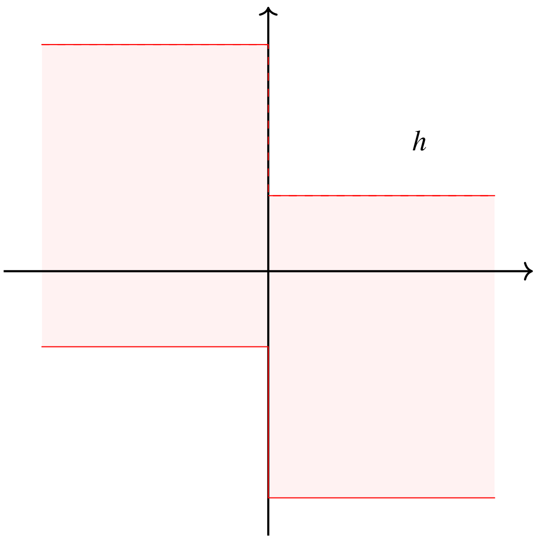



**Ejemplo 3.3.** Sea $g$ el que asigne a cada número real $x$ el conjunto formado por $x$ y su negativo. Entonces $g(x) = \{-x, x\}$.




**Ejemplo 3.4.** Sea h que asigna a cada número real $x$ el conjunto $[-1,4]$ si $x$ es negativo o el conjunto $[-4,1]$ si $x$ no es negativo. Entonces,

$$h(x) = \begin{cases} [-1,4] \; si & x < 0 \\ [-4,1] \; si & x \geq 0 \end{cases}$$




Para una función de valor puntual $f : X \longrightarrow Y$, el gráfico se define como el conjunto $\{(x,y)|y = f(x)\}$ en $X \times Y$. Necesitamos una noción similar para las funciones multivaluadas:

**Definición 3.1**

La gráfica de una función multivaluada $f : X \to_S Y$ es el subconjunto de $X \times Y$ dado por $G_f = \{(x,y)|y = f(x)\}$.

Para las funciones multivaluadas, no definimos directamente la continuidad, sino que trabajamos con una propiedad estrechamente relacionada con ella. Por lo tanto, nos centramos en funciones multivaluadas que tienen gráficas que son conjuntos cerrados. En los ejemplos las funciones multivaluadas $f$ y $g$ tienen gráficas que son conjuntos cerrados, pero la función multivaluada $h$ no.

Tener un grafo cerrado es ventajoso ya que implica que las sucesiones convergentes se comportan razonablemente, como indica el siguiente lema:

**Lema 3.1**

Sea $f : X \to_S Y$ una función multivaluada cuya gráfica, $G_f$ es cerrada en $X \times Y$. Si $(x_n)$ es una sucesión en $X$ que converge a $x_0 \in X$ y $y_n$ es una sucesión en $Y$ que converge a $y_0 \in Y$ y satisface $y_n \in f(x_n)$ para cada $n$, entonces $y_0 \in f(x_0)$.

*Demostración.*

Forme la secuencia $((x,y)_n)$ en $X \times Y$ definida por $(x,y)_n = (x_n, y_n)$. Dado que $y_n \in f(x_n)$, esta secuencia de entrada se encuentra en el gráfico de $f$.

Dado que $(x_n)$ converge en $x_0$ e $y_n$ converge en $y_0$, $((x,y)_n)$ converge en $(x_0, y_0)$. Ahora bien, o bien existen $N$ tales que $(x_0, y_0) = (x_N, y_N)$, o bien $(x_0, y_0)$ es distinto de todo $(x_n, y_n)$.

En el primer caso, se sigue directamente que $(x_0, y_0) \in G_f$. En el segundo caso $(x_0, y_0)$ debe ser un punto límite del conjunto $\{(x_n, y_n)\}_n \in \mathbb{Z}^+$ y por tanto también debe ser un punto límite de $G_f$.

Dado que $G_f$ es cerrado, se sigue que $(x_0, y_0) \in G_f$ también en este caso. En cualquier caso, $(x_0, y_0)$ está en la gráfica de $f$, y por lo tanto $y_0 \in f(x_0)$ como queríamos mostrar.

■

Ahora, ¿qué significa que una función multivaluada tenga un punto fijo?

**Definición 3.2**

Dada una función multivaluada $F : X \to_S Y$, un punto fijo de $F$ es un punto $x^*$ en $X$ para el cual $x^* \in F(x^*)$.

Un punto fijo de una función multivaluada es un punto que se asigna a un conjunto que contiene el punto, en contraste con un punto fijo de una función de valor puntual, que es un punto que simplemente se asigna a sí mismo.

Se supone que las funciones consideradas en el Teorema del Punto Fijo de Kakutani tienen un dominio que es un poliedro en $\mathbb{R}^n$, donde un poliedro es un conjunto acotado que se puede expresar como un conjunto solución de un número finito de desigualdades de la forma $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$.

El teorema del punto fijo de Kakutani $n$-dimensional establece que para un poliedro $X$ en $\mathbb{R}^n$, una función multivaluada $F : X \rightarrow_S Y$ tiene un punto fijo si $F(x)$ un subconjunto convexo de $X$ para cada $x$ en $X$ y si la gráfica de $F$ es cerrada en $X \times X$.

El teorema del punto fijo de Kakutani $n$-dimensional requiere del teorema del punto fijo de Brouwer $n$-dimensional en su demostración. Aquí solo abordamos el teorema del punto fijo de Kakutani en las dimensiones uno y dos, pero la demostración se generaliza directamente asumiendo el teorema del punto fijo de Brouwer n-dimensional.

Ahora presentamos el Teorema del Punto Fijo de Kakutani en la dimensión dos:

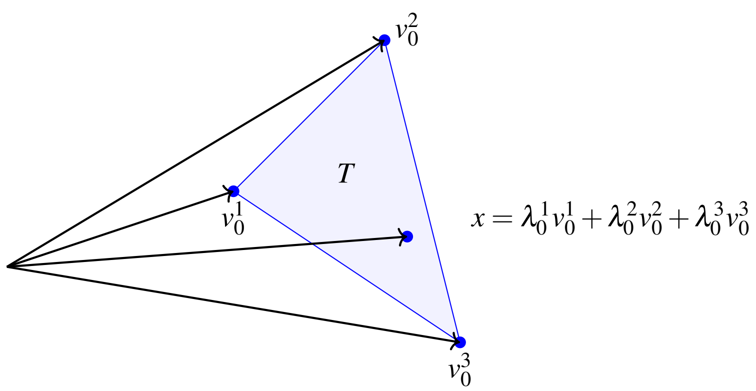
**Teorema 3.1**

**El teorema bidimensional de punto fijo de Kakutani**. Sea $X$ un poliedro en $\mathbb{R}^2$ y $F : X \rightarrow_S Y$ sea una función multivaluada tal que $F(x)$ es un subconjunto convexo de $X$ para cada $x$ en $X$. Si la gráfica de $F$ es cerrada en $X \times X$ , entonces existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in F(x)$.

