ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

LOS AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: FRANKLIN DAVID ESPINOZA SANAGUANO

DIRECTOR: MSC. CARLOS EDUARDO COVA SALAYA

Riobamba – Ecuador

2023

Yo, FRANKLIN DAVID ESPINOZA SANAGUANO, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 06 de abril de 2023

Franklin David Espinoza Sanaguano

095362977-1

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **LOS AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS**, realizado por el señor: **FRANKLIN DAVID ESPINOZA SANAGUANO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Msc. Ramón Antonio Abancin Ospina **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		2023-04-06
Msc. Carlos Eduardo Cova Salaya **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-04-06
Dr. Franklin Marcelo Coronel Maji **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-04-06

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de titulación a mi familia, por su incondicional apoyo en todo momento, por enseñarme a ser perseverante y nunca rendirme. A mis primos que son como mis hermanos por todo su apoyo y palabras. También quiero dedicarle a mi amada por su paciencia, comprensión y por ser mi mejor amiga y confidente. A mis amigos, por su compañía y motivación en los momentos difíciles.

Franklin

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la realización de este proyecto. En especial, quiero agradecer al Msc. Carlos Eduardo Cova Salaya por su valiosa colaboración, apoyo y orientación durante todo el proceso. Sin su ayuda, este logro no habría sido posible. También quiero agradecer a mis seres queridos por su apoyo y comprensión incondicional durante este tiempo. Este logro es también el suyo, muchas gracias por su apoyo.

Franklin

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), específicamente en la Carrera de Matemática no existe una completa información, ya sea bibliográfica y documental, que permita un mejor entendimiento sobre los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) en la teoría de conjuntos, son temas que no han sido profundizados en el transcurso de su carrera académica teniendo déficit en parte de sus conocimientos. El objetivo es generar un documento de referencia y apoyo para los estudiantes, mediante referencias bibliográficas, con el fin de dar a conocer el estudio de los axiomas de ZF en la teoría de conjuntos. La presente investigación se encamina en el enfoque cualitativo, que busca comprender de manera profunda y detallada el tema de estudio. Se basa en evidencias recolectadas a través de la aplicación de técnicas y metodologías específicas de la investigación cualitativa, análisis de documentos y otros. El alcance de esta investigación es exploratorio y descriptivo, lo que significa que se busca entender y describir el tema sin suficiente información referente al estudio ya mencionado. Además, se utilizó el diseño de investigación documental como técnica específica para recolectar datos a través de la revisión de documentos existentes. Como resultado de dicho análisis se tiene un documento de referencia titulado "Los Axiomas de Zermelo-Fraenkel en la Teoría de Conjuntos" el cual describe de manera detallada cada axioma y sus consecuencias. A partir de la creación de dicho documento se establecen dos capítulos, el primero trata sobre las nociones básicas de Lógica Matemática y en el segundo capítulo se presenta la axiomática de ZF en el que se exponen los diez axiomas con cada una de sus consecuencias. Al ser un tema complejo, se tuvo dificultades y limitaciones para desarrollarlo, a pesar de esto se realizó un documento referencial con aspectos más importantes y detallados para su comprensión.

Palabras clave: <AXIOMAS>, <CONJUNTOS>, <ZERMELO>, <FRAENKEL>, <LÓGICA>, <MATEMÁTICA>, <TEORÍA DE CONJUNTOS>.

0786-DBRA-UPT-2023

ABSTRACT

At the Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), in the career of Mathematics there is no complete information, either bibliographic or documentary, that allows a better understanding of the axioms of Zermelo - Fraenkel (ZF) in set theory, they are topics that have not been deepened in the course of this academic career, having deficit in part of their knowledge. The aim is to generate a reference and support document for students through bibliographical reference, in order to make known the study of the axioms of ZF in set theory. This research is based on the qualitative approach, which seeks to understand in a deep and detailed way the subject of study. It is based on evidence collected through the application of specific techniques and methodologies of qualitative research, document analysis and others. The scope of this research is exploratory and descriptive, which means that it seeks to understand and describe the subject without enough information regarding the aforementioned study. In addition, the documentary research design was used as a specific technique to collect data through the review of existing documents. As a result of this analysis we have a reference document entitled "The Zermelo-Fraenkel Axioms in Set Theory" which describes in detail each axiom and its consequences. From the creation of this document two chapters are established: the first one deals with the basic notions of Mathematical Logic, and the second chapter presents the axiomatic ZF in which the ten axioms are exposed with each of their consequences. Since it is a complex subject, there were difficulties and limitations to develop it, in spite of this, a referential document with more important and detailed aspects for its comprehension was made.

Keywords: <AXIOMS>, <SETS>, <ZERMELO>, <FRAENKEL>, <LOGIC>, <MATHEMATICS>, <SET THEORY>.

Dra. Nanci M. Inca Ch. Mgs.

060292671-9

INTRODUCCIÓN

En 1870 Georg Cantor realizó un análisis sobre la teoría de conjuntos la cual no fue perfeccionada, ya que contenía paradojas. En 1908 por Ernst Zermelo quien mejoró de forma notable la axiomatización ya que a él se atribuyó el axioma de Elección. Sin embargo, Abraham Fraenkel y Thoralf Skolem completaron la axiomatización en el año 1922 e introdujeron el axioma de reemplazo, en la actualidad es conocida como axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Estos métodos aplicables son fórmulas ya establecidas y comprobadas por expertos en el tema, siendo el caso de la teoría de conjuntos, específicamente refiriéndose a los axiomas de Zermelo-Fraenkel que consisten en sistemas axiomáticos por medio de los cuales se pretende determinar la teoría de conjuntos que se emplea para indagar las propiedades y relación de los conjuntos, lo que hace de ese método teórico de gran utilidad e importancia para los estudiantes, es debido a esto que se desarrolló un documento a partir de la recopilación de información que sirva como referencia teórica- práctica para el alumnado de la Carrera de Matemática de la Escuela Superior de Chimborazo (ESPOCH) en materia de la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

La finalidad del presente documento, es orientar a los estudiantes de la Carrera de Matemática, para mejorar sus aptitudes en la resolución de teoremas, lema y proposiciones. Este documento se encuentra desarrollado en dos partes, la primera se conceptualiza y analizan términos básicos para la comprensión y entendimiento del tema, además se explica brevemente los sucesos de la problemática que conllevaron al descubrimiento de este sistema axiomático. Para el segundo capítulo se describe la fundamentación teórica de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y se sustenta estas formulaciones con ejemplos que clarifiquen lo expuesto para reforzar el discernimiento de estos axiomas. Finalmente, se muestra la bibliografía utilizada.

La aplicación de estos métodos y herramientas son de utilidad para llevar a cabo procedimientos matemáticos, los cuales son empleados en modo de fundamentos, a partir de esto se realizará las operaciones pretendidas, como es el caso de los axiomas que consisten en verdades irrefutables de magnitud universal, lo que permite su aplicación sirva como base para la construcción teórica-practica como es en el caso de teoría de conjuntos.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Carrera de Matemática, no existe una completa información, ya sea bibliográfica y documental, que permita un mejor entendimiento sobre los axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjunto, al ser de vital importancia al desarrollo de los estudiantes, son temas que no han sido profundizados en el transcurso de su carrera académico teniendo un déficit en parte de sus conocimientos. Es por esto que se realizó este material de apoyo para facilitar el estudio y la comprensión del tema ya en mención.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Generar un documento de referencia y apoyo para los estudiantes de la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, mediante referencias bibliográficas, con el fin de dar a conocer el estudio de los axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjunto.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Indagar fuentes bibliográficas con información real, referente al tema de estudio.
- Seleccionar las fuentes que atribuyan información de valor para el desarrollo del documento.
- Organizar la información previamente recopilada de tal forma que tenga un orden cronológico permitiendo al lector entender el documento.

1.3. Justificación

Este trabajo investigativo es un aporte a los estudios ya realizados, así como los futuros en referencia a los axiomas de Zermelo-Fraenkel, ya que es esencial en la Carrera de Matemáticas, al ser fundamentales en la teoría de conjuntos y son utilizados como base para el desarrollo de conceptos avanzados en áreas como la topología, la teoría de la medida y la teoría de modelos. Los estudiantes de matemáticas deben desarrollar un pensamiento abstracto y lógico para entender estos axiomas y aplicarlos en su trabajo como profesionales. El estudio de estos axiomas y teoremas en las asignaturas teóricas ayuda a retroalimentar los conceptos de Teoría de Conjuntos y a desarrollar una comprensión más profunda de estos temas.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referencias teóricas

Los axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjuntos, es importante ya que a lo largo del tiempo se ha venido desarrollando, por ello al ser procedimientos matemáticos, es necesario tener una documentación referencial para los estudiantes de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, de la Carrera de Matemáticas. Con estos antecedentes y para un mayor entendimiento el documento se divide en dos capítulos: Elementos de Lógica de la Matemática y Axiomática de Zermelo-Fraenkel.

ELEMENTOS DE LÓGICA DE LA MATEMÁTICA

Es una rama de las matemáticas que se ocupa de estudiar las estructuras formales de la lógica y su relación con las matemáticas. Es utilizada para analizar y comprender la estructura de los razonamientos lógicos, también ayuda al desarrollo de métodos y herramientas que posteriormente servirá para la verificación y la demostración de teoremas matemáticos. Además, dicho tema está conformado por una parte llamada sintaxis, Gallinari (2006) señala que "es la definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas a partir de aquellos. Las expresiones admitidas por el lenguaje se denomina fórmulas" (p.8). Este análisis del especialista en la materia, hace referencia a los instrumentos que se encuentran en una estructura lógica, esto conlleva los símbolos de constantes, funciones, predicados, variables, auxiliares, conectores lógicos, cuantificadores y otros.

En cambio, en la semántica "es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o de un razonamiento" (Gallinari, 2006, p.8). En relación a esta cita bibliográfica el autor hace referencia establecer si es verdadero o falso, tener una lógica, no puede a ver otra respuesta.

La diferencia estructural de las teorías ya mencionadas, es que la sintaxis es conocida por la demostración y la semántica es interpretativa. Con ello en la sintaxis tratamos de demostrar con los factores a nuestro alcance para llegar a un fin, y la semántica se estructura para tener una lógica ya sea de verdadero o falso.

AXIOMÁTICA DE ZERMELO-FRAENKEL

En libro "SOBRE LA AXIOMATIZACIÓN EN MATEMÁTICAS" del autor Guerrero publicado en el año 2004 manifiesta lo siguiente:

> *Axiomatizar o formalizar una teoría consiste en establecer un mínimo de proposiciones evidentes fundamentales llamadas axiomas y en derivar de los axiomas todas las demás proposiciones del sistema, en calidad ya de teoremas, de corolarios o de problemas. Los axiomas constituyen los cimientos del sistema y los teoremas, consecuencias de los axiomas, forman la estructura de la teoría.* (Guerrero, 2004, p.86)

Es decir, se presenta una lista de los axiomas más relevantes que es utilizado para construir la teoría de conjunto. Esto ayuda a un mejor entendimiento a los estudiantes ya que es un tema complejo y al no existir suficiente documentación no cuentan con herramientas para mejorar en este aspecto.

El **axioma de extensión**, establece que tomando dos conjuntos son iguales, si contiene los mismos elementos, es esencial para la lógica y la consistencia de la teoría de conjuntos. El **axioma es del vacío**, menciona que existe un conjunto que no contiene elementos. El **axioma de la unión**, señala que, dado dos conjuntos, se puede crear uno que contenga todos los elementos de ambos conjuntos originales. El **axioma de la potencia o partes**, establece que el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado es un conjunto. Es importante destacar que este axioma es la base para la teoría de conjuntos y es necesario para definir conceptos como la relación de pertenencia y la relación de inclusión entre conjuntos. El **axioma de infinitud**, afirma que existe al menos un conjunto infinito. Esto significa que existe al menos un conjunto que contiene un número ilimitado de elementos. Esto es fundamental para la construcción de la matemática y en particular en la teoría de conjuntos y teoría de números.

El **axioma de elección**, afirma que, para cualquier conjunto no vacío de conjuntos no vacíos, existe al menos una función de elección que asigna a cada conjunto no vacío un elemento distinto de ese conjunto. En otras palabras, si tenemos un conjunto de conjuntos no vacíos, podemos elegir un elemento distinto de cada uno de ellos. Este axioma es importante en la construcción de la teoría de conjuntos y en la teoría de modelos, ya que permite construir soluciones a problemas donde se busca elegir un elemento de un conjunto dado. Sin embargo, también ha generado cierta controversia debido a que su uso puede conducir a resultados no intuitivos.

En este capítulo desarrollado también fueron necesarios los documentos bibliográficos, ayudando a un mejor entendimiento de los axiomas anteriormente descritos. Al no existir demasiada documentación al respecto, se hace complejo a los alumnos el buscar medios de apoyo para la compresión de esta problemática.

Las fuentes bibliográficas empleadas para el estudio del tema en cuestión fueron fundamentales en la creación de este documento de apoyo. Estas fuentes proporcionaron los conceptos específicos y la información necesaria para entender el tema de manera más completa.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance y diseño de investigación

La presente investigación se encamina en el enfoque cualitativo, que busca comprender de manera profunda y detallada el tema de estudio de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Se basa en evidencias recolectadas a través de la aplicación de técnicas y metodologías específicas de la investigación cualitativa, observaciones no estandarizadas, análisis de documentos y otros. El alcance de esta investigación es exploratorio y descriptivo, lo que significa que se busca entender y describir el tema sin suficiente información referente al estudio ya mencionado. Además, se utilizó el diseño de investigación documental como técnica específica para recolectar datos a través de la revisión de documentos existentes.

3.2. Descripción de tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación

Las metodologías empleadas en esta investigación fueron de tipo documental y teórica. Se llevó a cabo una recopilación de información relevante en diversas fuentes, como libros, tesis y notas digitales, todas relacionadas con el estudio de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjuntos. Se seleccionaron las fuentes que contenían información valiosa para el desarrollo de la investigación y se organizó esta información de manera cronológica para facilitar la comprensión del tema. De esta manera, se logró un conocimiento apropiado y creativo basado en los documentos recopilados.

Las técnicas que se utilizaron son bibliográficas y de observación las cuales permitieron la recolección de información referente al tema en mención, ayudando de manera considerable desarrollar el proyecto de investigación. Para llevar a cabo se utilizó instrumentos como el software ***LaTeX*** con el compilador de texto ***TeXstudio*** que ayudo a la obtención del documento.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

Una vez determinado el tema de investigación, se inició un proceso de recopilación de información en diferentes fuentes bibliográficas, incluyendo libros, tesis y de más, todas relacionadas con el estudio de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjuntos. Se llevó a cabo una lectura compresiva, cuidadosa y selectiva de las referencias seleccionadas, con el objetivo de clasificar y elegir aquellos documentos que son esenciales para el desarrollo y comprensión de los tópicos relacionados con la teoría de conjuntos. Después de una investigación exhaustiva finalmente se dio paso a la organización de información y creación de un documento en el que se explica la teoría de manera precisa y detallada.

4.2. Discusión

En esta investigación sobre los Axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjuntos pudimos observar a lo largo de la historia un cambio en la interpretación de la teoría antes mencionada, esto conllevo a encontrar la problemática, al no tener muchas fuentes bibliográficas en el cual los estudiantes de la ESPOCH, de nuestra Carrera de Matemáticas, puedan basarse y sea de mayor entendimiento en esta problemática, al ver todos estos aspectos fueron necesarios la elaboración del presente documento para servir de referencia y poder fomentar un mejor desarrollo.