*Demostración.*

Un poliedro en $\mathbb{R}^2$ es un punto, un segmento de línea o un polígono convexo. Para simplificar, demostramos el teorema cuando $X$ es un triángulo $T$ en $\mathbb{R}^2$. Luego discutimos cómo el método de prueba para un triángulo se traslada a un polígono convexo general.

Sea $T$ un triángulo en el plano con vértices $v_0^1$, $v_0^2$ y $v_0^3$. (La razón para usar los índices múltiples se aclarará a medida que avancemos). Como $T$ es un triángulo, cada punto en $T$ se puede representar como una combinación lineal de $v_0^1$, $v_0^2$ y $v_0^3$. Específicamente, para $x \in T$ tenemos $x = \lambda_0^1 v_0^1 + \lambda_0^2 v_0^2 + \lambda_0^3 v_0^3$. donde cada $\lambda_0^i \geq 0$ y $1 = \lambda_0^1 + \lambda_0^2 + \lambda_0^3$ como se muestra en la figura siguiente.




Note que $T$ es homeomorfo al disco, y por lo tanto el teorema del punto fijo de Brouwer 2-dimensional se aplica a todas las funciones continuas de $T$ a $T$.

Para encontrar un punto fijo de $F$, construimos una sucesión $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ de funciones continuas con valores puntuales que se aproximan a $F$. Por el teorema del punto fijo de 2-Dimensional Brouwer, cada $f_n$ tiene un punto fijo $x_n \in T$.

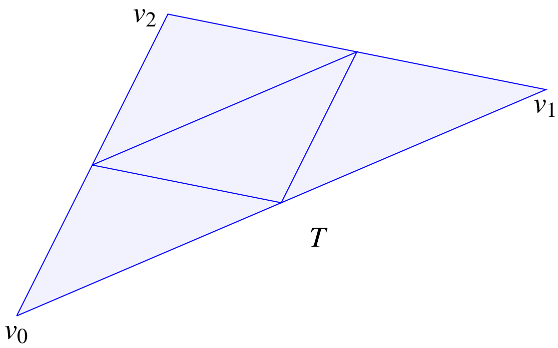
Probamos que la sucesión de puntos fijos $(x_n)$ tiene una subsucesión que converge a un punto fijo de $F$.

Para cada uno de los tres vértices $v_0^i$, donde $i = 1, 2, 3$, elegimos un punto particular $y_0^i \in f(v_0^i)$. Luego definimos una función $f_0 : T \longrightarrow T$ tal que $f(v_0^i) = y_0^i$ en los vértices. Extendemos esto linealmente al triángulo, para cada $x = \lambda_0^1 v_0^1 + \lambda_0^2 v_0^2 + \lambda_0^3 v_0^3$, estableciendo $f_0(x) = \lambda_0^1 y_0^1 + \lambda_0^2 y_0^2 + \lambda_0^3 y_0^3$.

Observe que $f_0$ no es una función multivaluada. Es una función de valor puntual de $T$ en si mismo. Además, como $f_0$ se define como la combinación lineal de sus valores en los vértices, es continua. Por lo tanto se aplica el Teorema del Punto Fijo de Brouwer en Dos Dimensiones, y tenemos un punto $x_0 \in T$ tal que $f_0(x_0) = x_0$

El punto $x_0$ no es necesariamente un punto fijo de la función multivaluada $F$ (pero lo sería, por ejemplo, si fuera uno de los vértices de $T$).

Ahora, para definir la siguiente función $f_1$ en nuestra sucesión de funciones que se aproximan a $F$. comenzamos por subdividir $T$ en cuatro triángulos más pequeños, como se muestra en la figura siguiente.




Los vértices de estos cuatro triángulos están formados por los vértices de $T$ y los puntos medios de los bordes de $T$. dados por

$$\frac{1}{2}v_0^1 + \frac{1}{2}v_0^2, \ \frac{1}{2}v_0^1 + \frac{1}{2}v_0^3, \ \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}v_0^3$$

Definimos $f_1(x)$ de manera análoga a cómo definimos $f_0(x)$. Para cada vértice $v$ en los cuatro triángulos, elegimos un punto $y$ en $F(v)$ y definimos $f_1(v) = y$. Entonces, como con $f_0$, extendemos $f_1$ linealmente sobre cada triángulo. Note que si $x$ esta en la intersección de dos triángulos diferentes, entonces la definición de $f_1(x)$ en términos de cualquiera de los triángulos es la misma porque depende solo de la definición de $f_1$ en los dos vértices que son los extremos del borde que contiene $x$.

La función $f_1$ mapea $T$ en si mismo y es continua ya que es una extensión lineal de los valores en los vértices. Por lo tanto, por el teorema del punto fijo de Brouwer, existe un punto fijo $x_1$ de $f_1$. Aquí también, $x_1$ no es necesariamente un punto fijo de la función multivaluada $F$. Pero lo sería si fuera uno de los vértices de los cuatro triángulos en la subdivisión de $T$. Sea $T_1$ un triángulo de subdivisión que contiene este nuevo punto fijo $x_1$, y supongamos que los vértices de $T$ son $v_1^1$, $v_1^2$ y $v_1^3$.

Continuamos este proceso. Específicamente, suponga que tenemos un continuo $f_{n-1} : T \longrightarrow T$ con punto fijo $x_{n-1}$ en el triángulo $T_{n-1} \subset T$ que tiene vértices $v_{n-1}^1, v_{n-1}^2$ y $v_{n-1}^3$.

Para definir $f_n$, subdividimos cada uno de los triángulos usados en la definición de $f_n - 1$ en cuatro subtriángulos como se describió anteriormente. Luego, para cada vértice $v$ en cada triángulo, definimos $F(v)$ como un punto en $f_n(V)$. Finalmente, extendemos $f_n$, linealmente sobre cada triángulo en la subdivisión para obtener una función continua $f_n : T \longrightarrow T$. Como $f_n$ es continua, tiene un punto fijo $x_n \in T$. Sea $T_n \subset T$ un triángulo en la subdivisión que contiene $X$, y supongamos que $T$ tiene vértices $v_n^1$, $v_n^2$ y $v_n^3$.

Ahora tenemos una sucesión $x_0, x_1, x_2, ...$ de puntos fijos de las funciones $f_0, f_1, f_2, ...$ Note que $x_n = \lambda_n^1 v_n^1 + \lambda_n^2 v_n^2 + \lambda_n^3 v_n^3$ para algunos valores $\lambda_n^1, \lambda_n^2$, y $\lambda_n^3$ en $[0,1]$. Además, si tenemos $y_n^j = f_n(v_n^j)$ para cada $n$ y $j$, entonces $x_n = f_n(x_n) = \lambda_n^1 y_n^1 + \lambda_n^2 y_n^2 + \lambda_n^3 y_n^3$ también, lo que da como resultado

$$x_n = \lambda_n^1 v_n^1 + \lambda_n^2 v_n^2 + \lambda_n^3 v_n^3 = \lambda_n^1 y_n^1 + \lambda_n^2 y_n^2 + \lambda_n^3 y_n^3 \tag{3.1}$$

Como $T$ es un subconjunto compacto del plano, tenemos que implica que toda sucesión en $T$ tiene una subsucesión convergente. Sea $x^*$ el límite de una subsucesión convergente $(x_{j_n})$ de la sucesión $(x_n)$. Mostraremos que $x^*$ es un punto fijo de la función multivaluada $F$.

Debido a que las longitudes de los lados de los triángulos $T_n$, se reducen a cero cuando $n$ tiende a infinito, cada sucesión formada por un punto de cada triángulo $T_{j_n}$, también debe converger a $x^*$. Por lo tanto, la sucesión de puntos fijos $(x_{j_n})$ y las correspondientes secuencias de vértices $\left(v_{j_n}^1\right)$, $\left(v_{j_n}^2\right)$ y $\left(v_{j_n}^3\right)$ todos convergen a $x^*$.

Como el intervalo $[0,1]$ es compacto en $\mathbb{R}$, tenemos que toda sucesión en $[0,1]$ tiene una subsucesión convergente. Así las tres sucesiones coeficientes $\left(\lambda_{j_n}^1\right), \left(\lambda_{j_n}^2\right)$ y $\left(\lambda_{j_n}^3\right)$ tienen subsucesiones convergentes. De manera similar, las tres sucesiones $\left(y_{j_n}^1\right), \left(y_{j_n}^2\right)$ e $\left(y_{j_n}^3\right)$ son sucesiones en el conjunto compacto $T$ y, por lo tanto, también tienen subsucesiones convergentes. Al tomar subsucesiones, una a la vez, de todas estas secuencias adicionales, podemos elegir una sola secuencia de indexación $(m_n)$ tal que las diez subsucesiones correspondientes converjan: $(x_{m_n})$ a $(x^*)$ , $\left(v^1_{m_n}\right)$ a $(x^*)$, $\left(v^2_{m_n}\right)$ a $(x^*)$, $\left(v^3_{m_n}\right)$ a $(x^*)$, $\left(\lambda^1_{m_n}\right)$ a un valor $\lambda^1$, $\left(\lambda^2_{m_n}\right)$ a un valor $\lambda^2$, $\left(\lambda^3_{m_n}\right)$ a un valor $\lambda^3$, $\left(y^1_{m_n}\right)$ a un punto $y^1$, $\left(y^2_{m_n}\right)$ a un punto $y^2$, y $\left(y^3_{m_n}\right)$ a un punto $y^3$.

A medida que $m_n$ se acerca al infinito, vemos en la Ecuación 3.1 que $x^* = \lambda^1 y^1 + \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3$. Además $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1$, y $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in [0,1]$. Por lo tanto, $x^*$ está en el "triángulo" con vértices $y^1, y^2$ e $y^3$. (Usamos comillas ya que el triángulo podría ser un segmento de línea o un punto si exactamente dos de los $y^i$ son iguales o si todos son iguales, respectivamente).

Como $F$ tiene un gráfico cerrado en $T \times T$, dado que las sucesiones $\left(v^1_{m_n}\right)$ y $\left(y^1_{m_n}\right)$ convergen en $x^*$ e $y'$, respectivamente, y dado que $\left(y^1_{m_n}\right) \in F\left(v^1_{m_n}\right)$ para cada $m_n$, tenemos que $y^1 \in F(x^*)$. De manera similar, $y^2 \in F(x^*)$ y $y^3 \in F(x^*)$.

Pero $x^* = \lambda^1 y^1 + \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3$ está en el triángulo con vértices $y^1$, $y^2$ e $y^3$, todos los cuales se encuentran en $F(x^*)$. Como $F(x*)$ es convexo, $x*$ también debe estar contenido en $F(x^*)$. En otras palabras, $x^* \in F(x)$, como queríamos mostrar.

■

Ya probado el teorema del punto fijo bidimensional de Kakutani asumiendo que el dominio es un triángulo en el plano. Para probar el resultado de un polígono convexo general en el plano, usamos el mismo enfoque, pero comenzamos subdividiendo el polígono en triángulos. La función de aproximación inicial $f_0$ se define primero en los vértices de estos triángulos y luego se extiende linealmente a cada uno de los triángulos, tal como se hizo en el proceso anterior. Luego, como se hizo anteriormente, se definen funciones de aproximación sucesiva $f_n$, subdividiendo cada triángulo considerado en la etapa anterior, definiendo $f_n$, en los vértices de los nuevos triángulos, y extendiendo la definición linealmente a cada triángulo. El mismo argumento produce un punto $x^*$ tal que $x^* \in F(x^*)$.

Este método de probar el Teorema del Punto Fijo de Kakutani en Dos Dimensiones se traslada a la versión general de n dimensiones, con el Teorema del Punto Fijo de Brouwer de n-Dimensiones requerido a lo largo del camino. El teorema del punto fijo de Kakutani contiene el teorema del punto fijo de Brouwer como un caso especial.

Es importante darse cuenta, sin embargo, que, aunque el Teorema del Punto Fijo de Brouwer es un caso especial del Teorema del Punto Fijo de Kakutani, este último no suplanta al primero, ya que el Teorema del Punto Fijo de Brouwer es necesario en la demostración del Teorema del Punto Fijo de Kakutani.

## 3.3 Teoría de juegos y el Equilibrio de Nash

Esta sección se enfoca en la aplicación del teorema de punto fijo de Kakutani, donde demostraremos el teorema de la existencia de los equilibrios de Nash en la teoría de juegos usando el teorema ya enunciado (ver teorema) con antelación daremos una introducción a la teoría de juegos en la cual incorporaremos definiciones que nos servirán para el entendimiento de nuestro tema a tratar.

En la teoría de juegos se pondrá principal énfasis en aquellos juegos donde no hay una cooperación entre los participantes, debido a que introduciremos los equilibrios de John Nash en los que el habla acerca de juegos no cooperativos.

Una de las aplicaciones del teorema de punto fijo de Kakutani se visualiza en la teoría de juegos, sobre todo en aquellos juegos no cooperativos, ya que John Nash uso tanto este teorema como el de Brouwer para su demostración de existencia de equilibrios.