La investigación de los axiomas de Zermelo-Fraenkel en la teoría de conjuntos se desarrollaron temas como: Elementos de la lógica matemática y la Axiomática, es importante entender y estudiar el tema en mención, sobre la teoría de conjuntos, se debe priorizar el estudio sobre los dichos axiomas porque es base fundamental para mejorar el entendimiento de la teoría. Con estos aspectos y recabando información se pudo generar esta documentación que es referencial, ya que es un aporte significativo para los estudiantes de la carrera.

Sin embargo, al ser un tema extenso y complejo de explicar, existieron limitaciones para el desarrollo del mismo, al no existir suficiente información, por cual procedí a la búsqueda de documentos más relevantes para explicar de manera didáctica y mejorar el entendimiento de las personas que vayan a utilizar este documento de apoyo al ser fundamental para la teoría de conjuntos.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- A través del estudio de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, se procede a dejar documentación de apoyo la cual es netamente referencial, pero sirve para tener un mejor entendimiento sobre este tema.
- Al ser un tema complejo y no tener una bibliografía significativa, se tuvo dificultades y limitación para desarrollar de mejor manera el tema, a pesar de esto se realizó este documento con los aspectos más importantes y detallados para la realización del mismo.
- Con la documentación bibliográfica encontrada, se procedió a crear una estructura didacta, organizada de acuerdo a la importancia de los diversos temas ya mencionados, ya que con ello generamos el documento para mejor el entendimiento de los estudiantes de la Carrera de Matemática de la ESPOCH.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda que se gestione el aumento de documentos bibliográficos físicos y digitales en la biblioteca y repositorios de la ESPOCH, ya que con esto ayudamos a generar mayor facilidad para los estudiantes de la Carrera de Matemática.
- A los estudiantes de la Carrera de Matemática tomen como referencia esta documentación y a su vez generen nuevas investigaciones a partir de esta, de forma detallada sobre los Axiomas de Zermelo-Fraenkel.
- Se recomienda para tener un mejor entendimiento sobre la "Teoría de Conjuntos" ya que, al ser un tema complejo, primero se debe tener bases sobre los axiomas Zermelo-Fraenkel.

BIBLIOGRAFÍA

AGUILAR, A. *El axioma de elección en topología y álgebra.*(Tesina) Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2009. [Consulta: 21 noviembre 2021]. Disponible en: https://alicia.concytec.gob.pe/vufind/Record/UNMS_998a2119f09b7578e5d0cf1f0d536e69/Details

ARRONDO, E. *Apuntes de teoría de conjuntos*. 2012. [Consulta: 10 diciembre 2021]. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/~arrondo/conjuntos.pdf

CASANOVAS, E. *Teoría axiomática de conjuntos*. 1998. [Consulta: 15 diciembre 2021]. Disponible en: https://docplayer.es/19327076-Teoria-axiomatica-de-conjuntos-e-casanovas.html

CASANOVAS, E. *Lógica 1*. 2000. [Consulta: 5 enero 2022]. Disponible en: https://docplayer.es/20880595-L-ogica-1-enrique-casanovas-curso-1999-2000.html

CASTEL DE HARO, M.; LORENS F. *Lógica de primer orden*. 1999. [Consulta: 20 enero 2022]. Disponible en: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/57966/1/Libro_LPO99.pdf

CASTILLO, C. *Teorías de Conjuntos*. 2014. [Consulta: 2 febrero 2022]. Disponible en: https://www.uv.es/~ivorra/Libros/TC.pdf

CIGNOLI, R. *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción*. 2006. [Consulta: 10 marzo 2022]. Disponible en: http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf

DI PRISCO, C. *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas.* UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia, 1997. [Consulta: 30 marzo 2022]. Disponible en: https://www.cle.unicamp.br/ebooks/index.php/publicacoes/catalog/view/25/22/73

GALLINARI, A. *Lógica matemática*. 2006. [Consulta: 1 abril 2022]. Disponible en: https://docplayer.es/71791455-Logica-matematica-apuntes-ingenieria-en-informatica-escet-alessandra-\gallinari.html

GUERRERO, B. *Sobre la axiomatización en matemáticas*. Boletín de matemáticas, 2004, vol. 11, no 1, p. 79-94. [Consulta: 12 abril 2022]. Disponible en: https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/40290

HERNÁNDEZ, F. *Teoría de conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana, 1998. [Consulta: 15 abriel 2022]. Disponible en: https://es.scribd.com/document/386245017/Teoria-de-conjuntos-Fernando-Hernandez-Hernandez-Sociedad-Matematica-Mexicana-1998-pdf

HUERTAS, A.; MANZANO, M. *Teoría de conjuntos.* 2002. [Consulta: 21 abril 2022]. Disponible en: https://mat.uda.cl/hsalinas/cursos/2011/teoriaconjuntos.pdf

IVORRA, C. *La axiomática de la teoría de conjunto*. 2011. [Consulta: 21 diciembre 2021]. Disponible en: https://www.uv.es/~ivorra/Libros/Axiomas.pdf

LIN, T. *Fundamentals of Zermelo-Fraenkel set theory*. 2011. [Consulta: 12 abril 2022]. Disponible en: http://edscyclopedia.com/wp-content/uploads/2016/07/Zermelo-Fraenkel_Set_Theory.pdf

MUÑOZ, J. *Introducción a la teoría de conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia, 2012. [Consulta: 21 octubre 2021]. Disponible en: https://download.e-bookshelf.de/download/0003/7222/28/L-G-0003722228-0007577078.pdf

SOLÍS, J.; & TORRES,Y. *Lógica Matemática*. UAM, Unidad Iztapalapa, 1995. [Consulta: 15 diciembre 2021]. Disponible en: https://www.uamenlinea.uam.mx/materiales/matematicas/logica/SOLIS_DAUN_JULIO_ERNESTO_Logica_Matematica.pdf

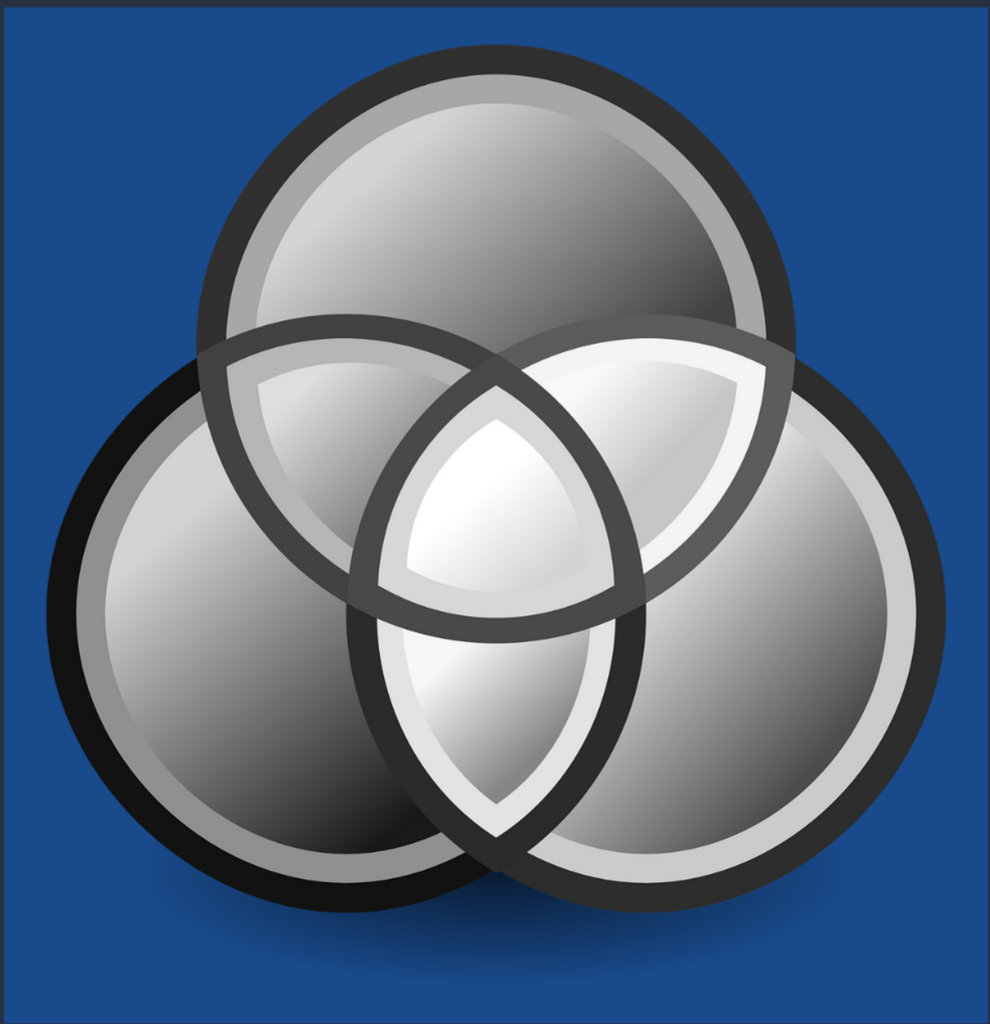
TINTAYA, P. *Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos. La paradoja de Russell Inclusión. Conjunto de partes de un conjunto. Operaciones con conjuntos y sus propiedades. Resolución de problemas basado en conjuntos. Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento.* 2021. [Consulta: 11 mayo 2021]. Disponible en: https://repositorio.une.edu.pe/handle/20.500.14039/6302

VIDAL, J. *Teoría de conjuntos*. 2010. [Consulta: 29 octubre 2021]. Disponible en: https://www.uv.es/jkliment/Documentos/SetTheory.pc.pdf

ANEXOS

ANEXO A: DOCUMENTO REFERENCIAL “LOS AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS”

LOS AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL EN LA TEORÌA DE CONJUNTOS.



FRANKLIN ESPINOZA

2023

Contenidos

Introducción

La aplicación de métodos y herramientas que sean de utilidad para llevar a cabo procedimientos matemáticos como demostraciones de teoremas y proposiciones son empleados en modo de fundamentos, a partir de estos se realizará las operaciones pretendidas, tal como es el caso de los axiomas que consisten en verdades irrefutables de magnitud universal, lo que permite que su aplicación sirva como base para la construcción teórica como es en el caso de teoría de conjuntos. Estos métodos aplicables son fórmulas ya establecidas y comprobadas por expertos, siendo el caso de la teoría de conjuntos, más concretamente refiriéndose a los axiomas de Zarmelo-Fraenkel (ZF) que consisten en sistemas axiomáticos por medio de los cuales se pretende determinar la teoría de conjuntos que se emplea para indagar las propiedades y relación de los conjuntos, lo que hace de ese método teórico de gran utilidad para los estudiantes, y es debido a esto que se pretende desarrollar un documento a partir de una recopilación de información que sirva como guía práctica para el alumnado de la carrera de Matemática de la Escuela Superior de Chimborazo (ESPOCH) en materia de la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Debido a que este documento tiene como finalidad orientar a los estudiantes de matemáticas, se encuentra desarrollado en dos capítulos,en el primero se conceptualizan y analizan términos necesarios para la comprensión del tema, y además se explica brevemente los sucesos de carácter crucial que conllevaron el descubrimiento de este sistema axiomático. Para el segundo capítulo se describe la fundamentación teórica de los axiomas de Zarmelo-Fraenkel y se sustentan estas formulaciones con ejemplos que clarifiquen lo expuesto para reforzar el discernimiento de estos axiomas. Finalmente en esta investigación se argumentan las conclusiones a las que se han llegado y se muestra la bibliografía adoptada.

1

Elementos de Lógica Matemática

En este primer capítulo se dará una breve introducción a la lógica matemática, que es una herramienta fundamental en el estudio de la teoría de conjuntos.
La lógica es un esquema de reglas que permite deducir verdades a partir de otras verdades. El medio que lleva de las primeras verdades a las otras deducidas se llama razonamiento lógico. La lógica estudia, precisamente, los razonamientos lógicos, estableciendo cuándo un razonamiento es válido, independientemente del contenido de las verdades que se enuncien.
Los elementos de lógica matemática que mostramos a continuación son tomados del autor Aguilar [1].

1.1 Lógica de primer orden: Sintaxis

Sintaxis (reglas de formación, gramática): Es una definición axiomática de los elementos básicos de una lengua y de las reglas que permiten derivar de ella nuevas expresiones correctas. Las expresiones admitidas por el lenguaje se denominan fórmulas.

1.1.1 Leguaje de primer orden

Los objetos de estudio de las ciencias naturales tienen existencia física. En contraste, los objetos matemáticos son conceptos, por ejemplo "conjuntos", "pertenece a $(\in)$", "números naturales", etc.
En una teoría, deben existir conceptos iniciales y estos pueden ser definidos a partir de otros conceptos. Por ejemplo, $x - y$ es el único número z tal que $y + z = x$; o si x y y son conjuntos, $x \subset y$ si para cada elemento z , $z \in x$ implica $z \in y$.

De este modo, “sustracción” puede ser “definida” en términos de la “adición” e “inclusión $(\subset)$” en términos de “pertenece a $(\in)$”. En principio, se empieza con un número mínimo de conceptos no definidos. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos, los conceptos no definidos son “conjunto” y “pertenece a”; en teoría de números, los conceptos no definidos son “números naturales”, “cero”, “función sucesora”. En estos ejemplos se observa que existen dos grupos de conceptos: conjunto de números naturales por una parte; pertenecer a, cero, sucesor, por otra parte. Los conceptos del primer tipo son los objetos principales a estudiarse, mientras que los conceptos del segundo tipo son usados para reflejar las propiedades estructurales básicas de los objetos del primer tipo. A partir de ello se construye un conjunto de axiomas que proporcionan tales propiedades de los objetos en estudio. Se espera que sobre la bases de estos conceptos no definidos y los axiomas, se puedan definir otros conceptos, desarrollando la teoría e introduciendo cada vez más objetos y demostrando más teoremas.
Es claro que ha de considerarse un lenguaje para desarrollar una teoría. Como cualquier otro lenguage natural, un lenguaje adecuado para una teoría matemática también tiene un alfabeto. Pero a diferencia de los lenguajes naturales, un enunciado en teoría matemática es expresado simbólicamente y tiene una construcción sintáctica no ambigua. A continuación algunos ejemplos:

Ejemplo. Consideremos el siguiente enunciado en teoría de grupos: Para cada x existe y tal que $x \cdot y = e$. Aquí $\cdot$ (punto) es un símbolo para la operación binaria de grupo y e para el elemento identidad. Si usamos el símbolo $\forall$ para denotar “para cada” y $\exists$ para denotar “existe”, podemos representar el enunciado anterior como:

$$\forall x \exists y (x \cdot y = e)$$

.

Ejemplo. Consideremos los siguientes enunciados en teoría de conjuntos:

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

y

$$\neg \exists x \forall y (y \in x)$$

El primer enunciado es una representación simbólica de "Dados dos conjuntos x y y, hay un conjunto z que contiene tanto a x como a y; el segundo enunciado significa que "No hay un conjunto x que contenga todos los conjuntos y".

Vemos que el lenguaje para una teoría debe tener "variables" para representar los objetos a estudiarse $-$ por ejemplo, los conjuntos en teoría de conjuntos o los elementos de un grupo en teoría de grupos $-$ y algunos símbolos lógicos como $\exists$ (existe), $\wedge$ (y), $\neg$ (negación), $=$ (igualdad). Estos símbolos son comunes a los lenguajes para todas las teorías, y los llamaremos símbolos lógicos. Por otra parte, existen ciertos alfabetos que representan conceptos no definidos de una teoría específica. Por ejemplo, en teoría de grupos usamos dos símbolos: el punto $\cdot$ para la operación del grupo y un símbolo, digamos e, para el elemento identidad; en teoría de conjuntos tenemos un símbolo de relación binaria $\in$ para el concepto no definido pertenecer a.
En matemáticas, usualmente se utilizan muchos conectivos lógicos y cuantificadores tales como $\vee$ (o), $\wedge$ (y), $\exists$ (existe), $\forall$ (para todo), $\longrightarrow$ (si $\ldots$, entonces $\ldots$), y $\longleftrightarrow$ (si y solo si). Sin embargo, si consideramos los siguientes razonamientos "dos enunciados A y B son ambos ciertos " si y solo si "no es cierto que A o B sea falso"; "A implica B" si y solo si " o A es falso o B es cierto" estamos indicando que algunos conectivos lógicos y cuantificadores pueden ser definidos en términos de otros. De este modo, es posible empezar con pocos cuantificadores y conectivos que permitirán desarrollar muchas pruebas de modo simplificado.