Para que el tópico sea más comprensible para el lector se introducirán definiciones que nos ayudaran a entenderlo. Si el lector quiere profundizar rn los temas que se trataran pueden ver la siguiente bibliografía recomendada (ver [Binmore, 1994], [Navarro and Tena, 2003], [Gibbons, 2022], [Ventsel, 1977]).

## 3.4 Teoría de juegos

Desde sus inicios, la teoría de juegos ha sido concebida como una herramienta que ha permitido una mejor comprensión de los comportamientos que se dan en los fenómenos sociales.

La teoría de juegos estudia formal y abstractamente las decisiones óptimas que deben tomar los diferentes oponentes en un conflicto y puede definirse como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto entre la cooperación y no cooperación entre entidades que toman decisiones inteligentes.

El matemático John Von Neumann desarrolló los principios de la que ahora es la teoría de juegos. A principios de la década de 1940, trabajó con el economista Oscar Morgenstern en las aplicaciones económicas de la teoría. El libro lo publicaron en 1944, La teoría de los juegos y el comportamiento económico, abrió un campo de investigación sorprendentemente amplio en el que ahora trabajan miles de expertos en todo el mundo (ver [Monsalve, 2002])

Sin embargo, John Forbes Nash (1928-2015) es quizás el nombre más importante con la teoría de juegos porque a la edad de 21 años escribió una tesis de menos de treinta páginas en la que reveló por primera vez su solución para juegos no cooperativos, que desde entonces se conoce como el equilibrio de Nash", fue reconocida instantáneamente por todos los expertos([Monsalve, 1999]).

En las últimas décadas, la teoría de juegos se ha profundizado, proporcionando la base para aplicaciones en diversos campos, los juegos con los que tratamos no son cualquiera debe tener una estructura en la que debe de haber una cantidad finita N de jugadores, una estrategia para obtener la recompensa según las reglas.

### 3.4.1 Elementos de un juego

Para poder entender mas acerca de la teoría de juegos nosotros daremos las siguientes definiciones que nos ayudaran en la comprensión de nuestro tema.

- **Juego:** Se denomina juego a la situación en la que dos o más personas, según las reglas establecidas, tienen que tomar decisiones y llegar a un resultado con el fin de obtener una ganancia.

- **Jugadores:** Los jugadores son los participantes involucrados en el juego los cuales utilizaran estrategias para llegar al resultado con el fin de obtener una ganancia.

- **Estrategia:** Se llama estrategia a las acciones que llevara a cabo los jugadores en cualquier momento del desarrollo del juego con el fin de obtener una ganancia.

- **Ganancia:** Se llama ganancia a las utilidades o beneficios que el jugador obtiene al aplicar la estrategia en un juego.

- **Reglas del juego:** Un conjunto de principios que definen las reglas aplicables sobre cómo proceder en un juego en particular. La especificación completa de las reglas del juego es un elemento importante del diseño del juego.

- **Equilibrio:** Un conjunto de estrategias para los jugadores, en la que ningún jugador pueda ganar más adoptando u una estrategia diferente.

### 3.4.2 Formas de representación de un juego

Para facilitar el análisis teórico, las dos formas de presentar la información sobre la estructura del juego (jugadores, reglas y ganancia) se denominan forma extendida y forma normal.

- **Forma extensiva**
  Un juego no cooperativo de forma extensiva es una descripción detallada de la estructura secuencial del proceso de toma de decisiones de los jugadores y se desarrolló a partir de un concepto teórico conocido como árbol del juego.

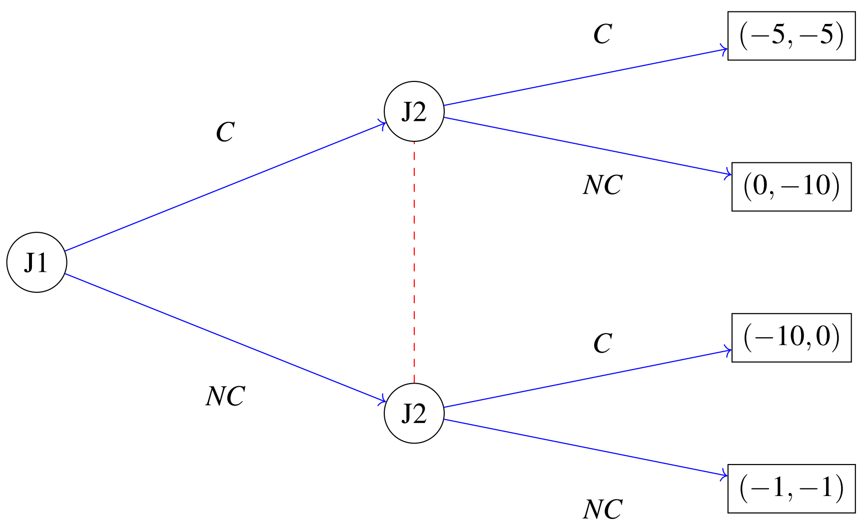
Para poder ver la representación del juego de forma extensiva se utilizara el ejemplo el Dilema del prisionero el cual nos enuncia lo siguiente:

Los presuntos ladrones fueron arrestados por la policía e interrogados por separado. Los delincuentes, que no tienen posibilidad de ponerse de acuerdo sobre su respuesta, se enfrentan a las siguientes opciones:

- Si confiesas, pero tu compañero no, te dejaremos en libertad mientras que a tu compañero le daremos 10 años de cárcel.
- Si vemos que ambos confiesan, les daremos 5 años a cada uno.
- Si ninguno de los dos confiesa, les daremos 1 año de cárcel a cada uno.

Con lo que se acaba de mencionar veremos la representación del árbol de juego.

Donde J1 y J2 son cada uno de los jugadores y $C = Confesar$ y $NC = NO\ Confesar$ son las estrategias y por ultimo tenemos los resultados al elegir cada estrategia las cuales son $(-5,-5)$, $(0,-10)$, $(-10,0)$, $(-1,-1)$.




- **Forma normal o estratégica**

  Un juego no cooperativo de forma normal o estratégica nos dice que cada jugador que elija una estrategia tiene la intención de maximizar su ganancia, en algunos casos puede ser que esta elección ayude a los oponentes y en otros los perjudique también a pesar de que la forma extensiva nos da una descripción detallada en ocasiones resulta útil usar la forma norma la cual consta de tres elementos:

  - El conjunto de jugadores que participan en el juego.

- Las estrategias de cada uno de los jugadores en función al juego.
- Las funciones de ganancias de cada jugador que participan en el juego.

$Prisionero\ 1$

| | | $NC$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $Prisionero\ 2$ | $NC$ | $(-1,-1)$ | $(-10,0)$ |
| | $C$ | $(0,-10)$ | $(-5,-5)$ |

$$C = Confesar \qquad NC = No\ confesar$$

El dilema del prisionero se detallara de mejor manera en la sección de los equilibrios de Nash.