Definición 1.1
Un **lenguaje de primer orden** $\mathcal{L}$ consta de dos tipos de símbolos: **símbolo lógicos y síbolos no lógicos**. Los símbolos lógicos lo contituye una sucesión de **variables** $x_0, x_1, x_2, \ldots$; **conectivos lógicos** $\neg$(negación) y $\vee$(disyución); un **cuantificador lógico** $\exists$ (cuantificador eistencial) y el **símbolo de igualdad** $=$. Al orden en el cual las variables $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se denomina **orden alfabético**. Estos símbolos son comunes a todos los lenguajes de primer orden. Dependiendo de la teoría, los símbolos no lógicos de $\mathcal{L}$ consiste de un conjunto (vacío o no vacío) de **símbolos de constante** $\{c_i : i \in I\}$; para cada

entero positivo n, un conjunto **símbolos de funciones** n-aria $\{f_j : j \in J_n\}$; y un conjunto de **símbolos de relaciones** n-aria $\{p_k : k \in K_n\}$.

Por otra parte, consideraremos lo siguiente:

- Un lenguaje de primer orden será denominado simplemente lenguaje.
- Para especificar un lenguaje será suficiente especificar sus símbolos no lógicos, puesto que todos los lenguajes tienen los mismos símbolos lógicos.
- En vez de usar los símbolos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, para denotar las variables, usaremos los símbolos x, y, z, u, v, w.
- Cualquier sucesión finita de símbolos de un lenguage $\mathcal{L}$ se denominará una **expresión** en $\mathcal{L}$.
- Un lenguaje $\mathcal{L}$ se denominará **contable** si solamente tiene una cantidad contable de símbolos no lógicos. En caso tenga una cantidad finita de tales símbolos se denominará **lenguaje finito**.

Ejemplo. El lenguaje de la teoría de conjuntos tiene solamente un símbolo no lógico: el símbolo de la relación binaria $\in$ para "pertenece a".

Ejemplo. El lenguaje de la teoría de grupos tiene un símbolo constante e (para el elemento identidad) y un símbolo de función binaria. (Para la operación de grupo).

Ejemplo. El lenguaje para la teoría de anillos con identidad tiene dos símbolos de constante 0 y 1 y dos símbolos de función binaria $+$ y $\cdot$.

Ejemplo. El lenguaje para la teoría de cuerpos ordenados tiene dos símbolos de constante 0 y 1 , dos símbolos de función binaria $+$, $\cdot$ y un símbolo de relación binaria $<$.

Definición 1.2
Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}'$ es llamado una **extensión** de otro lenguaje $\mathcal{L}$, si cada símbolo de constante de $\mathcal{L}$ es un símbolo de constante de $\mathcal{L}'$ y cada símbolo de función (relación) n-aria $\mathcal{L}$ es un símbolo de función (relación) n-aria de $\mathcal{L}'$.

Ejemplo. El lenguaje para la teoría de los cuerpos ordenados es una extensión del lenguaje para la teoría de los anillos con identidad.

1.1.2 Términos de un lenguaje

Hablando en forma general, los términos de un lenguaje conrresponden a expresiones algebraicas.

Definición 1.3
El conjunto de todos los términos de un lenguaje $\mathcal{L}$ es el menor conjunto $\mathcal{T}$ de expresiones de $\mathcal{L}$ que contiene todas las variables y símbolos de constantes; además, es cerrado bajo la siguiente operación: siempre que $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, $f_j t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, donde f_j es un símbolo de función n-aria de $\mathcal{L}$.

De forma equivalente, todos los téminos de un lenguaje pueden ser inductivamente definidos como sigue:

- Los símbolos de variables y constantes son términos de rango 0.
- Si $t_1 \ldots t_n$ son términos de rango $\leq k$ y f_j es un símbolo de función n-aria, entonces $f_j t_1 \ldots t_n$ es un término de rango $\leq k+1$.

Así, el **rango** de un término t es el menor número natural k tal que t es de rango $\leq k$.
Convengamos en usar los paréntesis y comas en la forma *usual* para facilitar la lectura. Por ejemplo, en vez de escribir $f_j t_1 \ldots t_n$ escribiremos $f_j(t_1, \ldots, t_n)$, y $t+s$ en vez de $+ts$. Prescindiremos de los paréntesis cuando no exista posibilidad de

confusión. Además, adoptamos la convención de asociación a la derecha. Por ejemplo, en vez de escribir $t1 \cdot (t2 \cdot (t3 \cdot t4))$ escribiremos $t1 \cdot t2 \cdot t3 \cdot t4$.

Ejemplo. Las variables son los únicos términos del lenguaje para la teoría de conjuntos, porque esta no tiene constantes ni símbolos de función.

Definición 1.4
Sea t un término de lenguaje $\mathcal{L}$. El conjunto de todos los **subtérminos** de t es definido inductivamente como a continuación:

- t es un subtérmino de t
- Si $ft_1 \ldots t_n, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, es un subtérmino de t, lo es cada t_i, $1 \leq i \leq n$.

Una expresión es un subtérmino de t si ésta es obtenida como se indicó. De este modo, el conjunto de todos los subtérminos de un término t es el menor conjunto $\mathcal{S}$ de expresiones que contiene a t y tal que si $ft_1 \ldots t_n \in \mathcal{S}$, entonces $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{S}$.

Ejemplo. Sea t el término $x \cdot y \cdot z$ en el lenguaje de la teoría de grupos. Entonces, $x \cdot y \cdot z$, x, $y \cdot z$, y y z son todos los subtérminos de t. De acuerdo con la convención adoptada y la definición de subtérminos, $x \cdot y$ no es un subtérmino de t (recordar la convención de asociación por izquierda).
Sea s un término. Escribimos $s[v_1, \ldots, v_n]$ para indicar que las variables que ocurren en s están entre $v_1, \ldots, v_n$. Si s es un término, $s_{v_1,\ldots,v_n}[t_1, \ldots, t_n]$, o simplemente $s[t_1, \ldots, t_n]$ cuando no exista posibilidad de confusión, denotará la expresión obtenida a partir de s reemplazando simultáneamente todas las ocurrencias de $v_1, \ldots, v_n$ en s por $t_1, \ldots, t_n$ respectivamente.

Ejemplo. Sea s el término $x \cdot (y + z)$ en el lenguaje de la teoría de anillos con identidad. Entonces

$$s_{x,y,z}[x + y, 1, y \cdot y] = (x + z) \cdot (1 + y \cdot y).$$

1.1.3 Fórmulas de un Lenguaje

Definición 1.5
Una **fórmula atómica** de un lenguaje es definida como sigue: si t y s son términos de $\mathcal{L}$, entonces $t = s$ es una fórmula atómica de $\mathcal{L}$; si p es un símbolo de relación n-aria de $\mathcal{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $pt_1 \ldots t_n$ es una fórmula atómica.

Ejemplo. $v \in w$, $v = w$, donde v, w son variables, son todas las fórmulas atómicas en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Definición 1.6
Una fórmula de un lenguaje es definida inductivamente como sigue:

- Toda fórmula atómica es una fórmula (éstas son todas las fórmulas de **rango** 0).
- Si A y B son fórmulas de rango $\leq k$ y v es una variable, entonces $\neg A$ (negación de A), $\exists v A$ y $\vee AB$(disyunción de A y B) son fórmulas de rango $\leq k + 1$.

El conjunto de cadenas así obtenidas son todas las fórmulas de $\mathcal{L}$. De este modo, el conjunto de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ es el menor conjunto de todas las expresiones de $\mathcal{L}$ que contiene todas las fórmulas atómicas y es cerrado bajo la negación, disyunción y cuantificación existencial.

Definición 1.7
Sea A una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$. El rango de A es el menor número natural k tal que rango de A es $\leq k$.

Convenciones. A partir de ahora, a menos que se establezca otro caso, adoptaremos las siguientes convenciones:

- $\mathcal{L}$ denotará un lenguaje de primer orden, y por un término (o una fórmula) entenderemos un término (o una fórmula) de $\mathcal{L}$.

- Escribiremos $A \vee B$ en vez de $\vee AB$.
- Asociación por derecha, omitiendo los paréntesis: $A \vee B \vee C$ en vez de $A \vee (B \vee C)$, $A \vee B \vee C \vee D$ en vez de $A \vee (B \vee (C \vee D))$, y así sucesivamente.

A continuación, se definen algunos conectivos lógicos usuales y cuantificadores:

- $\forall v A$ es una abreviación de $\neg \exists v \neg A$. $\forall$ es denominado **cuantificador universal**.
- $A \wedge B$ abrevia $\neg(\neg A \vee \neg B)$. El conectivo $\wedge$ es denominado **conjunción**.
- $A \longrightarrow B$ es una abreviación de $(\neg A) \vee B$.

Una fórmula de la forma $\exists v A$ es denominada una **ejemplificación** de A, y una fórmula de la forma $\forall v A$ es denominada una **generalización** de A. Una fórmula es llamada **elemental**, si es una fórmula atómica o una ejemplificación de una fórmula.

Definición 1.8

Una **subfórmula** de una fórmula A es definida inductivamente como sigue: A es una subfórmula de sí misma; si $\neg B$ o $\exists v B$ es una subfórmula de A, entonces lo es B; si $B \vee C$ es una subfórmula de A, entonces B o C son subfórmulas de A; ninguna otra opción distinta a las mencionadas es una subfórmula de A.

De esta forma, el conjunto de subfórmulas de A es el menor conjunto $\mathcal{S}(A)$ de fórmulas de $\mathcal{L}$ que contiene a A y satisface las siguientes condiciones: siempre que $\neg B$ o $\exists v B$ está en $\mathcal{S}(A)$, lo está B , y siempre que $B \vee C$ esté en $\mathcal{S}(A)$, lo están B y C.

Una ocurrencia de una variable v en una fórmula A está **ligada** si esta ocurre en una subfórmula de la forma $\exists v B$; en otro caso, la ocurrencia es llamada *libre*. Una variable es denominada libre en A si esta tiene una ocurrencia libre en A. Escribimos $\varphi[v_0, \ldots, v_n]$ si φ es una fórmula en la cual todas sus variable libres pertenecen al conjuto $\{v_0, \ldots, v_n\}$.

Ejemplo. En la fórmula

$$x \in y \vee \exists x(x \in y)$$

todas las ocurrencias de y son libres, la primera ocurrencia de x es libre, y las otras ocurrencias de x están ligadas.

Una fórmula sin variables libres se denomina **fórmula cerrada** u **oración**. Una fórmula que no contiene cuantificadores se denomina **fórmula abierta**.

Sea $A[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ una fórmula cuyas variables libres están entre $x_0, \ldots, x_{n-1}$ y x_{n-1} es libre en A, donde $x_0, \ldots, x_{n-1}$ son las primeras n variables en orden alfabético. Denominamos

$$\forall x_{n-1} \ldots \forall x_0 A$$

la **clausura** de A. Observar que si A es cerrado, A coincide con su clausura. Sea t un término, v una variable y A una fórmula de un lenguaje $\mathcal{L}$. Decimos que el **término** t es **sustituible** por v en A, si para cada variable w que ocurre en t, ninguna subfórmula de A de la forma $\exists wB$ contiene una ocurrencia de v que es libre en A.

Ejemplo. En la fórmula

$$x \in y \vee \exists x(x \in y)$$

no se puede sustituir cualquier término que contiene a x por y.

Si t es sustituible por v en A, entonces $A_v[t]$ designa la expresión obtenida a partir de A reemplazando simultáneamente cada ocurrencia libre de v en A por t. Similarmente, si los términos $t_1, \ldots, t_n$ son sustituibles en A por $v_1, \ldots, v_n$ respectivamente, entonces $A_{v_1,\ldots,v_n}[t_1, \ldots, t_n]$, o $A[t_1, \ldots, t_n]$, cuando no exista posibilidad de confusión, llamado un **ejemplo** de A, denotará la expresión obtenida a partir de A por reemplazo simultáneo de todas las ocurrencias libres de $v_1, \ldots, v_n$ en A por $t_1, \ldots, t_n$ respectivamente. Observar que, cuando se hable de $A[t_1, \ldots, t_n]$, se asume que $t_1, \ldots, t_n$ son sustituibles en A por $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Ejemplo. Dada la fórmula

$$x \in y \vee \exists x(x \in y)$$

Entonces $A_x[z]$ es la fórmula $z \in y \vee \exists x(x \in y)$.

1.1.4 Teoría de primer orden

Definición 1.9

Una teoría de primer orden o simplemente una teoría T consiste de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Estas fórmulas son llamadas **axiomas no lógicos** de T. Por términos o fórmulas de T, entenderemos términos o fórmulas respectivamente del lenguaje para T . El lenguaje para T es también denotado por $\mathcal{L}(T)$. Una teoría es llamada **contable**, si su lenguaje es contable. Tal teoría será finita, si el conjunto de símbolos no lógicos es finito.

Ejemplo. La **teoría de grupos** es una teoría cuyos símbolos no lógicos son, un símbolo de constante e y un símbolo de función binaria $\cdot$. Los axiomas no lógicos son las siguientes fórmulas:

1) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$.

2) $\forall x (x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x)$.

3) $\forall x \exists y (x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e)$.

Ejemplo. La **teoría de grupos abelianos** es la teoría cuyos símbolos no lógicos son un símbolo de constante 0 y un símbolo de función binaria $+$ y cuyos axiomas no lógicos son las fórmulas:

1) $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$.

2) $\forall x (x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$.

3) $\forall x \exists y (x + y = 0 \wedge y + x = 0)$.

4) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Ejemplo. El lenguaje para la **teoría de anillos con identidad** tiene dos símbolos de constantes, 0 y 1, y dos símbolos de funciones binarias, $+$ y $\cdot$. Los axiomas no lógicos de esta teoría son los axiomas (1)-(4) de los grupos abelianos, junto con los axiomas:

5) $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$.

6) $\forall x(x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$.

7) $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$.

8) $\forall x \forall y \forall z((y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x))$.

Ejemplo. La **teoría de los campos** tiene el mismos lenguaje que la teoría de anillos con identidad; sus axiomas no lógicos son los axiomas (1)-(8) de la teoría de anillos con identidad junto con los siguientes axiomas:

9) $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$.

10) $\forall x(\neg(x = 0) \longrightarrow \exists y(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1))$.

Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con un sólo símbolo no lógico: un símbolo de relación binaria $<$. **La teoría de los conjuntos ordenados linealmente** *(OL)* es la teoría cuyo lenguaje es $\mathcal{L}$ y cuyos axiomas no lógicos son:

1) $\forall x \neg(x < x)$.

2) $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \longrightarrow x < z)$.

3) $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Ejemplo. La **teoría de densidad de los conjuntos ordenados linealmente** *(DOL)*, es obtenida a partir de *(OL)* adicionando los siguiente axiomas:

4) $\forall x \forall y((x < y) \longrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$.

5) $\forall x \exists y(y < x)$.

6) $\forall x \exists y(x < y)$.

Ejemplo. Sea F la teoría de los campos. Para cada $m \geq 1$, sea A_m la fórmula $\neg(m = 0)$. La teoría obtenida por adicionar cada A_m al conjunto de axiomas de $\mathcal{F}$ como un axioma es llamada la **teoría de los campos de característica** 0.

Ejemplo. Sea F la teoría de los campos. Sea $\mathcal{L}$ una extensión del lenguaje para la teoría de anillos con identidad obtenida por adición de un nuevo símbolo de predicado binario $<$. Considere la teoría CO cuyo lenguaje es $\mathcal{L}$ y cuyos axiomas no lógicos son todos los axiomas no lógicos de F y los siguientes axiomas:

11) $\forall x \neg(x < x)$.

12) $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \longrightarrow (x < z))$.

13) $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$.

14) $\forall x \forall y(\neg(x < y \vee x = y) \longrightarrow y < x)$.

15) $\forall x \forall y(x < y \longrightarrow \forall z(x + z < y + z))$.

16) $\forall x \forall y((0 < x \wedge 0 < y) \longrightarrow 0 < x \cdot y)$.

La teoria CO es conocida como la **teoría de los campos ordenados**.

Ejemplo. A continuación se enuncian una serie de axiomas de la teoría de números, el cual desempeña un papel importante en lógica. Designemos esta teoría por N. Los símbolos no lógicos de N son un símbolo de constante 0, un símbolo de función 1-aria $\mathcal{S}$ (función sucesora), dos símbolos de función binaria $+, \cdot$, y un símbolo de relación binaria $<$. Los axiomas no lógicos de N son:

1) $\forall x(\neg(\mathcal{S}x = 0))$.

2) $\forall x \forall y(\mathcal{S}x = \mathcal{S}y \longrightarrow x = y)$.

3) $\forall x(x + 0 = x)$.

4) $\forall x \forall y(x + \mathcal{S}y = \mathcal{S}(x + y))$.

5) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.

6) $\forall x \forall y(x \cdot \mathcal{S}y = (x \cdot y) + x)$.

7) $\forall x(\neg(x < 0))$.

8) $\forall x \forall y (x < \mathcal{S}y \longleftrightarrow (x < y \vee x = y))$.

9) $\forall x (\forall y (x < y \vee x = y \vee y < x))$.

Para cada entero no negativo n, el término

$$\underbrace{\mathcal{S} \ldots \mathcal{S}}_{m \text{ veces}} 0$$

será denotado por k_n. Estos términos son llamados **numerales**. Observar que k_0 es el símbolo de constante 0.

Ejemplo. La **Aritmética de Peano** es la teoría obtenida a partir de N eliminando los últimos axiomas y adicionando el siguiente esquema de axioma, llamado esquema de axioma de inducción: para cada fórmula $A[v]$, la fórmula

$$A_v[0] \longrightarrow \forall v (A \longrightarrow A_v[\mathcal{S}v]) \longrightarrow A$$

es llamada un axioma de inducción. Denotamos esta teoría con AP.

1.2 Lógica de primer orden: Semántica

Semántica (relación entre el lenguaje y su significado): Es una definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se pueden asociar con una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o razonamiento.

1.2.1 Estructura de los Lenguajes de primer orden

Definición 1.10

Una **estructura** o una **interpretación** de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ consta de:

(E1) Un conjunto no vacío M denominado el universo de la estructura.

(E2) Para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, un elemento fijado $c_M \in M$.

(E3) Para cada símbolo de función n-aria f de $\mathcal{L}$, hay una aplicación $f_M : M^n \to M$.

(E4) Para cada símbolo de relación n-aria p de $\mathcal{L}$, hay una relación n-aria

> $p_M \subset M^n$ en M.
> La interpretación de $=$ es siempre considerada como la relación de igualdad en M.

Los elementos del universo de M son llamados los **individuos de la estructura**; las aplicaciones f_M las **funciones individuales de la estructura**; y las relaciones p_M **predicados individuales**; c_M, f_M, y p_M serán llamadas interpretaciones del símbolo de constante c, del símbolo de función f, y del símbolo de predicado p respectivamente.

Ejemplo. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales y 0, 1,$+$, $\cdot$, y $<$ tienen el significado usual. Es más, sea $\mathcal{S}(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Esta es una estructura para el lenguaje de la teoría N definida en la Sección 1. Esta estructura será llamada la estructura estándar de N.
Sea $\mathcal{L}$ una extensión de $\mathcal{L}'$. Ignorando la interpretación de aquellos símbolos no lógicos de $\mathcal{L}$ que no son símbolos de $\mathcal{L}'$, conseguimos una estructura M' de $\mathcal{L}'$. Denominamos a M' la **restricción** de M a $\mathcal{L}'$ y lo denotamos con $M \mid \mathcal{L}'$. En este caso también decimos que M es una **expansión** de M' a $\mathcal{L}$.
Recordemos que todos los términos de variable libre pueden ser obtenidos a partir de los símbolos de constante e iterando los símbolos de función sobre ellos. Así, podemos definir una interpretación o significado t_M de cada término de variable libre t de $\mathcal{L}$ en M por inducción sobre el rango de t. La interpretación de un símbolo de constante c ya es dado por la estructura, a saber c_M. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos de variable libre cuyas interpretaciones han sido definidas y si f es un símbolo de función n-aria de $\mathcal{L}$, entonces se define

$$(ft_1 \ldots t_n)_M = f_M((t_1)_M, \ldots, (t_n)_M)$$

.

Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje para la teoría de anillos con identidad. Para cada entero positivo m, $\underline{m}$ denota el término obtenido por adicionar 1 así mismo m veces. Sea $P(x)$ una expresión polinomial cuyos coeficientes son todos de la forma $\underline{m}$, es decir

$P(x)$ es un término de la forma

$$\underline{m_0} + \underline{m_1}x + \cdots + \underline{m_n}x^n$$

donde x es una variable. Sea R un anillo con identidad. Entonces la interpretación de $\underline{m}$ en R es el elemento $m \in R$ obtenido por adición de la identidad multiplicativa de R consigo mismo m veces, y por cada término de variable libre t, la interpretación de $P_x[t]$ en R es el elemento $P(t_M)$ de R.

1.2.2 Verdad en una estructura

A continuación, definimos cuándo una fórmula de $\mathcal{L}$ es verdadera y cuándo esta es falsa en una estructura de $\mathcal{L}$. Observar que si tenemos una estructura de $\mathcal{L}$ con universo M y queremos saber si existe un elemento $a \in M$ que satisface una fórmula $\varphi[x]$, pero tenemos un pequeño problema porque φ es un objeto sintáctico, y los elementos de M no lo son. Para evitar este problema, dada una estructura de $\mathcal{L}$ con universo M, en primer lugar describimos una extensión $\mathcal{L}_M$ del lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición 1.11

Dado $\mathcal{L}$ y una estructura de $\mathcal{L}$ con universo M. Sea $\mathcal{L}_M$ el lenguaje de primer orden obtenido a partir de $\mathcal{L}$ adicionando un nuevo símbolo de constante i_a por cada $a \in M$. El símbolo i_a es llamado el nombre de a. Consideramos al propio M como la expansión de M a $\mathcal{L}_M$ estableciendo la interpretación de i_a como a para cada $a \in M$.

Ahora, podemos definir cuándo una fórmula de $\mathcal{L}$ es verdadera o válida o satisfacible en una estructura M. Para lograrlo, definimos la noción de verdad de una fórmula cerrada o una oración de $\mathcal{L}_M$ en una estructura M. La definición se sustenta en el conocido significado de los conectivos lógicos $\vee$, $\neg$ y del cuantificador existencial $\exists$. La noción de verdad será definida a partir de la definición de una función que parte del conjuntos de todas las fórmulas cerradas de $\mathcal{L}_M$ y asigna valores en el conjunto *verdadero, falso*, satisfaciendo algunas condiciones. Esta será dada por inducción sobre el rango de oraciones de $\mathcal{L}_M$.

Si una oración toma el valor verdadero, diremos que la oración es verdadera o válida en M; caso contrario esta será llamada falsa en M.
Recordemos que las fórmulas han sido definidas inductivamente empezando por las fórmulas atómicas e iterando $\neg$, $\vee$, y $\exists$ sobre ellos. Una fórmula atómica de variable libre es de la forma $pt_1 \ldots t_n$, donde p es un símbolo de relación n-aria (incluyendo $=$) y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de variable libre. Decimos que $pt_1 \ldots t_n$ es verdadera en la estructura, si se tiene

$$p_M((t_1)_M, \ldots, (t_n)_M),$$

es decir,

$$((t_1)_M, \ldots, (t_n)_M) \in p_M \subset M^n.$$

En otro caso, decimos que $pt_1 \ldots t_n$ es falsa en la estructura. Una oración $\neg A$ es verdadera, si y solo si A es falsa. Una oración $A \vee B$ es verdadera si A es verdadera o B es verdadera. Finalmente, una oración $\exists v A$ es verdadera si $A_v[i_a]$ es verdadera para algún $a \in M$. Decimos que una fórmula A de $\mathcal{L}_M$ es verdadera en la estructura si su clausura es verdadera en la estructura. Si una fórmula A de $\mathcal{L}$ es verdadera en una estructura M de $\mathcal{L}$, también decimos que A es válida en la estructura y escribimos $M \vDash A$. Si A no es válida en M, escribimos $M \nvDash A$. Observar que si A y B son fórmulas cerradas, entonces

$$M \nvDash A \Longleftrightarrow M \nvDash \neg A$$

y

$$M \vDash A \vee B \Longleftrightarrow M \vDash A \text{ o } M \vDash b$$

1.2.3 Modelo de una Teoría

Definición 1.12
Un modelo de una teoría de primer orden T es una estructura de $\mathcal{L}(T)$ con universo M en el cual todos los axiomas no lógicos de T son válidos.

Ejemplo. Todo grupo es un modelo de la teoría de grupos. Por otra parte, el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ junto con 0 y $+$ como interpretaciones para e y $\cdot$ respectivamente es definitivamente una estructura para el lenguaje de la teoría de grupos pero no un modelo de tal teoría.

Definición 1.13
Un fórmula A de T que es verdadera en todos los modelos de T es llamada válida en T. Escribimos $T \vDash A$ si A es válida en T. Si A no es válida en algún modelo de T, escribimos $T \nvDash A$.

Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden sin símbolos lógicos. Para cada $n > 1$, sea A_n la fórmula

$$\exists x_0 \dots \exists x_{n-1} \wedge_{0 \leq i < j < n} \neg(x_i = x_j)$$

Suponiendo que T es la teoría cuyo lenguaje es $\mathcal{L}$ y cuyos axiomas son $A_2, A_3, \dots,$ Entonces los modelos de T son precisamente los conjuntos infinitos.

Ejemplo. El conjunto de todos los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$$

con el significado usual de $\mathcal{S}$ (función sucesora), $+$, $\cdot$, y $<$ es un modelo de la teoría N y también de la aritmética de Peano.

2

Axiomática de Zermelo-Fraenkel

En el siglo XIX ciertos matemáticos intentaron crear un proceso de formalización de la matemática, a partir de la teoría de conjuntos. Gottlob Frege intentó concluir dicho proceso, creando una axiomática de la teoría de conjuntos. Desafortunadamente, Bertrand Russell descubrió en 1901 una contradicción en esta teoría. A partir de ese evento, surgen distintos intentos, siendo actualmente reconocidos los denominados axiomas de Zermelo-Fraenkel.

En 1900, en la conferencia del Congreso Internacional de Matemáticos en París, David Hilbert desafío a la comunidad matemática con sus 23 problemas fundamentales no resueltos, el primero de estos problemas era un problema de teoría de conjuntos, basado en la hipótesis del continuo, que fue introducida por Cantor en 1878.

Ernest Zermelo comenzó a desarrollar los problemas de la teoría de conjuntos, así en 1902 publicó su primer trabajo sobre la adición de cardinales transfinitos. Seguido de esto en 1904, dio con éxito el primer paso sugerido por Hilbert para la hipótesis del continuo, cuando probó el teorema del buen orden. Dicho resultado le otorgó reconocimiento a Zermelo, quien fue nombrado en Göttingen, en diciembre de 1905. El desarrollo de su prueba del teorema del buen orden, basada en el axioma de elección, no fue aprobada por todos los matemáticos, ya que para entonces la teoría de conjuntos carecía de axiomatización.

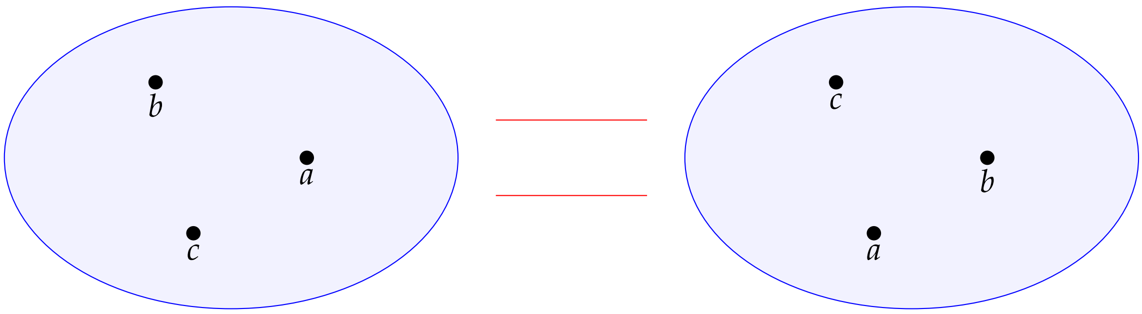
En el año 1905, Zermelo empezó a axiomatizar la teoría de conjuntos y en 1908 publicó sus resultados, a pesar de haber fallado en probar la consistencia de su sistema axiomático. En 1922, Adolf Fraenkel y Thoralf Skolem en forma independiente mejoraron el sistema axiomático de Zermelo, véase en [**?**] . El sistema resultante, conocido como axiomatica de Zermelo-Fraenkel, el cual se

denotará como **ZF** consta de diez axiomas y es el más aceptado actualmente para la teoría axiomática de conjuntos.
A continuación se explicará de una manera formal cada uno de los axiomas

2.1 Axioma de extensión (ZF1)

Este axioma afirma que dado dos conjuntos x e y son iguales (se representa de esta forma $x = y$) se contienen los mismo elementos.

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \longleftrightarrow u \in y) \longrightarrow x = y)$$



En cuanto al recíproco del axioma de extención, se sabe que de los principios lógicos: Si $x = y$ entonces los elementos que tiene conjunto x también se debe encontrar en y.

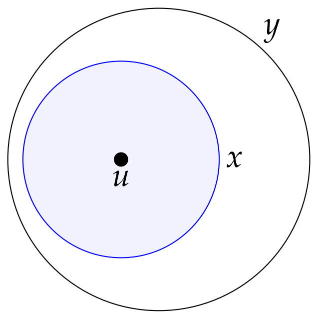
Ejemplo. Sean $x = \{1,2,3,4,5\}$ y $y = \{5,4,1,2,3\}$ tenemos que $x = y$.

Solución. En efecto, los elementos de x son $1,2,3,4,5$ y son los mismos elementos de y entonces se concluye por el axioma de extensión que la igualdad es válida.

2.1.1 Relación de Inclusión

A partir de dicho axioma se establece la **relación de inclusión**, la cual está definida de la siguiente manera:

$$x \subseteq y \equiv \forall u (u \in x \longrightarrow u \in y)$$



Ejemplo. Sea $A = \{2, \{3\}, 4\}$ entonces

$$\{2\} \subseteq A \qquad \{3\} \nsubseteq A$$

$$\{\{3\}\} \subseteq A \qquad \{2, 4\} \subseteq A$$

La relación de inclusión únicamente se da conjunto a conjunto.