### 3.4.3 Tipos de juegos

En la teoría que se menciona existen varios tipos de juegos los cuales los enunciaremos de manera que no profundizaremos mucho en ellos, a pesar de que existen tipos de juegos estos se pueden combinar conjuntamente, ya que nuestro fin son los juegos no cooperativos para el previo estudio de los equilibrios de Nash, por lo que los diferentes tipos de juegos que hay son:

- **Juegos simétricos y asimétricos**
  Un **juego simétrico** es aquel en el que las recompensas y penalizaciones para cada jugador son las mismas. Un **juego asimétrico** es aquel en el que las recompensas y penalizaciones para cada jugador no son las mismas.

- **Juegos repetidos**
  Un juego repetido es aquél en el que se emprenden acciones y se reciben ganancias una y otra vez pues es común que se realicen juegos de forma repetida y que sus estrategias de igual manera.

- **Juegos secuenciales y simultáneos**
  Un **juego simultaneo** es cuando uno o más jugadores deciden al mismo tiempo teniendo en cuenta ya su estrategia en el que se vera reflejada la ganancia.

  Un **juego secuencial** es cuando los dos o más jugadores deciden uno tras otro, sin embargo todos los jugadores conocen las estrategias de cada uno, los cuales les ayudaran para obtener al final su beneficio propio.

- **Juegos cooperativos**

  Los juegos cooperativos son cuando dos o más jugadores unen todas sus fuerzas para obtener un beneficio mutuo. Por tanto, al no tratarse de una competición entre jugadores individuales se gana o pierde como grupo. Si buscamos la participación y predominan los objetivos colectivos sobre las metas individuales, se juega con los demás y no contra los demás. Aunque como los involucrados son seres racionales siempre puede haber la probabilidad de que uno de los jugadores traicione al grupo para obtener un beneficio mayor.

### 3.4.4 Juegos no cooperativos

Al momento de enfrentarnos a una situación a veces resulta preferible cooperar con otros participantes para obtener mejores resultados.

Primero debemos decidir si cooperar nos beneficiara y de ser así, hay que decidir con quien o quienes hacerlo y esperar que ellos también quieran cooperar con nosotros. La gama de posibilidades se vuelve muy amplia y el análisis de la situación se complica rápidamente. Hay situaciones en las que no es posible cooperar con otros, como las situaciones de rivalidad entre jugadores.

Nos enfocaremos únicamente en situaciones donde los jugadores deciden no cooperar, no nos vamos a preocupar por ningún tipo de alianza o posible comunicación entre los participantes.

Los juegos no cooperativos es cuando varios jugadores toman sus decisiones de forma independiente ósea se asume que no hay espacio para la comunicación, asociación o acuerdo entre los jugadores a menos que las reglas del juego lo establezcan explícitamente, esto fue descrito por el famoso matemático John Nash quien fue uno de los precursores en la teoría de juegos no cooperativos.

Nash afirma que la teoría de juegos cooperativos y no cooperativos son complementarias entre sí, y cada una ayuda a justificar y explicar a la otra.

### 3.4.5 Tipos de juegos no cooperativos

Los juegos no cooperativos son aquellos en el que sus jugadores quieren obtener el mayor beneficio sin cooperar sin embargo existen varios tipos que los enunciaremos a continuación.

- **Juego con información completa:** Un juego con información completa es aquel donde los jugadores tienen conocimiento acerca de la estructura del juego y cada uno la usara para su beneficio.

- **Juego con información incompleta:** Un juego con información incompleta es aquel donde los jugadores no tienen conocimiento acerca de la estructura del juego y a pesar de esto cada uno de los jugadores tratara de obtener su beneficio con las estrategias que cada jugador tenga.

- **Juego con Información perfecta:** Cada jugador sabe exactamente los movimientos anteriores de los otros jugadores cada vez que este plantea una estrategia para obtener su beneficio.

- **Juego con Información imperfecta:** Cada jugador debe hacer un movimiento con la estrategia que tiene en mente, pero sin conocer la elección de ninguno de los jugadores para obtener su beneficio.

- **Juego de Suma cero:** Un juego de suma cero es aquel donde todo lo que un jugador gana, otro lo pierde, es decir que los jugadores involucrados al aplicar su estrategia para obtener su beneficio si esta falla por lógica el otro jugador obtiene el beneficio.

- **Juegos estáticos y dinámicos**

  En los **juegos estáticos** los jugadores eligen una sola vez su estrategia para obtener su beneficio a pesar de que la información que pueda recopilar en el transcurso sea incompleta.

  En los **juegos dinámicos** al menos uno de los jugadores tiene información sobre lo que hará, lo cual le ayudará a crear una estrategia para obtener su beneficio es lo que podemos ver reflejado en juegos como el ajedrez, parchís, damas chinas entre otros.

## 3.5 Equilibrios de Nash

El equilibrio de John Nash es una situación en la que los jugadores no quieren cambiar su estrategia, porque cualquier cambio significa que sus ganancias disminuyen o son nulas. Para resolver el problema de las existencias de equilibrio, John Nash utilizó definiciones que se acoplaron a su investigación como también el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani.

John Nash propuso a lo que se conoce como “el programa de Nash” para reducir todos los juegos cooperativos a un campo de juegos no cooperativos.

Si un grupo de jugadores se enfrentan entre sí, pero de manera no cooperativa, en la que se plantean varias estrategias y con todos los jugadores enfrentándose de manera en la que cada jugador no se enfrenta al mismo en cada turno del juego entonces podríamos decir que hay una forma estable en la que podemos jugar, en la que los jugadores eligen su mejor estrategia dependiendo de la información recogida de los previos enfrentamientos.

En otras palabras, si un juego tiene una forma estable de jugarse, entonces la información de cada jugador cada vez que se enfrente a un juego de ese tipo deberá ser que el otro jugador se comporte de la misma manera ante el juego para obtener cada uno su beneficio.

Entonces un equilibrio de Nash es precisamente una combinación de estrategias en la que cada jugador está escogiendo la mejor estrategia posible dadas las estrategias escogidas por los otros.

### 3.5.1 Tipos de estrategias

Las estrategias es la parte mas importante del juego y de los equilibrios de Nash, ya que es con lo que el jugador o jugadores obtendrán sus mayor beneficios, en esta parte daremos a conocer de manera específica tanto las estrategias puras como las mixtas.

- **Estrategias puras**

  Una estrategia pura es donde los jugadores se acogen a una decisión con seguridad, es decir el jugador usa una misma estrategia en cada turno del juego para obtener el mayor beneficio según el pensamiento racional.