Proposición 2.1 Orden de inclusión

a) $\forall x(x \subseteq x)$ Reflexividad

b) $\forall x \forall y \forall z(x \subseteq y \wedge y \subseteq z \longrightarrow x \subseteq z)$ Transitividad

c) $\forall x \forall y(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \longrightarrow x = y)$ Antisimetria

Demostración.

a) $\forall x(x \subseteq x)$

Por definición de la relación de inclusión sabemos que si tomamos un elemento $u \in x$, entonces $u \in x$ esto quiere decir que todo conjunto es subconjunto de el mismo.

$$\forall u(u \in x \longrightarrow u \in x) = x \subseteq x$$

b) $\forall x \forall y \forall z(x \subseteq y \wedge y \subseteq z \longrightarrow x \subseteq z)$

Por hipótesis tenemos que $x \subseteq y$ y $y \subseteq z$, por definición de inclusión $u \in x$ entonces $u \in y$ por otra parte análogamente $u \in y$ entonces $u \in z$, por lo tanto por contención si $u \in x$ entonces $u \in z$, esto demuestra $x \subseteq z$.

c) $\forall x \forall y(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \longrightarrow x = y)$

Por hipótesis tenemos que $x \subseteq y$ y $x \subseteq y$, por definición de relación de inclusión

$u \in x$ entonces $u \in y$ por otra parte tenemos $u \in y$ entonces $u \in x$, por lo tanto por el axioma de extensión tenemos que $x = y$. ■

Se puede deducir el Axioma de extensión de la siguiente manera:

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$$

2.1.2 Predicado colectivo

El predicado es una fórmula $\phi(x)$ depende de una variable (puede ser cualquiera por ejemplo $x, y, w, \ldots$) por el momento x. Es un predicado colectivo $\phi(x)$ cuando cuyos elementos de x en el que sastisfacen la propiedad $\phi(x)$:

$$\phi(x) \equiv \exists u \forall x (x \in u \longleftrightarrow \phi(x))$$

Proposición 2.2

Si un predicado $\phi(x)$ es colectivo entonces el conjunto u tal que $\forall x(x \in u \longleftrightarrow \phi(x))$ es único.

Notación. $\{x : \phi(x)\}$

Demostración.

Sean dos conjunto u y u' tal que

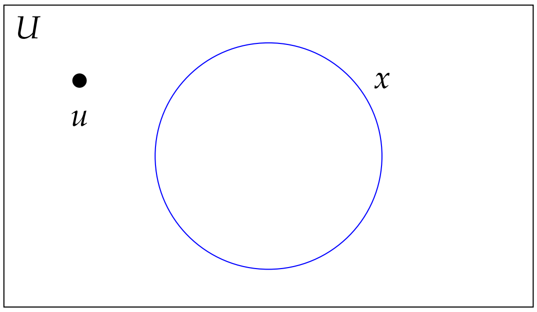
$$\forall x(x \in u \longleftrightarrow \phi(x)) \qquad \text{y} \qquad \forall x(x \in u' \longleftrightarrow \phi(x))$$

se deduce que $\forall x(x \in u \longleftrightarrow x \in u')$
por lo tanto, $u = u'$ por el axioma de extensión (2.1). ■

2.2 Axioma de existencia del conjunto vacío (ZF2)

Este axioma del conjunto vacío, nos dice que existe un conjunto que no tiene elementos, se representa de esta manera $x = \varnothing$.

$$\exists x \forall u (\neg (u \in x))$$



Lema 2.1
Existe un único conjunto sin elementos.

Demostración.

Supongamos que x e y sean dos conjuntos sin elementos

Si tomamos $u \in x$ entonces $u \in y$

Si tomamos $v \in y$ entonces $v \in x$

Por lo tanto por el axioma de extensión (2.1) esto implica $x = y$

($u \in x$ es un antecedente falso y entonces "$u \in x$ implica que $u \in y$ "

es automáticamente verdad, lo mismo también para $v \in y$).

■

Propiedad 2.2.1

1) Para todo conjunto x, el conjunto vacío por la definición de inclusión tenemos.

$$\varnothing \subseteq x$$

2) Para todo conjunto x con la unión con el conjunto vacío en el mismo conjunto x.

$$x \cup \varnothing = x$$

3) Para todo conjunto x con la intersección con el conjunto vacío es el conjunto $\varnothing$.

$$x \cap \varnothing = \varnothing$$

Para entender la necesidad de los siguientes axiomas ZF, es necesario hablar de la famosa paradoja de Russell:
Paradoja de Russell: Dada una propiedad $\phi(t)$, existe unos conjuntos x cuyos elementos son presisamente los conjuntos t que cumplen la propiedad.
Sin embargo, esta paradoja lleva a contradicciones ya que, si consideramos la propiedad $t \notin t$, esta paradoja nos dice que existe el conjunto $x = t : t \notin t$, Si ahora nos preguntamos si $x \in x$, tenemos dos caminos:

a) Si $x \in x$, x no puede ser de sí mismo, por lo que $x \notin x$.

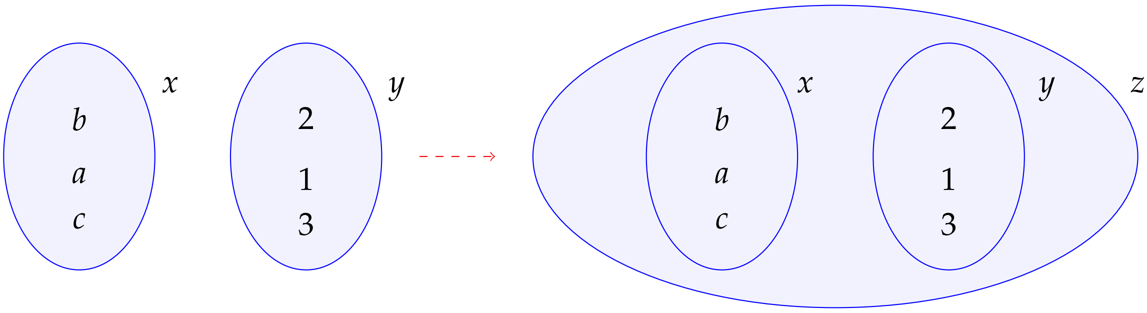
b) Si $x \notin x$, x es elemento de sí mismo, por lo que $x \in x$

Por lo tanto, $x \in x \iff x \notin x$. Esto es absurdo, por lo que nos vemos obligados a descartar la paradoja. La explicación es intuitiva reside en que un conjunto debe existir después de sus eñementos. Entonces, no tiene sentido preguntarse si $x \in x$ antes de que exista.

2.3 Axioma de apareamiento o par (ZF3)

Para todo conjunto x e y existe un conjunto z que los contiene.

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \longleftrightarrow (u = x \vee u = y))$$



Notación. $\{x, y\}$

Este axioma dice que, dados dos conjuntos x e y, existe un tercer conjunto z cuyos elementos son exactamente x e y. Dicho z es único, porque si z y z' satisfacen el axioma entonces todos tienen los mismos elementos por lo que son iguales.

Proposición 2.3

(Igualdad entre pares). Para todo a, b, c, d :

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c). \tag{2.1}$$

Demostración.

($\Leftarrow$) En el caso donde $a = c$ y $b = d$ tenemos que $\{a, b\} = \{d, c\}$ (por sustitución de los iguales). Y en el caso donde $a = d$ y $b = c$ (ídem), lo que implica que $\{a, b\} = \{c, d\}$ (pues $\{d, c\} = \{c, d\}$). ($\Rightarrow$) Supongamos que $\{a, b\} = \{c, d\}$. De esta hipótesis, se deduce que:

- $a \in \{c, d\} = \{d, c\}$, entonces $(a = c \wedge a = d)$
- $b \in \{c, d\} = \{d, c\}$, entonces $(b = c \wedge b = d)$
- $c \in \{a, b\} = \{d, c\}$, entonces $(c = a \wedge c = b)$
- $d \in \{a, b\} = \{d, c\}$, entonces $(d = a \wedge d = b)$

Así se obtiene una conjunción de cuatro disyunciones, cada una con dos alternativas:

$$(a = c \wedge a = d) \vee (b = c \wedge b = d) \vee (c = a \wedge c = b) \wedge (d = a \wedge d = b) \tag{2.2}$$

Distribuyendo las disyunciones con las conjunciones, se distinguen 16 casos:

$$\begin{array}{ll}
(1)\ a = c \wedge b = c \wedge c = a \wedge d = a & (9)\ a = d \wedge b = c \wedge c = a \wedge d = a \\
(2)\ a = c \wedge b = c \wedge c = a \wedge d = b & (10)\ a = d \wedge b = c \wedge c = a \wedge d = b \\
(3)\ a = c \wedge b = c \wedge c = b \wedge d = a & (11)\ a = d \wedge b = c \wedge c = b \wedge d = a \\
(4)\ a = c \wedge b = c \wedge c = b \wedge d = b & (12)\ a = d \wedge b = c \wedge c = b \wedge d = b \\
(5)\ a = c \wedge b = d \wedge c = a \wedge d = a & (13)\ a = d \wedge b = d \wedge c = a \wedge d = a \\
(6)\ a = c \wedge b = d \wedge c = a \wedge d = b & (14)\ a = d \wedge b = d \wedge c = a \wedge d = b \\
(7)\ a = c \wedge b = d \wedge c = b \wedge d = a & (15)\ a = d \wedge b = d \wedge c = b \wedge d = a \\
(8)\ a = c \wedge b = d \wedge c = b \wedge d = b & (16)\ a = d \wedge b = d \wedge c = b \wedge d = b
\end{array}$$

Luego se observa que:

- En el caso (6), se deduce que $a = c \wedge b = d$
- En el caso (11), se deduce que $a = d \wedge b = c$
- En todos los otros casos, se deduce que $a = b = c = d$, lo que implica trivialmente que $(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$ (ambas alternativasson verdaderas).

Al final, tenemos que $(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$ en todos los casos.

■

2.3.1 Par no ordenado

Se dice que el par $\{x, y\}$ es no ordenado porque cumple la igualdad

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

Resulta que ambos conjuntos contienen los mismos elementos.
Podemos definir por el axioma de extensión (2.1) y con el predicado colectivo (2.1.2):

$$\phi(x) \equiv u = x \vee u = y$$

2.3.2 Conjunto unitario

Se toma un elemento u, el axioma del par o apreamiento con el predicado tenemos $\phi(x) \equiv u = x$ es colectivo. Por lo tanto, existe un conjunto unitario que consta de un solo elemento u.

Notación. $\{x\}$

Nota. Además, de este axioma y la notación indicada, se pueden formar conjuntos únicos, que denotamos $z = \{x\}$, solo basta considere $x = y$.

2.3.3 Par ordenado

Dado dos conjuntos x e y, se define el par ordenaddo (x, y) a partir del par no ordenado y el conjunto unitario:

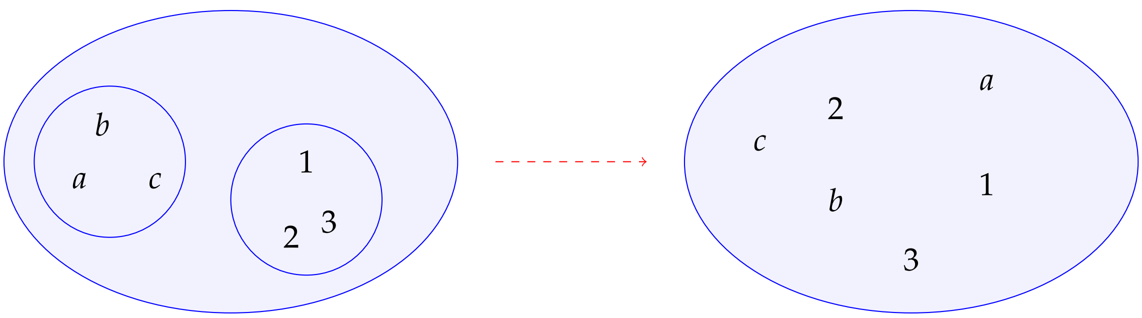
$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Se llama par ordenado ordenado conformado por el primer componente x y segunda componente y, el par ordenado no se mantiene la simetria del par no ordenado por lo cual se mantiene el orden.

2.4 Axioma de unión (ZF4)

Para cualquier conjunto x, existe un conjunto y que contiene para todos aquellos z que pertenecen a un miembro de x:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow \exists u (u \in x \vee z \in u))$$



Este axioma establece que, dado un conjunto x e y, existe un conjunto z cuyos elementos son los elmentos de x e y.
Con el axioma del par (2.3) podemos definir la unión de la siguiente forma:

$$x \cup y = \bigcup\{x, y\}$$

Propiedad 2.4.1

Se puede establecer que la unión es:

Idempotente

$$x \cup x = x$$

Conmutativa

$$x \cup y = y \cup x$$

Asociativa

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$$

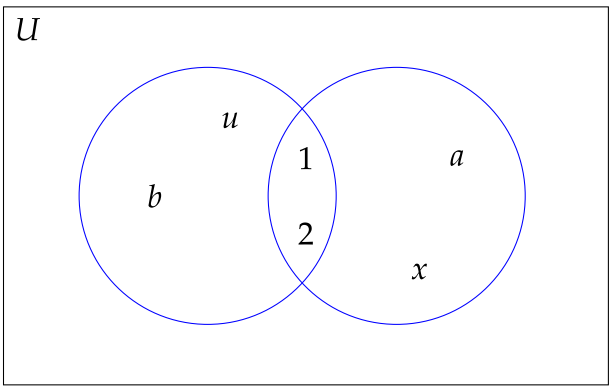
Y con el conjunto vacío como el **neutro** de la unión:

$$x \cup \varnothing = \varnothing \cup x = x$$

2.4.1 Intersección

Tomando dos conjuntos x y y, se define la intersección de dos conjuntos.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in x \longleftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u))$$



Este axioma establece que , dado dos conjuntos x e y, existe un conjunto z que contiene los elementos comunes entre x e y.

Propiedad 2.4.2

Se puede establecer que la intersección es:

Idempotente

$$x \cap x = x$$

Conmutativa

$$x \cap y = y \cap x$$

Asociativa

$$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$$

Y con el conjunto vacío como el elemento **absorbente** de la intersección:

$$x \cap \varnothing = \varnothing \cap x = \varnothing$$

2.4.2 Diferencia conjuntista

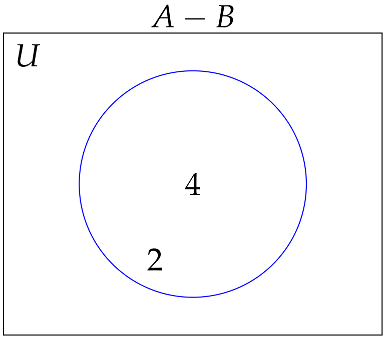
Dados dos conjuntos x e y, se define la diferencia conjuntista $x - y$ por

$$x - y := \{u \in x : u \notin y\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{5, 3, 7, 1\}$$

$$A - B$$



Esto nos quiere decir que son todos los elementos de x que no estan en y.