- **Estrategias mixtas**

  Una estrategia mixta es donde los jugadores se acogen a una combinación de decisiones tomada en una función a una serie de posibilidades, es decir que el jugador escoge una estrategia al azar para obtener el mayor beneficio según el pensamiento racional en el que la suma de las posibilidades debe generar un cien por ciento.

### 3.5.2 Tipos de equilibrios de Nash

Los equilibrios de Nash en los que nos enfocaremos son precisamente en función al tipo de estrategias que ya mencionamos.

- **Equilibrios de Nash en estrategias puras**

  un equilibrio de Nash en estrategias puras es un estado en el cual cada jugador elige la mejor respuesta a las acciones de los otros jugadores, de tal manera que ningún jugador puede obtener un beneficio adicional cambiando su estrategia de manera unilateral.

- **Equilibrio de Nash en estrategias mixtas**

  El equilibrio de Nash en estrategias puras permite solucionar una cantidad de juegos, pero siempre se va a encontrar contraejemplos donde no exista equilibrios de este tipo por lo que para que obtengamos una solución debemos recurrir a las estrategias mixtas que le mencionamos en los tipos de estrategias.

## 3.6 Existencia de Equilibrios de Nash

John Nash en 1950 demostró que todo juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash, que puede serlo en estrategias mixtas. Este resultado se conoce como teorema de Nash el cual es nuestra aplicación del teorema de Kakutani.

Debido a que se dio una introducción previa para la comprensión de la teoría de juegos y equilibrios de Nash, con el fin de dar una idea intuitiva y que el lector se relacione de manera mas sencilla con las definiciones y ejemplos, ahora se dará las definiciones de manera formal para poder llegar a demostrar el teorema de Jhon Nash.
En esta sección presentamos la teoría de juegos y proporcionamos una aplicación del teorema del punto fijo de Kakutani, utilizándolo para demostrar.

El célebre teorema de John Nash sobre la existencia de equilibrios en juegos de n personas. Aunque todo lo que sigue se aplica a los juegos de n personas, nos limitaremos a un máximo de tres jugadores para mantener la notación sencilla.

Suponga que Paola, Victor y Cristian acuerdan jugar un juego. En un turno dado, cada uno de los tres tiene un número finito de movimientos que puede hacer. Para Paola, estas opciones están etiquetadas del 1 al $n_E$. Para Victor, están etiquetados del 1 al $n_G$. Y para Cristian, están etiquetados del 1 al $n_N$. Estos movimientos se llaman estrategias puras. Establecemos las reglas de nuestro juego para que los tres jugadores hagan un movimiento sin saber lo que los otros jugadores han elegido hacer. Entonces cada uno recibe algún pago. Cuando Paola hace el movimiento $i$, Victor hace el movimiento $j$ y Cristian hace el movimiento $k$. En consecuencia, Paola recibe el pago $E_ijk$, Victor recibe pago $G_ijk$, y Cristian recibe el pago $N_ijk$. Cada jugador tiene una matriz tridimensional de pagos $n_E \times n_G \times n_N$ asociada y los tres están familiarizados con las tres matrices de pagos.

Por supuesto, si Paola siempre hiciera el mismo movimiento, Victor y Cristian no tardarían mucho en decidir cuál es la mejor manera de maximizar sus propios beneficios en relación con los de ella. Entonces, en lugar de hacer el movimiento i constantemente, Paola puede optar por jugar una estrategia diferente. Puede elegir jugar cada movimiento con una cierta probabilidad. Tiene sentido hacer esto. Por ejemplo, en un juego de póquer, un jugador no quiere farolear cada vez que ciertas cartas están en su mano, ya que los otros jugadores pronto se darán cuenta del hecho de que ella lo hace constantemente. Más bien, debería fanfarronear con una cierta probabilidad que ha predeterminado. Esta será su estrategia. Entonces no se asociará ningún patrón de cartas en particular con su farol.

Denotamos la probabilidad de que Paola juegue el movimiento $i$ por $p_i$, que Victor juegue el movimiento $j$ por $q_j$, y que Newman juegue el movimiento $k$ por $r_k$. Hacemos las suposiciones básicas de probabilidad de que

$$p_i \geq 0, q_j \geq 0 \text{ y } r_k \geq 0 \ \forall i, j, k. \tag{3.2}$$

y

$$\sum_{i}^{\infty} p_i = 1, \ y \ \sum_{j}^{\infty} q_j, \ y \ \sum_{k}^{\infty} r_k. \tag{3.3}$$

**Definición 3.3**

Los vectores de probabilidad correspondientes

$$p = (p_1, p_2, ..., p_{n_E}), q = (q_1, q_2, ..., q_{n_G}) \text{ y } r = (r_1, r_2, ..., r_{n_N})$$

se llaman **estrategias mixtas**.

**Definición 3.4**

Sea $P(q,r)$ el conjunto de todos los vectores de probabilidad $p$ que satisfacen $E(p,q,r) \geq E(p\prime, q, r)$ sobre todas las estrategias mixtas $p\prime$. A esto se le llama el conjunto de estrategias mixtas óptimas asociadas a las estrategias mixtas $q$ y $r$.

**Definición 3.5**

Vectores de estrategia mixta $p, q$ y $r$ se dice que son únicos en el juego si $p \in P(q,r)$, $q \in Q(p,r)$ $r \in R(p,q)$. Entonces decimos que $p, q$ y $r$ son un **equilibrio de Nash**.

Antes de continuar con el teorema de Nash, revisamos los componentes que conducen a él:

(i) En un juego de n personas, cada jugador tiene la opción de realizar movimientos, y cada movimiento se realiza sin conocer los movimientos de los demás.

(ii) Asociado a cada jugador hay una matriz de pagos que proporciona los pagos que recibe el jugador por todos los resultados posibles asociados con cada jugador que elige un movimiento.

(iii) Cada jugador puede elegir una estrategia mixta, y las elecciones combinadas de estrategias mixtas determinan el pago promedio, o el valor esperado, para cada jugador.

(iv) Cada jugador tiene un conjunto de estrategias mixtas óptimas para cada elección de estrategias mixtas de los otros jugadores. Cada estrategia mixta óptima da como resultado el máximo valor esperado posible para el jugador dadas las estrategias mixtas de los demás.

(v) Un equilibrio de Nash es una elección de estrategias mixtas que produce, para cada jugador, el valor esperado máximo posible en relación con las estrategias mixtas de los otros jugadores.