Propiedad 2.4.3

Se puede establecer con la unión, intersección y la diferencia lo siguiente:

1) $(x \cup y) - z = (x - z) \cup (y - z)$

2) $x - (y \cup z) = (x - y) \cap (x - z)$

3) $(x - y) - z = x - (y \cup z)$

4) $(x \cap y) - z = (x - z) \cap (y - z)$

5) $x - (y \cap z) = (x - y) \cup (x - z)$

6) $(x - y) - z = (x - y) \cup (x \cap z)$

7) $x - \varnothing = x$

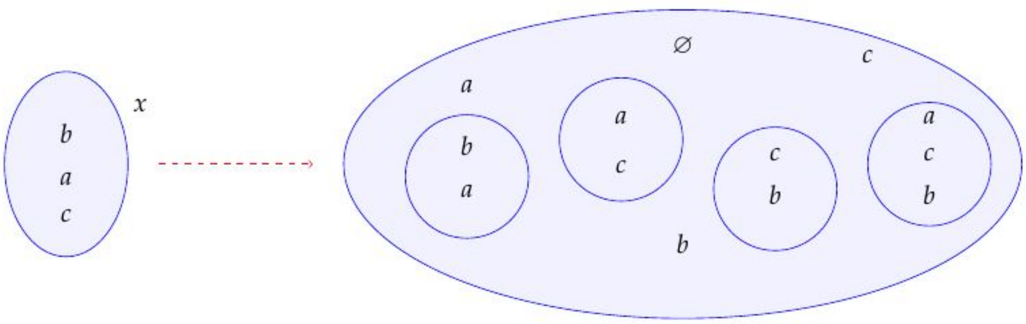
8) $\varnothing - x = \varnothing$

9) $x - x = \varnothing$

2.5 Axioma de las partes o potencia (ZF5)

Dado cualquier conjunto x, existe un conjunto y que contiene todos los subconjunto z de x.

$$\forall x \exists y \forall z (\forall u (u \in z \longrightarrow u \in x) \longrightarrow z \in y)$$



Notación. $y = \wp(x)$

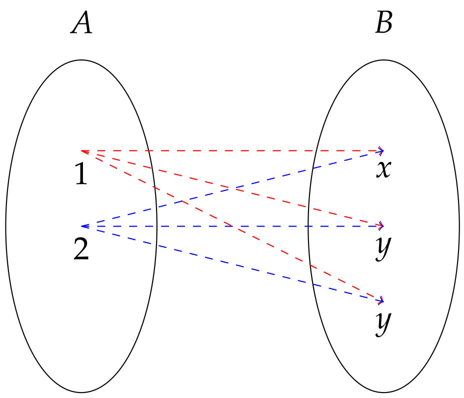
Este axioma nos dice que y (es único) se llama el conjunto de partes o potencia de

x, este dicho axioma es uno de los más poderosos de los axiomas de ZF.

2.5.1 Producto cartesiano, grafos y relaciones

Proposición 2.4 (Producto cartesiano)
Dados dos conjuntos A y B, existe un único conjunto, escrito $A \times B$, cuyos elementos son los pares (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B := \{z : (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = (x, y)\}$$



$$A \times B = \{(1, x); (1, y); (1, z); (2, x); (2, y); (2, z)\}$$

Demostración. Se aplica la 2.1.2 al predicado $\phi(z) = (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = (x, y)$, observando que $\phi(z)$ implica $z \in \wp(\wp(A \cup B))$ para todo z. ■

Para todo A y B, es claro que el producto cartesiano de un conjunto, con el conjunto vacío sucede:

$$A \times \varnothing = \varnothing \times B = \varnothing$$

Por otro lado el producto cartesiano no es ni conmutativa

$$A \times B \neq B \times A$$

ni asociativa

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

Definición 2.1 Grafos y relaciones
Se llama **grafo** a cualquier conjunto de pares:

$$Grafo \equiv (\forall z \in G)\exists x \exists y z = (x, y)$$

Dado un grafo G, se escribem

$$pr_1(G) := \{x : \exists y(x, y) \in G\}$$

$$pr_2(G) := \{y : \exists x(x, y) \in G\}$$

2.5.2 Funciones y conjuntos de funciones

Se llama función a todo grafo funcional, es decir, a todo conjunto de pares f tal que las dos condiciones $(x, y) \in f$ y $(x, y\prime) \in f$ impliquen $y = y'$ (para todos x, y, y$\prime$) Formalmente: f función $\equiv (\forall z \in f)\exists x \exists y z = (x, y) \wedge$ (f es un grafo) $\forall x \forall y \forall y\prime((x, y) \in f \wedge (x, y\prime) \in f \Rightarrow y = y\prime)$ (el grafo f es funcional)

Dada una función f , se llaman *dominio* e imagen de f a los dos conjuntos $dom(f)$ y $img(f)$ definidos por $dom(f) = pr_1(f)$ y $img(f) = pr_2(f)$.

Para toda función f y para todo elemento $x \in dom(f)$, existe un único elemento y $y \in img(f)$ tal que $(x, y) \in f$; este objeto y se llama la imagen de x por f , y se escribe $f(x)$. Un modo sencillo para definir la notación $f(x)$ consiste en escribir

$$f(x) := \bigcup \{y \in img(f) : (x, y \in f)\}$$

En efecto, cuando $x \in dom(f)$, el conjunto $y \in img(f) : (x, y) \in f$ es unitario, y el operador de unión naturalmente extrae su único elemento.
Funciones de A a B Dados dos conjuntos A y B, se llama función de A a B a toda función f tal que $dom(f) = A$ y $img(f) \subseteq B$. Se observa que las condiciones $dom(f) = A$ y $img(f) \subseteq B$ son asimétricas: mientras el dominio $A = dom(f)$ está determinado por f , el codominio B es un conjunto convencional que no se puede

deducir de f (sólo se requiere que $img(f) \subseteq B$). En lo siguiente, el enunciado ⋘ f es una función de A a B ⋙ se escribe $f : A \longrightarrow B$:

$$f : A \longrightarrow B\ f \text{ función} \wedge dom(f) = A \wedge img(f) \subseteq B$$

Proposición 2.5 (Conjunto de funciones)
Para todos conjuntos A y B, existe un conjunto de todas las funciones de A a B, que se escribe B^A.

Demostración. Se aplica la propiedad 2.1.2 con el predicado $\phi(f) \equiv (f : A \longrightarrow B)$, observando que la aserción $\phi(f)$ implica que $f \in \wp(A \times B)$ para todo f. ■

Operaciones sobre las funciones. Se dice que dos funciones f y g son componibles (en este orden) cuando $img(f) \subseteq dom(g)$. Cuando lo son, se define la función compuesta $g \circ f$ por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ (para todo $x \in dom(f)$) En particular, dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ siempre son componibles (en este orden), y su compuesta tiene el tipo $g \circ f : A \longrightarrow C$. La operación de composición es obviamente asociativa, siempre que las funciones involucradas sean componibles:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(Es decir: cuando $img(f) \subseteq dom(g)$ y $img(g) \subseteq dom(h)$.) Dado un conjunto A, se define la función identidad $id_A : A \longrightarrow A$ por $idA(x) := x$ (para todo x) Para toda función $f : A \longrightarrow B$, tenemos que

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f$$

Observación (Estructura categórica)**.** Las operaciones anteriores equipan naturalmente el universo $\mathbb{U}$ de los conjuntos con una estructura de categoría, que se llama la categoría de los conjuntos, y se escribe **Set**. En esta categoría:

- Los objetos son los conjuntos.
- Las flechas entre dos objetos A y B son las funciones $f : A \longrightarrow B$.

- La compuesta de dos flechas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ es la función $g \circ f : A \longrightarrow C$.
- La flecha identidad en un objeto A es la función $id_A : A \longrightarrow A$.

Esta estructura cumple obviamente los dos axiomas de las categorías:
(Asociatividad) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (si $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$)
(Identidad) $f \circ id_A = id_B \circ f = f$ (si $f : A \longrightarrow B$)
Funciones notables: Dados dos conjuntos A, B y una función $f : A \longrightarrow B$, se dice que:

f es inyectiva (notación: $f : A \hookrightarrow B$) si: $(\forall x, x' \in A)(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
f es sobreyectiva (notación: f : A$\twoheadrightarrow B$) si: $(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$;
f es biyectiva (notación: $f : A \rightsquigarrow B$) si f es inyectiva y sobreyectiva.

Toda función $f : A \longrightarrow B$ inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) también se llama una inyección (resp. una sobreyección, una biyección). Toda biyección $f : A \longrightarrow B$ es invertible (respecto a la operación de composición), y su inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ está definida por:

$$f^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in f\}$$

Se verifica inmediatamente que $f^{-1} \circ f = id_A$ y$f \circ f^{-1} = id_B$. Cuando existe una biyección $f : A \longrightarrow B$, se dice que los dos conjuntos A y B son equipotentes.

Observación. Recordemos que en la definición de la fórmula

$$f : A \longrightarrow B \equiv f \text{ función} \wedge dom(f) = A \wedge img(f) \subseteq B$$

función el dominio A está determinado por el grafo f mientras el codominio B es convencional, siempre que $img(f) \subseteq B$. En particular, toda función $f : A \longrightarrow B$ también se puede ver como una función $f : A \longrightarrow img(f)$ (sin cambiar el grafo subyacente), que es siempre sobreyectiva, como función de tipo $A \longrightarrow img(f)$. En este sentido, toda inyección $f : A \longrightarrow B$, vista como una biyección $f : A \longrightarrow img(f)$, es invertible, y su inversa $f^{-1} : img(f) \longrightarrow A$ cumple $f^{-1} \circ f = id_A$.

Otras operaciones Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, se llaman:

- imagen de X por f al subconjunto $f(X) \subseteq B$ definido por

$$f(X) := \{y \in B : (\exists x \in X) y = f(x)\}\,;$$

- preimagen de $Y \subseteq B$ por f al subconjunto $f^{-1}(Y) \subseteq A$ definida por $f(X) := \{x \in A : f(x) \in Y\}$;

- restricción de f a X a la función$f_X : X \longrightarrow B$ definida por

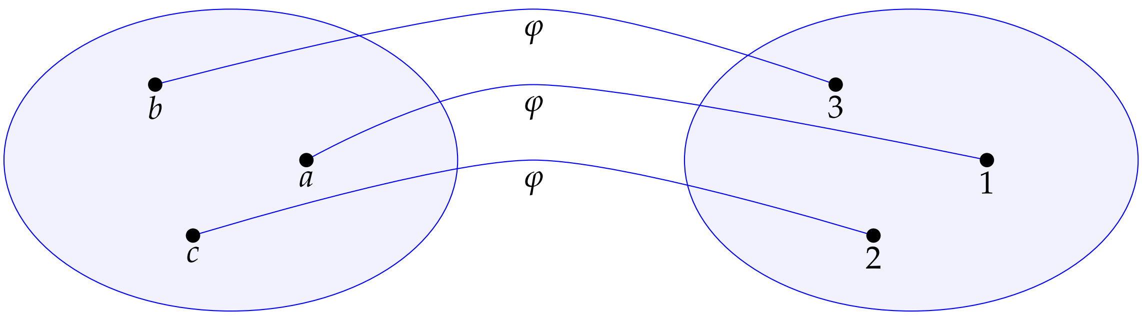
$$f_X := f \cap (X \times B)\,.$$

Por construcción, tenemos que $dom(f_X) = X$ e $img(f_X) = f(X)$.
En razón del carácter convencional del codominio, también se puede ver la función f_X como una función de tipo $X \longrightarrow Y$ para todo subconjunto $Y \subseteq B$ tal que $f(X) \subseteq Y$.

2.6 Axioma de reemplazo (ZF6)

Dado una fórmula $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\forall x \exists ! y \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \forall u \exists v \forall z (z \in u \longleftrightarrow \exists x \in u \varphi(x, z, x_1, \ldots, x_n)))$$



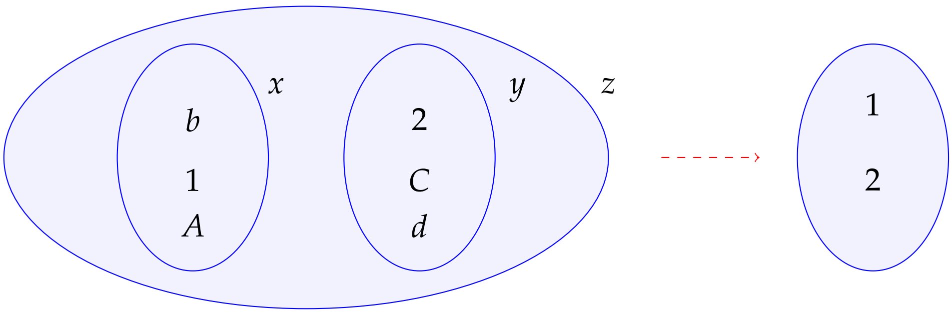
Es decir, si la relación obtenida de $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ fijando valores a $x_1, \ldots, x_n$, es una relación funcional en x e y, dado un conjunto u, existe un conjunto v cuyos

elementos son las imágenes de los elementos de u por la relación funcional.
La idea intuitiva de conjuntos es la de una colección de objetos que tienen alguna propiedad en común, esa idea intuitiva no es adecuada para desarrollar la teoría axiomática ya que lleva a contradicciones inmediatas. Por ejemplo, la colección de todos los conjuntos no puede ser un conjunto. Sin embargo, la colección de elementos de un conjunto dado que tengan una propiedad en común si es un conjunto. Esto es lo que se conoce como el **Axioma de separación**, uno de los postulados incluidos en la formulación original de la teoría de Zermelo, por lo tanto es una consecuencia del **Axioma de reemplazo** y lo colocamos como un axioma a continuacción.

2.7 Axioma de separación (ZF7)

Dado una fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow ((z \in x) \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)))$$



Este axioma expresa que dado una fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, y dados los conjuntos $a_1, \ldots, a_n$, y un conjunto A, existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos de A tales que $\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$, es decir

$$B = \{a \in A : \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\}$$

2.8 Axioma de infinitud (ZF8)

Antes de enunciar el axioma , identificaremos el conjunto de los números naturales desde el punto de vista de la teoría de conjuntos.

Número naturales

En la teoría todos los elementos matematicos deben ser conjuntos, y por ello indetificaremos a los números naturales con ciertos conjuntos específicos.

$$\text{Con } 0 \text{ el conjunto vacío } \varnothing$$

$$\text{Con } 1 \text{ al conjunto } \{0\}$$

$$\text{Con } 2 \text{ al conjunto } \{0, 1\}$$

$$\text{Con } 3 \text{ al conjunto } \{0, 1, 2\}$$

$$\vdots$$

$$\text{Con } n \text{ al conjunto } \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

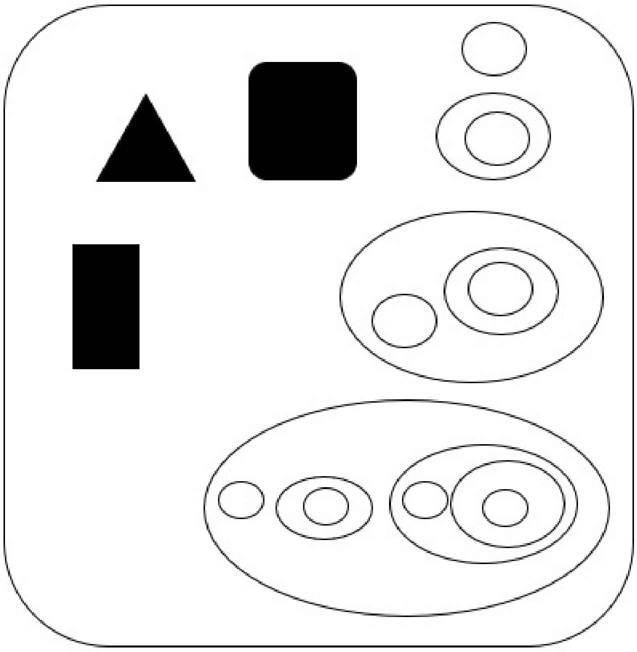
Definición 2.2
Dado un conjunto a, definimos a', el sucesor de a como el conjunto $a' = a \cup \{a\}$.

Definición 2.3
Decimos que un conjunto A es inductivo si $\varnothing \in A$ y para todo a, si $a \in A$, entonces $a' \in A$.

Ninguno de los axiomas introducidos hasta el momento nos garantiza la existencia de conjuntos inductivos.

Axioma de infinitud: Existe un conjunto inductivo:

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall z(z \in x \longrightarrow z \cup \{z\} \in x))$$



El axioma establece que existe un conjunto tal que no es finito, es decir, no se puede enumerar todos sus elementos. Este axioma es fundamental para la teoría de conjuntos ya que permite la existencia de conjuntos infinitos en la teoría de conjuntos y es necesario para el desarrollo de áreas de la matemática como la topología, la teoría de la medida y la teoría de modelos. Sin este axioma, la teoría de conjuntos sería finita y se limitaría a conjuntos finitos.

Definición 2.4
Un conjunto a es un número natural si pertenece a todo conjunto inductivo.

Ejemplo. $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ son números naturales.

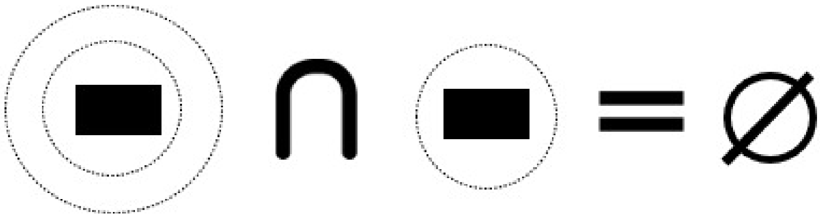
El axioma de infinitud nos permite definir el conjunto w de todos los números naturales.

2.9 Axioma de regularidad o fundamentación ZF9

Para todo conjunto $x \neq \varnothing$, existe un elemento y con el cual x no tiene elementos em común.

$$\forall x(x \neq \varnothing \longrightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

Este axioma implica la imposibilidad de tener $x \in x$.



2.10 Axioma de elección (ZF10)

Introducción al axioma de elección:

El polémico Axioma de Elección. Viene a decir lo siguiente:

«En una familia de conjuntos no vacios y disjuntos dos a dos, existe un conjunto que contiene un elemento de cada uno de ellos».

Visto de otra forma, si cada conjunto es una bolsa, podemos crear una nueva con un elemento que esté contenido en cada una de las otras bolsas. Pero claro, eso lo podemos hacer cuando el número de bolsas o de conjuntos es finito, porque en caso contrario no acabaríamos nunca.

El célebre matemático Kurt Gödel demostró en la primera mitad del S.XX que si la axiomática era consistente sin el Axioma de Elección, entonces también lo era con él.

Esta prueba fue una auténtica revolución dentro de las matemáticas, puesto que este hecho implicaba que era posible que el Axioma de Elección pudiera ser demostrado a partir de los otros nueve axiomas de Teoría de Conjuntos.

Esa idea flotó en el aire hasta que en 1963 Paul J. Cohen demostró a partir de resultados del propio Gödel que el Axioma de Elección es independiente y no implicación de los otros. Cohen obtuvo una Medalla Fields gracias a esta demostración.

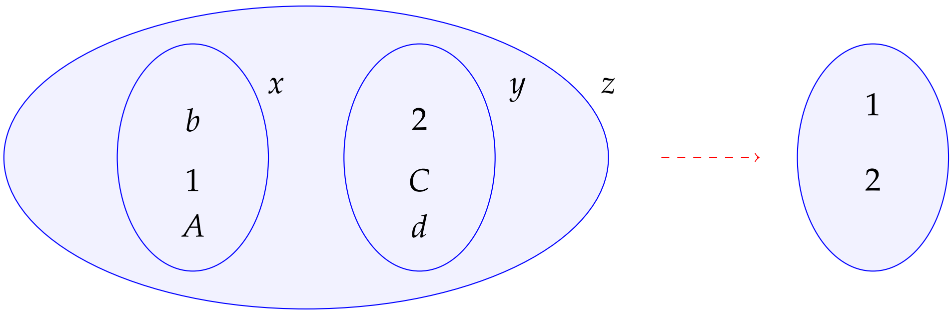
Hoy día todavía sigue presente esa polémica, y aunque la inmensa mayoría de los matemáticos toman como correcta la utilización del Axioma de Elección, existe una corriente matemática denominada Intuicionismo que lo rechaza.

El Intuicionismo solo acepta las matemáticas constructivas, y rechaza la opción

de demostrar que algo es falso. Además defienden que todo resultado que sea demostrable con el Axioma de Elección, también tiene que serlo sin él, aunque la demostración sea más larga y tediosa.
Por último, actualmente si rechazáramos el Axioma de Elección, no podríamos tomar como ciertos resultados tan importantes como el Lema de Zorn o el Principio de buena ordenación.

Dado un conjunto x, decimos que la función x es yna función de elección para x si el dominio de f es $x - \{\varnothing\}$ y para todo u en el dominio de f, se tiene que $f(u) \in u$. Podemos enunciar el axioma de elección:

$$\forall x \exists f(f, dom(f) = x : \{\varnothing\} \wedge \forall y(y \in dom(f) \to f(y) \in y))$$



Dada la importancia de la afirmación de el parrafo anterior, daremos una demostración de el axioma de elección y sus equivalencias en la teoría de conjuntos. Esta demostración es tomada de Panchapagesan, Cova y Sívoli [16].

2.10.1 El axioma de elección y sus equivalencias en la teoría de conjuntos

Definición 2.5
Sea P un conjunto.
Una relación "$\leq$" definida en P se llama un *orden parcial* en P si

1) Es reflexiva.

2) Es anti-simétrica (es decir, $x \leq y$ e $y \leq x$ implican que $x = y$).

3) Es transitiva.

Si "$\leq$" es un orden parcial en P, entonces $(P, \leq)$ se llama un *conjunto parcialmente ordenado*.

Si el orden parcial "$\leq$" también verifica que, dados $x, y \in P$, entonces

$$x \leq y \quad \text{ó} \quad y \leq x \text{ (tricotomía)},$$

"$\leq$" se llama un *orden lineal total o complejo* en P y en este caso $(P, \leq)$ se llama un conjunto *linealmente, totalmente o completamente ordenado*.

Definición 2.6

Si $A \subset P$, $(P, \leq)$ parcialmente ordenado.

$u \in P$ se llama una *cota superior* de A si $x \leq u$ para todo $x \in A$.

Un elemento $m \in P$ se llama *maximal* en P si

$$m \leq x \text{ y } x \in P \text{ implican que } x = m.$$

Asimismo, se definen una *cota inferior* de A y un *elemento minimal* de P.

Un subconjunto C de P se llama una *cadena* en P si C es linealmente ordenado en $\leq$.

Ejemplo.

1) En $P(X)$, la relación $\leq$ dada por: $A \leq B$ si $A \subset B$, es un orden parcial.

   Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$. Entonces $C = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \ldots\}$ es una cadena en $(P(X), \leq)$.

2) Sea $F = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ una función}\}$. Decimos que $f \leq g$ en F si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

3) Sea $F = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$. Ordenamos F por inclusión de conjuntos como en 1. $\{1\}, \{2\}$ son elementos minimales y $\{2,3,4\}, \{1,2,3\}$ son elementos maximales en $\{F, \subset\}$. Por lo tanto, elementos maximales y minimales, en general, no son únicos.

Definición 2.7

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos en X. $\mathcal{F}$ se llama una *familia de carácter finito* si para cada $A \subset X$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A está en $\mathcal{F}$.

Lema 2.2

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos en X, de carácter finito. Si C ($\neq \emptyset$) es una cadena en F con respecto a la relación de inclusión de conjuntos, entonces $\bigcup_{C \in \mathbb{C}} C \in \mathcal{F}$.

Demostración. Sea $F = \bigcup_{C \in \mathbb{C}} C$. Por la hipótesis sobre $\mathcal{F}$, basta probar que cada subconjunto finito de F está en $\mathcal{F}$.

Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset F$. Entonces existen $C_i \in \mathbb{C}$ tales que $x_i \in C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Como C es una cadena, uno de los C_i contiene a los demás. Sin perder la generalidad, si suponemos que $C_i \subset C_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $A \subset C_n \in \mathbb{C}$. Como A es finito y $\mathcal{F}$ es de carácter finito, A está en F. ∎

Teorema 2.1

Los siguientes axiomas de la teoría de conjuntos son equivalentes entre sí:

1) *a*) ***El Axioma de elección.*** Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X, disjuntos dos a dos. Entonces existe una función $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in I$, $f(\alpha) \in A_\alpha$.
La función f se llama una *función de elección* para la familia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$.

   b) ***Versión alternativa del axioma de elección.*** Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. El *producto cartesiano* de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ es la colección de todas las funciones x con dominio I tal que $x_\alpha = x(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

   El producto cartesiano de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ se denota por $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Para $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $x(\alpha) = x_\alpha$ se llama la *α-ésima coordenada de x*.
   La versión alternativa del axioma de elección dice que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es un

conjunto no vacío. Es decir, si $I \neq \emptyset$ y si cada $X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \neq \emptyset$.

2) ***Lema de Tukey.*** Sea F una familia no vacía de conjuntos en X, parcialmente ordenada por la relación de inclusión de conjuntos. Si F es de carácter finito, entonces F tiene un miembro maximal.

3) ***Principio maximal de Hausdorff.*** Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene a una cadena maximal.

4) ***Lema de Zorn.*** Existe un elemento maximal en cada conjunto P no vacío y parcialmente ordenado, en el cual cada cadena tiene una cota superior en P.

5) ***Teorema del buen ordenamiento.*** Cada conjunto P no vacío admite un *buen orden* "$<$" en el sentido de que "$<$" es un orden lineal en P tal que cada $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, contiene un elemento a de tal modo que $a < x$ para todo $x \in A$.

Cuando "$<$" es un buen orden en P, decimos que P está bien ordenado por "$<$", ó que $(P, <)$ está bien ordenado.

Demostración.

1. a) ⇒ 1. b): Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos.

Para cada $\alpha \in I$, sean $A_\alpha = X_\alpha \times \{\alpha\}$ y $X = \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \times I$.

Entonces $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ es, evidentemente, una colección no vacía de subconjuntos no vacíos y mutuamente disjuntos de X. Por *1. a)*, existe una función de elección $f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ tal que $f(\alpha) = (x_\alpha, \alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, donde $x_\alpha \in X_\alpha$.

Si definimos $\phi(\alpha) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\phi \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, lo cual demuestra $1.b)$.

1. b) $\Rightarrow$ ***1. a):*** En efecto, tómese $x \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, donde $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y mutuamente disjuntos.

1. b) $\Rightarrow$ **2.:** En efecto, supongamos lo contrario. Esto es, existe una familia no vacía $\mathcal{F}$ de conjuntos con carácter finito, sin ningún miembro maximal (por la relación de inclusión de conjuntos).

Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea $A_F = \{E \in \mathcal{F} : F \subsetneq E\}$.

Por hipótesis, $A_F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

Por *1. b)* existe una función f en F tal que para cada $F \in F$, $f(F) \in A_F$. Por lo tanto, $F \subsetneq f(F) \in \mathcal{F}$, para cada $F \in \mathcal{F}$.

Una sub-familia $I \subset \mathcal{F}$ se llama *f-inductiva* o inductiva con respecto a la función f sobre I, si se cumplen las siguientes propiedades:

(a.fi) $\emptyset \in I$.

(b.fi) $A \in I$ implica que $f(A) \in I$.

(c.fi) Si $\mathcal{C}$ es una cadena contenida en I, entonces $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in I$.

Afirmamos que $\mathcal{F}$ es f-inductiva. En efecto, como $\emptyset$ es finito, $\mathcal{F}$ es de carácter finito y $\mathcal{F}$ es no vacío, se tiene que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Para todo $F \in \mathcal{F}$, $f(F) \in A_F$ y por lo tanto $f(F) \in \mathcal{F}$.

Por el Lema 2.10.1, $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (c.fi).

Así, $\mathcal{F}$ es $f-$inductiva.

Sea

$$I_0 = \bigcap \{I : I \text{ es } f\text{-inductiva}\}.$$

Como $\mathcal{F}$ es f-inductiva, I_0 está bien definida.

Las propiedades (a.fi) y (b.fi) de la definición de familia $f-$inductiva se verifican fácilmente para I_0.

Ahora, si $\mathcal{C}$ una cadena en I_0. Entonces $\mathcal{C} \subset I$, para toda I f-inductiva y por lo tanto, $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$ pertenece a toda I f-inductiva, lo cual implica que $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in I_0$.

Así, I_0 es $f-$inductiva.

Evidentemente, I_0 es la familia f-inductiva más pequeña contenida en $\mathcal{F}$. Luego, cualquier familia f-inductiva J más pequeña que I_0, coincide con I_0.

Sea

$$H = \{A \in I_0 : B \in I_0 \text{ y } B \subsetneq A \text{ implican que } f(B) \subset A\}.$$

Como $\emptyset$ no contiene a ningún sub-conjunto propio, se tiene que $\emptyset \in H$ y así, $H \neq \emptyset$.

Afirmación 1: Si $A \in H$ y si $C \in I_0$, entonces $C \subset A$ ó $f(A) \subset C$.

En efecto, sea

$$G_A = \{C \in I_0 : C \subset A \text{ o } f(A) \subset C\}.$$

Basta probar que $G_A = I_0$.

Como I_0 es la familia f-inductiva más pequeña, es suficiente probar que G_A es f-inductiva.

Se ve que $\emptyset \in G_A$.

Si $C \in G_A$, entonces $C \subsetneq A$ o $C = A$ ó $f(A) \subset C$.

Si $C \subsetneq A$, como $A \in H$, se tiene que $f(C) \subset A$. Por (b.fi) de la definición de familias f-inductivas, $f(C) \in I_0$. Luego, $f(C) \in G_A$.

Si $C = A$, entonces $f(C) \supset f(A)$ y así, $f(C) \in G_A$.

Si $f(A) \subset C$, entonces $f(A) \subset f(C)$, pues $C \subsetneq f(C)$ y así, $f(C) \in G_A$. Esto es, G_A cumple la propiedad (b.fi) de la definición de familias f-inductivas.

Por último, sea $\mathcal{C}$ una cadena en G_A.

Si cada $C \in \mathcal{C}$ es tal que $C \subset A$, entonces $\bigcup\limits_{C \in \mathbf{C}} C \supset A$ y así, $\bigcup\limits_{C \in \mathbf{C}} C \in G_A$.

Si existe algún $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(A) \subset C_0$, entonces $f(A) \subset \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in G_A$.

Así, G_A es f-inductiva y en consecuencia, $G_A = I_0$, lo que demuestra la afirmación 1.

Afirmación 2: $H = I_0$.

En efecto, basta probar que H es f-inductiva.

Como vimos anteriormente, $H \neq \emptyset$ y $\emptyset \in H$.

Sea $A \in H$. Veamos que $f(A) \in H$.

Supóngase que existe $B \in I_0$ tal que $B \subsetneq f(A)$. Ya que $B \in I_0 = G_A$, tenemos que $B \subset A$ ó $f(A) \subset B$. Como $B \subsetneq f(A)$, la única posibilidad es la de que $B \subset A$.

Si $B \subsetneq A$, por la definición de H, tenemos que $f(B) \subset A$ y así,

$$f(B) \subset A \subsetneq f(A).$$

Si $B = A$, $f(B) \subset f(A)$. Por lo tanto, $f(A) \in H$.

Sean $\mathcal{C}$ una cadena en H y $E \in I_0$ tal que $E \subsetneq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Ya que $E \in I_0 = G_C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, tenemos que $E \subset C$ para algún $C_0 \in \mathcal{C}$ ó $f(C) \subset E$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

En la segunda alternativa, tendremos que

$$E \subsetneq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset \bigcup \{f(C) : C \in \mathcal{C}\} \subset E,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe algún $C_0 \in \mathbb{C}$ tal que $E \subset C_0$.