**Teorema 3.2**
Teorema de Nash Existe un equilibrio de Nash para cada juego de $n$ personas.

*Demostración.*

Presentamos la prueba de los juegos de tres personas para mantener la notación simple, pero la misma prueba se aplica a los juegos de $n-$personas. Dadas las tres matrices de pagos $E_{ij}$, $G_{ij}$ y $H_{ij}$ necesitamos demostrar que hay un conjunto de estrategias mixtas $p$, $q$ y $r$ que resuelve el juego sea$m = n_E + n_G + n_N$. Para una selección de vectores de estrategia mixta $p = (p_1, ..., p_{n_E})$, $q = (q_1, ..., q_{n_G})$ y $r = (r_1, ..., r_{n_N})$ definimos un $m-$vector concatenando las componentes de estos vectores, como sigue:

$$w = (p, q, r) = (p_1, ..., p_{n_E}, q, ..., q_{n_G}, ..., r_1, ..., r_{n_N}).$$

Cada uno de estos vectores $w$ representa una elección combinada de estrategias mixtas individuales de cada jugador. Sus componentes deben satisfacer las Desigualdades 3.2 y las Ecuaciones 3.3. Se sigue que el conjunto de posibles vectores w es un poliedro $X$ en $\mathbb{R}^m$.

Definimos una función de valor fijo en $X$ por

$$F(p,q,r) = \{(p',q',r') | p' \in P(q,r), q' \in Q(p,r), r' \in R(p,q)\}$$

En otras palabras, el vector $w = (p,q,r)$ se envía a la colección de vectores que tienen la propiedad de que sus primeros $n_E$ componentes son una estrategia óptima para Paola, dado que Victor y Cristian se apegan a las estrategias $q$ y $r$; sus segundos componentes $n_G$ son una estrategia óptima para Victor, dado que Paola y Cristian se apegan a las estrategias $p$ y $r$; y sus últimos componentes $n_N$ son una estrategia óptima para Cristian, dado que Paola y Victor se apegan a las estrategias $p$ y $q$.

Si mostramos que existe un $w*$ tal que $w* \in F(w*)$, entonces habremos probado el teorema, porque tal vector $w* = (p*, q*, r*)$ está formado por tres vectores, $p*$, $q*$, y $r*$ tales que $p* \in P(q,r)$,$q \in Q(p,r)$, y $r \in R(p',q)$. Por lo tanto, necesitamos demostrar que existe un punto fijo para la función de multivaluada $F : X \longrightarrow_s X$.

Mostramos que el teorema del punto fijo de Kakutani se aplica a $F$. Anteriormente se observó que $X$ es un poliedro en $\mathbb{R}^n$. Dado que cada uno de $P(q,r)$, $Q(p,r)$ y $R(p,q)$ es convexo, debe ser que $F(w)$ también es convexa . Por lo tanto, solo necesitamos mostrar que el gráfico $G_f$ es un subconjunto cerrado de $X \times X \subset \mathbb{R}^{2m}$ Sea $(x_0, y_0)$ un punto límite de $G_f$. Para cada entero positivo $i$, elige un punto $(x_i, y_i)$ en la intersección de $G_f$ con la bola de radio $1/i$ centrada en $(x_0, y_0)$. Obtenemos una sucesión de puntos $(x_i, y_i)$ en $G_F$ convergentes a $(x_0, y_0)$. Sean $x_i = (p_i, q_i, r_i)$, $y_i = (s_i, t_i, u_i)$, $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ y $y_0 = (s_0, t_0, u_0)$. Entonces tenemos las siguientes sucesiones convergentes: $(p_i)$ a $p_0$, $(q_i)$ a $q_0$, $(r_i)$ a $r_0$, $(s_i)$ a $s_0$, $(t_i)$ a $t_o$, y $(u_i)$ a $u_o$.

Notamos que $y_i \in F(x_i)$. Para todo $i$ por lo tanto $s_i \in P(q_i, r_i)$, $t_i \in Q(p_i, r_i)$, t $u_i \in R(p_i, q_i)$. Por lo tanto pata todo $p\prime, q\prime$, y $r\prime$, nosotros tenemos

$$E(s_i, q_i, r_i) \geq E(p\prime, q_i, r_i)$$

$$G(p_i, t_i, r_i) \geq G(p_i, q\prime, r_i)$$

$$N(p_i, q_i, u_i) \geq N(p_i, q_i, r\prime)$$

Dado que $E$, $G$ y $N$ son funciones continuas, estas desigualdades se mantienen cuando tomamos el límite cuando $i$ tiende a infinito. Esto implica que

$$E(s_0, q_0, r_0) \geq E(p\prime, q_0, r_0)$$

$$G(p_0, t_0, r_0) \geq G(p_0, q\prime, r_0)$$

$$N(p_0, q_0, u_0) \geq N(p_0, q_0, r\prime)$$

Por lo tanto $s_0 \in P(q_0, r_0)$, $t_0 \in Q(p_0, r_0)$, y $R(p_0, q_0)$. Por lo tanto, $y_0 \in F(x_0)$ lo que implica que $(x_0, y_0)$ está en el grafo de $F$. Por lo que el grafo de $F$ es cerrada. Ahora se aplica el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, y por lo tanto existe un $w$ tal que $w \in F(w)$, como queríamos mostrar.

■

Por lo tanto, para nuestro juego de tres jugadores, estamos seguros de que existe un equilibrio de Nash y, por lo tanto, es posible que cada jugador elija una estrategia mixta que resulte en el valor esperado máximo en relación con las elecciones de estrategia mixta de los demás.
Aunque la demostración anterior involucra un juego de tres personas, necesitamos la versión general del Teorema del Punto Fijo de Kakutani para establecer la existencia del equilibrio de Nash. Esto se debe a que es el número total de jugadas que pueden hacer los jugadores, más que el número total de jugadores, lo que determina la dimensión del espacio en el que estamos trabajando.
Como indicamos anteriormente, estos resultados se transfieren a los juegos de n personas para cualquier número entero positivo n. La prueba para el caso general es esencialmente la misma que

la prueba presentada aquí, con el teorema del punto fijo de Kakutani que establece la existencia del equilibrio de Nash.

**Ejemplos.**

**Ejemplo 3.5. Dilema del prisionero**

Uno de los ejemplos mas conocidos en los equilibrios de Nash aplicado a la teoría de juegos no cooperativos es el juego llamado **Dilema del prisionero**.

Los presuntos ladrones fueron arrestados por la policía e interrogados por separado. Los delincuentes, que no tienen posibilidad de ponerse de acuerdo sobre su respuesta, se enfrentan a las siguientes opciones:

- Si confiesas, pero tu compañero no, te dejaremos en libertad mientras que a tu compañero le daremos 10 años de cárcel.
- Si vemos que ambos confiesan, les daremos 5 años a cada uno.
- Si ninguno de los dos confiesa, les daremos 1 año de cárcel a cada uno.

Esta situación la podemos representar gráficamente a través de un juego donde representamos una matriz de resultados donde cada año de prisión tiene un valor negativo.

$$\begin{array}{ccccc} & & & \textit{Prisionero } 1 & \\ & & NC & & C \\ & NC & (-1,-1) & & (-10,0) \\ \textit{Prisionero } 2 & & & & \\ & C & (0,-10) & & (-5,-5) \end{array}$$

$$C = Confesar \qquad NC = No\ confesar$$

Lo que nos preguntamos es que harán los detenidos ¿cooperaran entre sı o se traicionaran el uno al otro? Alguien que este observando este juego podría pensar que los dos jugadores cooperaran puesto que si ambos lo hacen obtendrían el menor castigo posible. Sin embargo, ya que hablamos de juegos no cooperativos hace que no sea probable.

Si se pactara la no-confesión por parte de los dos, ambos tendrían incentivos particulares para romperlo, pues dejando al otro en cumplimiento del pacto de no confesar y este confesando, el que rompe el pacto obtiene la libertad mientras al otro lo condenaran a 10 años.

Estudiando las otras tres posibilidades del juego es decir, $(C,NC)$,$(C,C)$, $(NC,C)$ observamos que el único acuerdo creíble que significa que ninguno de los dos querría romper el pacto unilateralmente porque perdería es $(C,C)$. En definitiva, la predicción de lo que ocurrirá en el juego es que ambos confesaran y permanecerán en la cárcel 5 años.
La conclusión en situaciones similares a esta que son comunes en la vida diaria es que la competencia egoísta puede conducir a estados que son inferiores en términos de beneficio personal y social a los estados cooperativos.
Por lo que en este juego que se acaba de presentar , el equilibrio de Nash es Confesar-Confesar $(C,C)$, ya que como hablamos de seres racionales ninguno de los jugadores tiene un incentivo para cambiar su decisión considerando las decisiones del otro jugador . Sin embargo, ambos preferirían ubicarse en otro equilibrio el cual es No confesar-no confesar.

# Conclusión

En conclusión, el teorema de punto fijo de Kakutani es un importante resultado matemático en topología que establece la existencia de al menos un punto fijo para cualquier función continua en un espacio topológico compacto y convexo. Este teorema ha demostrado ser útil en la teoría de juegos para demostrar la existencia de equilibrios de Nashen juegos no cooperativos.

En esta libro referencial, se ha investigado el uso del teorema de punto fijo de Kakutani en la demostración de la existencia de equilibrios de Nash en donde mediante la búsqueda de libros, tesis, revista y otros se logro la creación de este libro enfocado para el estudio de los estudiantes de matemáticas.

En general, esta libro referencial ha demostrado que el teorema de punto fijo de Kakutani es una herramienta valiosa en la teoría de juegos para demostrar la existencia de equilibrios de Nash en ciertos juegos y ha proporcionado una comprensión más profunda de cómo este teorema se aplica en la teoría de juegos. Sin embargo, también se ha destacado la importancia de tener en cuenta las limitaciones de esta aplicación y la necesidad de continuar investigando para ampliar su alcance.

# *Bibliografía*


[Adams and Franzosa, 2008] Adams, C. C. and Franzosa, R. D. (2008). *Introduction to topology: pure and applied*.

[Agarwal et al., 2001] Agarwal, R. P., Meehan, M., and O'regan, D. (2001). *Fixed point theory and applications*, volume 141. Cambridge university press.

[Baum, 1991] Baum, J. D. (1991). *Elements of point set topology*. Courier Corporation.

[Binmore, 1994] Binmore, K. (1994). *Teoría de juegos*. McGraw-Hill Madrid.

[Border, 1985] Border, K. C. (1985). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge university press.

[Clara and Neira, 2008] Clara, M. and Neira, U. (2008). Topología general.

[Díaz and Calcines, 2005] Díaz, F. and Calcines, J. M. G. (2005). *Curso de Topología General*. Vision Libros, Madrid, España.

[Dugundji, 1966] Dugundji, J. (1966). *Topology allyn and bacon*. 2 edition.

[García Álvaro, 2020] García Álvaro, D. (2020). Teoremas del punto fijo y aplicaciones.

[Gibbons, 2022] Gibbons, R. (2022). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch Editor.

[Iribarren, 1984] Iribarren, I. L. (1984). *Topología de espacios métricos*. Limusa.

[Kelley, 1955] Kelley, J. L. (1955). *General topology*. Courier Dover Publications.

[Monsalve, 1999] Monsalve, S. (1999). *Introducción a los conceptos de equilibrio en economía*. Univ. Nacional de Colombia.

[Monsalve, 2002] Monsalve, S. (2002). Teoría de juegos:¿ hacia dónde vamos?(60 años después de von neumann y morgenstern). *Revista de economía institucional*, 4(7):114–130.

[Morris, 1989] Morris, S. A. (1989). *Topology without tears*. University of New England.

[Munkres, 2002] Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Prentice Hall Inc, Madrid, España, 2 edition.

[Nash, 1950] Nash, J. (1950). Non cooperative games [tesis doctoral en matemáticas]. *New Jersey: Princeton University.f*.

[Navarro and Tena, 2003] Navarro, J. P. and Tena, E. C. (2003). *Teoría de juegos*. Pearson educación.

[Pérez, 2015] Pérez, J. A. (2015). Topología de conjuntos, un primer curso. *Publicaciones Electrónicas*, 18.

[Prieto, 2005] Prieto, C. (2005). *Topología básica*. Fce.

[Quevedo, 2003] Quevedo, J. M. M. (2003). *Topología básica*. Number 11. Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[Rubiano, 2010] Rubiano, G. N. (2010). *Topología general*. Univ. Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 3 edition.

[Shashkin, 1991] Shashkin, Y. A. (1991). *Fixed points*, volume 2. Universities Press.

[Steen et al., 1978] Steen, L. A., Seebach, J. A., and Steen, L. A. (1978). *Counterexamples in topology*, volume 7. Springer.

[Urquidi, 2018] Urquidi, J. M. P. (2018). Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de nash para juegos no cooperativos.

[Ventsel, 1977] Ventsel, E. S. (1977). Elementos de la teoría de los juegos. Technical report.

[Yuan, 2017] Yuan, A. (2017). Fixed point theorems and applications to game theory. Technical report, Working Paper, University of Chicago.

espoch | Dirección de Bibliotecas y Recursos del Aprendizaje

**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL**

**REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA**

**Fecha de entrega:** 16 / 05 / 2023

| |
|---|
| **INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)** |
| **Nombres – Apellidos:** Christopher Vlad Cedeño Cruz |
| **INFORMACIÓN INSTITUCIONAL** |
| **Facultad:** Ciencias |
| **Carrera:** Matemática |
| **Título a optar:** Matemático |
| **f. Analista de Biblioteca responsable:** Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo |

0797-DBRA-UPT-2023