Si $E \subsetneq C_0$, entonces $f(E) \subsetneq C_0 \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, pues $C_0 \in H$.

Si $E = C_0$, como $C_0 \in H$ y $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in I_0 = G_{C_0}$, tenemos que

$$f(E) \subset f(C_0) \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \quad \text{ó} \quad \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset C_0.$$

La última relación es posible si, y sólo si, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = C_0$. En consecuencia, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in H$.

Por lo tanto, H es f-inductiva y luego, $H = I_0$.

Afirmación 3: I_0 es una cadena.

En efecto, sean $A, B \in I_0$. Por las afirmaciones 1 y 2, $I_0 = H = G_A$. Por lo tanto, podemos considerar que $A \in H$ y $B \in G_A$.

Entonces $B \subset A$ ó $f(A) \subset B$.

Pero $A \subsetneq f(A)$ y por lo tanto, en el segundo caso, tenemos que

$$A \subsetneq f(A) \subset B$$

y así, $A \subset B$.

Es decir, $A \subset B$ ó $B \subset A$ y así, I_0 es una cadena.

Sea $M = \cup\{F : F \in I_0\}$. Como I_0 es f-inductiva y es una cadena (por la afirmación 3), se tiene que $M \in I_0$ y $f(M) \in I_0$. Pero $M \subsetneq f(M) \in I_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, *1. b)* $\Rightarrow$ *2.*

2. $\Rightarrow$ *3.*: Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y no vacío.

Si

$$C = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ una cadena de miembros de } P\},$$

entonces C es no vacía, ya que podemos tomar $\mathcal{F}$ como la cadena que consta de un elemento de P.

C es de carácter finito. En efecto, sean $\mathcal{F} \in C$, y $G \subset \mathcal{F}$, G finito. Entonces, G es una cadena en P y por lo tanto $G \in C$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es una colección de miembros de P tal que cada subconjunto finito de $\mathcal{F}$ es una cadena en P, entonces, $\mathcal{F}$ mismo es una cadena en P, ya que si $x, y \in \mathcal{F}$, $\{x, y\}$ es una cadena en P y así, $x \leq y$ ó $y \leq x$. Como C es de carácter finito, por *2* existe un miembro M maximal en C, lo cual implica que M es una cadena maximal en $(P, \leq)$.

3. $\Rightarrow$ *4.*: Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y no vacío. Supóngase que en P cada cadena tiene una cota superior (perteneciente a P).

Por *3*, existe una cadena maximal M en P.

Sea m una cota superior de M. Entonces m es maximal en P, ya que en caso contrario, existiría $x \in P$ tal que $m \leq x$ y $m \neq x$. Obviamente $M \cup \{x\}$ es una cadena en P, que contiene a M estrictamente, y esto es una contradicción con la maximalidad de la cadena M.

Esta contradicción establece que *3* implica *4.*

4. $\Rightarrow$ **5.:** Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ la familia de todos los conjuntos bien ordenados $(W, \leq)$ con $W \subset X$.

Como $\{x\} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in X$, $F \neq \emptyset$.

Introducimos un orden parcial $\leq$ en $\mathcal{F}$ como sigue:

$(W_1, \leq_1) \leq (W_2, \leq_2)$ si $W_1 = W_2$ y $\leq_1 = \leq_2$
ó
existe un elemento $a \in W_2$ tal que $W_1 = \{x \in W_2 : x \leq_2 a, x \neq a\}$ y de manera que $\leq_2$ coincide con $\leq_1$ en W_1. *En este caso, decimos que* $(W_2, \leq_2)$ *es una continuación de* $(W_1, \leq_1)$.

Evidentemente, $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{F}$.

Para aplicar el Lema de Zorn (4) a $(\mathcal{F}, \leq)$, consideremos una cadena $C = \{(W_1, \leq_i)\}_{i \in I}$ no vacía en $(\mathcal{F}, \leq)$ y sea $W = \bigcup\limits_{i \in I} W_i$.
Sea $\leq = \leq_i$ en W_i, $i \in I$.

Por la definición de $\leq$ en $\mathcal{F}$ y por la hipótesis de que C es una cadena en $\mathcal{F}$, se tiene que $\leq$ es un orden parcial bien definido en W.

Dados $x, y \in W$, existe un $i \in I$ tal que $x, y \in W_i$, y así, $x \leq_i y$ ó $y \leq_i x$, lo cual implica que $x \leq y$ ó $y \leq x$, respectivamente.

Por lo tanto, $(W, \leq)$ es linealmente ordenado.

Ahora, probaremos que $(W, \leq)$ está bien ordenado.

Sea $\emptyset \neq A \subset W$. Entonces existe algún $i \in I$ tal que $A \cap W \neq \emptyset$. Puesto que $(W_i, \leq_i)$ está bien ordenado, existe un elemento $a \in A \cap W_i$ tal que $a \leq_i x$ para todo $x \in A \cap W_i$.

Afirmación: $a \leq b$ para todo $b \in A$.

En efecto, dado $b \in A$, existe algún $j \in I$ tal que $b \in W_j$. Entonces,

$$W_i \leq W_j \quad \text{ó} \quad W_j \leq W_i.$$

Si $W_j \leq W_i$ ó $b \in W_i$, se tiene que $a \leq_i b$.

Si $b \notin W_i$, entonces, por la definición de $\leq$, se tiene que $x \leq_j b$ para todo $x \in W_i$ y así, en particular, $a \leq_j b$.

En cualquier caso, $a \leq b$.

En consecuencia, dado $A \neq \emptyset$, $A \subset W$; existe un $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, $(W, \leq)$ está bien ordenado y así, $(W, \leq) \in \mathcal{F}$.

Es obvio que $(W, \leq)$ es una cota superior de C.

Ahora, por *4*, existe un elemento maximal $(W_0, \leq_0)$ en $\mathcal{F}$.

Si $W_0 = X$, entonces $(X, \leq_0)$ está bien ordenado.

Si $W_0 \neq X$. Sea $z \in X \setminus W_0$. Definamos $<'$ en $W \cup \{z\}$ como sigue:

- $\forall x, y \in W_0 : x <' y$ si $x <_0 y$ y $y <' x$ si $y <_0 x$;
- $x <' z, \forall x \in W_0$.
- $z <' z$.

Entonces $(W_0 \cup \{z\}, <')$ está bien ordenado y, por lo tanto, pertenece a $\mathcal{F}$.

Pero $(W_0, <_0) \leq (W_0 \cup \{z\}, <')$ y $(W_0, <_0) \neq (W_0 \cup \{z\}, <')$, lo cual contradice la maximalidad de $(W_0, <_0)$ en $\mathcal{F}$. Esta contradicción demuestra que $W_0 = X$.

Por lo tanto, $(X, <_0)$ está bien ordenado por el orden $<_0$.

5. $\Rightarrow$ ***1. b):*** En efecto, sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Sea $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Por *5.*, existe un buen orden $<$ en X.

Para cada $\alpha \in I$, sea $f(x) = x_\alpha$, el elemento más pequeño en X_α respecto al orden $<$. Esto es posible ya que $(X, <)$ está bien ordenado.

Entonces f es una función en I tal que $f(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ y así, $f \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Es decir, *1. b)* es cierto.

Esto completa la demostración del teorema.

■

Conclusiones del axioma de elección:

Del trabajo de Kurt Gödel y Paul Cohen se deduce que el axioma de elección es lógicamente independiente de los otros axiomas de la teoría axiomática de conjuntos. Esto significa que ni AE ni su negación pueden demostrarse ciertos dentro de los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), si esa teoría es consistente. En consecuencia, asumir AE o su negación nunca llevará a una contradicción que no se pudiera obtener sin tal supuesto.

La decisión, entonces, de si es o no apropiado hacer uso de él en una demostración no se puede tomar basándose solo en otros axiomas de la teoría de conjuntos; hay que buscar otras razones. Un argumento dado a favor de usar el axioma de elección es simplemente que es conveniente: usarlo no puede hacer daño (resultar en contradicciones) y hace posible demostrar algunas proposiciones que de otro modo no se podrían probar. El axioma de elección no es la única afirmación significativa e independiente de ZF; la hipótesis del continuo generalizada (HCG), por ejemplo, no solo es independiente de ZF, además lo es de ZF con el axioma de elección (ZFE, o ZFC en inglés). Sin embargo, ZF más HCG necesariamente implica AE, con lo cual HCG es estrictamente más fuerte que AE, aunque ambos sean independientes de ZF.

Una razón por la que a los matemáticos no les agrada el axioma es que tiene por consecuencia la existencia de algunos objetos contraintuitivos. Un ejemplo de ello es la paradoja de Banach-Tarski, que dice básicamente que es posible cortar una bola tridimensional en finitas partes, y usando solo rotación y translación, reensamblarlas en dos bolas del mismo volumen que la original. La prueba, como todas las pruebas que involucran el axioma de elección, es solo de existencia: no dice cómo se debe cortar la esfera, solo dice que se puede hacer.

Por otro lado, la negación de AE es también extraña. Por ejemplo, la afirmación de que dados dos conjuntos cualesquiera S y T, la cardinalidad de S es menor, igual, o mayor que la de T es equivalente al axioma de elección; en otras palabras, si se asume la negación de este, hay dos conjuntos S y T de tamaño incomparable: ninguno se puede inyectar en el otro.

Una tercera posibilidad es probar teoremas sin usar ni el axioma ni su negación, la táctica preferida en matemáticas constructivas. Tales afirmaciones serán ciertas en cualquier modelo de ZF, independientemente de la certeza o falsedad del axioma de elección en dicho modelo. Esto hace que cualquier proposición que requiera AE o su negación sea indecidible: la paradoja de Banach-Tarski, por ejemplo, no se puede demostrar como cierta (pues no se puede descomponer la esfera del modo indicado) ni como falsa (pues no se puede demostrar que tal descomposición no exista); esta, sin embargo, se puede reformular como una afirmación sobre los modelos de ZF: "en todo modelo de ZF en el que valga AE, vale también la paradoja de Banach-Tarski". Asimismo, todas las afirmaciones listadas abajo que requieren elección o alguna versión más débil son indecidibles en ZF; pero por ser demostrables en ZFE, hay modelos de ZF en los que son ciertas.

Equivalentes

Existe un gran número de proposiciones importantes que, asumiendo los axiomas de ZF (sin AE ni su negación), son equivalentes al axioma de elección, en el sentido de que de cualquiera de ellas puede demostrarse dicho axioma y viceversa. Entre los más importantes, como ya demostramos, están el principio de buena ordenación de Zermelo y el lema de Zorn.
Las siguientes proposiciones son equivalentes al axioma de elección:

Teoría de conjuntos

- **Principio de buena ordenación de Zermelo:** todo conjunto puede ser bien ordenado.
- Si un conjunto A es infinito, entonces A tiene la misma cardinalidad que $A \times A$.
- **Tricotomía:** dados dos conjuntos, éstos tienen la misma cardinalidad, o bien uno tiene una cardinalidad menor que el otro.
- Toda función sobreyectiva tiene una inversa por derecha.
- **Teorema de König:** la suma de una familia de cardinales es estrictamente menor

que el producto de una familia de cardinales mayores.6

Teoría del orden

- **Lema de Zorn:** Si en un conjunto parcialmente ordenado no vacío todo subconjunto totalmente ordenado —toda cadena— posee cota superior, entonces existe al menos un elemento maximal.
- **Principio maximal de Hausdorff:** Todo conjunto parcialmente ordenado contiene una cadena maximal.

Álgebra

- Todo espacio vectorial tiene una base.
- Todo anillo unitario distinto del trivial contiene un ideal maximal.

Topología

- **Teorema de Tychonoff:** todo producto de espacios compactos es compacto.
- En la topología producto, la clausura de un producto de subconjuntos es igual al producto de sus respectivas clausuras.
- Todo producto de espacios uniformes completos es asimismo completo.

Resultados que requieren AE pero son más débiles

Uno de los aspectos más interesantes del axioma de elección es el gran número de lugares en la matemática en los que aparece. He aquí algunas afirmaciones que requieren el axioma de elección en el sentido de que no son demostrables en ZF pero sí en ZFE. De forma equivalente, estas son ciertas en todos los modelos de ZFE y falsas en algunos modelos de ZF.

Teoría de conjuntos

- Toda unión de numerables conjuntos numerables es asimismo numerable.

- Si el conjunto A es infinito, existe una función inyectiva del conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ a A.

Teoría de la medida

- Existen subconjuntos de los reales que no tienen medida de Lebesgue (el conjunto de Vitali).
- La paradoja de Hausdorff.
- La paradoja de Banach-Tarski.

Álgebra

- Todo cuerpo tiene clausura algebraica.
- Todo subgrupo de un grupo libre es también libre (teorema de Nielsen-Schreier).
- Los grupos aditivos R y C son isomorfos.

Teoría del orden:

- Todo conjunto puede ser linealmente ordenado.

Álgebra de Boole

- Todo filtro en un álgebra de Boole puede ser extendido a un ultrafiltro.

Análisis funcional

- El teorema de Hahn-Banach en análisis funcional, que permite la extensión de funcionales lineales.
- Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.
- El teorema de la categoría de Baire sobre espacios métricos completos, y sus consecuencias.

- En todo espacio vectorial topológico de dimensión infinita hay una función lineal discontinua.

Topología

- Un espacio uniforme es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.
- Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación de Stone-Čech.

Bibliografía

[1] **AGUILAR, A.** *El axioma de eleccón en topología y álgebra.*(Tesina) Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2009.

[2] **ARRONDO, E.** *Apuntes de teoría de conjuntos*. 2012.

[3] **CASANOVAS, E.** *Teoría axiomática de conjuntos*. 1998.

[4] **CASANOVAS, E.** *Lógica 1*. 2000.

[5] **CASTEL DE HARO, M.; LORENS F.** *Lógica de primer orden*. 1999.

[6] **CASTILLO, C.** *Teorías de Conjuntos*. 2014.

[7] **CIGNOLI, R.** *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción*. 2006.

[8] **DI PRISCO, C.** *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas.* UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia, 1997.

[9] **GALLINARI, A.** *Lógica matemática*. 2006.

[10] **GUERRERO, B.** *Sobre la axiomatización en matemáticas*. Boletín de matemáticas, 2004, vol. 11, no 1, p. 79-94.

[11] **HERNÁNDEZ, F.** *Teoría de conjuntos*.Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[12] **HUERTAS, A.; MANZANO, M.** *Teoría de conjuntos.* 2002.

[13] **IVORRA, C.** *La axiomática de la teoría de conjunto*. 2011.

[14] **LIN, T.** *Fundamentals of Zermelo-Fraenkel set theory*. 2011.

[15] **MUÑOZ, J.** *Introducción a la teoría de conjuntos*.Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[16] **PANCHAPAGESAN, T.; COVA, C. & SIVOLI, Z.** *Teoría abstracta de la medida*. 2022.

[17] **SOLÍS, J.; & TORRES,Y.** *Lógica Matemática*. UAM, Unidad Iztapalapa, 1995.

[18] **TINTAYA, P.** *Enfoque axiomático de la teoría de conjuntos. La paradoja de Russell Inclusión. Conjunto de partes de un conjunto. Operaciones con conjuntos y sus propiedades. Resolución de problemas basado en conjuntos. Familia de conjuntos y operaciones básicas generalizadas. Partición y Cubrimiento.* 2021.

[18] **VIDAL, J.** *Teoría de conjuntos*. 2010.

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 16 / 05 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Franklin David Espinoza Sanaguano
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo