



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**“IMPLEMENTACIÓN DE MÉTODOS CUALITATIVOS Y
NUMÉRICOS PARA EL ESTUDIO DE UN MODELO DE DINÁMICA
POBLACIONAL”**

Trabajo de Titulación

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: FERNANDO ANTONIO VILLACRÉS LLUAY
DIRECTORA: DRA. MAYRA ELIZABETH CÁCERES MENA, PhD.

Riobamba – Ecuador

2023

©2023, Fernando Antonio Villacrés Luay

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Fernando Antonio Villacrés Lluay, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 14 de abril de 2023

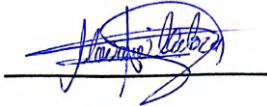

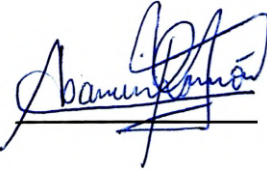


Fernando Antonio Villacrés Lluay

060551134-4

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **IMPLEMENTACIÓN DE MÉTODOS CUALITATIVOS Y NUMÉRICOS PARA EL ESTUDIO DE UN MODELO DE DINÁMICA POBLACIONAL**, realizado por: **FERNANDO ANTONIO VILLACRÉS LLUAY**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ing. Maria José Mendoza Salazar PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2023-04-14
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena DIRECTORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2023-04-14
Mgs. Ramon Antonio Abancin Ospina ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2023-04-14

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	viii
ÍNDICE DE ANEXOS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	2
1.1. Antecedentes	2
1.2. Planteamiento del problema	2
1.2.1. <i>Enunciado del problema</i>	2
1.3. Justificación	3
1.4. Objetivos	3
1.4.1. <i>Objetivo general</i>	3
1.4.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.5. Fuentes de investigación	4

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Bases teóricas: ecuaciones diferenciales	5
2.2. Soluciones y problema de valor inicial	7
2.2.1. <i>Soluciones de una ecuación diferencial</i>	7
2.2.1.1. <i>Familia de soluciones</i>	8
2.2.2. <i>Problemas de valor inicial</i>	8
2.3. Campo de direcciones e isoclinas	9
2.3.1. <i>Campos de direcciones</i>	9
2.3.1.1. <i>Monotonía del campo de direcciones</i>	10
2.3.2. <i>Método de isoclinas</i>	10
2.3.3. <i>Representación gráfica</i>	10

2.4.	Teorema de existencia y unicidad local para problemas de valor inicial . . .	13
2.4.1.	<i>Conceptos previos</i>	14
2.4.2.	<i>Enunciado del teorema</i>	19
2.4.3.	<i>Demostración</i>	20
2.4.3.1.	<i>Demostración de la existencia</i>	22
2.4.3.2.	<i>Demostración de la unicidad</i>	23
2.4.4.	<i>Ejemplos</i>	25
2.5.	Bases teóricas: sistemas de ecuaciones diferenciales	28
2.6.	Representación matricial	30
2.7.	Solución de sistemas lineales	31
2.8.	Problemas de valor inicial	32
2.8.1.	<i>Teorema de existencia y unicidad para sistemas</i>	33
2.8.2.	<i>Soluciones linealmente dependientes e independientes</i>	34
2.9.	Resolución de sistemas lineales	39
2.9.1.	<i>Sistemas lineales homogéneos</i>	40
2.9.1.1.	<i>Los autovalores son reales y distintos</i>	41
2.9.1.2.	<i>Los autovalores son reales e iguales</i>	44
2.9.1.3.	<i>Los autovalores son complejos</i>	47
2.9.2.	<i>Solución de sistemas lineales no homogéneos</i>	50
2.9.2.1.	<i>Coefficientes indeterminados</i>	50

CAPÍTULO III

3.	MARCO METODOLÓGICO	54
3.1.	Análisis cualitativo	54
3.1.1.	<i>Plano de fase y puntos de equilibrio</i>	55
3.1.1.1.	<i>Varias propiedades de trayectorias</i>	59
3.1.1.2.	<i>Estabilidad de los puntos de equilibrio</i>	60
3.1.1.3.	<i>Clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas lineales</i>	61
3.1.2.	<i>Análisis cualitativo para sistemas no lineales</i>	65
3.1.2.1.	<i>Clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas no lineales</i>	66
3.1.2.2.	<i>Proceso de linealización</i>	66
3.1.2.3.	<i>Isoclinas nulas</i>	70

3.2.	Análisis numérico	74
3.2.1.	<i>Runge-Kutta de cuarto orden</i>	75
3.2.1.1.	<i>Error del método</i>	76
3.2.1.2.	<i>Runge-Kutta para sistemas de dos ecuaciones diferenciales</i>	78

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	80
4.1.	Análisis del modelo de Lotka-Volterra	82
4.1.1.	<i>Isoclinas nulas</i>	82
4.1.2.	<i>Plano de fase</i>	85
4.1.3.	<i>Puntos de equilibrio</i>	90
4.1.4.	<i>Linealización</i>	90
4.1.5.	<i>Clasificación de los puntos de equilibrio</i>	92
4.1.6.	<i>Runge-Kutta de cuarto orden para Lotka-Volterra</i>	98
4.2.	Aplicación a un modelo de dinámica poblacional	100
4.2.1.	<i>Isoclinas nulas</i>	100
4.2.2.	<i>Plano de fase</i>	102
4.2.3.	<i>Puntos de equilibrio</i>	106
4.2.4.	<i>Linealización</i>	106
4.2.5.	<i>Clasificación de los puntos de equilibrio</i>	108
4.2.6.	<i>Runge-Kutta de cuarto orden para Lotka Volterra</i>	110
4.3.	Resultados	112

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	116
5.1.	Conclusiones	116
5.2.	Recomendaciones	117

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1-2: Isoclinas para las constantes $-2, -1, 0, 1, 2$	11
Ilustración 2-2: Campo de direcciones con las isoclinas propuestas	12
Ilustración 3-2: Campo de direcciones completo	12
Ilustración 4-2: Campo de direcciones para cuatro curvas solución	13
Ilustración 5-2: Rectángulo alrededor del punto $(0, 0)$	26
Ilustración 1-3: Campo de direcciones en el plano de fase $x(0) = 1, y(0) = 1$	59
Ilustración 2-3: Naturaleza del punto de equilibrio $(0, 0)$	65
Ilustración 3-3: Campo de dirección en el plano de fase para $(1, 0)$ y $(-1, 0)$	70
Ilustración 4-3: Isoclina nula para dx/dt	71
Ilustración 5-3: Isoclina nula para dy/dt	72
Ilustración 6-3: Unión de las isoclinas nulas del sistema	72
Ilustración 7-3: Direccionamiento de las trayectorias	73
Ilustración 8-3: Campo de direcciones con las isoclinas nulas	73
Ilustración 9-3: Condición $x(t_0) = 2, y(t_0) = 1$ en el campo de direcciones	74
Ilustración 1-4: Isoclina nula presa $dx/dt = 0$	83
Ilustración 2-4: Isoclina nula depredador $dy/dt = 0$	84
Ilustración 3-4: Isoclinas nulas presa-depredador	84
Ilustración 4-4: Regiones para el plano de fase	86
Ilustración 5-4: Región \mathcal{A} en el plano de fase	87
Ilustración 6-4: Región \mathcal{B} en el plano de fase	87
Ilustración 7-4: Región \mathcal{C} en el plano de fase	88
Ilustración 8-4: Región \mathcal{D} en el plano de fase	89
Ilustración 9-4: Campo de direcciones en el plano de fase	89
Ilustración 10-4: Plano de fase para el sistema linealizado en $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$	97
Ilustración 11-4: Representación de la solución en el sistema linealizado	98
Ilustración 12-4: Solución cerca del punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$	99
Ilustración 13-4: Solución cerca del punto $(0, 0)$	99
Ilustración 14-4: Isoclina nula especie presa $dx_1/dt = 0$	101
Ilustración 15-4: Isoclina nula especie depredadora $dx_2/dt = 0$	101
Ilustración 16-4: Isoclinas presa-depredador $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$	102
Ilustración 17-4: Región \mathcal{A} para un determinado problema	103
Ilustración 18-4: Región \mathcal{B} para un determinado problema	104

Ilustración 19-4: Región \mathcal{C} para un determinado problema	104
Ilustración 20-4: Región \mathcal{D} para un determinado problema	105
Ilustración 21-4: Representación cualitativa para $x_1(0) = 1000$ y $x_2(0) = 500$	105
Ilustración 22-4: Plano de fase para el sistema linealizado	109
Ilustración 23-4: Solución para $x_1(t_0) = 800, x_2(t_0) = 1400$ en $0 \leq t \leq 15$	110
Ilustración 24-4: Solución del sistema con Runge-Kutta	110
Ilustración 25-4: Solución en $x_1(0) = 2500/3, x_2(0) = 1500$ en $0 \leq t \leq 4$	111
Ilustración 26-4: Comportamiento de las trayectorias	113

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: CÓDIGO DE SIMULACIÓN PARA EL SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

RESUMEN

En este trabajo se expone el estudio y análisis de las soluciones del modelo de Lotka-Volterra con el uso del análisis cualitativo y numérico con el método de Runge Kutta de cuarto orden. Con el fin de efectuar el estudio y análisis de este modelo se utilizaron conceptos y resultados del análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales para así examinar: el comportamiento de las trayectorias del sistema, la estabilidad y clasificación de los puntos de equilibrio que tiene el sistema. Para ello se incluye una breve exposición del análisis cualitativo a partir de la información bibliográfica referenciada más relevante. Para implementar el método de Runge Kutta de cuarto orden y así hallar soluciones aproximadas al modelo de Lotka-Volterra usamos el software MATLAB, que nos permitió: programar el método y examinar el comportamiento de las soluciones con su respectivo plano de fase de manera ilustrativa, específica y certera. Estos análisis son aplicados sobre un determinado problema que describe la interacción entre presas y depredadores que utiliza el sistema de Lotka-Volterra para así explicar los diferentes comportamientos de las soluciones que presente el problema en cierto período de tiempo. Esto con el fin de sustentar los análisis realizados en una aplicación. Se concluye que para analizar el comportamiento del modelo de Lotka-Volterra no es necesario obtener su solución explícita. Gracias al análisis cualitativo y a través de un método numérico es posible llegar a respuestas similares del sistema sin conocer su solución explícita. Se recomienda considerar también el plano de fase para determinar el tipo de trayectoria que tiene la solución del sistema, y continuar el estudio usando estos métodos para estudiar otro tipo de modelos, en particular el de Lotka-Volterra para dos especies en competencia.

Palabras clave: <ANÁLISIS CUALITATIVO>, <RUNGE KUTTA>, <LOTKA-VOLTERRA>, <PUNTOS DE EQUILIBRIO>, <PRESA DEPREDADOR>, <ESTABILIDAD>.

0767-DBRA-UTP-2023



ABSTRACT

This work presents the study and analysis of the solutions of the Lotka-Volterra model with the use of qualitative and numerical analysis with Runge Kutta RK4 Method. In order to carry out the study and analysis of this model, concepts and results of qualitative analysis of systems of differential equations were used to examine: the behavior of the system trajectories, the stability and classification of the equilibrium points of the system. For this purpose, a brief exposition of the qualitative analysis is included from the most relevant referenced bibliographic information. MATLAB software was used to implement the Runge Kutta RK4 Method and thus find approximate solutions to the Lotka-Volterra model, which allowed us to: program the method and examine the behavior of the solutions with their respective phase plane in an illustrative, specific and accurate way. These analyses are applied to a given problem describing the interaction between prey and predators using the Lotka-Volterra system to explain the different behaviors of the solutions presented by the problem in a certain period of time, to support the analysis performed in an application. It is concluded that to analyze the behavior of the Lotka-Volterra model it is not necessary to obtain its explicit solution. Thanks to the qualitative analysis and through a numerical method it is possible to arrive at similar responses of the system without knowing its explicit solution. It is recommended to consider the phase plane to determine the type of trajectory that has the solution of the system, and to continue the study using these methods to study other types of models, in particular the Lotka-Volterra model for two competing species.

Keywords: <QUALITATIVE ANALYSIS>, <RUNGE KUTTA>, <LOTKA-VOLTERRA>, <BALANCE POINTS>, <PREDATOR 1PRAY>, <STABILITY>.

0767-DBRA-UTP-2023



Dra. Nanci M. Inca Ch. Mgs

0602926719

INTRODUCCIÓN

En este proyecto se utilizan varias herramientas matemáticas para estudiar y analizar de manera cualitativa y numérica un determinado problema de la dinámica poblacional. La motivación para la realización de este tema fue la respuesta de la pregunta, cómo era posible determinar la naturaleza de las soluciones de un modelo sin resolverlo, además también lo fue la intriga de conocer cómo es el comportamiento dentro de un sistema ecológico donde conviven únicamente dos especies (depredador-presa), y el conocer si podría existir un equilibrio para el sistema.

El modelo que describe este fenómeno es el de Lotka-Volterra, un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden que considera dos especies en un mismo ecosistema, donde la especie dominante tiene dependencia de la especie presa, y esta última tiene un abastecimiento ilimitado proporcionado por el mismo ecosistema donde habitan.

Comúnmente existen sistemas no lineales que son difíciles de resolverlos o en ocasiones no es posible llegar a obtener su solución explícita con los diferentes métodos de resolución existentes, es por eso que, surgen otras alternativas como estudiarlo cualitativamente, o emplear los métodos numéricos que nos ayudan a aproximar la solución de la ecuación o el sistema para así también obtener un análisis y predicción de estos.

Para este proyecto se realiza un estudio cualitativo y numérico de los sistemas de ecuaciones diferenciales, para así usar ambos métodos sobre sistema de Lotka-Volterra. Para el capítulo I se da respuesta al por qué se realizó este trabajo de investigación, es decir, se expone el problema de investigación. En el capítulo II se presenta una introducción básica de las ecuaciones y sistema de ecuaciones diferenciales para después mostrar el análisis cualitativo y numérico usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

El capítulo III denominado Marco Metodológico expone a detalle los métodos cualitativos y el método numérico a utilizar sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales. En el capítulo posterior se utiliza la documentación realizada en los capítulos II y III sobre el sistema de Lotka-Volterra para analizar las soluciones de forma cualitativa y numérica.

Con la finalidad de completar este análisis se realizó una simulación numérica del sistema de Lotka-Volterra para diferenciar diferentes escenarios entre el depredador y la presa, cumpliendo así con los objetivos de la investigación, descritos en el primer capítulo.

Por último en el capítulo V, se detallan las conclusiones y recomendaciones obtenidas al realizar este proyecto de investigación usando los métodos cualitativos y numéricos sobre el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes

La necesidad de mantener un equilibrio para la conservación de varias especies condujo a los biólogos a estudiar la dinámica de poblaciones. El modelado de la población fue de interés para los biólogos en el siglo XX cuando el biólogo Raymond Pearl notó la presión sobre medios limitados de sustento debido al aumento de las poblaciones humanas en algunas partes de Europa, por este motivo se forman las ecuaciones de Lotka-Volterra que surgieron por separado con las obras del físico Alfred J. Lotka, quien desarrolló ecuaciones diferenciales emparejadas que mostraban el efecto de un parásito en su presa en 1925, y por el matemático Vito Volterra en 1926 quien equilibra la relación entre dos especies independiente de Lotka.

Ambos crearon un modelo muy conocido para el estudio de la dinámica de los sistemas en los que se ven implicadas dos especies, una depredadora y una presa, donde la especie depredadora tiene dependencia alimenticia únicamente de la especie presa, y la cantidad de los depredadores aumenta o disminuye conforme sea el número de sus presas.

Matemáticamente es posible representar dichas interacciones entre ambas especies con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y \end{cases} \quad (1.1)$$

Donde $x(t), y(t)$ determinan las poblaciones de las presas y la población de los depredadores respectivamente en un instante de tiempo t , las constantes α, β, γ y δ son todas positivas y ambas ecuaciones no dependen explícitamente de la variable t solamente de la población en un tiempo inicial definido $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Enunciado del problema

A menudo existen sistemas no lineales cuyas soluciones existen, pero son difíciles de resolver o no se pueden obtener explícitamente con los métodos de resolución existentes. Por lo tanto, surgen otras alternativas como estudiar cualitativamente las ecuaciones diferenciales o emplear métodos

numéricos para aproximar la solución. De esta manera, es posible obtener análisis y predicciones de estos sistemas. Pero con esto surge la pregunta, es posible realizar una predicción más precisa del comportamiento de soluciones de sistemas no lineales sin la necesidad de obtener una solución analítica.

1.3. Justificación

Los sistemas no lineales son comunes en diversas áreas, como la biología, la física, la ingeniería, la economía, entre otras áreas, y pueden ser difíciles de analizar analíticamente. Los métodos numéricos son útiles para obtener soluciones aproximadas de sistemas no lineales, mientras que los métodos cualitativos permiten visualizar y analizar el comportamiento del sistema. La combinación de ambos métodos permite obtener una comprensión completa y fiable del sistema, lo que es importante para la toma de decisiones y la planificación en diversas áreas.

Por lo tanto, la implementación de métodos cualitativos y numéricos en la modelización de sistemas no lineales es una herramienta valiosa para abordar este tipo de problemas de manera efectiva en diversas áreas.

1.4. Objetivos

1.4.1. *Objetivo general*

Analizar el comportamiento dinámico de un sistema depredador-presa a través de las ecuaciones de Lotka-Volterra, utilizando tanto métodos cualitativos como el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Los métodos cualitativos permitirán una comprensión visual de la dinámica del sistema, mientras que el método numérico nos permitirá obtener soluciones aproximadas del modelo. La combinación de ambos métodos nos ayudará a predecir el comportamiento del sistema y obtener una comprensión más profunda de las interacciones entre las poblaciones en el ecosistema.

1.4.2. *Objetivos específicos*

Con la finalidad de cumplir con el objetivo general de la investigación se propone lo siguiente:

1. Analizar métodos cualitativos y el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden aplicados al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Estudiar las ecuaciones de Lotka-Volterra y su uso en el modelaje de problemas de dinámica poblacional.
3. Implementar ambos métodos para predecir la dinámica del sistema presa-depredador.

4. Resolver un sistema presa-depredador particular usando los métodos considerados.
5. Combinar los resultados obtenidos con los métodos propuestos aplicados sobre el modelo presa-depredador.

1.5. Fuentes de investigación

Para llevar a cabo la elaboración del trabajo de investigación se consideraron fuentes de información como: artículos, libros, tesis, blogs y archivos digitales, los cuales fundamentan la documentación realizada sobre: las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, los métodos cualitativos, el método de Runge-Kutta de cuarto orden y por último, el modelo de Lotka-Volterra.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

Los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales permiten describir situaciones cotidianas, por lo que para entenderlos, en este capítulo, empezamos con definiciones y resultados esenciales y necesarios sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales para así poder introducirnos al estudio del comportamiento de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales mediante el análisis cualitativo y la aproximación de estas usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Para documentar las bases de la teoría más relevante sobre las ecuaciones diferenciales, se utilizan las definiciones, y resultados tomados de la bibliografía considerada para este proyecto.

Principalmente se utilizan las definiciones y resultados de (Zill y Cullen, 2008, pp. 4-45) sobre las ecuaciones diferenciales, los textos de (Nagle et al., 2005, pp. 6-23) y (Blanchard et al., 1999, pp. 35-92) serán de gran aporte al momento de documentar los campos de direcciones y el método de isoclinas para estudiar ecuaciones diferenciales de manera cualitativa. Por último se toma en cuenta la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad Local del texto de (Ross, 1981, pp. 461-487).

2.1. Bases teóricas: ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o varias variables dependientes con respecto a una o varias variables independientes, y se puede clasificar por: linealidad, orden y tipo.

Definición 2.1. Se llama **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** a aquella ecuación que vincula la variable independiente x , la función incógnita $y = y(x)$ y sus respectivas derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ (hasta el orden n inclusive), es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

como por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 2x, \quad \frac{dx}{dt} = 3x - t.$$

La palabra “ordinaria” hace referencia al hecho de que en la ecuación solo aparecen derivadas ordinarias, y no existen derivadas parciales.

Se llama **ecuación diferencial parcial (EDP)** a aquella ecuación en la que aparece la función incógnita $y = y(x)$, dependiente de las variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n y sus derivadas

parciales hasta el orden n inclusive.

Supóngase que u es la variable dependiente de las variables x e y , entonces la forma general de esta ecuación diferencial parcial sería

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Por ejemplo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 4.$$

Definición 2.2. Las ecuaciones diferenciales se caracterizan por su **orden**, se refiere a la mayor derivada comprendida en una ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3, \text{ es una ecuación de segundo orden.}$$

$$\frac{d^5 x}{dt^5} - 4 = \frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ es una ecuación de quinto orden.}$$

Una EDO de n -ésimo se la puede denotar de la siguiente forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

con F siendo función de $n + 2$ variables. Además cuando se requiere resolver una EDO para la derivada más alta se tiene la siguiente forma denominada **forma normal**

$$\frac{d^n x}{dy^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}), \quad (2.2)$$

donde f es una función de sus $n + 2$ argumentos $(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$.

Definición 2.3. Una EDO de n -ésimo orden se dice que es **lineal** cuando tiene la siguiente forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (2.3)$$

Es decir cuando la variable dependiente “ y ” y sus derivadas aparecen sólo en combinaciones aditivas de sus primeras potencias (la potencia de la variable dependiente es 1), además los coeficientes que acompañan a las derivadas $(a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x))$ son funciones continuas de la variable independiente.

Ejemplo 2.1.

$$17 \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} + 12 \frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Una EDO de n -ésimo orden se dice que es **no lineal** cuando no cumple con la forma de una EDO

lineal es decir funciones no lineales de “y” y de sus derivadas aparecen en una ecuación no lineal

Ejemplo 2.2.

$$\cos y + y' = 3x, \quad e^y - 4 \frac{dy}{dx} = y^2.$$

2.2. Soluciones y problema de valor inicial

Tal y como se menciona en (Zill y Cullen, 2008, pp. 14-21) se pueden encontrar soluciones tanto explícitas como implícitas para una ecuación diferencial ordinaria de orden n -ésimo, estas son conocidas como soluciones simples de la ecuación diferencial en cuestión, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones.

2.2.1. Soluciones de una ecuación diferencial

Definición 2.4. Sea f una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que tiene n -ésima derivada para todo $x \in I$, entonces f se llama **solución explícita** de la ecuación diferencial (2.1) en el intervalo I si cumple con dos condiciones

$$F [x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)],$$

debe de estar definida $\forall x \in I$, y además el reemplazo de la función $f(x)$ junto con sus respectivas derivadas en (2.1) nos da una identidad sobre el intervalo I , es decir se tendrá

$$F [x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0 \quad \forall x \in I.$$

En algunos casos para resolver las ecuaciones diferenciales no siempre se proporciona una solución explícita de la ecuación, sino que a veces tendremos que plantear una solución definida en forma implícita. La relación del tipo $G(x, y) = 0$ se llama **solución implícita** de una EDO con la forma (2.1), sobre el intervalo I , si define por lo menos una solución explícita sobre I que satisfaga la relación G y la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.3. Una solución implícita sería considerar la relación $x^2 + y^2 - 16 = 0$, la cual es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

en el intervalo $(-4, 4)$, ya que al diferenciar dicha relación de forma implícita se obtiene

$$2x + 2y \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Notemos que $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ donde las funciones $y_1(x) = \sqrt{16-x^2}$, y $y_2(x) = -\sqrt{16-x^2}$, satisfacen $x^2 + y^2 - 16 = 0$ siendo así soluciones explícitas sobre I .

Una solución implícita para la ecuación diferencial $dy/dx = -x/y$ viene dada por $x^2 + y^2 = 16$. Más generalmente, la relación $x^2 + y^2 - c = 0$, comprueba de manera formal $y' = -x/y$, para cualquier c constante, siendo c un parámetro y donde, $x^2 + y^2 - c = 0$ se denomina familia de soluciones de un parámetro.

2.2.1.1. Familia de soluciones

Definición 2.5. Al resolver la EDO $F(x, y, y') = 0$ se tiene una solución con c una constante arbitraria. Una solución con una sola constante representa un conjunto de soluciones llamadas **familia de soluciones** de $G(x, y, c) = 0$.

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de n -ésimo orden se obtiene una familia de soluciones de n parámetros $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, esto quiere decir que puede tener infinitas soluciones correspondientes a el/los parámetro/os. Una solución de una ecuación diferencial libre de constantes arbitrarias se denomina solución particular.

En ocasiones, una ecuación diferencial posee una solución que no puede obtenerse mediante la especificación de ninguno de los parámetros de la familia de soluciones, cuando se tiene una de este tipo se la llama solución singular.

2.2.2. Problemas de valor inicial

Una EDO acompañada de una condición inicial se le denomina problema de valor inicial (PVI) o de Cauchy. Consideremos una ecuación de primer orden con la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

donde f es continua para todo par x, y en algún dominio D ; y sea (x_0, y_0) un punto en el dominio D , entonces el problema de valor inicial se describe como encontrar una solución “ y ” de la ecuación diferencial la cual debe estar definida un intervalo que contenga al punto x_0 y cumpla con la

condición inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

A esto se entiende como encontrar una solución de n -ésimo orden (2.1) en cierto intervalo I que contiene a x_0 y satisfaga las n condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}.$$

Donde $y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)}$ son constantes en \mathbb{R} y se los conocen como condiciones iniciales.

2.3. Campo de direcciones e isoclinas

Existen EDO's cuya solución explícita es complicada de determinar, algunas como ya sabemos tienen soluciones que pueden encontrarse en forma analítica (soluciones de forma explícita o implícita encontradas con un método específico). Otras tienen soluciones que no pueden ser resueltas en forma analítica; afirmar la existencia de una solución de la ecuación diferencial, no afirma que exista un método que genere la solución. Supongamos una ecuación $y' = f(x, y)$ la cual posee solución simple, pero no puede ser resuelta de manera analítica, aunque esto suceda, la misma puede indicarnos detalles sobre el comportamiento de su solución simple.

A menudo pueden responderse ciertas preguntas cualitativas sobre las propiedades que presentan las soluciones: cómo se comporta una solución alrededor de un punto en particular o cuál es el comportamiento de una solución cuando la variable independiente crece o decrece infinitamente. Analizar una ecuación diferencial, de manera cualitativa, nos permite determinar el comportamiento que tiene una curva solución sin resolverla, a esto se lo denomina como análisis cualitativo de la ecuación diferencial (Nagle et al., 2005, p. 16).

2.3.1. Campos de direcciones

Definición 2.6. Si se evalúa a f sobre una cuadrícula dentro del plano xy y al trazar un elemento lineal en cada punto (x, y) con pendiente $f(x, y)$, entonces el conjunto de estos elementos lineales se denominará campo de direcciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

El campo de direcciones señala la forma de una familia de curvas solución para la ecuación diferencial donde es posible observar ciertos aspectos cualitativos de las soluciones (regiones dentro del plano donde una solución presenta un comportamiento inusual). Una sola curva solución que

atraviese un campo de direcciones deberá seguir el patrón de flujo del campo; será tangente a un elemento de línea cuando interseque un punto dentro de la cuadrícula.

Una EDO de primer orden formula una pendiente donde f se encuentra definida para todo punto del plano xy , es decir indica la dirección que la solución posee en cada punto del plano (Nagle et al., 2005, p. 17-20).

2.3.1.1. *Monotonía del campo de direcciones*

Una propiedad de la primera derivada en el campo de direcciones nos dice que:

- Si $y' > 0$ para toda x en I , entonces la función $y = y(x)$ será creciente en I .
- Si $y' < 0$ para toda x en I , entonces la función $y = y(x)$ será decreciente en I .

La representación a mano de los campos de direcciones para una ecuación diferencial resulta ser simple para ecuaciones simples pero si se consideran ecuaciones más complejas, su representación se dificulta. Por suerte existen programas de computadora que permiten graficar las soluciones. Pero antes de estos programas se empleaba el método de isoclinas para realizar un trazado de campos de direcciones fácilmente.

2.3.2. *Método de isoclinas*

Definición 2.7. Para la ecuación diferencial de la forma $y' = f(x,y)$, y $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, todo miembro de la familia de curvas $f(x,y) = c$ se llama isoclina. La constante c se la puede ver como el valor que toma la pendiente y' de cada curva solución al cruzar la isoclina.

Al usar el método de isoclinas y trazar la gráfica del campo de direcciones se trazan segmentos de línea pequeños que tienen pendiente c , a lo largo de las isoclinas $f(x,y) = c$, donde solo los segmentos trazados corresponderán a formar el campo de direcciones de la ecuación.

En ocasiones las isoclinas no serán ecuaciones de una recta, sino parábolas, hipérbolas, elipse, circunferencia, entre otros. Cuando las isoclinas son difíciles de representar o interpretarlas, el método se torna complejo de emplear.

2.3.3. *Representación gráfica*

Para la realización y representación de los siguientes ejemplos se utiliza el software matemático MAPLE y los comandos *DEplot* y *dfieldplot*.

1. Primero vamos a emplear el método de isoclinas para graficar el campo de direcciones del

siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + x = y, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Las isoclinas serán las curvas de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x,y)$ obtenidas al realizar $f(x,y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces para el problema dado serán las curvas $y - x = c$, donde c se interpreta como el valor de la pendiente dy/dx de cada curva solución al cruzar la isocлина.

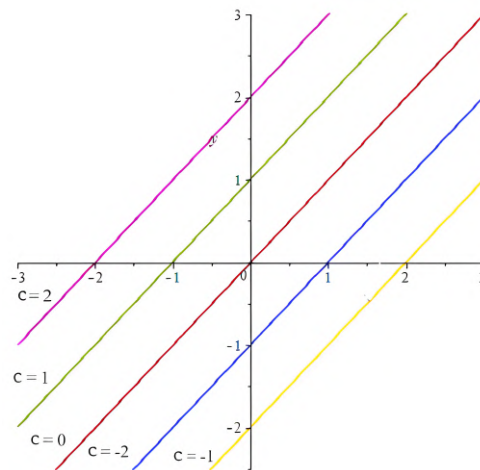


Ilustración 1-2: Isoclinas para las constantes $-2, -1, 0, 1, 2$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

La gráfica muestra las isoclinas cuando c toma los valores $-2, -1, 0, 1$ y 2 , con esto podemos determinar el campo de direcciones de la ecuación diferencial al trazar pequeños segmentos con pendiente c a lo largo de cada isocлина determinada, estos segmentos son parte del campo de direcciones asociados a la ecuación diferencial.

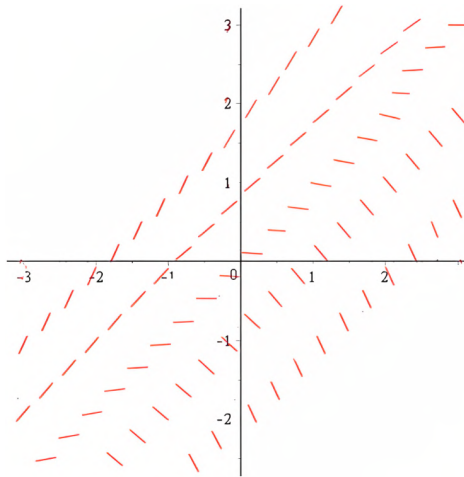


Ilustración 2-2: Campo de direcciones con las isoclinas propuestas

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Por lo tanto, al determinar un mayor número de isoclinas se tendrá un campo de direcciones relacionado a la ecuación diferencial, de donde se podrá determinar el comportamiento de la curva solución en la condición inicial dada

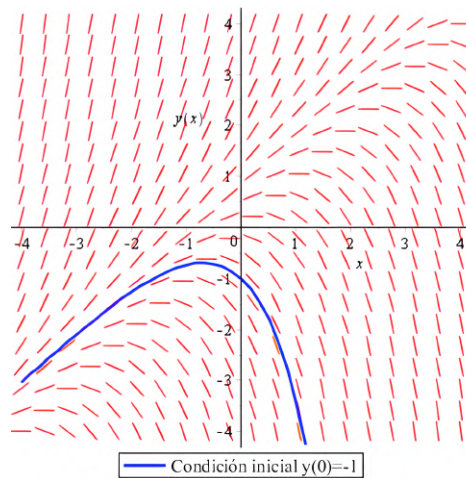


Ilustración 3-2: Campo de direcciones completo

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

2. Ahora graficamos el campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = x - 2y$ junto con cuatro curvas solución que pasen por los respectivos puntos $(0, 2)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ y $(0, -2)$.

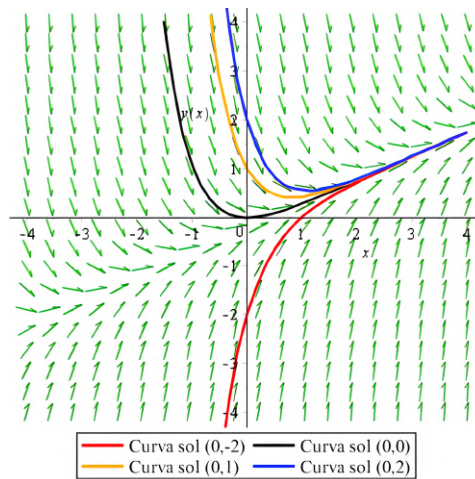


Ilustración 4-2: Campo de direcciones para cuatro curvas solución

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

2.4. Teorema de existencia y unicidad local para problemas de valor inicial

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo se documentará la demostración del Teorema de existencia y unicidad local (Ver: Ross, 1981, pp. 461-487) pero también para tener una mejor comprensión del mismo se utiliza el texto de (Coddington, 1976, pp. 211-258) junto con los blogs de Omar Gonzales (2022a), (Omar Gonzales (2022b)) y (Omar Gonzales (2022c)).

Con el siguiente ejemplo se observa una situación que nos ayudará a entender la importancia del Teorema de existencia y unicidad local cuando no se cumplen las hipótesis establecidas por el mismo.

Ejemplo 2.4. Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Al utilizar el método de separación de variables se tiene

$$y = \frac{1}{4}(2x + c)^2,$$

y resolviendo el PVI se tiene

$$y = x^2.$$

Como sabemos la función $y = x^2$ es continua en todo el plano \mathbb{R}^2 , pero esta no es la única solución de la ecuación diferencial que satisface la ecuación (2.4) ya que si consideramos la función constante $y = 0$ que también es continua, esta también es una solución de la ecuación diferencial que cumple

con el problema (2.4) de modo que la unicidad no se puede garantizar.

Al considerar un problema de valor inicial se deben cumplir con varias condiciones pero con esto surge la pregunta: cómo sabemos que se puede encontrar la solución de una ecuación que cumpla con esa condición. Para responder a esta pregunta surge el Teorema de Existencia y Unicidad Local para PVI. Antes de enunciar el Teorema hay que tener en cuenta algunas definiciones y resultados que nos ayudarán al momento de realizar la demostración del mismo.

2.4.1. Conceptos previos

Comencemos con las siguientes definiciones que serán utilizadas en la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad Local para PVI.

Definición 2.8. Se dice que $f(x, y)$ es Lipschitz continua respecto a la segunda variable en un dominio D (o que satisface una condición de Lipschitz con respecto a y en D), si existe $L > 0$ tal que para todo par de puntos $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ se tiene que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Definición 2.9. La sucesión de funciones $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ para x tal que $|x - x_0| \leq \delta$ definida como

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

se denomina iteraciones de Picard (o aproximaciones sucesivas).

Con el siguiente ejemplo vemos como, al hacer uso de las iteraciones de Picard es posible hallar una solución para un PVI.

Ejemplo 2.5. Encontrar la solución al PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Al adaptar las iteraciones de Picard en este problema se tiene la siguiente forma

$$y_0 = 1 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad f(x, y) = y$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Y cuando hacemos que $n \rightarrow \infty$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo que $y_n(x) \rightarrow y(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$, es decir $y(x) = e^x$ es solución al PVI ya que al calcular la ecuación integral obtenemos

$$1 + \int_0^x y(t) dt = 1 + (e^t)_0^x = 1 + e^x - 1 = e^x = y(x).$$

Por lo tanto $y(x) = e^x$ es solución a la ecuación integral y al PVI.

Pero, será que esto siempre ocurre. Esto lo veremos a continuación; en general encontrar una fórmula para las iteraciones de Picard es complicado, por lo que antes de dar respuesta a la pregunta, hay que tener en cuenta la siguiente definición.

Definición 2.10. Una sucesión de funciones $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que converge uniformemente a $y(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si, $\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $|y_n(x) - y(x)| < \varepsilon$, para cualquier $x \in [a, b]$.

Enunciamos el siguiente resultado que se fundamenta en el Teorema de la convergencia dominada, el cuál será de ayuda para determinar la convergencia de las iteraciones de Picard, y su demostración la podemos encontrar en (Bartle, 2014, p. 57).

Teorema 2.1. Si $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $y(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y $f(x, y)$ es continua en un dominio D tal que $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]$ los puntos $(x, y_n(x)) \in D$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n(x)) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n(x)) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

Si las iteraciones de Picard satisfacen las hipótesis del Teorema (2.1) con $f(x, y)$ continua en un dominio D el cual contiene a los puntos $(x, y_n(x)) \forall n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right] = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) dt, \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, cómo encontramos un dominio D que contenga a la sucesión $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$ para saber esto necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.1. Supongamos que $f(x, y)$ es continua en un rectángulo

$$R = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

que contiene al punto (x_0, y_0) , entonces existe $M > 0$ tal que

$$|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0|, \forall n \in \mathbb{N},$$

con $x \in I_\delta$ donde $I_\delta = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x \leq \delta + x_0; \delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}\}$.

Demostración. Vamos a proceder a realizar la demostración con el método de inducción.

Por hipótesis se tiene $f(x, y)$ es continua en un rectángulo R , entonces f alcanza su máximo (su mínimo) en R denotado como $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$.

Como $y(x_0) = y_0$ (es una constante) entonces y_0 es continua en I_δ , por lo que se tiene que

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt,$$

es continua en I_δ , además

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right|, \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt, \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = M|x - x_0|. \end{aligned}$$

Por lo que $y_1(x)$ es continua y se encuentra acotada por $M|x - x_0|$ (caso para $n = 1$).

Supongamos ahora que $y_{k-1}(x)$ es continua en I_δ y además $|y_{k-1}(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|$ (hipótesis de inducción caso para $n = k - 1$), entonces $f(x, y_{k-1}(x))$ es continua en I_δ por lo que

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt,$$

es continua en I_δ , además

$$\begin{aligned} |y_k(x) - y_0(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt \right|, \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{k-1}(t))| dt, \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = M|x - x_0|. \end{aligned}$$

Es decir, para $n = k$ se cumple la continuidad y además $|y_k(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|$, por lo que, con el método de inducción se cumple el resultado. \square

Hemos probado que las iteraciones de Picard (2.5) existen, tienen derivadas continuas y satisfacen la condición de $|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ en el intervalo I_δ .

Observación 2.1. Dado que $|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ y como se sabe $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ es decir $|x - x_0| \leq \delta$, entonces se tiene $M|x - x_0| \leq M\delta \leq b$, es decir $|y_n(x) - y_0| \leq b$.

Ahora veremos un resultado (denominado *Criterio mayorante de Weierstrass*) que nos ayudará a demostrar la convergencia uniforme de una solución para el PVI (2.6), pero antes daremos la definición de convergencia uniforme para series y para ello se necesita la definición de una suma parcial.

Definición 2.11. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en un dominio D , donde se denomina como suma parcial n -ésima $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a la serie de funciones

$$\begin{aligned} S_1(x) &= f_1(x), \\ S_2(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ S_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \end{aligned}$$

donde a $f_n(x)$ se le denomina n -ésimo término de la serie.

Definición 2.12. Una serie de funciones reales $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definida en un dominio real D , converge uniformemente en D si la sucesión de de sumas parciales $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en

D , es decir, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ entonces

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D,$$

o lo que es equivalente, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ se tiene que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon \quad x \in D.$$

Lema 2.2. (Criterio mayorante de Weierstrass.) Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de variable real (o compleja) definidas en un dominio D , donde para cada f_n existe una constante positiva M_n tal que:

- $|f_n(x)| \leq M_n, \forall n \geq 1, \forall x \in D$,
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D .

Demostración. Se tiene por hipótesis que para todo x en D

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ también converge esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente por lo que existe una función $f(x)$ de límite puntual de la serie de funciones tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow |f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right|.$$

Como deseamos ver que la serie converge uniformemente entonces escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ la serie sea convergente. Notemos que

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Luego, por hipótesis se tiene

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces al tomar $\varepsilon = \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ este se hace tan pequeño como se desee

eligiendo un N suficientemente grande, así

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D . □

Con estas definiciones y resultados previos podremos abordar la demostración para la parte de la existencia de una solución para el PVI del Teorema De Existencia y Unicidad Local para PVI.

2.4.2. Enunciado del teorema

Teorema 2.2. (De Existencia y Unicidad Local para PVI.) Sean D un dominio del plano xy , considere el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Siendo f una función continua en el dominio D que satisface una condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable y en D ; y sean $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$, donde

$$R = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

que pertenece a D y contiene al punto (x_0, y_0) ; entonces el problema con valor inicial tiene una única solución $y(x)$ en el intervalo $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, con $\delta = \min \{a, \frac{b}{M}\} > 0$.

Consideremos el PVI (2.6) con f una función que satisface las condiciones de la hipótesis del Teorema, vamos entonces a transformar el problema de encontrar la solución al PVI en un problema equivalente, es decir, si se encuentra una solución a un problema equivalente entonces encontraremos una solución al PVI. Supongamos que y es una solución de (2.6), entonces al integrar sobre $[x_0, x]$ se tiene

$$\int_{x_0}^x \frac{dy(t)}{dx} dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Del lado izquierdo de la igualdad por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Donde $y(x)$ es una ecuación integral ya que existe una igualdad entre una función desconocida y la

integral de una función f que depende de x e $y(x)$.

Recordemos, entonces el lema que asocia un PVI con una solución a la ecuación integral.

Lema 2.3. *Sea $f(x, y)$ continua en un dominio D que contenga a (x_0, y_0) , entonces $y(x)$ es solución al problema de valor inicial (2.6) sí y solo sí es solución a la ecuación integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.7)$$

Demostración. \Rightarrow) La demostración en el sentido progresivo se realizó anteriormente, si $y(x)$ es solución al PVI todo el proceso anterior nos dice que $y(x)$ será solución a la ecuación integral.

\Leftarrow) Supongamos que y_1 es solución a la ecuación integral (2.7), entonces

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que el lado derecho es derivable y

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \right) = f(x, y_1(x)),$$

por lo que y_1 es solución de la ecuación diferencial, donde además

$$y_1(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y_1(t)) dt = y_0,$$

teniendo entonces que y_1 es solución al PVI. □

Por lo tanto para demostrar este Teorema probaremos que $y(x)$ satisface (2.7) y que esta solución es única.

2.4.3. Demostración

Observación 2.2. A lo largo de toda la demostración consideraremos el intervalo $I_\delta = [x_0, x_0 + \delta]$; argumentos similares sirven para verificar la demostración en el intervalo $[x_0 - \delta, x_0]$.

Con el Lema (2.1) se tiene que todas las funciones $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se encuentran contenidas en las rectas $y_0 - M(x - x_0) \leq y_n(x) \leq y_0 + M(x - x_0)$, y este será entonces el dominio donde veremos que la sucesión de iteraciones de Picard converge uniformemente a una función.

Como $y_1(x), y_0(x)$ son continuas en I_δ se tiene que $|y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|$, con esto vamos a ver que

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_\delta. \quad (2.8)$$

Esto lo demostramos con el método de inducción. Cuando $n = 1$ la desigualdad se cumple como ya se mencionó en el lema (2.1); ahora supongamos que para $n = k - 1$ (hipótesis de inducción) se verifica

$$|y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_0|)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{ML^{k-2}|x - x_0|^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (2.9)$$

Y queremos llegar a ver que para $n = k$ se cumple

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!},$$

entonces, al realizar un proceso regresivo se sabe que

$$\begin{aligned} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))) dt \right|, \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))| dt. \end{aligned}$$

Por el lema (2.1) se tiene que $|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ para todo $x \in I_\delta$, entonces al aplicar la hipótesis de ser f una función Lipschitz continua con respecto a la segunda variable (definición (2.8)), donde se tiene

$$|f(t, y_{k-1}(x)) - f(t, y_{k-2}(x))| \leq L|y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x)|.$$

Luego por la monotonía de la integral tenemos lo siguiente

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L|y_{k-1}(t) - y_{k-2}(t)| dt.$$

Con la hipótesis de inducción (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| &\leq L \int_{x_0}^x \frac{ML^{k-2}}{(k-1)!} |t - x_0|^{k-1} dt, \\ &= \frac{ML^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^{k-1} dt, \\ &= \frac{ML^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{|t - x_0|^k}{k} \right) \Big|_{x_0}^x, \\ &= \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!}.$$

Con esto se tiene lo que se quería demostrar. Por lo tanto las iteraciones de Picard cumplen con la

desigualdad $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_\delta = [x_0, x_0 + \delta]; \delta = \min \{a, \frac{b}{M}\}$.

Observación 2.3. Dado que $|x - x_0| \leq \delta$ se tiene

$$\frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} = \frac{ML^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} \delta^n = \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^n}{n!}.$$

Por lo que (2.8) implica

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_\delta. \quad (2.10)$$

2.4.3.1. Demostración de la existencia

Al momento de considerar la serie de constantes positivas en el lado derecho de (2.10) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^n}{n!} = \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L\delta)^n}{n!} = \frac{M}{L} (e^{L\delta} - 1) < \infty,$$

es decir que la serie converge a $\frac{M}{L} (e^{L\delta} - 1)$.

Esto implica por el resultado de Weierstrass (Lema (2.2)), que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ converge uniformemente en I_δ , en particular, $y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ también converge uniformemente el mismo intervalo.

Esto último por definición de convergencia de una serie (Definición (2.12)), significa que la sucesión de sumas parciales converge uniformemente en I_δ

$$\begin{aligned} S_1 &= y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) = y_1(x), \\ S_2 &= y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) = y_2(x), \\ &\vdots \\ S_n &= y_0 + \sum_{i=1}^n (y_i(x) - y_{i-1}(x)) = y_n(x). \end{aligned}$$

Teniendo así que la n -ésima suma parcial será la n -ésima iteración de Picard.

Por lo tanto, la sucesión de iteraciones de Picard $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en I_δ a una función $y(x)$.

Como último paso para garantizar la existencia de la solución vamos a ver que, el límite de las iteraciones de Picard $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la ecuación $dy/dx = f(x, y)$ en el intervalo I_δ y además se cumple $y(x_0) = y_0$.

Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que cada iteración $y_n(x)$ satisface $|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ en I_δ (Lema

(2.1)), se tendrá que $|y(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ en I_δ , por lo que la función $f(x, y(x))$ se encuentra bien definida sobre el intervalo I_δ donde como f es una función Lipschitz continua se tiene

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_n(x))| \leq L|y(x) - y_n(x)|, \quad x \in I_\delta. \quad (2.11)$$

Por definición de convergencia uniforme se tiene que, dado $\varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon/L$ para todo $n > N$ y todo $x \in I_\delta$, teniendo

$$L|y(x) - y_n(x)| < L\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = \varepsilon, \forall n > N, x \in I_\delta. \quad (2.12)$$

Entonces, de (2.11) y (2.12) se tiene que la sucesión de funciones $f(x, y_n(x))$ con $n = \{1, 2, \dots\}$ es continua y converge uniformemente a $f(x, y)$ en I_δ , y al usar (2.1) se tiene

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) dt, \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Es decir, la función límite de las iteraciones de Picard $y_n(x)$ satisface

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in I_\delta. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, $y(x)$ satisface la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ sobre el intervalo I_δ . \square

Con esto hemos demostrado *la existencia*, ya que la función $y(x)$ a la que convergen uniformemente las iteraciones de Picard sobre $I_\delta = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x \leq \delta + x_0; \delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}\}$ va a ser solución a la ecuación integral, por lo que será solución al PVI del Teorema (2.2).

Ahora nos queda probar la parte de la unicidad del Teorema, para ello se procederá de manera clásica, suponiendo que existen dos funciones que son soluciones del mismo PVI, y con ello demostrar que ambas funciones solución son las mismas.

2.4.3.2. Demostración de la unicidad

Hay que tener en cuenta que la continuidad de f ya dada por hipótesis del Teorema (2.2) es suficiente para garantizar la existencia de la solución al PVI pero no es suficiente para garantizar su unicidad como la situación tratada en el Ejemplo (2.4)

Supongamos que existe $\bar{y}(x)$ otra función diferenciable con $x \in I_\delta$ tal que

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y}), \\ \bar{y}(x_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces

$$|\bar{y}(x) - y_0| < b, \quad x \in I_\delta. \quad (2.14)$$

Sea x_1 tal que $|\bar{y}(x) - y_0| < b$ para $x_0 \leq x < x_1$ y además $|\bar{y}(x_1) - y_0| = b$. Ahora supongamos que $x_1 < x_0 + \delta$, entonces

$$M_1 = \left| \frac{\bar{y}(x_1) - y_0}{x_1 - x_0} \right| = \frac{b}{x_1 - x_0} > \frac{b}{\delta} \geq M.$$

Por otra parte del Teorema de Valor Medio y del acotamiento de f tenemos que $\exists \alpha$ tal que $x_0 < \alpha < x_1$

$$M_1 = |\bar{y}'(\alpha)| = |f(\alpha, \bar{y}(\alpha))| \leq M,$$

de donde obtenemos una contradicción de suponer que $x_1 < x_0 + \delta$, por lo que $x_1 \geq x_0 + \delta$ y la desigualdad (2.14) se cumple para $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ teniendo, además

$$|\bar{y}(x) - y_0| \leq b, \quad x \in I_\delta. \quad (2.15)$$

Dado que \bar{y} es solución de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ con $x \in I_\delta$ y con la condición inicial $\bar{y}(x_0) = y_0$, entonces por el Lema (2.3) se tiene que \bar{y} satisface la ecuación integral

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt, \quad x \in I_\delta.$$

Con el Método de Inducción mostraremos que

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq \frac{L^n b |x - x_0|^n}{n!}, \quad x \in I_\delta, \quad (2.16)$$

en efecto, para el caso $n = 1$ se cumple

$$|\bar{y}(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y_0)| dt \leq L \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y_0| dt \leq L \int_{x_0}^x b dt \leq Lb |x - x_0|.$$

Para el caso k -ésimo se cumple que

$$|\bar{y}(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{L^{k-1} b |x - x_0|^{k-1}}{(k-1)!}, \quad x \in I_\delta. \quad (2.17)$$

Luego, mostraremos cuando $n = k + 1$

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_k(x)| &= \left| \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt \right) - \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt \right) \right|, \\ &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y_{k-1}(t))] dt \right|, \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt. \end{aligned}$$

Con la condición de Lipschitz de f , se tiene

$$|\bar{y}(x) - y_k(x)| \leq \int_{x_0}^x L |\bar{y}(t) - y_{k-1}(t)| dt.$$

Y con la hipótesis de inducción (2.17) pasa que

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_k(x)| &\leq \int_{x_0}^x L |\bar{y}(t) - y_{k-1}(t)| dt \leq L \int_{x_0}^x \frac{L^{k-1} b |t - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} dt, \\ &\leq \frac{L^k b}{(k-1)!} \left[\frac{|t - x_0|^k}{k} \right]_{x_0}^x = \frac{L^k b (x - x_0)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra (2.16), y dado que $|x - x_0| \leq \delta$ se cumple

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq \frac{b(L\delta)^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{R}, x \in I_\delta. \quad (2.18)$$

Y como se sabe la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b \frac{(L\delta)^n}{n!}$ converge a $be^{L\delta}$ de donde se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{(L\delta)^n}{n!} = 0$. Por lo tanto de (2.18) se tiene que $\bar{y}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ con $x \in I_\delta$. Recordemos que sobre el mismo intervalo $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ y por la unicidad del límite se tiene

$$\bar{y}(x) = y(x), x \in I_\delta.$$

□

Con esto vemos que el PVI posee una solución y además es única sobre el intervalo $I_\delta = [x_0, x_0 + \delta]$, y como se mencionó en la observación (2.2), con argumentos similares el Teorema también se verifica sobre el intervalo $[x_0 - \delta, x_0]$. Por tanto, concluimos que la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ posee una única solución $y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$ en el intervalo $|x - x_0| \leq \delta$.

2.4.4. Ejemplos

Veamos ahora algunos ejemplos donde analizaremos sin resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias con PVI para describir si los ejemplos poseen o no solución, y si la solución es única o

no, con la ayuda del Teorema De Existencia y Unicidad Local.

1. Vamos a considerar primero el siguiente PVI

$$\begin{cases} xy' = 2y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Reescribiendolo en terminología del Teorema (2.2) se tiene

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Con esto vamos a ver si el PVI cumple con las hipótesis del Teorema, para ello determinemos primero si la función $f(x,y)$ es continua en algún rectángulo que contenga al punto $(0,0)$, entonces analicemos la continuidad de la función, para ello determinemos su dominio con el software GEOGEBRA para la representación de este dominio

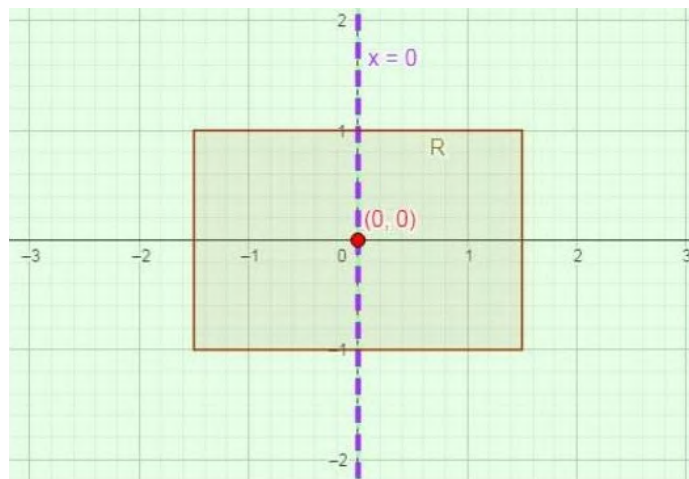


Ilustración 5-2: Rectángulo alrededor del punto $(0,0)$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

$$f(x,y) = \frac{2y}{x} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\},$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} : -1.5 \leq x \leq 1.5; -1 \leq y \leq 1\}.$$

Fijado el punto $(0,0)$ notamos que para el rectángulo dado la función no es continua, en particular para cualquier rectángulo dado que contenga al punto $(0,0)$ la función no va a ser continua ya que no puede tomar el valor $x = 0$, es decir no se encuentra en el dominio de la función $f(x,y) = 2y/x$, por ende no existe ningún rectángulo donde la función sea continua y que contenga al punto $(0,0)$, teniendo que el PVI no nos garantiza la existencia de una solución.

Con respecto a la unicidad de la solución, la función f deberá satisfacer la codición de Lipschitz respecto a y , pero al considerar las funciones $y(x) = x^2$ y $y(x) = 0$, notamos que ambas son soluciones de la ecuación diferencial pero si recordamos $x \neq 0$, por lo que, no se puede garantizar la unicidad para una solución que no esta definida. Por lo tanto no podemos garantizar la existencia de alguna solución para el PVI.

2. Consideremos ahora el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Reescribiendo se tiene

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

De la misma manera veamos si cumple con las hipótesis del Teorema (2.2). Para ello necesitamos determinar si $f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ es continua en algún rectángulo que contenga al punto $(0,0)$; el dominio de la función será

$$f(x,y) = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Para este caso se tiene que el dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 por lo que dado cualquier dominio que contenga a cualquier rectángulo con su condición inicial la función es continua, es decir que existe por lo menos una solución para el PVI, por lo que ahora determinaremos si la solución es única al verificar si el PVI cumple con la condición de Lipschitz, es decir para $(x,y_1), (x,y_2) \in \mathbb{R}^2$ se debe cumplir que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ con $L \in \mathbb{R}$, pero esto no se cumple ya que al considerar $y_2 = 0$

$$|f(x,y_1) - f(x,0)| = \left| \sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{0} \right| = \left| y_1^{1/3} \right| = \left| \frac{y_1}{y_1^{2/3}} \right| = |y_1| \frac{1}{|y_1^{2/3}|}.$$

Al analizar la expresión $\frac{1}{|y_1^{2/3}|}$, esta no se encuentra acotada por ninguna constante en cualquier rectángulo que contenga al punto $(0,0)$ ya que cuando y_1 tome valores cercanos a 0 el valor tiende al infinito. Por lo tanto se puede garantizar la existencia pero no la unicidad.

3. Consideremos el siguiente PVI y determinemos si posee solución y es única

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - |y|, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

El Teorema nos pide analizar la continuidad de la función, para ello determinamos su dominio

$$f(x,y) = 1 - |y| \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Entonces como en el caso anterior el dominio de la función es \mathbb{R}^2 por lo que la función será continua en cualquier dominio que contenga a un rectángulo junto con el punto $(2, 1)$, con esto podemos garantizar que existe al menos una solución para el PVI. Para ver que la solución es única debemos de determinar si la función cumple con la condición de Lipschitz respecto a la segunda variable

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |(1 - |y_1|) - (1 - |y_2|)| = |-|y_1| + |y_2|| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|.$$

Entonces para valores $(x,y_1), (x,y_2) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ siendo $L = 1$, por lo que como se cumple la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable el PVI tiene solución y además es única.

En ocasiones resulta complicado determinar la constante L de Lipschitz pero existe un resultado muy útil que nos permite determinar este valor y además nos verificar que una función satisface la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable.

Teorema 2.3. Sean D un dominio cerrado en \mathbb{R}^2 tal que el segmento de línea que une dos puntos de D se encuentra completamente dentro de D (es decir es un dominio convexo) y $f(x,y)$ una función definida en D tal que $\partial f / \partial y$ existe y está acotada en D entonces f satisface una condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable en D donde la constante L está dada por

$$L = \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|$$

La demostración del Teorema viene dada en el texto de (Ross, 1981, p. 471).

Con todo lo anterior descrito podemos introducirnos al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales son el principal interés dado que el modelo a analizar es un sistema de ecuaciones diferenciales.

2.5. Bases teóricas: sistemas de ecuaciones diferenciales

En esta sección presentaremos algunas definiciones básicas y técnicas para encontrar la solución explícita en casos particulares sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales para después en el siguiente capítulo analizar el comportamiento de sus soluciones con el uso de herramientas cualitativas y el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Los estudios realizados en esta sección

Ejemplo 2.7.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - 5y, \\ \frac{dz}{dt} = -6x + y. \end{cases}$$

2.6. Representación matricial

Consideremos un sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) + by(t), \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad (2.20)$$

En el cual a, b, c, d son constantes este sistema recibe el nombre de *sistema lineal con coeficientes constantes*, donde la palabra lineal, hace referencia a que las ecuaciones para $x'(t)$ y $y'(t)$ tienen solo primeras potencias de las variables dependientes cumpliendo con la forma de (2.19).

Entonces al sistema lineal (2.20) se puede representar con la ayuda de matrices para tenerlo de la siguiente manera

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'.$$

Y la representación del sistema lineal (2.20) en forma matricial queda descrito por

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax(t) + by(t) \\ cx(t) + dy(t) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Definición 2.16. Los sistemas lineales de n ecuaciones diferenciales (2.19) tienen la representación matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$
$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}. \quad (2.21)$$

con

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Donde $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ son matrices de funciones continuas en un intervalo I , la matriz $\mathbf{A}(t)$ se denomina matriz de coeficientes y \mathbf{X} es el vector solución en el intervalo I cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen el sistema en dicho intervalo.

Nota. Si el sistema lineal de n ecuaciones diferenciales es homogéneo, entonces su representación matricial está dado por

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (2.22)$$

2.7. Solución de sistemas lineales

Como en el caso de una solución para una ecuación diferencial de orden n -ésimo, se define también con ciertas consideraciones y bajo ciertas condiciones, soluciones simples del sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.17. Sea un dominio D real de dimensión $n + 1$, un conjunto ordenado de n funciones $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ reales

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

cada una derivable en el intervalo real $a \leq t \leq b$ tal que

$$(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in D),$$

y verifiquen el sistema (2.21) se denomina solución del sistema.

Ejemplo 2.8. El par ordenado de funciones definido para toda $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} \\ 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix},$$

es solución del sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 4y, \end{cases}$$

reescrito en notación matricial se tiene

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

En efecto, ya que el par de funciones satisface ambas ecuaciones del sistema lineal homogéneo, esto se comprueba sustituyendo la solución en el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \begin{pmatrix} e^t + 2e^{2t} \\ 2e^t + 6e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} \\ 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -e^t - e^{2t} + 2e^t + 3e^{2t} \\ -6e^t - 6e^{2t} + 8e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^t + 2e^{2t} \\ 2e^t + 6e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el par de funciones $(e^t + e^{2t}, 2e^t + 3e^{2t})$ es solución del sistema lineal homogéneo

En la siguiente subsección estudiaremos la teoría básica de los sistemas lineales, vemos que existe una similitud bajo ciertas delimitaciones con la teoría ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

2.8. Problemas de valor inicial

Un problema de valor inicial (PVI) para sistemas de ecuaciones diferenciales consiste en encontrar una función vectorial diferenciable \mathbf{X} que verifique el sistema y que satisfaga la condición inicial $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ en un intervalo I donde $t_0 \in I$ y $\mathbf{X}(t_0)$ es un vector dado

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes establecidas, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}, \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Resulta ser un PVI en I .

2.8.1. Teorema de existencia y unicidad para sistemas

El objetivo de resolver sistemas diferenciales con valores iniciales es encontrar n funciones x_1, x_2, \dots, x_n las cuales satisfagan el sistema junto con las condiciones iniciales; es posible determinar si el sistema que consideramos posee una única solución en el intervalo I . Consideremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2.24)$$

con f_1, f_2, \dots, f_n funciones reales continuas definidas en un dominio D de dimensión $n + 1$.

En correspondencia con el Teorema (2.2) se tiene el siguiente resultado que trata con el sistema (2.24) cuya demostración es análoga a la del Teorema mencionado, pero hay que tener en cuenta que las herramientas usadas para su demostración ahora serán generalizadas para sistemas diferenciales. El enunciado del Teorema se lo recogió del libro (Ross, 1981, pp. 495-503) y de la web de (Omar Gonzales (2022d))=.

Teorema 2.4. (De Existencia y Unicidad local para sistemas con PVI). Sean f_1, f_2, \dots, f_n funciones continuas que satisfacen una condición de Lipschitz en un rectángulo R de dimensión $n + 1$ definido por

$$|t - t_0| \leq a, |x_1 - c_1| \leq b_1, \dots, |x_n - c_n| \leq b_n,$$

donde (t_0, c_1, \dots, c_n) es un punto del espacio (t, x_1, \dots, x_n) de dimensión $n + 1$ y a, b_1, b_2, \dots, b_n son constantes positivas donde existe $M > 0$ tal que $|f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M$ para $i = 1, 2, \dots, n$ con $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$; y sea $\delta = \min \{a, b_1/M, \dots, b_n/M\}$ entonces existe una única solución x_1, x_2, \dots, x_n del sistema (2.24) tal que

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0),$$

para $|t - t_0| \leq \delta$.

Para aclarar la existencia y la unicidad las soluciones de sistemas con valores iniciales enunciamos la condición de Lipschitz para funciones en \mathbb{R}^{n+1} la cual fue definida para una función en \mathbb{R}^2 en la segunda variable.

Definición 2.18. (Condición de Lipschitz para una función de varias variables) Se dice que la función $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ definida en un dominio D de dimensión $n + 1$, satisface una condición de Lipschitz sobre D en las variables x_1, x_2, \dots, x_n si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - f(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)| \leq L \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i|, \quad (2.25)$$

$$\forall (t, x_1, x_2, \dots, x_n); (t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D.$$

en donde L va a depender del dominio D .

Por lo tanto realizar la demostración del Teorema (2.4) será similar a realizar la demostración del Teorema (2.2).

La demostración del Teorema de existencia y unicidad local para sistemas de ecuaciones diferenciales se lo puede encontrar en el texto de (Valdivia et al, 1998, pp. 5-18) o en la web de (Omar Gonzales (2022d)).

Así mismo para sistemas de ecuaciones diferenciales es complicado determinar la constante L para que una función satisfaga una condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable por lo que se tiene de igual manera la generalización del Teorema (2.3) para sistemas que es el siguiente.

Teorema 2.5. Sean D un dominio convexo en \mathbb{R}^{n+1} y $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función definida en D tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \forall i = 1, 2, \dots, n$ existe y está acotada en D donde:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \leq L$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, entonces f es satisface uaa condición de Lipschitz sobre D en las variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Con todo esto podremos determinar cuando un sistema de ecuaciones diferenciales posee o no una única solución, entonces veamos ahora como serán sus soluciones cuando se las pueda obtener de manera analítica.

2.8.2. Soluciones linealmente dependientes e independientes

Los conceptos de dependencia e independencia lineal se aplican al estudio de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, al estudiar sistemas de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas, sabemos que existen dificultades si una de las ecuaciones es combinación lineal de algunas de las otras.

Definición 2.19. Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ un sistema de vectores solución del sistema $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ en un intervalo I , entonces estas n funciones

vectoriales son linealmente dependientes en el intervalo I si existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n no todas iguales a cero, tales que

$$c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_n \mathbf{X}_n = \mathbf{0}.$$

para toda t en el intervalo. Si los vectores no son linealmente dependientes, entonces son linealmente independientes en I .

Nos interesa determinar que las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales sean linealmente independientes, para así obtener la solución general del sistema. Para ello el siguiente Teorema, pero antes introduciremos una definición necesaria.

Definición 2.20. (Wronskiano para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.) Sean n vectores solución del sistema homogéneo (2.22)

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

sobre un intervalo I , entonces el determinante

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

se denomina el Wronskiano de las n soluciones del sistema lineal homogéneo.

Con esto enunciamos el siguiente criterio útil para la independencia lineal de las soluciones del sistema lineal homogéneo (2.22).

Teorema 2.6. (Criterio para soluciones linealmente independientes.) Un conjunto de n soluciones $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ en I es linealmente independiente en I si y sólo si el Wronskiano de las n soluciones del sistema lineal homogéneo nunca se anula para toda t .

La demostración de este Teorema la podemos encontrar en (Rabenstein, 1966, pp. 280-281).

Ejemplo 2.9. Veamos que para el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases}$$

sus soluciones

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix},$$

son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$; para ver esto usamos el Teorema (2.6) y el Wronskiano es

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^{7t} \\ -3e^{2t} & e^{7t} \end{vmatrix} = 2e^{9t} - (-3e^{9t}) = 5e^{9t} \neq 0.$$

El determinante no se anula para ningún $t \in \mathbb{R}$, entonces por el Teorema (2.6) las dos soluciones son linealmente independientes.

Para los sistemas lineales homogéneos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7. (Solución general para sistemas homogéneos.) Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (2.22) en un intervalo I , entonces la solución general en el intervalo I de dicho sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_n\mathbf{X}_n.$$

Donde c_1, \dots, c_n son constantes.

Nota. Un conjunto de soluciones $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ linealmente independiente en un intervalo I , se denomina como un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo en I .

Ejemplo 2.10. Verifiquemos que el conjunto de vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix},$$

son soluciones del siguiente sistema en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y además determinemos su solución general

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Entonces al sustituir el primer vector solución se tiene

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'_1.$$

Por lo que el vector \mathbf{X}_1 satisface el sistema para toda t , veamos si pasa lo mismo para los otros dos vectores

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'_2,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'_3.$$

Ambos vectores \mathbf{X}_2 y \mathbf{X}_3 también verifican el sistema para toda t en $(-\infty, \infty)$. Luego debemos ver que el conjunto de soluciones son linealmente independientes, en efecto

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) &= \begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix}, \\ &= e^{2t} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} + e^{-t} \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}, \\ &= e^{2t}(-e^{-2t}) + e^{-t}(-2e^t) + 0 = -3. \end{aligned}$$

Por lo que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ son soluciones linealmente independientes es decir forman un conjunto fundamental de soluciones sobre \mathbb{R} , por lo que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Retomemos brevemente los sistemas no homogéneos.

Observación 2.4. Una solución particular \mathbf{X}_p para los sistemas no homogéneos (2.22) en un intervalo I resulta ser cualquier vector solución libre de parámetros arbitrarios, cuyos elementos

satisfacen el sistema no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$.

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.8. (*Solución general para sistemas no homogéneos*): Sean \mathbf{X}_p una solución particular del sistema no homogéneo (2.22) en un intervalo I

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

la solución general en el mismo intervalo I del sistema homogéneo asociado (2.21), entonces la solución general del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

La solución \mathbf{X}_c también se la conoce como solución complementaria del sistema no homogéneo.

Ejemplo 2.11. Verifiquemos que la solución

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -5t-2 \end{pmatrix},$$

es una solución particular del sistema lineal no homogéneo para toda $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y + 5t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + 17t. \end{cases}$$

Reescrito en notación matricial resulta ser

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 5t \\ 17t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde al reemplazar la solución particular \mathbf{X}_p se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'_p &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 \\ -5t-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 17t \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 5(t+1) + 2(-5t-2) \\ 3(t+1) + 4(-5t-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 17t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5t+1 \\ -17t-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 17t \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo que \mathbf{X}_p es solución particular del sistema no homogéneo; además como se vio en el Ejemplo (2.9) las soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix},$$

son linealmente independientes para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces la solución general del sistema lineal homogéneo asociado resulta ser $\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$, es decir

$$\mathbf{X}_c = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix},$$

y en virtud del Teorema (2.8) la solución general del sistema no homogéneo resulta ser

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ -5t-2 \end{pmatrix}.$$

2.9. Resolución de sistemas lineales

Con las definiciones y resultados previos vamos a estudiar cómo resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo, de acuerdo a sus autovalores propios; y no homogéneo, con coeficientes indeterminados.

2.9.1. Sistemas lineales homogéneos

Consideremos un tipo básico de sistema homogéneo de dos ecuaciones diferenciales lineales con dos funciones desconocidas con la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (2.26)$$

donde a, b, c y d son constantes (es un sistema lineal de coeficientes constantes), por lo que estamos interesados en encontrar soluciones para este sistema; pero, cómo encontramos dichas soluciones. Al recordar la similitud que existe entre estos sistemas lineales y ecuaciones lineales de orden superior, podríamos encontrar soluciones exponenciales del sistema (2.26) es decir, buscar una solución de la forma

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases} \quad (2.27)$$

con k_1, k_2 y λ constantes, entonces al sustituir (2.27) en (2.26) se tiene

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(k_1 e^{\lambda t}) = a(k_1 e^{\lambda t}) + b(k_2 e^{\lambda t}), \\ \frac{d}{dt}(k_2 e^{\lambda t}) = c(k_1 e^{\lambda t}) + d(k_2 e^{\lambda t}), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} \lambda k_1 e^{\lambda t} = a(k_1 e^{\lambda t}) + b(k_2 e^{\lambda t}), \\ \lambda k_2 e^{\lambda t} = c(k_1 e^{\lambda t}) + d(k_2 e^{\lambda t}), \end{cases} \quad (2.28)$$

lo que nos lleva a tener

$$\begin{cases} 0 = (a - \lambda)k_1 + bk_2, \\ 0 = ck_1 + (d - \lambda)k_2. \end{cases} \quad (2.29)$$

Obviamente el sistema tiene solución cuando $k_1 = k_2 = 0$, por lo que se busca soluciones no triviales para este sistema. Una condición necesaria y suficiente para que este sistema tenga una solución no trivial nos lo dice el siguiente Teorema.

Teorema 2.9. *Dado un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales homogéneas con n incógnitas. Entonces, dicho sistema tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes del sistema es cero. (Ross, 1981, p. 323)*

Con este resultado se tiene que el determinante, viene dado por

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb = 0. \quad (2.30)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica** asociada al sistema (2.26) y sus soluciones son denominados autovalores propios. Si las expresiones en (2.27) son soluciones del sistema homogéneo inicial entonces, λ deberá ser una de estas raíces. Al suponer $\lambda = \lambda_1$ una raíz de la ecuación (2.30) se tendrá, al sustituir en (2.29), una solución no trivial K_1, K_2 del sistema algebraico, entonces, con estos valores se tendrá una solución no trivial para el sistema (2.26)

$$\begin{cases} x = K_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y = K_2 e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$$

Con esto se van a presentar tres casos: los autovalores propios λ_1, λ_2 son reales y distintos, o son reales e iguales o son complejos.

2.9.1.1. *Los autovalores son reales y distintos*

Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 son reales y distintos, entonces se tendrá dos soluciones linealmente independientes distintas, que cumplan la forma (2.27) correspondientemente. Este hecho viene dado en el siguiente Teorema.

Teorema 2.10. *(Solución general con autovalores propios reales y distintos.) Sean λ_1, λ_2 autovalores propios reales y distintos asociados al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (2.26) entonces, dicho sistema posee dos soluciones linealmente independientes no triviales*

$$\begin{cases} x = K_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y = K_3 e^{\lambda_1 t}, \end{cases} ; \begin{cases} x = K_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = K_4 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

con $K_1, K_2, K_3,$ y K_4 constantes; y además la solución general del sistema en \mathbb{R} se representa como

$$\begin{cases} x = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = c_1 K_3 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_4 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

para c_1 y c_2 constantes arbitrarias (Ross, 1981, p. 302).

Ejemplo 2.12. Vamos a encontrar la solución general del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases}$$

para ello, tomamos una solución con la forma

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

y la reemplazamos en el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(k_1 e^{\lambda t}) = 2(k_1 e^{\lambda t}) + 2(k_2 e^{\lambda t}), \\ \frac{d}{dt}(k_2 e^{\lambda t}) = (k_1 e^{\lambda t}) + 3(k_2 e^{\lambda t}), \end{cases}$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{cases} 0 = (2 - \lambda)k_1 + 2k_2, \\ 0 = k_1 + (3 - \lambda)k_2. \end{cases}$$

Para obtener soluciones no triviales usamos la ecuación característica asociada al sistema (2.30)

donde $a = 2, b = 2, c = 1$ y $d = 3$ se tiene

$$\lambda^2 - (2 + 3)\lambda + (2)(3) - (1)(2) = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0.$$

O lo que es equivalente, calcular los autovalores de la matriz de coeficientes, con notación matricial para representar el sistema se tiene

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

entonces, los autovalores a partir de la ecuación característica son

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} (2 - \lambda) & 2 \\ 1 & (3 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2,$$

luego,

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0,$$

teniendo así que los autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Al sustituir $\lambda_1 = 1$ en el sistema de ecuaciones algebraicas se tiene

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 2k_2, \\ 0 = k_1 + 2k_2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene que $k_1 = -2k_2$, es decir posee infinitas soluciones, entonces una solución no trivial será cuando $k_1 = 1$ se tiene $k_2 = -2$, con estos valores tenemos una solución no trivial para el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = -2e^t. \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que una solución diferente para k_1 y k_2 ($k_1 = -2$ y $k_2 = 1$) conduciría a una solución linealmente dependiente de la solución obtenida. Ahora con el autovalor $\lambda_2 = 4$

$$\begin{cases} 0 = -2k_1 + 2k_2, \\ 0 = k_1 - k_2. \end{cases}$$

De manera que $k_1 = k_2$, entonces una solución no trivial será cuando $k_1 = k_2 = 1$ (si tomamos otros valores para k_1 y k_2 que resuelvan el sistema, podremos obtener una solución general diferente) teniendo una solución para el sistema homogéneo de la forma

$$\begin{cases} x = e^{4t}, \\ y = e^{4t}, \end{cases}$$

Ahora usemos el Teorema (2.6) para determinar si las soluciones obtenidas son linealmente independientes, para ello usamos el wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^t & e^{4t} \\ -2e^t & e^{4t} \end{vmatrix} = (e^t)(e^{4t}) - (-2e^t)(e^{4t}) = 3e^{5t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo que las soluciones son linealmente independientes, y por el Teorema (2.10) se tiene que la solución general del sistema resulta ser

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{4t}, \\ y = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

2.9.1.2. *Los autovalores son reales e iguales*

Si los dos autovalores propios de la ecuación característica (2.30) son reales e iguales, podríamos pensar que existe una sola solución, entonces, cómo se puede hallar una segunda solución linealmente independiente. Con la intención de responder esta pregunta se considera una segunda solución de la forma

$$\begin{cases} x = K_1 e^{\lambda t}, \\ y = K_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Pero no solo es de esta forma sino que también debemos buscar una segunda solución de la forma

$$\begin{cases} x = (k_1 t + k_3) e^{\lambda t}, \\ y = (k_2 t + k_4) e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Este hecho se lo verifica con el siguiente Teorema.

Teorema 2.11. *(Solución general con autovalores propios reales e iguales.) Sean λ_1, λ_2 autovalores propios reales e iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) asociados al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (2.26) (sin considerar el caso cuando $a = d \neq 0$ y $c = d = 0$) entonces dicho sistema posee dos soluciones linealmente independientes no triviales*

$$\begin{cases} x = K_1 e^{\lambda t}, \\ y = K_2 e^{\lambda t}, \end{cases} ; \begin{cases} x = (k_1 t + k_3) e^{\lambda t}, \\ y = (k_2 t + k_4) e^{\lambda t}, \end{cases}$$

con K_1, K_2, k_1, k_2, k_3 , y k_4 constantes tal que k_1 y k_3 no son cero y $k_3/k_1 = K_2/K_1$; además la solución general del sistema en \mathbb{R} se representa como

$$\begin{cases} x = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 ((k_1 t + k_3) e^{\lambda t}), \\ y = c_1 K_2 e^{\lambda t} + c_2 ((k_2 t + k_4) e^{\lambda t}), \end{cases}$$

para c_1 y c_2 constantes arbitrarias (Ross, 1981, p. 307).

Ejemplo 2.13. Vamos a encontrar la solución general del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y, \end{cases}$$

para ello, tomamos una solución con la forma

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

y la reemplazamos en el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(k_1 e^{\lambda t}) = 3(k_1 e^{\lambda t}) - (k_2 e^{\lambda t}), \\ \frac{d}{dt}(k_2 e^{\lambda t}) = 4(k_1 e^{\lambda t}) - (k_2 e^{\lambda t}), \end{cases}$$

teniendo

$$\begin{cases} 0 = (3 - \lambda)k_1 - k_2, \\ 0 = 4k_1 + (-1 - \lambda)k_2. \end{cases}$$

Cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - (3 - 1)\lambda + (3)(-1) - (4)(-1) = 0,$$

de donde los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, estos autovalores se los puede determinar también usando notación matricial

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

entonces al calcular el determinante de la matriz de coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (3 - \lambda) & -1 \\ 4 & (-1 - \lambda) \end{vmatrix} &= (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 \\ &= (\lambda - 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

teniendo así autovalores reales y repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Al sustituir $\lambda = 1$ en el sistema algebraico generado se tiene

$$\begin{cases} 0 = 2k_1 - k_2, \\ 0 = 4k_1 - 2k_2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene que $k_1 = k_2/2$, entonces una solución no trivial será cuando $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$, con estos valores tenemos una solución no trivial para el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = 2e^t. \end{cases}$$

Como los autovalores de la ecuación característica son iguales entonces se debe buscar una segunda solución de la forma (2.31), es decir

$$\begin{cases} x = (k_1 t + k_3) e^t, \\ y = (k_2 t + k_4) e^t. \end{cases}$$

Al sustituir en el sistema homogéneo se tiene

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} ((k_1 t + k_3) e^t) = 3((k_1 t + k_3) e^t) - ((k_2 t + k_4) e^t), \\ \frac{d}{dt} ((k_2 t + k_4) e^t) = 4((k_1 t + k_3) e^t) - ((k_2 t + k_4) e^t). \end{cases}$$

Y esto se reduce a tener

$$\begin{cases} 0 = (2k_1 - k_2)t + (2k_3 - k_1 - k_4), \\ 0 = (4k_1 - 2k_2)t + (4k_3 - k_2 - k_4). \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} (2k_1 - k_2) = 0, & (2k_3 - k_1 - k_4) = 0, \\ (4k_1 - 2k_2) = 0, & (4k_3 - k_2 - 2k_4) = 0. \end{cases}$$

Teniendo así que $k_1 = k_2/2$ y además $k_1 = 2k_3 - k_4 = k_2/2$, entonces para $k_1 = 1$ se tendrá que $k_2 = 2$ y también $k_4 = 2k_3 - 1$, si $k_3 = 0$ entonces $k_4 = -1$. Con estos valores tenemos la solución no trivial

$$\begin{cases} x = t e^t, \\ y = (2t - 1) e^t. \end{cases}$$

Como último paso veamos si ambas soluciones son linealmente independientes para poder usar el Teorema (2.6), esto lo determinamos usando el Wronskiano

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^t & t e^t \\ 2e^t & (2t - 1)e^t \end{vmatrix} = (e^t) ((2t - 1)e^t) - (2e^t) (t e^t) \\ &= (2t - 1)e^{2t} - 2te^{2t} \\ &= -e^{2t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto por el Teorema (2.27) la solución general del sistema homogéneo con autovalores propios reales e iguales resulta ser

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 t e^t, \\ y = c_1 2e^t + c_2 ((2t - 1) e^t). \end{cases}$$

Donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Observación 2.5. Una opción diferente de valores para k_1, k_2, k_3 y k_4 (diferentes de 0) en este ejemplo conducirá a una segunda solución que es diferente de la solución planteada. Esta segunda solución diferente también deberá ser linealmente independiente de la solución encontrada con el valor propio repetido y, por lo tanto, esta nueva solución serviría para obtener una solución general. Por ejemplo, si tomamos $k_1 = 2$ entonces $k_2 = 4$ luego se tendrá $k_4 = 2k_3 - 2$ y si $k_3 = 2$ entonces $k_4 = 2$, lo que nos conduce a una segunda solución diferente

$$\begin{cases} x = (2t + 2)e^t, \\ y = (4t + 2)e^t, \end{cases}$$

que resulta ser linealmente independiente de la solución encontrada con el valor propio $\lambda = 1$ y podría también servir para tener una solución general diferente del sistema homogéneo, teniendo

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 (2t + 2)e^t, \\ y = c_1 2e^t + c_2 (4t + 2)e^t. \end{cases}$$

2.9.1.3. Los autovalores son complejos

Como último caso tenemos cuando los autovalores propios de la ecuación característica (2.30) son números complejos de la forma $a \pm bi$, entonces como en el primer caso se tendrán dos soluciones complejas distintas con la forma

$$\begin{cases} x = k_1 e^{(a+bi)t}, \\ y = k_3 e^{(a+bi)t}, \end{cases} ; \begin{cases} x = k_2 e^{(a-bi)t}, \\ y = k_4 e^{(a-bi)t}. \end{cases}$$

Pero para tener que ambas soluciones sean reales se debe considerar la fórmula de Euler en cualquiera de las dos soluciones complejas, por lo que se tiene dos soluciones reales linealmente independientes, esto lo verifica el siguiente Teorema.

Teorema 2.12. (Solución general real con autovalores propios complejos.) Sean λ_1 y λ_2 autovalores propios complejos conjugados ($a \pm bi$) asociados al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (2.26), entonces dicho sistema posee dos soluciones reales linealmente independientes

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} k_1 \cos bt - k_2 \operatorname{sen} bt \\ k_3 \cos bt - k_4 \operatorname{sen} bt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} k_2 \cos bt + k_1 \operatorname{sen} bt \\ k_4 \cos bt + k_3 \operatorname{sen} bt \end{pmatrix},$$

donde k_2, k_3 , y k_4 constantes; además la solución general del sistema en \mathbb{R} se representa como

$$\begin{cases} x = e^{at} [c_1 (k_1 \cos bt - k_2 \operatorname{sen} bt) + c_2 (k_2 \cos bt + k_1 \operatorname{sen} bt)], \\ y = e^{at} [c_1 (k_3 \cos bt - k_4 \operatorname{sen} bt) + c_2 (k_4 \cos bt + k_3 \operatorname{sen} bt)], \end{cases}$$

para c_1, c_2 constantes arbitrarias (Ross, 1981, p. 305).

Ejemplo 2.14. Para encontrar la solución del siguiente sistema lineal homogéneo con PVI.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 6y, \end{cases}$$

$$x(0) = 4, y(0) = 1,$$

primero debemos la solución general del sistema, para ello suponemos una solución con la forma

(2.27)

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

y la sustituimos en el sistema lineal homogéneo del ejemplo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (k_1 e^{\lambda t}) = 2(k_1 e^{\lambda t}) - 8(k_2 e^{\lambda t}), \\ \frac{d}{dt} (k_2 e^{\lambda t}) = (k_1 e^{\lambda t}) + 6(k_2 e^{\lambda t}), \end{cases}$$

lo que nos conduce al sistema algebraico

$$\begin{cases} 0 = (2 - \lambda)k_1 - 8k_2, \\ 0 = k_1 + (6 - \lambda)k_2. \end{cases}$$

Para tener soluciones no triviales de este último calculamos la ecuación característica con el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema

$$\begin{vmatrix} (2 - \lambda) & -8 \\ 1 & (6 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) + 8$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0,$$

teniendo así que los autovalores propios son números complejos conjugados $\lambda_1 = 4 + 2i$ y $\lambda_2 =$

$4 - 2i$. Al escoger $\lambda_1 = \lambda = 4 + 2i$ en el sistema algebraico se tiene

$$\begin{cases} 0 = (-2 - 2i)k_1 - 8k_2 \\ 0 = k_1 + (2 - 2i)k_2 \end{cases}$$

Una solución no trivial para este último será tomar $k_1 = -2 + 2i$ y $k_2 = 1$ debido a que $k_1 = -(2 - 2i)k_2$, y al reemplazar estos valores junto con $\lambda = 4 + 2i$ en el par de soluciones consideradas tenemos

$$\begin{cases} x = (2i - 2)e^{(4+2i)t}, \\ y = e^{(4+2i)t}. \end{cases}$$

Con la fórmula de Euler la solución tiene la forma

$$\begin{cases} x = (2i - 2)e^{4t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t), \\ y = e^{4t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

Dado que la parte real como la parte imaginaria de esta solución del sistema homogéneo son ambas soluciones, entonces podemos obtener las dos soluciones reales

$$\begin{cases} x = -2e^{4t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t), \\ y = e^{4t} \cos 2t, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = 2e^{4t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t), \\ y = e^{4t} \operatorname{sen} 2t. \end{cases}$$

Como las dos soluciones son linealmente independientes (se verifica con el Wronskiano), entonces por el Teorema (2.12) la solución general del sistema homogéneo será

$$\begin{cases} x = 2e^{4t} [(-c_1 + c_2) \cos 2t - (c_1 + c_2) \operatorname{sen} 2t], \\ y = e^{4t} (c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

Por último al aplicar la condición inicial $x(0) = 4, y(0) = 1$ en la solución general del sistema homogéneo se tiene

$$\begin{cases} 4 = 2e^{4(0)} [(-c_1 + c_2) \cos 2(0) - (c_1 + c_2) \operatorname{sen} 2(0)], \\ 1 = e^{4(0)} (c_1 \cos 2(0) + c_2 \operatorname{sen} 2(0)). \end{cases}$$

Lo que resulta en

$$\begin{cases} 4 = 2(-c_1 + c_2), \\ 1 = c_1, \end{cases}$$

es decir $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$, por lo al sustituir estos valores en la solución general se tiene

$$\begin{cases} x = 4e^{4t}(\cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t), \\ y = e^{4t}(\cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

2.9.2. Solución de sistemas lineales no homogéneos

La documentación para esta sección proviene de (Zill y Cullen, 2008, pp. 430-432).

Veamos ahora un método para resolver sistemas lineales no homogéneos (2.21) cuando \mathbf{F} (matriz de funciones $f_i(t)$) es en general una matriz de coeficientes, para ello hay que tener en cuenta el Método de coeficientes indeterminados para encontrar soluciones particulares de EDO lineales no homogéneas puede generalizarse para estos sistemas, este método ofrece un medio rápido para encontrar una solución particular cuando $\mathbf{F}(t)$ es constante.

2.9.2.1. Coeficientes indeterminados

El Método de los coeficientes indeterminados se utiliza para encontrar una solución particular del sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t),$$

cuando la matriz cuadrada \mathbf{A} es constante y los componentes de la matriz $\mathbf{F}(t)$ son: polinomios, senos, cosenos, exponenciales o sumas y productos finitos de estas funciones.

La idea central del método de coeficientes indeterminados es formar una combinación lineal más general de las funciones en la familia del término no homogéneo $\mathbf{F}(t)$, después sustituir esta expresión en el sistema dado y resolver los coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplo 2.15. Resolvamos el siguiente sistema lineal no homogéneo para saber en que consiste el método de coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y - 7, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + 5. \end{cases}$$

Empezamos resolviendo el sistema homogéneo asociado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y, \end{cases}$$

para el cual escogemos una solución del tipo

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

y al sustituirla en el sistema se tendrá el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} (2 - \lambda)k_1 + 3k_2 = 0, \\ -k_1 + (-2 - \lambda)k_2 = 0. \end{cases}$$

Obtenemos la ecuación característica resolviendo el determinante de la matriz del sistema homogéneo asociado

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0, \end{aligned}$$

teniendo así que los autovalores propios son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, entonces al tomar $\lambda = 1$ y reemplazarlo en el sistema de ecuaciones algebraicas se tiene

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 = 0, \\ -k_1 - 3k_2 = 0, \end{cases}$$

entonces si $k_1 = -3$ se tiene $k_2 = 1$ por lo que una solución será

$$\begin{cases} x = -3e^t, \\ y = e^t. \end{cases}$$

Ahora cuando $\lambda = -1$ y al reemplazarlo de nuevo en el sistema de ecuaciones algebraicas se tiene

$$\begin{cases} 3k_1 + 3k_2 = 0, \\ -k_1 - k_2 = 0, \end{cases}$$

donde $k_1 = -k_2$ entonces si $k_1 = -1, k_2 = 1$, por lo que una solución será

$$\begin{cases} x = -e^{-t}, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$$

Con el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = (-3e^t)(e^{-t}) - (-e^{-t})(e^t) \\ = -3e^0 + e^0 = -2 \neq 0,$$

se tiene que ambas soluciones son linealmente independientes, entonces la solución general del sistema lineal homogéneo asociado (solución complementaria del sistema no homogéneo) es

$$\begin{cases} x = -3c_1e^t - c_2e^{-t}, \\ y = c_1e^t + c_2e^{-t}. \end{cases}$$

En forma matricial

$$\mathbf{X}_c = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Ahora necesitamos encontrar la solución particular del sistema no homogéneo, debido a que $\mathbf{F}(t)$ para el sistema no homogéneo es constante asumimos para este, una solución constante de la forma

$$\begin{cases} x = p_1, \\ y = p_2, \end{cases}$$

al sustituir esto en el sistema no homogéneo original se tendrá

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 2p_1 + 3p_2 - 7, \\ \frac{dp_2}{dt} = -p_1 - 2p_2 + 5, \end{cases}$$

teniendo lo siguiente

$$\begin{cases} 0 = 2p_1 + 3p_2 - 7, \\ 0 = -p_1 - 2p_2 + 5, \end{cases}$$

al resolver este sistema se tiene que $p_1 = -1$ y $p_2 = 3$, por lo tanto la solución particular será

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases}$$

en forma matricial es

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces por el Teorema (2.9) la solución general del sistema lineal no homogéneo viene dada por

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} x = -3c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1, \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 3. \end{cases}$$

El Método de los coeficientes indeterminados implica realizar suposiciones sobre la forma de la solución particular en función de $\mathbf{F}(t)$. Al tomar derivadas de polinomios, senos, cosenos y funciones exponenciales, obtenemos las mismas funciones. Entonces, cuando $\mathbf{F}(t)$ tiene una de estas formas, es posible que la solución del sistema no homogéneo tome la misma forma.

Con esta breve documentación sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales podremos introducir y describir en el siguiente capítulo el análisis cualitativo y numérico sobre los sistemas de dos ecuaciones diferenciales dado que, el modelo principal de este trabajo (modelo de Lotka-Volterra) es un sistema de dos ecuaciones no lineales.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

En el capítulo anterior se revisó y documentó las nociones más relevantes sobre ecuaciones y sistemas de diferenciales para ahora poder dar una introducción al análisis cualitativo y numérico de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Sabemos que existen ecuaciones diferenciales cuya solución explícita no puede ser obtenida fácilmente, esto mismo se extiende a los sistemas de ecuaciones diferenciales. Es por ello que existe el análisis cualitativo y la ayuda de los métodos numéricos los cuales nos permiten estudiar y aproximar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales sin conocer su solución.

Dado que se desea comprobar los efectos de una intervención específica, en este caso las interacciones entre dos especies entonces se utilizarán los métodos cualitativos y numéricos donde se puede manipular las condiciones de la investigación como el aumento o pérdida en alguna población de estudio.

Para desarrollar el análisis cualitativo se toma en cuenta la representación en el plano de fase, el proceso de linealización y las isoclinas nulas debido a que cada uno aporta información relevante para cumplir con el objetivo propuesto. Para la parte numérica se utiliza el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas con dos ecuaciones dado que es uno de los mejores para aproximar una solución de un sistema debido al pequeño margen de error que presenta el método.

3.1. Análisis cualitativo

Para la documentación de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales se toman en cuenta principalmente los libros de (Zill y Cullen, 2008, pp. 445-473) y (Rodríguez, 2012, pp. 533-543), los dos textos siguientes nos proporcionan el material necesario para la documentación cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales (Blanchard et al., 1999, pp. 403-433) y (Nagle et al., 2005, pp. 262-276).

Uno de nuestros objetivos principales es el estudio con el análisis cualitativo para el modelo de Lotka-Volterra el cual no depende de su variable independiente, por lo es necesario tener en cuenta la definición de sistema de ecuaciones diferenciales autónomo.

Definición 3.21. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (3.1)$$

con f_1, f_2, \dots, f_n continuas, se denomina **sistema autónomo** donde la variable independiente t no se muestra en los términos del lado derecho de las ecuaciones del sistema.

Observación 3.6. Dado que el sistema de Lotka-Volterra es un sistema de dos ecuaciones diferenciales, entonces la documentación del análisis cualitativo se realizará con sistemas autónomos de dos ecuaciones diferenciales.

Un análisis cualitativo nos permite obtener información sobre el comportamiento del conjunto de soluciones asociadas a un sistema de ecuaciones diferenciales sin resolverlo, una técnica para el estudio del comportamiento cualitativo de soluciones de los sistemas autónomos (3.1) es la representación en el plano el cual para poder esbozarlo requiere de estudiar los puntos donde el sistema autónomo se anula.

3.1.1. Plano de fase y puntos de equilibrio

En la documentación de esta sección se toma en cuenta el texto de (Ross, 1981, pp. 632-650).

Consideremos las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

al tomar $y = dx/dt$ la ecuación no lineal se transforma en

$$\begin{cases} y = \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = F(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

De este último podemos determinar información sobre la ecuación no lineal original a partir de un estudio del sistema generado. Para estudiar el comportamiento de las curvas que definen las soluciones del sistema (3.2) consideraremos t como un parámetro para que estas curvas aparezcan en el plano xy .

Entonces vamos a considerar un sistema autónomo de dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y), \end{cases} \quad (3.3)$$

donde f y g tienen primeras derivadas parciales continuas para todo (x,y) .

El plano de fase es una herramienta gráfica que permite analizar de manera cualitativa ciertos tipos de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden sin necesidad de resolverlas. Al considerar el sistema autónomo (3.3) con un PVI, se tendrá que cada solución $(x(t),y(t))$ del sistema es una curva en el espacio txy , pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy que se denomina plano de fases descrita en función de t . Esta segunda curva denominada **trayectoria** (órbita o sendero) de la solución del sistema, es proyección de la primera sobre el plano de fase.

Definición 3.22. Se denomina plano de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales al conjunto de todas las trayectorias de las soluciones del sistema, es decir al plano formado por el par de valores (x,y) .

Observación 3.7. En cada punto (x,y) de una trayectoria, el par de funciones $(f(x,y),g(x,y))$ es tangente a dicha trayectoria, por ende el conjunto $(f(x,y),g(x,y))$ es campo de direcciones del sistema.

Al eliminar el parámetro t en el sistema (3.3), obtenemos la ecuación

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \quad (3.4)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación en el plano fase** y nos brinda la pendiente de la tangente a la trayectoria del sistema que pasa por el punto (x,y) , siempre que f y g no sean ambas cero en este punto. Teniendo así que la familia de soluciones de (3.4) proporciona la familia de trayectorias de un parámetro del sistema (3.3), pero no indica las direcciones de estas trayectorias.

También podemos emplear los campos de direcciones para visualizar las gráficas del comportamiento de la solución de (3.4). Con esto tenemos varios beneficios sobre el sistema autónomo original (3.3), pero hay que realizar las siguientes distinciones:

- Una solución del sistema autónomo (3.3) es una par $(x(t),y(t))$ de funciones, que satisfacen $(3.3) \forall t \in I$. Se identifican cada una como ilustraciones diferentes. Si en el plano xy graficamos el valor de $(x(t),y(t))$, al cambiar t en I , la curva se denomina trayectoria solución y el plano

xy resulta ser el plano fase. Esta trayectoria contiene menos información que las ilustraciones solución de $(x(t), y(t))$ originales, pues la trayectoria omite la dependencia del parámetro t .

- En el plano de fase, la pendiente dy/dx viene dada por $g(x,y)/f(x,y)$, por lo que al resolver $dy/dx = g(x,y)/f(x,y)$ encontramos las trayectorias del sistema autónomo (3.3) en el plano de fase.

En un punto (x_0, y_0) en el que tanto f y g son cero, la pendiente de la tangente a la trayectoria, definida por (3.3), es indefinida, estos puntos se denominan puntos de equilibrio (puntos críticos o puntos singulares).

Definición 3.23. Dado el sistema autónomo (3.3) con f, g y sus respectivas derivadas parciales de primer orden continuas, un punto (x_0, y_0) donde

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0, \\ g(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

es un punto de equilibrio del sistema autónomo (3.3).

Nota. La solución constante

$$\begin{cases} x(t) = x_0, \\ y(t) = y_0, \end{cases}$$

se denomina también como punto de equilibrio. Debido a que $x'(t) = 0, y'(t) = 0$ entonces un punto de equilibrio es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas (Zill, 2015, p. 447)

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Definición 3.24. Un punto de equilibrio (x_0, y_0) del sistema autónomo (3.3) se denomina aislado si existe un círculo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

cerca del punto (x_0, y_0) tal que (x_0, y_0) es el único punto de equilibrio para el sistema dentro del círculo.

Veamos un ejemplo de como poder determinar los puntos de equilibrio de una EDO.

Ejemplo 3.16. Si queremos determinar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 9, \end{cases}$$

estos serán los valores donde $2x + 1$ y $3y - 9$ se anulen, es decir

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 3y - 9 = 0, \end{cases}$$

teniendo así que el punto de equilibrio es $(-1/2, 3)$.

Con el siguiente ejemplo podemos observar cómo es el comportamiento de las trayectorias cercanas a un punto de equilibrio al graficar su plano de fase.

Ejemplo 3.17. Vamos a determinar el/los puntos de equilibrio del sistema y con ayuda del programa MATLAB graficaremos el campo de direcciones en el plano de fase para el PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x, y(0) = 1. \end{cases}$$

La solución general del sistema viene dada por

$$\begin{cases} x = c_1 \sin t - c_2 \cos t, \\ y = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{cases}$$

Pero al eliminar el parámetro t entre las ecuaciones del sistema original se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (3.5)$$

que da la pendiente de la tangente a la trayectoria del sistema que pasa por el punto (x, y) , siempre que $(x, y) \neq (0, 0)$. Además la ecuación diferencial (3.5) es la del Ejemplo (2.3) la cual genera la familia de soluciones de la forma, $x^2 + y^2 = c^2$ de un parámetro, esta genera la familia de trayectorias de un parámetro. Por tanto el único punto de equilibrio del sistema es el origen $(0, 0)$. Dado cualquier número real t_0 , la solución $x = f(t), y = g(t)$ que cumpla con $f(t_0) = g(t_0) = 0$ es

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Por último el campo de direcciones en el plano de fase que cumpla con la condición dada para el sistema será la trayectoria cerrada:

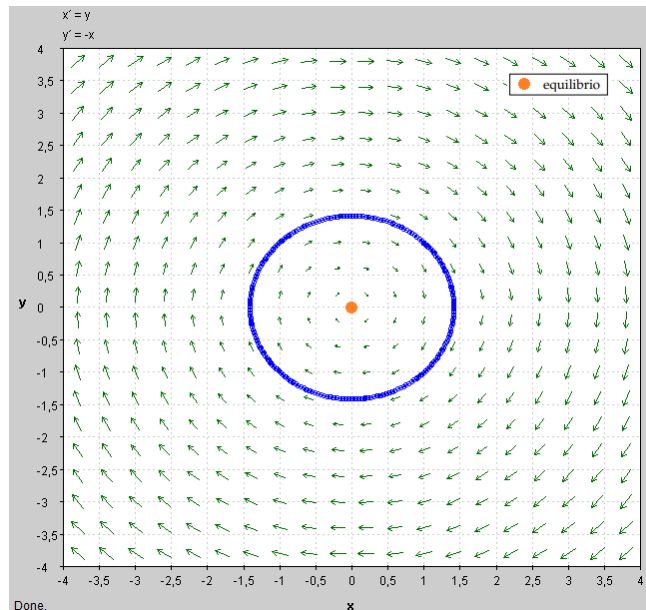


Ilustración 1-3: Campo de direcciones en el plano de fase
 $x(0) = 1, y(0) = 1$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Lo que corrobora los resultados anteriores, teniendo una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, es decir una se tendrá la trayectoria $x^2 + y^2 = 1$.

Una manera sencilla de obtener las trayectorias solución es resolver la ecuación diferencial de primer orden (3.4), estas trayectorias nos brindan información sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial.

3.1.1.1. *Varias propiedades de trayectorias*

Enumeramos algunas propiedades sobre las trayectorias que nos servirán para estudiar el modelo de Lotka-Volterra para entender el comportamiento de las soluciones de su sistema.

El Teorema de Existencia y Unicidad (2.4) asegura que dos trayectorias no pueden intersectarse, aunque las órbitas de cada trayectoria si pueden hacerlo. Los sistemas autónomos brindan un resultado importante; si partículas partem desde un mismo punto en común pero en diferentes momentos de tiempo entonces ambas van a recorrer la misma trayectoria.

- Toda trayectoria en el plano de fase representa infinitas soluciones del sistema de ecuaciones (3.3); es decir, si $(x(t), y(t))$ es solución del sistema autónomo (3.3), entonces $(x(t+c), y(t+c)), \forall c \in \mathbb{R}$ también es solución del mismo sistema.
- Existe una única trayectoria solución que pasa por cada punto (x_0, y_0) del plano de fase; para que esto ocurra, las funciones f, g del sistema autónomo (3.3) deben poseer derivadas parciales y continuas con respecto a x, y .

- Las trayectorias cerradas son soluciones periódicas; es decir, si $(x(t), y(t))$ es solución del sistema autónomo plano (3.3) donde $(x(t_0 + \rho), y(t_0 + \rho)) = (x(t_0), y(t_0))$, $\rho > 0$ entonces $(x(t + \rho), y(t + \rho)) = (x(t), y(t))$, siendo ρ el periodo de la solución Omar Gonzales (2022e) y (Zill, 2015, pp. 447-448).

En el ejemplo (3.17) se observa en el plano de fase que las trayectorias son cerradas, las cuales giran alrededor del punto de equilibrio pero nunca llegan a tocarlo. Este no es el único caso, ya que existen trayectorias que tienden a un punto de equilibrio y así mismo existen trayectorias que se alejan de los puntos de equilibrio, esto se denomina como la estabilidad de los puntos de equilibrio.

3.1.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Las siguientes definiciones consiguientes provienen de (Ross, 1981, pp. 642-643).

Al momento de representar las trayectorias cercanas a los puntos de equilibrio en el plano de fase se tienen tres cualidades diferentes para estos puntos. Según sea el comportamiento de las trayectorias en las cercanías de los puntos de equilibrio, estos tienen una estabilidad diferente.

Observación 3.8. Para las siguientes definiciones supondremos que los puntos de equilibrio son aislados y además supondremos que el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio, esto no produce ninguna limitación ya que si (x_0, y_0) no fuese el origen entonces al hacer un cambio de coordenadas $\phi = x - x_0$, $\varphi = y - y_0$ el sistema autónomo (3.3) se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = f(\phi + x_0, \varphi + y_0), \\ \frac{d\varphi}{dt} = g(\phi + x_0, \varphi + y_0), \end{cases}$$

teniendo así con este cambio que el punto $(0, 0)$ es de equilibrio.

Definición 3.25. (Punto de equilibrio estable) Sean $x(t), y(t)$ una solución del sistema (3.3) que define a C una trayectoria del mismo sistema entonces al punto de equilibrio $(0, 0)$ se lo denomina estable si $\forall R > 0$ existe $r > 0$ tal que para toda C trayectoria para la cual se cumple que para algún t_0 se tiene que $\sqrt{(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2} < r$ se encuentra definida $\forall t_0 < t$ y es tal que $\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} < R$ con $t_0 \leq t < \infty$.

Lo que nos quiere decir esto es que, si todas las trayectorias solución que están suficientemente cerca al punto de equilibrio permanecen cercanas al mismo a lo largo de t .

Definición 3.26. (Punto de equilibrio estable asintótico) El punto de equilibrio $(0, 0)$ es estable asintótico, cuando es estable y además existe algún $r_0 > 0$ tal que si para algún t_0 se cumple que $\sqrt{(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2} < r_0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$

Dicho de otra forma, cuando $x(t) \rightarrow x_0$ y $y(t) \rightarrow y_0$, las trayectorias se aproximan al punto de equilibrio a lo largo de t .

Definición 3.27. (Punto de equilibrio inestable) Si el punto de equilibrio (x_0, y_0) no es estable, se denomina punto de equilibrio es inestable.

Es decir que las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejarán de este para $t \rightarrow \infty$.

Además de la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas autónomos, es normal preguntarnos si es posible obtener más información cualitativa sobre las trayectorias cercanas a los puntos de equilibrio. Para sistemas autónomos lineales los puntos de equilibrio tienen diferente clasificación.

3.1.1.3. Clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas lineales

Primero vamos a investigar los puntos de equilibrio de un sistema autónomo lineal (los siguientes resultados presentados los obtenemos de (Ross, 1981, pp. 644-654)), para ello consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (3.6)$$

con a, b, c y d constantes; claramente el punto $(0, 0)$ es un punto de equilibrio para el sistema autónomo lineal, y si suponemos que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (con \mathbf{A} la matriz de coeficientes del sistema (3.6)) entonces el punto $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio, además con este supuesto, 0 no podrá ser un valor propio para la ecuación característica.

De lo anterior visto en el Capítulo II, sección (2.9.) se puede encontrar soluciones del sistema (3.6) con la forma

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

y como es solución entonces λ debe satisfacer la ecuación característica del sistema que será

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Al considerar el determinante de la matriz de coeficientes \mathbf{A} como $\Delta = ad - bc$ y la traza de \mathbf{A} (la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz) como $\tau = a + d$, entonces la ecuación

característica se denota como

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0. \quad (3.7)$$

Teniendo así que los autovalores propios son $\lambda = (\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})/2$. Como se vio al inicio de la sección (2.9.1.) esperaríamos tres casos para los autovalores propios λ_1, λ_2 que, ahora se presentan en función de si el discriminante de la ecuación característica $(\tau^2 - 4\Delta)$ es positivo, negativo o cero. Pero la situación aquí no es la misma y se debe considerar cinco casos:

Autovalores propios reales, diferentes y con el mismo signo

Teorema 3.13. *Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (3.7) son reales, diferentes ($\tau^2 - 4\Delta > 0$) y con el mismo signo ($\tau < 0$ y $\Delta > 0$; $\tau > 0$ y $\Delta > 0$), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema lineal (3.6) es un nodo.*

Autovalores propios reales, diferentes y con diferente signo

Teorema 3.14. *Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (3.7) son reales, diferentes ($\tau^2 - 4\Delta > 0$) y opuestos con el signo ($\Delta < 0$), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema lineal (3.6) es un punto de silla.*

Autovalores propios reales e iguales

Teorema 3.15. *Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (3.7) son reales e iguales ($\tau^2 - 4\Delta = 0$), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema lineal (3.6) es un nodo.*

Autovalores propios complejos conjugados

Teorema 3.16. *Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (3.7) son complejos conjugados ($\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau \neq 0$), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema lineal (3.6) es un punto espiral.*

Autovalores propios imaginarios puros

Teorema 3.17. *Si los autovalores propios λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (3.7) son imaginarios puros ($\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau = 0$), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema lineal (3.6) es un centro.*

Estos 5 casos nos ayudan a determinar si el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo, punto de silla, centro o punto espiral, y con el siguiente Teorema podremos saber la estabilidad que tiene el punto de equilibrio.

Teorema 3.18. *Sea el sistema (3.6) con $(0,0)$ el único punto de equilibrio del sistema ($ad - bc \neq 0$) entonces:*

1. Si los autovalores propios asociados al sistema son reales y negativos o complejos conjugados con partes reales negativas, el punto de equilibrio es estable asintótico.
2. Si alguno de los autovalores propios asociados al sistema es real y positivo o ambos son conjugados complejos, el punto de equilibrio es inestable.
3. Si los autovalores propios asociados al sistema son imaginarios puros, el punto de equilibrio es estable, pero no asintóticamente estable

Con estos resultados se tiene lo siguiente:

- Cuando los autovalores propios sean reales, diferentes ($\tau^2 - 4\Delta > 0$) y del mismo signo ($\tau < 0$; $\tau > 0$), el punto de equilibrio será un nodo y será: estable asintótico si los autovalores propios son negativos ($\tau < 0$), inestable si los autovalores propios son positivos ($\tau > 0$).
- Cuando los autovalores propios sean reales, diferentes ($\tau^2 - 4\Delta > 0$) y con diferente signo ($\Delta < 0$), el punto de equilibrio será un punto de silla y será inestable.
- Cuando los autovalores propios sean reales, e iguales ($\tau^2 - 4\Delta = 0$), el punto de equilibrio será un nodo y será: estable asintótico si los autovalores propios son negativos ($\tau < 0$), inestable si los autovalores propios son positivos ($\tau > 0$).
- Cuando los autovalores propios sean complejos conjugados ($\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau \neq 0$), el punto de equilibrio será un punto espiral y será: estable asintótico si la parte real de los autovalores propios es negativa, inestable si la parte real de los autovalores propios es positiva.
- Cuando los autovalores propios sean imaginarios puros ($\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau = 0$), el punto de equilibrio será un centro y será: estable pero no estable asintótico.

Observación 3.9. Cuando se presente el caso de que un punto de equilibrio es un centro, es decir, cuando sus autovalores propios sean imaginarios puros entonces la solución del sistema lineal será periódica, es decir las trayectorias serán cerradas, esto es una propiedad de las trayectorias ya mencionada anteriormente.

Nota. Las trayectorias de las soluciones de equilibrio se componen de los puntos de equilibrio, pero para las demás trayectorias nos concentraremos en la ecuación en el plano fase al analizar su campo de direcciones. Se puede mejorar la información del campo de direcciones indicando la dirección del flujo de soluciones cuando t crece. Por lo que con el sistema autónomo, todos los segmentos del campo de direcciones en una región donde $f(x, y)$ es positiva apuntarán a la derecha

o caso contrario apuntaran a la izquierda cuando $f(x,y)$ es negativa. Si $f(x,y) = 0$, empleamos $g(x,y)$ para decidir si el flujo crece o disminuye (Nagle et al., 2005, pp. 264-25).

Como sabemos, un punto de equilibrio es estable si el sistema vuelve al punto de equilibrio después de una pequeña perturbación. En el caso de un centro, si el sistema se perturba ligeramente, las trayectorias se alejarán del punto de equilibrio pero eventualmente volverán a él. Esto significa que un punto de equilibrio que es un centro es un punto estable, pero no es asintóticamente estable (es decir, las trayectorias no convergen hacia él).

Ejemplo 3.18. Determine la naturaleza del punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema autónomo lineal. Además, determine si el punto de equilibrio es estable o no y trace el campo de direcciones en el plano de fase.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 7y. \end{cases}$$

Determinamos la ecuación característica asociada al sistema donde $a = -5, b = 3, c = 2, d = -7$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (-5 - 7)\lambda + ((-5)(-7) - (3)(2)) &= 0, \\ \lambda^2 + 12\lambda + 29 &= 0. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo, determinar la traza y el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema =

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix},$$

donde $\tau = -5 - 7 = -12 < 0$, y el determinante $\Delta = (-5)(-7) - (2)(3) = 29 > 0$ entonces de la ecuación (3.7) característica se tiene

$$\lambda^2 + 12\lambda + 29 = 0.$$

Al analizar el discriminante de la ecuación característica tenemos que $\tau^2 - 4\Delta = (-12)^2 - 4(29) = 28 > 0$, entonces como el determinante de la matriz de coeficientes es positivo al igual que su discriminante y su traza es negativa se tendrá entonces autovalores propios que serán reales, distintos con el mismo signo, es decir, el punto de equilibrio será un nodo, y debido a que los autovalores propios serán ambos negativos (debido a que $\tau < 0$) entonces el punto de equilibrio será estable asintótico. Esto lo verificamos al trazar el plano de fase del sistema (utilizamos varias trayectorias para verificarlo):

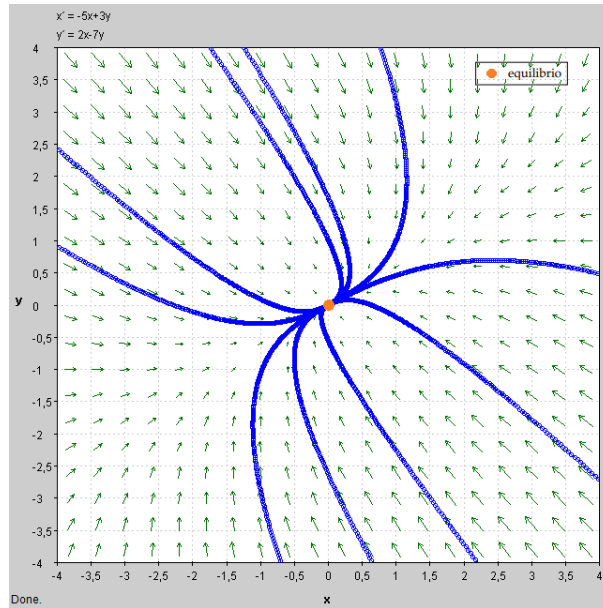


Ilustración 2-3: Naturaleza del punto de equilibrio $(0,0)$
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Como se sabe los puntos de equilibrio para sistemas autónomos lineales pueden clasificarse en varias tipos: nodo estable o inestable, espiral estable o inestable, centro o punto de silla.

3.1.2. Análisis cualitativo para sistemas no lineales

Como sabemos un análisis cualitativo nos permite obtener información sobre el comportamiento del conjunto de soluciones asociadas a un sistema de ecuaciones diferenciales sin resolverlo; como vimos, una técnica para el estudio del comportamiento cualitativo de soluciones del sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x,y), \\ \frac{dx}{dt} = g(x,y), \end{cases}$$

es el análisis del plano de fase, donde primero buscamos los puntos de equilibrio y luego bosquejamos su plano de fase. Debido a que un sistema autónomo puede o no ser lineal, entonces el plano de fase también nos ayuda a realizar un análisis cualitativo sobre sistemas no lineales.

La clasificación de los puntos de equilibrio varía cuando consideramos un sistema autónomo no lineal, los cuales son los de interés dado que el modelo de Lotka-Volterra es un sistema autónomo no lineal.

3.1.2.1. Clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas no lineales

Para el caso de un sistema autónomo no lineal es posible inferir más información acerca de las soluciones cercanas al punto de equilibrio a partir de un análisis del punto de equilibrio del sistema lineal asociado (a este proceso se le denomina linealización se lo verá en la siguiente sección), esta relación sin embargo presenta diferentes situaciones (Ross, 1981, pp. 648-662), (Zill, 2015, pp. 664-665):

- El punto de equilibrio del sistema no lineal se puede categorizar como el punto de equilibrio del sistema lineal asociado para cinco casos distintos ya vistos: nodo estable asintótico, punto espiral estable asintótico, punto espiral inestable, nodo inestable y punto de silla. Las soluciones tienen iguales propiedades generales que las soluciones del sistema lineal y conforme se acercan al punto de equilibrio el parecido es mayor.
- Si los autovalores propios, asociados al sistema no lineal son reales e iguales ($\tau^2 - 4\Delta = 0$) con signo negativo ($\tau < 0$) entonces el punto de equilibrio es estable en el sistema lineal, pero el punto de equilibrio puede ser un punto espiral estable o un nodo estable del sistema no lineal. De manera análoga si los autovalores propios son reales e iguales ($\tau^2 - 4\Delta = 0$) con signo positivo ($\tau > 0$) entonces el punto de equilibrio es inestable en el sistema lineal, pero el punto de equilibrio puede ser un punto espiral inestable o un nodo inestable del sistema no lineal.
- Si los autovalores propios son imaginarios puros ($\Delta = 0$ y $\tau = 0$), el punto de equilibrio puede ser un punto espiral estable/inestable o un centro (no es posible determinar si es estable o inestable).

Esta clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas no lineales no nos permite obtener una respuesta precisa cuando los los autovalores propios son imaginarios puros, por lo que existen un método cualitativo que nos permite aproximar un sistema no lineal a un punto de equilibrio al asociarlo con un sistema lineal, para así determinar su clasificación en las cercanías de un punto de equilibrio.

3.1.2.2. Proceso de linealización

El texto de (Blanchard et al., 1999, pp. 410-411) nos dice que, la linealización se basa en expresar una función con una versión lineal aproximada, la cual es válida en un intervalo muy pequeño de valores de la variable independiente. La linealización de una función diferenciable $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ resulta ser la ecuación de la recta tangente a f en el punto $y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$. Para valores de x próximos a x_0 se tendrá que los puntos de $f(x)$ estarán cerca de los puntos de la recta tangente, por ende los valores de $y(x)$ se pueden usar para obtener aproximaciones de los correspondientes valores de $f(x)$.

La linealización para sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales es un método para estudiar la estabilidad local de un punto de equilibrio, para ello consideremos el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y), \end{cases} \quad (3.8)$$

y supongamos que el único punto de equilibrio para el sistema es (x_0, y_0) . Lo que se quiere hacer es entender qué sucede con las soluciones cerca del punto (x_0, y_0) , es decir linealizar el sistema en las cercanías del punto (x_0, y_0) , para ello establezcamos las nuevas variables

$$\begin{aligned} u &= x - x_0, \\ v &= y - y_0, \end{aligned}$$

las cuales posicionan al punto de equilibrio al origen, y cuando x, y estén cerca del punto de equilibrio entonces u, v tienden a 0. El sistema escrito en términos de u, v al despejar x, y resulta ser

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x,y) = f(x_0+u, y_0+v), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x,y) = g(x_0+u, y_0+v), \end{cases}$$

teniendo así

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x_0+u, y_0+v), \\ \frac{dv}{dt} = g(x_0+u, y_0+v). \end{cases} \quad (3.9)$$

Ahora se tiene que eliminar los términos no lineales en las expresiones du/dt y dv/dt , para ello es necesario estudiar f y g con cuidado. Es posible estudiar una función al analizar su mejor aproximación lineal la cual está dada por el plano tangente para funciones de dos variables teniendo así

$$\begin{aligned} f(x_0+u, y_0+v) &\approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right)u + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)v, \\ &\approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right)(x-x_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)(y-y_0). \end{aligned}$$

esta última es la ecuación para el plano tangente a la superficies f en (x_0, y_0) . Con esto podemos entonces reescribir el sistema (3.9) como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right)(x-x_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)(y-y_0) + \dots \\ \frac{dv}{dt} = g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\right)(x-x_0) + \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\right)(y-y_0) + \dots \end{cases}$$

donde la última expresión en ambas ecuaciones del sistema son los términos que deseamos omitir al construir la aproximación lineal del sistema, son los términos que forman la diferencia entre el plano tangente y la función. Como (x_0, y_0) es el único punto de equilibrio para el sistema entonces $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, teniendo así

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \right) (y - y_0) + \dots \\ \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \right) (y - y_0) + \dots \end{cases}$$

Entonces el sistema no lineal (3.8) puede ser aproximado en las cercanías del punto de equilibrio (x_0, y_0) mediante el sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \right) (y - y_0), \\ \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \right) (y - y_0). \end{cases} \quad (3.10)$$

Con notación matricial y como sabemos que $du/dt = dx/dt$ y $dv/dt = dy/dt$, se puede reescribir el sistema (3.10) como

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial x} & \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \\ \frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial x} & \frac{\partial g_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0). \quad (3.11)$$

donde la matriz \mathbf{A} de las derivadas parciales recibe el nombre de matriz Jacobiana en el punto de equilibrio $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$, siendo (3.11) el sistema linealizado en el punto de equilibrio (x_0, y_0) .

Usamos este proceso de linealización para estudiar el comportamiento de soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) y determinar la estabilidad del punto de equilibrio con el siguiente Teorema (proveniente de (Zill, 2015, p. 463)).

Teorema 3.19. (Criterio de estabilidad para sistemas autónomos): Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema autónomo (3.8), donde $f(x, y), g(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en las cercanías de (x_0, y_0) :

- Si los autovalores propios de \mathbf{A} (matriz jacobiana de (3.11)) tienen parte real negativa, entonces (x_0, y_0) es un punto de equilibrio estable asintótico.
- Si \mathbf{A} tiene un valor propio con parte real positiva, entonces (x_0, y_0) es un punto de equilibrio

inestable.

Veamos un ejemplo donde utilizaremos todo lo anteriormente descrito.

Ejemplo 3.19. Vamos a clasificar cada punto de equilibrio del siguiente sistema autónomo no lineal y con ello graficar su plano de fase

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

Primero determinamos los puntos de equilibrio del sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ 2y = 0, \end{cases}$$

teniendo así

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio del sistema no lineal son $(1,0)$, $(-1,0)$, y para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema es necesario linealizar el sistema no lineal, para ello es necesario determinar la matriz Jacobiana

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x} & \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial y} \\ \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial x} & \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial y} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 2x_{(x_0,y_0)} & -2y_{(x_0,y_0)} \\ 0_{(x_0,y_0)} & 2_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

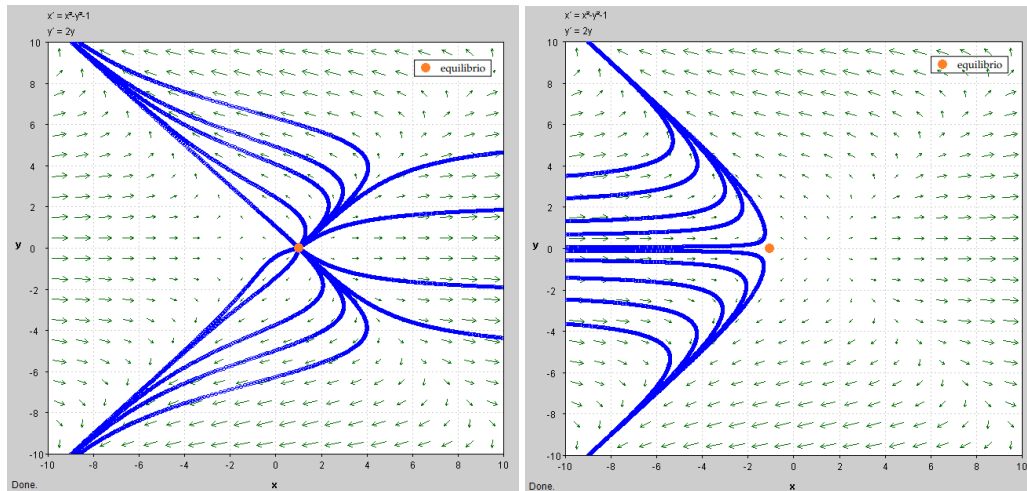
Al evaluar la matriz Jacobiana en ambos puntos de equilibrio se tiene

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para el punto $(1,0)$ se tiene una traza $\tau = 4$, un determinante de $\Delta = 4$ y con ello un discriminante de $\tau^2 - 4\Delta = 0$, es decir el sistema linealizado tiene autovalores propios que son reales, iguales con signo positivo entonces el punto $(1,0)$ es inestable pero no podemos clasificar más este punto.

Para el punto $(-1,0)$ se tiene una traza $\tau = 0$, un determinante de $\Delta = -4 < 0$ y con ello un discriminante de $\tau^2 - 4\Delta = 16 > 0$, es decir el sistema linealizado tiene autovalores propios distintos, con signos opuestos entonces el punto $(-1,0)$ es un punto de silla. Esto se verifica al

trazar el plano de fase para el sistema no lineal



(a) Representación para el punto $(1, 0)$

(b) Representación para el punto $(-1, 0)$

Ilustración 3-3: Campo de dirección en el plano de fase para $(1, 0)$ y $(-1, 0)$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

La linealización es capaz de brindarnos información útil acerca del comportamiento local de las soluciones cercanas a los puntos de equilibrio, pero es limitada si deseamos encontrar las soluciones cuya posición inicial no sea cercana a un punto de equilibrio o si queremos conseguir una visión global de la familia de curvas solución. Para tener una imagen mucho más completa del comportamiento de las trayectorias nos sirve de mucha ayuda utilizar el método cualitativo de las isoclinas nulas (nullclinas o nulclinales).

3.1.2.3. Isoclinas nulas

En ocasiones al momento de representar el plano de fase es complicado juzgar el comportamiento de las trayectorias a largo plazo para cubrir esto existen las isoclinas nulas (nullclinas o nulclinales) una herramienta poderosa para el análisis cualitativo de sistemas no lineales.

Definición 3.28. Consideremos el sistema autónomo (3.8), la isoclina nula de dx/dt son todos los puntos (x, y) donde $f(x, y) = 0$, y la isoclina nula de dy/dt son todos los puntos (x, y) donde $g(x, y) = 0$

Para la isoclina nula de dx/dt , la componente x es 0 esto implica que tiene movimiento hacia arriba o hacia abajo (vertical). Sobre la isoclina nula de dy/dt , la componente y es cero, por lo que sobre esta el movimiento es hacia la izquierda o la derecha (horizontal). Como se sabe, cuando $f(x, y) = g(x, y) = 0$ se tiene un punto de equilibrio entonces las intersecciones de las isoclina nulas generan estos puntos.

Ejemplo 3.20. Grafiquemos las isoclinas nulas y el campo de direcciones del siguiente sistema

para así describir el posible destino de las trayectorias correspondientes a la condición inicial dada.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 - x - y, x(t_0) = 2, \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2, y(t_0) = 1. \end{cases}$$

La isoclina nula de dx/dt son todos los puntos (x,y) que verifican

$$\frac{dx}{dt} = 2 - x - y = 0,$$

entonces la isoclina nula resulta ser la recta $y = 2 - x$. Sobre esta recta dx/dt es cero, es decir, que el movimiento será vertical a lo largo de esta recta.

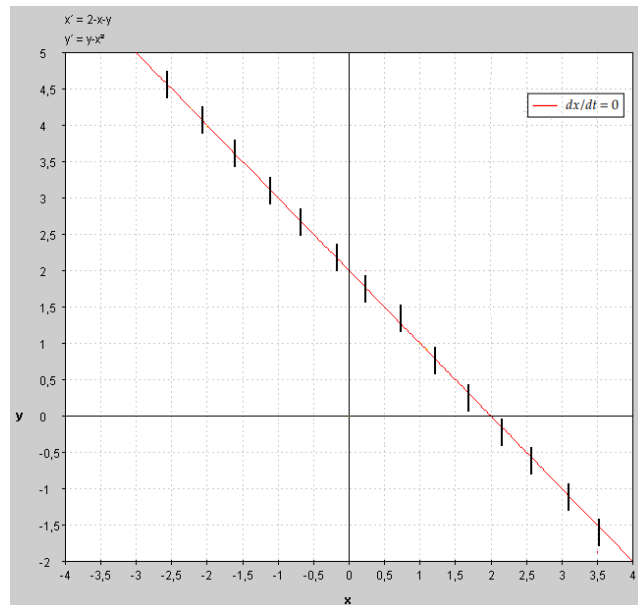


Ilustración 4-3: Isoclina nula para dx/dt

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

La isoclina nula de dy/dt son ahora los puntos donde

$$\frac{dy}{dt} = y - x^2 = 0,$$

lo que resulta ser de la recta $y = x^2$. Por esta recta dy/dt es cero, lo que implica que el movimiento es horizontal a lo largo de esta recta.

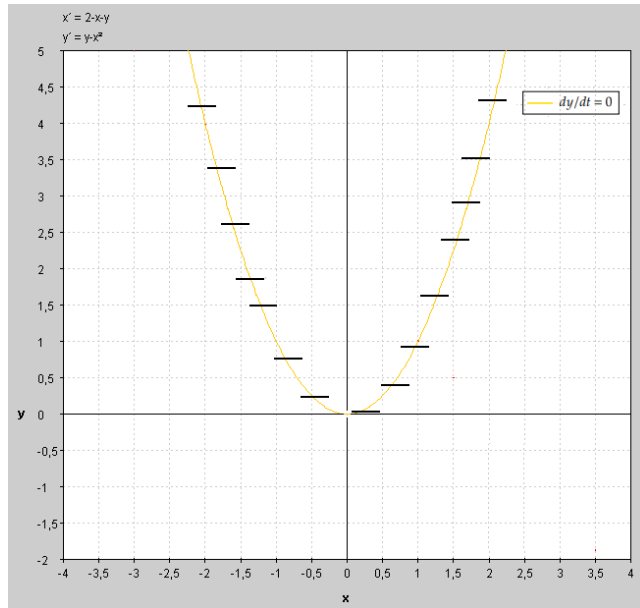


Ilustración 5-3: Isoclina nula para dy/dt
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Al intersecar ambas isoclinas nulas se tienen los puntos de equilibrio del sistema que son $(1, 1)$ y $(-2, 4)$, dividiendo al plano de fase en varias regiones

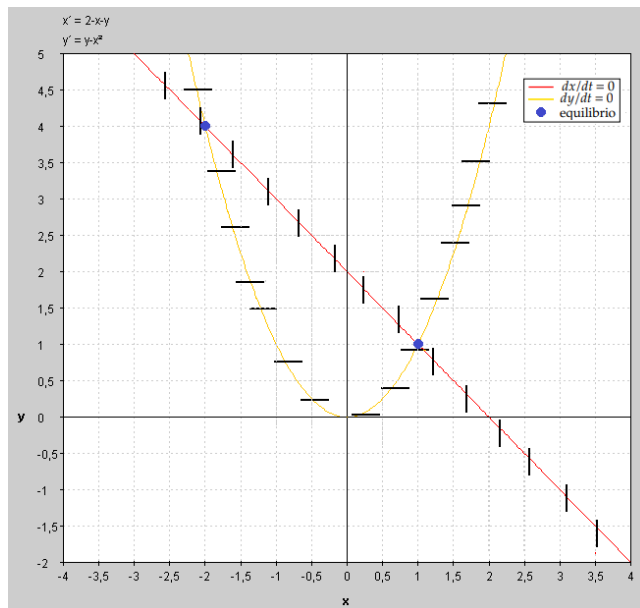


Ilustración 6-3: Unión de las isoclinas nulas del sistema
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Sobre el plano de fase, si $dx/dt > 0$ (o $dx/dt < 0$) las trayectorias se mueven hacia la derecha (o izquierda), y si $dy/dt > 0$ (o $dy/dt < 0$) las trayectorias se desplazan hacia la arriba (o abajo)

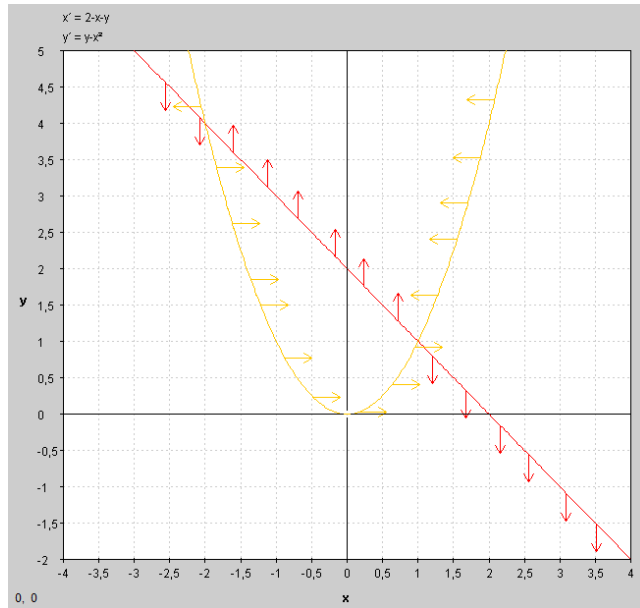


Ilustración 7-3: Direccionamiento de las trayectorias
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Con esto podemos trazar el campo de direcciones para el sistema teniendo:

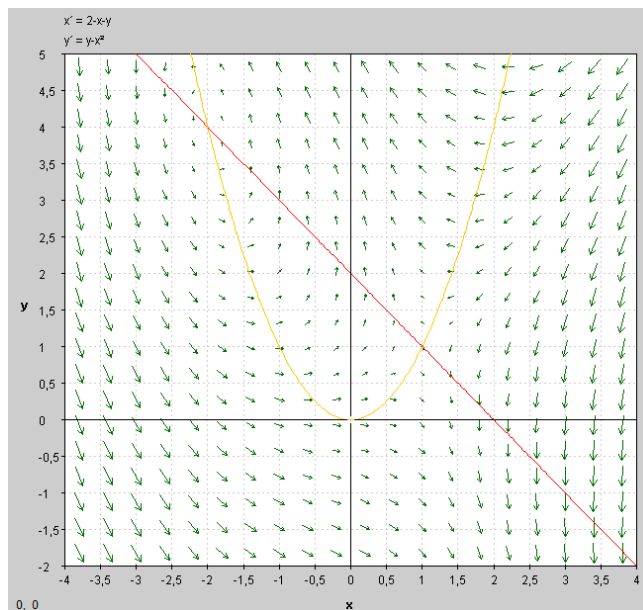


Ilustración 8-3: Campo de direcciones con las isoclinas nulas
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Entonces para lo condición inicial $x(t_0) = 2, y(t_0) = 1$ esta se dirige hacia abajo y hacia la derecha sin límite.

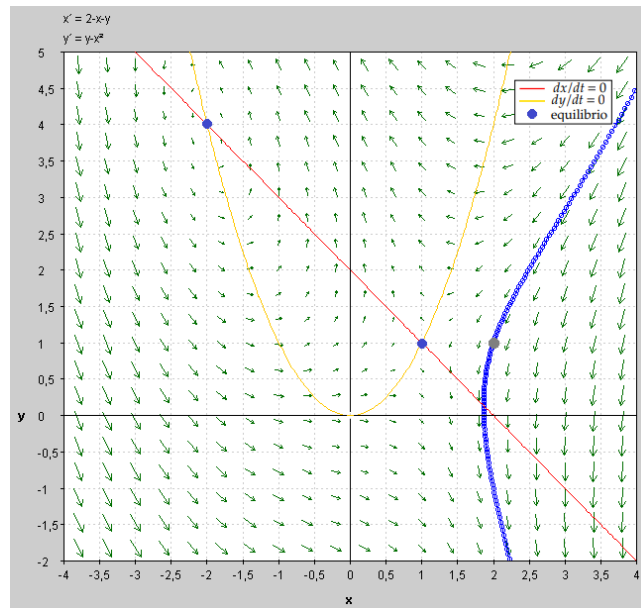


Ilustración 9-3: Condición $x(t_0) = 2, y(t_0) = 1$ en el campo de direcciones

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Observación 3.10. Por lo general las isoclinas nulas no son siempre únicas para cada ecuación del sistema y tampoco son rectas, sino que también pueden ser curvas.

Es importante tener en cuenta la diferencia que existe entre una solución de línea recta y una isoclina nula, ya que la solución de línea recta es una trayectoria que corresponde a un autovalor propio real para un sistema lineal; en cambio una isoclina nula es una curva a lo largo de la cual el movimiento es puramente horizontal o vertical (aunque es posible que una isoclina nula y una solución de línea recta coincidan).

Estos métodos cualitativos descritos nos ayudarán a analizar el sistema de Lotka-Volterra de manera cualitativa, pero para cumplir con el objetivo del trabajo aún es necesario describir el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden.

3.2. Análisis numérico

Para documentar el análisis numérico, con el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de dos ecuaciones diferenciales se utilizan los textos de (Mathews et al., 1999, pp. 497-538), (Burden y Faires, 2002, pp. 272-320) y (Chapra y Canale, 1999, pp. 740-763).

Los métodos numéricos para EDO son instrucciones utilizadas para encontrar aproximaciones numéricas a las soluciones de una EDO. Existen varias ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse con funciones típicas (solución analítica), pero para efectos prácticos, una aproximación numérica a la solución suele ser suficiente. Existen varios algoritmos que pueden usarse para

calcular tal aproximación, algunos más eficaces y simples que otros.

Las ecuaciones diferenciales no lineales son más complejas de resolver que las lineales y hay ocasiones incluso donde no tienen una solución analítica. A pesar de esto, existen varios métodos y procesos analíticos disponibles para estimar la solución de una ecuación diferencial no lineal, como el método de Runge-Kutta.

3.2.1. *Runge-Kutta de cuarto orden*

Hay que tener en claro que algunos de los métodos numéricos con los que se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son generalizaciones de los métodos numéricos para aproximar una ecuación de primer orden.

Nosotros estamos interesados en analizar y estudiar la aproximación con el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden ya que dicho método nos brinda un grado de precisión razonable.

Es importante recalcar que el método de Runge-Kutta se lo puede usar sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir del tipo $dx/dt = f(t, x)$, con t siendo la variable independiente y x una variable dependiente.

En resumen, el método de Runge-Kutta de cuarto orden es preciso y seguro ya que es una buena elección para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales tienen soluciones complejas sobre un intervalo específico.

Para una ecuación de primer orden, el método de Runge-Kutta para una ecuación de primer orden simula la precisión del método de la serie de Taylor de cuarto orden el cual consiste en calcular la aproximación de

$$x_{k+1} = x_k + r_1 k_1 + r_2 k_2 + r_3 k_3 + r_4 k_4. \quad (3.12)$$

En el que k_1, k_2, k_3 y k_4 tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, x_k), \\ k_2 &= hf(t_k + ha_1, x_k + b_1 k_1), \\ k_3 &= hf(t_k + ha_2, x_k + b_2 k_1 + b_3 k_2), \\ k_4 &= hf(t_k + ha_3, x_k + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde $h = (b - a)/M$ es el tamaño de paso, que se elige de acuerdo con la precisión requerida, al emparejar estos coeficientes con los del método de la serie Taylor de cuarto orden, los matemáticos cuyo método lleva sus nombres, obtuvieron un sistema de 11 ecuaciones con 13 incógnitas, para el

cual al tener la elección más favorable se tienen los siguientes valores para las 13 incógnitas

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = 1, \\ b_1 = b_3 = \frac{1}{2}; b_2 = b_4 = b_5 = 0; b_6 = 1, \\ r_1 = r_4 = \frac{1}{6}; r_2 = r_3 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

al sustituir estas expresiones en la aproximación de x_{k+1} , es decir en (3.12) y (3.13) se tiene

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6} (f_1 + 2f_2 + 3f_3 + f_4),$$

en lugar de establecer como k_i para (3.13) se establece como $f_i, i = 1, \dots, 4$ teniendo la siguiente estructura

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k, x_k), \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1\right), \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2\right), \\ f_4 &= f(t_k + h, x_k + hf_3). \end{aligned}$$

Obteniendo así la fórmula que permite programar el método de Runge Kutta de cuarto orden para una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial.

3.2.1.1. Error del método

Al iterar un algoritmo se obtiene una sucesión de valores x_1, x_2, \dots, x_n y en general dichos valores no coincidirán con el de la solución exacta $x(t_i)$ ya que el algoritmo solo proporciona una aproximación por polinomio de Taylor de cuarto grado. La diferencia se conoce como error local de truncamiento, el cual se produce en cada una de las iteraciones, y es diferente al error global de truncamiento el cual es la diferencia exacta entre la solución exacta y la calculada con el método, que en este caso es el de Runge Kutta de cuarto orden.

Para las siguientes definiciones que se encuentran en (Mathews et al., 1999, pp. 474-475) vamos a suponer que $\{(t_k, x_k)\}_{k=0}^M$ es un conjunto de aproximaciones a la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con una condición inicial.

Definición 3.29. El error local de truncamiento se define como

$$\varepsilon_{n+1} = x(t_{n+1}) - x_{n+1}, \text{ con } n = 1, \dots, M - 1 \quad (3.14)$$

este es el error cometido desde t_n hasta t_{n+1} .

Definición 3.30. El error global de truncamiento se define como

$$e_n = x(t_n) - x_n, \text{ con } n = 1, \dots, M \quad (3.15)$$

este es el error cometido entre la solución exacta y la solución aproximada determinada con el método.

Definición 3.31. El error global final se define como

$$E(x(b), h) = |x(b) - x_M|, \quad (3.16)$$

este es el error al final del intervalo $[a, b]$, el cual es usado para analizar el comportamiento del error para valores de h diferentes y obtener una aproximación deseada.

Para obtener una fórmula para el error local de truncamiento, partimos de una serie de Taylor de orden n

$$x(t_{n+1}) = x(t_n + h) = x(t_n) + \frac{dx(t_n)}{dt}h + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2x(t_n)}{dt^2} + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}x(t_n)}{dt^{n+1}}.$$

Por lo tanto para el método de Runge-Kutta de orden cuatro se utilizan los cinco primeros términos de la serie, donde se toma como referencia del error al término más importante no considerado ignorando los demás términos, es decir, como el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere cuatro evaluaciones por paso entonces el error local de truncamiento resulta ser

$$\frac{h^5}{5!} \frac{d^5x(t_n)}{dt^5} = \mathcal{O}(h^5).$$

En general si un método numérico de una ecuación diferencial posee error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^{n+1})$, entonces el error de truncamiento global resulta ser $\mathcal{O}(h^n)$, por lo que para Runge-Kutta de cuarto orden el error de truncamiento global es

$$\mathcal{O}(h^4) = \frac{h^4}{4!} \frac{d^4x(t_n)}{dt^4}.$$

El siguiente Teorema establece la relación que existe entre el error global final y el tamaño de paso, el Teorema se lo encuentra en (Mathews et al., 1999, p. 501).

Teorema 3.20. (Precisión del método de Runge-Kutta). Sea $x(t)$ la solución del PVI en el intervalo $[a, b]$, si $x(t) \in \mathcal{C}^5[t_0, b]$ y $\{(t_k, x_k)\}_{k=0}^M$, es la sucesión de aproximaciones generada por el método

de Runge-Kutta de cuarto orden, siendo M el número de pasos, entonces

$$|e_{k+1}| = |x(t_{k+1}) - x_{k+1}| = \mathcal{O}(h^5),$$

$$|e_k| = |x(t_k) - x_k| = \mathcal{O}(h^4).$$

En particular el error global final cumple

$$E(x(b), h) = |x(b) - x_M| = \mathcal{O}(h^4).$$

Observación 3.11. Hay que tener en cuenta que para determinar el error del método de Runge-Kutta de cuarto orden es necesario conocer la solución exacta de la ecuación diferencial ordinaria, por lo tanto dado que el objetivo del trabajo es obtener una aproximación o idea de la solución usando los métodos numéricos y cualitativos sin resolver el sistema, entonces nosotros vamos a omitir la determinación del error al usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

3.2.1.2. Runge-Kutta para sistemas de dos ecuaciones diferenciales

Dado que el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra esta compuesto de dos ecuaciones diferenciales no lineales, es decir, es un sistema de ecuaciones ordinarias entonces para implementar el método de Runge-Kutta de cuarto orden como explica (Mathews et al., 1999, pp. 529-535), consideramos un sistema con PVI de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \end{cases}$$

para

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Una solución de este sistema consiste en encontrar un par de funciones derivables $x(t), y(t)$ tal que al reemplazar $t, x(t), y(t)$ en las funciones $f(t, x, y), g(t, x, y)$ obtengamos como resultado las derivadas respectivas dx/dt y dy/dt

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = f(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = g(t, x(t), y(t)), \end{cases}$$

con la condición inicial

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Donde es posible encontrar una solución numérica del sistema considerado en un intervalo dado, al considerar los diferenciales, es decir

$$\begin{cases} dx = f(t, x, y)dt. \\ dy = g(t, x, y)dt. \end{cases}$$

El método de Euler para resolver este problema es fácil de formular pero para obtener un grado de precisión razonable es factible utilizar un método con un orden mayor como el de Runge-Kutta de cuarto orden, donde se tienen las fórmulas (Mathews et al., 1999, p. 529-531)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + f_4), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 3g_3 + g_4), \end{aligned}$$

donde f_i, g_i con $i = 1, \dots, 4$ tienen la forma

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k, x_k, y_k), & g_1 &= g(t_k, x_k, y_k), \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right), & g_2 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1\right), \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right), & g_3 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_2, y_k + \frac{h}{2}g_2\right), \\ f_4 &= f(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3), & g_4 &= g(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3). \end{aligned}$$

Con todo esto podemos dar paso en el siguiente capítulo a realizar un análisis de manera cualitativa y numérica sobre el modelo de Lotka-Volterra, un sistema compuesto de ecuaciones diferenciales no lineales.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se realiza un estudio sobre el modelo de Lotka-Volterra y su aplicación a un problema de dinámica poblacional con la ayuda de la documentación realizada previamente en los capítulos posteriores.

Para el análisis (específicamente la parte cualitativa) del modelo de Lotka-Volterra nos basamos también en los estudios realizados por (García, 2011, pp. 3-39), (Méndez y Barrera, 2013, pp. 24-34) y (Rodríguez, 2012, pp. 11-42). Para introducirnos al estudio del modelo de Lotka-Volterra nos basamos en los estudios hechos por (Asencio, 2017, pp. 3-10), (Cano, 2011, pp. 5-44) y (Cámara, 2000, pp. 5-15).

Y como se mencionó estos análisis serán puestos a prueba sobre un problema determinado de dinámica poblacional que se encuentra en el texto del autor (Burden y Faires, 2002, p. 323).

El sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra contempla un ecosistema en donde conviven dos especies (depredadora y presa) que interactúan entre ambas; la especie depredadora basa su dieta únicamente en consumir a la especie presa, y la especie presa posee una fuente de alimento ilimitado del propio ecosistema. El modelo de Lotka-Volterra se construye a partir de las siguientes hipótesis:

- Cuando se tenga la ausencia de la especie depredadora, es decir cuando $y(t) = 0$, se tendrá un aumento para la especie presa proporcional a su tamaño por lo que la cantidad de presas aumenta de manera exponencial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x, \\ x(t) &= x_0 e^{\alpha t} \end{aligned} ; \alpha > 0, x(0) = x_0.$$

- Cuando se tenga la ausencia de la especie presa, es decir cuando $x(t) = 0$, entonces la especie depredadora disminuye en cantidad ya que esta especie en el ecosistema basa su dieta únicamente en la especie presa, por lo que la cantidad de la especie depredadora decrecerá de manera exponencial hasta desaparecer

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\delta y, \\ y(t) &= y_0 e^{-\delta t} \end{aligned} ; \delta > 0, y(0) = y_0.$$

- La tasa de mortalidad de la especie presa dependerá del número de interacciones que tenga con los depredadores, es decir, los encuentros entre ambas especies afecta al número de presas

disminuyendo su cantidad y esto se describe por

$$-\beta xy ; \beta > 0.$$

- La tasa de natalidad de la especie depredadora dependerá del número de interacciones con las presas ya que depende únicamente de la especie presa como su alimento, entonces los encuentros entre ambas especies favorece al crecimiento de los depredadores y se describe por

$$\gamma xy ; \gamma > 0.$$

Con estas hipótesis se construye el modelo de Lotka-Volterra para la dinámica de poblaciones entre dos especies (presa y depredadora) el cual se representa por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $x(t), y(t) \geq 0$ son la cantidad de especies presa y depredadora respectivamente; α, β, γ y δ son constantes positivas, y además dx/dt y dy/dt representan la razón de cambio en la población de las especies presa y depredadora por unidad de tiempo respectivamente.

Como ya se mencionó sobre las propiedades de las trayectorias, para un sistema autónomo las trayectorias no pueden cortarse, sino se tendría x e y soluciones, las cuales cumplirían que $x(t_0) = y(t_1)$, para t_0, t_1 diferentes tiempos. Pero en un sistema autónomo sabemos que toda trayectoria representa infinitas soluciones, lo que contradiría el Teorema de existencia y unicidad (Cano, 2011, pp. 29-30).

Debido a que no existen otras especies que interactúen en el mismo ecosistema el modelo de Lotka-Volterra resulta ser cerrado. La especie depredadora no compite con otra especie y no se tiene migración hacia el ecosistema ni desde el ecosistema, además el sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal y autónomo ya que los coeficientes β, γ dependen de las variables $x(t), y(t)$ y la variable t no aparece de forma explícita en ninguna de las ecuaciones del sistema.

La existencia y unicidad para un dominio acotado del sistema de Lotka-Volterra se encuentra garantizada en el texto de (Takeuchi, 1996, pp. 17-46) o de manera más formal y concreta se lo puede encontrar en el artículo de (Shakil et al, 2017, pp. 2-12), por lo que gracias a la garantía de existencia y unicidad de una solución tiene sentido realizar un análisis cualitativo y numérico sobre el sistema de Lotka-Volterra.

4.1. Análisis del modelo de Lotka-Volterra

Existen tres formas de analizar un modelo de ecuaciones diferenciales

- Analíticamente: Buscar funciones $x(t), y(t)$ que satisfagan el sistema.
- Numéricamente: Obtener una aproximación de la solución con condiciones iniciales y constantes ya establecidas.
- Cualitativamente: Entender la naturaleza del modelo y obtener una idea justa del comportamiento de la solución (o las soluciones) sin resolverlo analíticamente ni numéricamente.

Analizaremos el modelo de Lotka-Volterra de manera numérica y cualitativa de acuerdo con el propósito de este trabajo; primero analizaremos el modelo de manera cualitativa usando las definiciones y resultados vistos en el Capítulo III, para así entender el comportamiento de las soluciones del sistema. Existen varios casos particulares sobre este modelo que son:

1. Al considerar el punto $(x(t), y(t)) = (0, 0)$, es decir cuando no se encuentran presentes ninguna de las dos especies involucradas en el modelo, entonces se tiene que este es un punto de equilibrio ya que satisface el sistema y así la órbita de la solución trivial se reduce al origen.
2. Al considerar la ausencia de la especie depredadora, esto es $y(t) = 0$, entonces la trayectoria sobre el plano de fases es la semirrecta en el eje x cuyo origen es el punto x_0 que recorre en sentido positivo del eje x .
3. Al considerar la ausencia de la especie presa, esto es $x(t) = 0$, entonces la trayectoria sobre el plano de fases es la semirrecta en el eje y cuyo origen es el punto y_0 que recorre en sentido negativo del eje y hasta llegar al origen.

4.1.1. Isoclinas nulas

Las isoclinas son el lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a las curvas integrales tienen la misma dirección, las isoclinas para el sistema de Lotka-Volterra vienen dadas por el sistema

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = a, \\ \gamma xy - \delta y = b, \end{cases} ; a, b \in \mathbb{R} .$$

La isoclina nula (nulclinal) $dx/dt = dy/dt = 0$ proporciona las líneas en las que podrían encontrarse los puntos máximos y mínimos de cada una de las curvas integrales de cada ecuación del sistema, además la isoclina nula nos permite encontrar también los puntos de equilibrio del sistema que son

los puntos de intersección del sistema en el plano de fases

$$\begin{cases} x(\alpha - \beta y) = 0, \\ y(\gamma x - \delta) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = 0 \vee x = \frac{\delta}{\gamma}. \end{cases}$$

Debido a que α, β, γ y δ son constantes positivas la isoclina nula para $dx/dt = 0$ (presas) resultan ser dos líneas constantes ubicadas en el cuadrante positivo del plano xy . Además $dx/dt = 0$ nos quiere decir que el componente horizontal de la velocidad es cero por lo que el movimiento es puramente vertical y esto solo ocurre cuando $x = 0$ o $y = \alpha/\beta$.

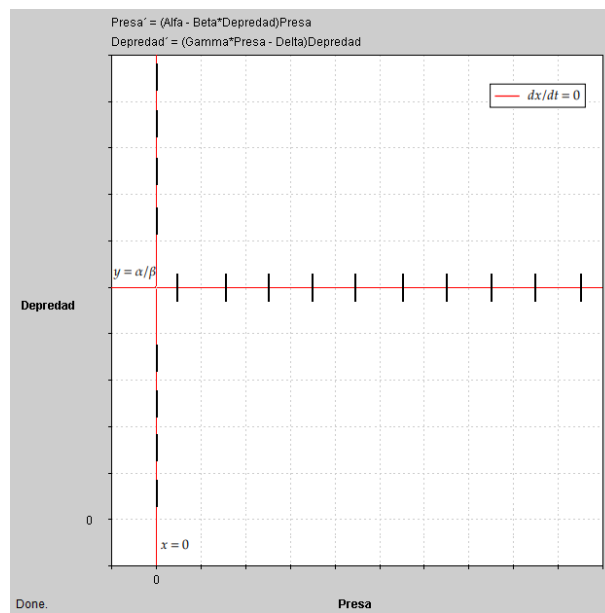


Ilustración 1-4: Isoclina nula presa $dx/dt = 0$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

La isoclina nula para dy/dt (depredadores) resultan ser de la misma forma dos líneas constantes en el cuadrante positivo del plano xy . Además $dy/dt = 0$ nos quiere decir que el componente vertical de la velocidad es cero por lo que el movimiento es puramente horizontal y esto solo ocurre cuando $y = 0$ o $x = \delta/\gamma$.

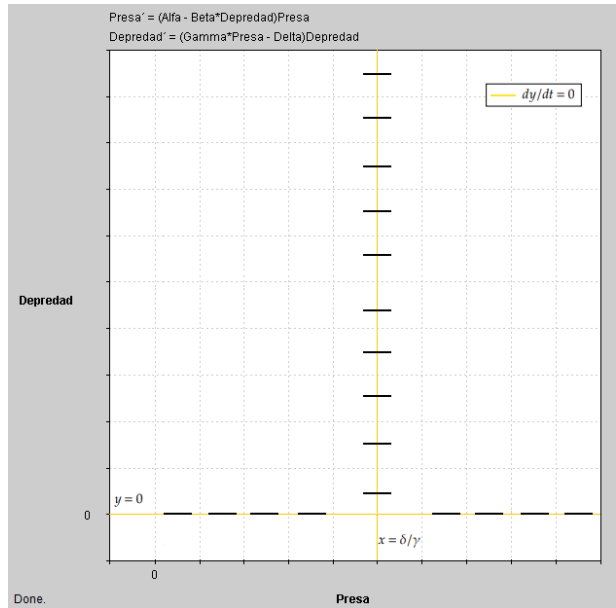


Ilustración 2-4: Isoclina nula depredador $dy/dt = 0$
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Al unir estos comportamientos de las isoclinas nulas de la especie presa y de la especie depredadora los puntos de intersección serán los puntos de equilibrio del sistema, además las isoclinas forman regiones diferentes donde se tiene el siguiente gráfico:

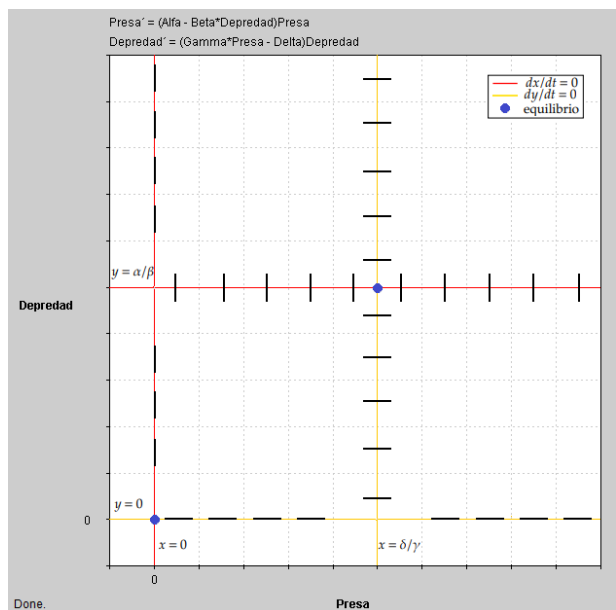


Ilustración 3-4: Isoclinas nulas presa-depredador
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Para comprender la dirección de las trayectorias del sistema de ecuaciones de Lotka Volterra en cada una de las regiones que se forman vamos a estudiar su plano de fase.

4.1.2. Plano de fase

El estudio de los signos de la razón de cambio en la población de ambas especies con respecto al tiempo dx/dt y dy/dt ayudará a obtener la dirección del plano en cada una de las regiones formadas con la intersección de las isoclinas nulas de cada ecuación del sistema. Los signos van a depender de los valores que tomen dy/dt y dx/dt .

Los signos para la razón de cambio de la especie presa por unidad de tiempo dx/dt cambian cuando

$$\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow \alpha x - \beta xy > 0 \Rightarrow x(\alpha - \beta y) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge (\alpha - \beta y) > 0, \\ x < 0 \wedge (\alpha - \beta y) < 0. \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \Rightarrow \alpha x - \beta xy < 0 \Rightarrow x(\alpha - \beta y) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge (\alpha - \beta y) < 0, \\ x < 0 \wedge (\alpha - \beta y) > 0. \end{cases}$$

En ambos casos se tiene una peculiaridad que implica tener $x < 0$, lo que quiere decir que el signo de x cambia al cruzar la isoclina $x = 0$, pero por hipótesis, el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra no puede tener valores para $x(t)$ que sean negativos, por lo tanto el estudio de la dirección de las trayectorias en el plano solo se estudia cuando

$$\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow \alpha x - \beta xy > 0 \Rightarrow x(\alpha - \beta y) > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge (\alpha - \beta y) > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge y < \alpha/\beta,$$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \Rightarrow \alpha x - \beta xy < 0 \Rightarrow x(\alpha - \beta y) < 0 \Rightarrow x > 0 \wedge (\alpha - \beta y) < 0 \Rightarrow x > 0 \wedge y > \alpha/\beta,$$

teniendo que $dx/dt > 0$ cuando $y < \alpha/\beta$ o, $dx/dt < 0$ cuando $y > \alpha/\beta$, todo esto siempre para $x > 0$.

Analicemos el cambio de signo para la razón de cambio de la especie depredadora por unidad de tiempo dy/dt , y decimos que los signos cambian cuando

$$\frac{dy}{dt} > 0 \Rightarrow \gamma xy - \delta y > 0 \Rightarrow y(\gamma x - \delta) > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \wedge (\gamma x - \delta) > 0, \\ y < 0 \wedge (\gamma x - \delta) < 0. \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow \gamma xy - \delta y < 0 \Rightarrow y(\gamma x - \delta) < 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \wedge (\gamma x - \delta) < 0, \\ y < 0 \wedge (\gamma x - \delta) > 0. \end{cases}$$

Al igual que antes existe la posibilidad de tener $y < 0$, pero este caso no puede ocurrir ya que el sistema de ecuaciones de Lotka Volterra no puede tener valores negativos para $y(t)$ por ende el

estudio de la dirección de las trayectorias en el plano se estudia en cuando

$$\frac{dy}{dt} > 0 \Rightarrow \gamma xy - \delta y > 0 \Rightarrow y(\gamma x - \delta) > 0 \Rightarrow y > 0 \wedge (\gamma x - \delta) > 0 \Rightarrow y > 0 \wedge x > \delta/\gamma,$$

$$\frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow \gamma xy - \delta y < 0 \Rightarrow y(\gamma x - \delta) < 0 \Rightarrow y > 0 \wedge (\gamma x - \delta) < 0 \Rightarrow y > 0 \wedge x < \delta/\gamma,$$

teniendo que $dy/dt > 0$ cuando $x > \delta/\gamma$, o $dy/dt < 0$ cuando $x < \delta/\gamma$, todo esto para $y > 0$.

Con esto tenemos que el plano de fases para el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra se divide en cuatro regiones, las cuales denotamos como: Región: \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} .

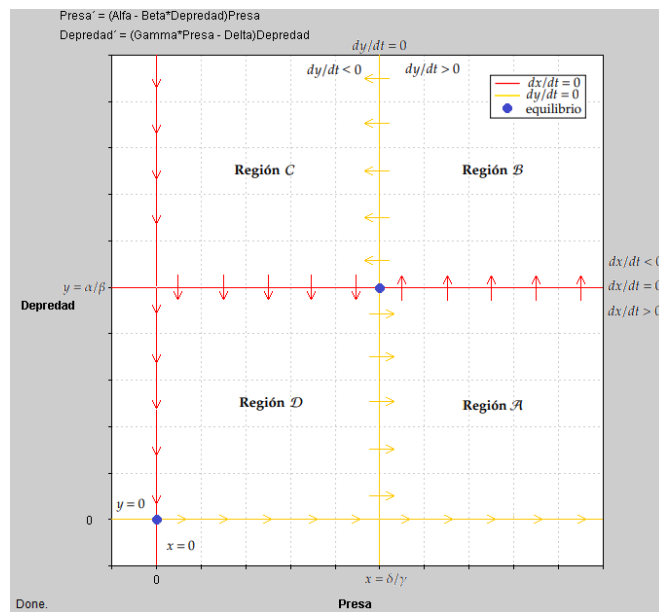


Ilustración 4-4: Regiones para el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Al realizar un análisis sobre cada una de estas regiones tenemos que las direcciones de las trayectorias se comportan de manera diferente en cada una de las regiones.

1. **Región \mathcal{A} :** Para esta región se tiene primero que $dx/dt > 0$ y esto sucede cuando se tiene $y < \alpha/\beta$, es decir que la razón de cambio en la población de la especie presa por unidad de tiempo incrementa cuando la cantidad de la especie depredadora es menor que α/β ; por otro lado se tiene que $dy/dt > 0$ lo que implicaba que $x > \delta/\gamma$ es decir que también existe un incremento para la razón de cambio en la población de la especie depredadora por unidad de tiempo cuando la cantidad de la especie presa sea mayor que δ/γ , en otras palabras a mayor cantidad de especie presa existe mayor cantidad en la especie depredadora.

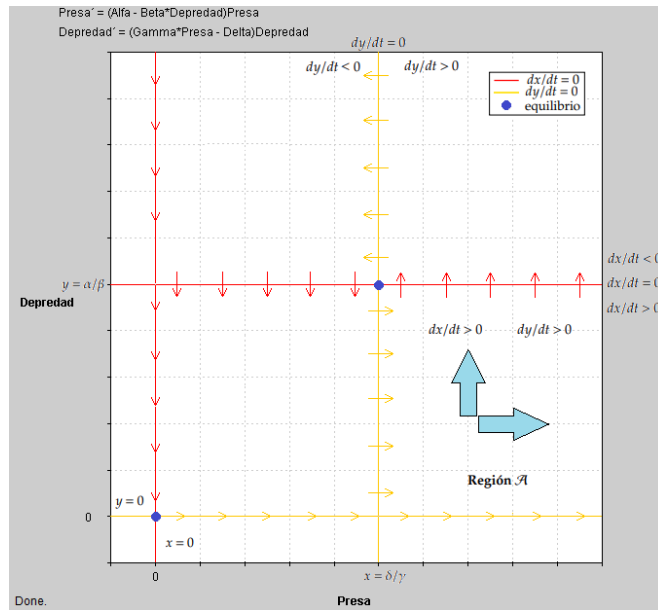


Ilustración 5-4: Región \mathcal{A} en el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

2. **Región \mathcal{B} :** En esta región se presenta un cambio de dirección para las trayectorias dx/dt ya que ahora se tiene $dx/dt < 0$ y esto ocurre cuando $y > \alpha/\beta$, es decir, que la razón de cambio en la población de la especie presa por unidad de tiempo decrece cuando la cantidad de la especie depredadora es mayor a α/β , en cambio el comportamiento es similar en la dirección de las trayectorias de dy/dt ya que se tiene $dy/dt > 0$ y esto ocurre cuando $x > \delta/\gamma$; entonces esto significa que a mayor cantidad en la especie depredadora se tendrá menor cantidad de la especie presa.

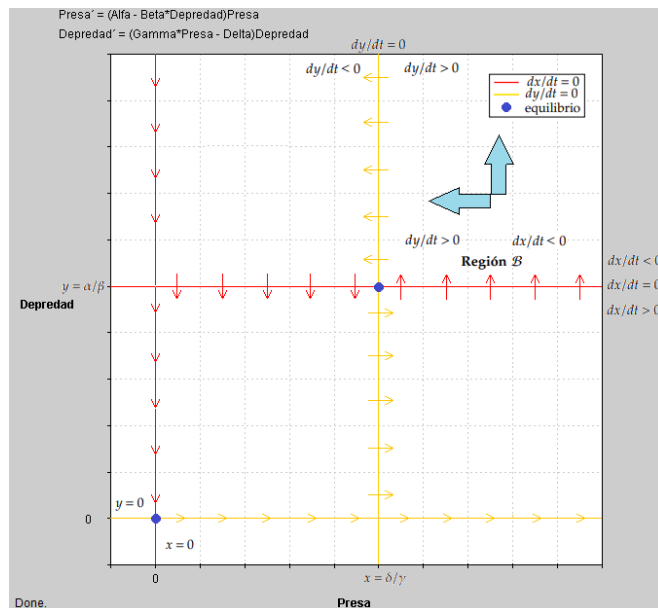


Ilustración 6-4: Región \mathcal{B} en el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

3. **Región C:** Para esta región se tiene un comportamiento en las direcciones de las trayectorias totalmente contrario a lo visto en la región A, ya que se tiene $dx/dt < 0$ y esto ocurre cuando $y > \alpha/\beta$, lo que significa que la razón de cambio en la población de la especie presa por unidad de tiempo reduce cuando la cantidad de la especie depredadora es mayor que α/β ; por otro lado se tiene que $dy/dt < 0$ lo que implicaba que $x < \delta/\gamma$ es decir que de igual manera se tiene un decrecimiento para la razón de cambio en la población de la especie depredadora por unidad de tiempo cuando la cantidad de la especie presa sea menor que δ/γ , en otras palabras a menor cantidad en la especie presa existe menor cantidad de la especie depredadora.

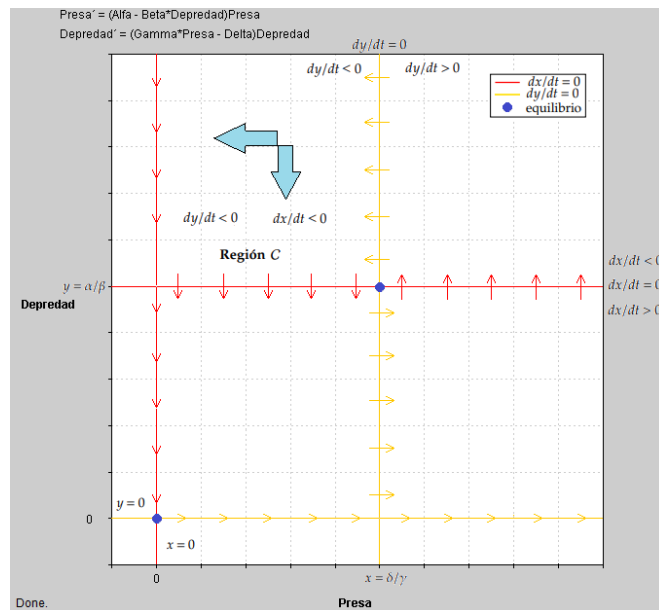


Ilustración 7-4: Región C en el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

4. **Región D:** Por último, en esta región se tiene también un comportamiento en las direcciones de las trayectorias opuesto con las trayectorias de la región B, es decir se tiene $dx/dt > 0$ que ocurre cuando $y < \alpha/\beta$; también se tiene que $dy/dt < 0$ y esto ocurre cuando $x < \delta/\gamma$, lo que quiere decir es que, a menor cantidad de la especie depredadora se tendrá mayor cantidad en la especie presa.

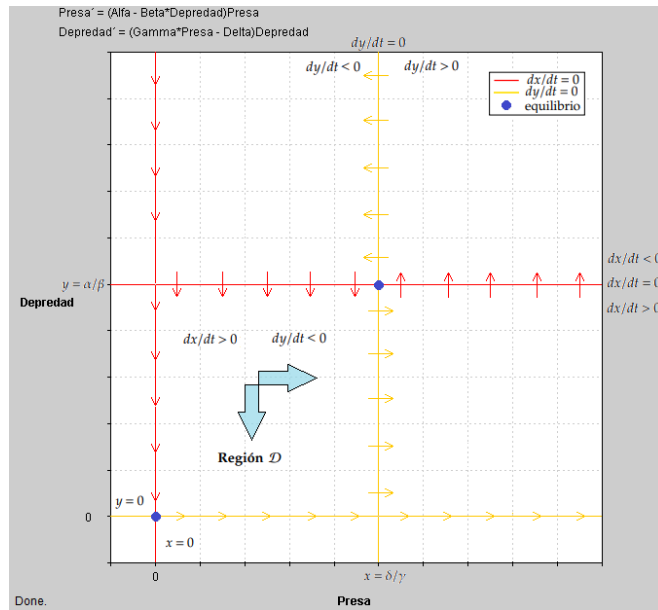


Ilustración 8-4: Región \mathcal{D} en el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Por lo tanto con el análisis realizado sobre estas regiones se deduce que las trayectorias serán cerradas debido a la dirección de las trayectorias en cada una de las regiones donde cada una de estas envuelven al punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$. Al unir estas regiones obtenemos el campo de direcciones en el plano de fase para el sistema de Lotka-Volterra, en el cual el movimiento de las orbitas es contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

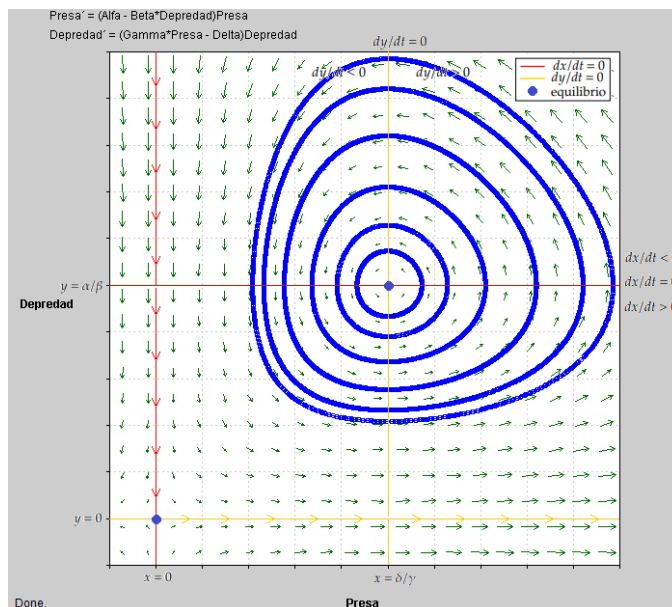


Ilustración 9-4: Campo de direcciones en el plano de fase
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Nota. Cualquiera que sea la condición inicial para el sistema (siempre que no sea sobre los ejes o en el punto de equilibrio) la trayectoria de la solución dará la vuelta y regresará a su punto de partida.

Con el análisis cualitativo anterior, podemos concluir que todas las soluciones deben recorrer en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, y se alejarán del punto $(0,0)$.

El plano de fase junto con las nulclinas nos brindan una idea bastante aceptable del comportamiento de las trayectorias solución, pero para constatar estos hechos en las cercanías de los puntos de equilibrio vamos usar el proceso de linealización y así determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

4.1.3. Puntos de equilibrio

Como ya se mencionó, para determinar los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra debemos calcular los puntos en los que la razón de cambio en la población de las especies presa y depredadora por unidad de tiempo se anulan, es decir para calcular los puntos de equilibrio debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0, \\ \gamma xy - \delta y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\alpha - \beta y) = 0, \\ y(\gamma x - \delta) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = \frac{\alpha}{\beta}, \\ y = 0 \vee x = \frac{\delta}{\gamma}. \end{cases}$$

Teniendo así que los puntos que anulan el sistema simultáneamente son $(0,0)$ y $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, es decir estos puntos son de equilibrio, pero dado que el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra es un sistema no lineal, para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio debemos asociarlo con un sistema lineal en las cercanías de los puntos de equilibrio, es decir, debemos linealizar el sistema en los puntos $(0,0)$ y $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$.

4.1.4. Linealización

Recordemos que la linealización consiste en estudiar la estabilidad local de un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, es decir reemplazar el término no lineal por un término lineal que se aproxime lo más posible al término no lineal en las cercanías del punto de equilibrio, con esto podremos clasificar el punto de equilibrio del sistema original. Esto significa que a los puntos de equilibrio $(0,0)$ y $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ vamos a asociarlos con un sistema lineal.

Dado que el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra es un sistema autónomo no lineal lo podemos aproximar en las cercanías del punto de equilibrio tal y como se mencionó en el Capítulo III sección (3.1.2.), mediante $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$ siendo \mathbf{A} la matriz jacobiana en \mathbf{X}_0 (punto de equilibrio).

1. Para el punto de equilibrio $(0,0)$ la matriz Jacobina \mathbf{A} resulta ser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y)_{(0,0)} & (-\beta x)_{(0,0)} \\ (\gamma y)_{(0,0)} & (\gamma x - \delta)_{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix},$$

entonces la linealización para las cercanías del punto de equilibrio resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha x \\ -\delta y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir, para el punto de equilibrio $(0,0)$ mediante el proceso de linealización se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = \alpha x, \\ y' = -\delta y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\delta y(t). \end{cases}$$

2. Para el punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ la matriz Jacobina \mathbf{A} resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y)_{(\delta/\gamma, \alpha/\beta)} & (-\beta x)_{(\delta/\gamma, \alpha/\beta)} \\ (\gamma y)_{(\delta/\gamma, \alpha/\beta)} & (\gamma x - \delta)_{(\delta/\gamma, \alpha/\beta)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces la linealización para las cercanías de $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\delta}{\gamma} \\ y - \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta\delta}{\gamma} \left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} \left(x - \frac{\delta}{\gamma}\right) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma}y \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta}x - \frac{\alpha\delta}{\beta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir para el punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ mediante el proceso de linealización se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma}y, \\ y' = \frac{\alpha\gamma}{\beta}x - \frac{\alpha\delta}{\beta}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma}y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}x(t) - \frac{\alpha\delta}{\beta}. \end{cases}$$

Nota. El sistema linealizado en las cercanías del punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ es un sistema lineal no homogéneo.

Con el sistema linealizado en las cercanías de los puntos de equilibrio ahora podemos clasificar los puntos del sistema y determinar su estabilidad.

4.1.5. Clasificación de los puntos de equilibrio

Para clasificar los puntos de equilibrio $(0,0)$ y $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ necesitamos considerar su matriz asociada con el proceso de linealización (matriz Jacobiana) y así obtener su traza, determinante y su discriminante $(\tau, \Delta, \tau^2 - 4\Delta)$.

1. El punto de equilibrio $(0,0)$ posee la matriz Jacobina

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix},$$

donde se tiene

$$\tau = \alpha - \delta,$$

$$\Delta = -\alpha\delta < 0,$$

$$\tau^2 - 4\Delta = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 - 4(-\alpha\delta) = \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2 > 0.$$

Debido a que $\tau^2 - 4\Delta > 0$ entonces se obtiene valores propios reales diferentes, y debido a que $\Delta < 0$ entonces los valores propios tendrán signos opuestos $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, esto lo comprobamos

usando la ecuación característica

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

$$\lambda^2 - (\alpha - \delta)\lambda + (-\alpha\delta) = 0,$$

$$\lambda^2 + (\delta - \alpha)\lambda - \alpha\delta = 0,$$

con la fórmula general tenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\delta - \alpha) \pm \sqrt{(\delta - \alpha)^2 - 4(-\alpha\delta)}}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha - \delta \pm (\alpha + \delta)}{2},$$

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\delta.$$

Por lo tanto según lo establecido en el Capítulo III el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un punto de silla, por ende es un punto inestable, esto también se verifica con el Criterio de Estabilidad Para los Sistemas Autónomos (3.19).

2. La matriz asociada al punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ resulta ser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

donde se tiene

$$\tau = 0 + 0 = 0,$$

$$\Delta = \alpha\delta > 0,$$

$$\tau^2 - 4\Delta = \tau^2 - 4\Delta = 0 - 4(\alpha\delta) = -4\alpha\delta < 0.$$

Debido a que $\tau^2 - 4\Delta < 0$ entonces se obtienen valores propios complejos, y además se tiene que $\Delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces los valores propios serán imaginarios puros

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

$$\lambda^2 + (\alpha\delta) = 0,$$

$$\lambda^2 + \alpha\delta = 0,$$

con la fórmula general tenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(\alpha\delta)}}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm 2\sqrt{(\alpha\delta)}i}{2},$$

$$\lambda_1 = \sqrt{(\alpha\delta)}i, \lambda_2 = -\sqrt{(\alpha\delta)}i.$$

Al recordar que el sistema original es un sistema autónomo no lineal entonces se tendría que el punto de equilibrio podría ser un punto espiral (estable o inestable) o un centro, pero esta posibilidad puede investigarse con el análisis realizado con el método del plano de fase ya visto. Dado que las trayectorias rodean al punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ entonces este punto es un centro, es decir es un punto de equilibrio estable (3.1.1.3.).

Esto también se verifica si analizamos el sistema lineal en las cercanías del punto de equilibrio, es decir analizar el sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma}y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}x - \frac{\alpha\delta}{\beta}. \end{cases}$$

Para resolver este sistema lineal empleamos lo estudiado en el capítulo II, sección (2.9.) sobre resolución de sistemas lineales. Dado que el sistema es lineal no homogéneo tendremos que hallar su solución particular y complementaria para obtener la solución general del sistema. Primero veamos su solución particular resolviendo el sistema homogéneo asociado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\beta\delta}{\gamma}y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}x, \end{cases}$$

para este sistema elegimos una solución del tipo

$$\begin{cases} x = k_1 e^{\lambda t}, \\ y = k_2 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

donde al sustituir en el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(k_1 e^{\lambda t}) = \left(-\frac{\beta\delta}{\gamma}\right)(k_2 e^{\lambda t}), \\ \frac{d}{dt}(k_2 e^{\lambda t}) = \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)(k_1 e^{\lambda t}), \end{cases}$$

se tendrá el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} \lambda k_1 e^{\lambda t} = \left(-\frac{\beta\delta}{\gamma}\right)(k_2 e^{\lambda t}) \\ \lambda k_2 e^{\lambda t} = \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)(k_1 e^{\lambda t}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\lambda k_1 + \left(-\frac{\beta\delta}{\gamma}\right)k_2, \\ 0 = \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)k_1 - \lambda k_2. \end{cases}$$

Para obtener soluciones no triviales de este último sistema empleamos la ecuación característica asociada al sistema

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\beta\delta}{\gamma}\right) &= 0, \\ \lambda^2 &= -\alpha\delta, \\ \lambda &= \pm\sqrt{\alpha\delta}i. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que autovalores propios del sistema son $\lambda = \pm\sqrt{\alpha\delta}i$ es decir se tiene autovalores propios complejos puros.

Observación 4.12. Dado que posee autovalores propios complejos puros entonces el punto de equilibrio del sistema lineal será un centro, esto nos lo dice el Teorema (3.17).

Al tomar $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\delta}i$ y al reemplazarlo en el sistema algebraico se tiene

$$\begin{cases} 0 = -k_1\sqrt{\alpha\delta}i - \frac{\beta\delta}{\gamma}k_2, \\ 0 = \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)k_1 - k_2\sqrt{\alpha\delta}i. \end{cases}$$

Una solución no trivial para esto último será tomar $k_1 = 1$ entonces $k_2 = -\gamma\sqrt{\alpha\delta}i/\beta\delta$, debido a que de la primera ecuación se tiene $k_2 = -k_1\gamma\sqrt{\alpha\delta}i/\beta\delta$, entonces al reemplazar estos valores en la solución propuesta se obtiene

$$\begin{cases} x = e^{\sqrt{\alpha\delta}it}, \\ y = -\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}i}{\beta\delta}e^{\sqrt{\alpha\delta}it}. \end{cases}$$

Al utilizar la fórmula de Euler la solución se transforma

$$\begin{cases} x = (\cos(\sqrt{\alpha\delta}t) + i\text{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t)), \\ y = \left(-\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}i}{\beta\delta}\right)(\cos(\sqrt{\alpha\delta}t) + i\text{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t)), \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} x = \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) + i\text{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t), \\ y = \frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta}\text{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t) - i\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta}\cos(\sqrt{\alpha\delta}t). \end{cases}$$

Como la parte real y la parte imaginaria de esta última son ambas soluciones entonces podemos obtener

$$\begin{cases} x = \cos(\sqrt{\alpha\delta}t), \\ y = \frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t), \end{cases}$$

y también se tiene

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t), \\ y = -\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t). \end{cases}$$

Ahora comprobemos que ambas soluciones son linealmente independientes con el Wronskiano

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) & \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t) \\ \frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t) & -\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) \end{vmatrix}, \\ &= (\cos(\sqrt{\alpha\delta}t)) \left(-\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) - \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) (\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t)), \\ &= -\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos^2(\sqrt{\alpha\delta}t) - \frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \operatorname{sen}^2(\sqrt{\alpha\delta}t), \\ &= \left(-\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \right) (\cos^2 + \operatorname{sen}^2) = -\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto ambas soluciones son linealmente independientes, entonces por el Teorema (2.12) la solución general del sistema homogéneo será

$$\begin{cases} x = c_1 (\cos(\sqrt{\alpha\delta}t)) + c_2 (\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t)), \\ y = c_1 \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) - c_2 \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) \right). \end{cases}$$

Ahora necesitamos encontrar la solución particular del sistema no homogéneo, para ello usaremos el método de coeficientes indeterminados, debido a que el sistema no homogéneo presenta términos constantes asumimos una solución constante

$$\begin{cases} x = p_1, \\ y = p_2, \end{cases}$$

al sustituirlo en el sistema no homogéneo se tendrá

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(p_1) = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma}(p_2), \\ \frac{d}{dt}(p_2) = \frac{\alpha\gamma}{\beta}(p_1) - \frac{\alpha\delta}{\beta}, \end{cases}$$

lo que nos brinda el sistema

$$\begin{cases} 0 = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \frac{\beta\delta}{\gamma} (p_2), \\ 0 = \frac{\alpha\gamma}{\beta} (p_1) - \frac{\alpha\delta}{\beta}, \end{cases}$$

y al resolverlo se tienen los valores de $p_1 = \delta/\gamma$ y $p_2 = \alpha/\beta$, por lo tanto la solución particular será

$$\begin{cases} x = \delta/\gamma, \\ y = \alpha/\beta. \end{cases}$$

Entonces por el Teorema (2.8) la solución general del sistema no homogéneo será

$$\begin{cases} x = c_1 \left(\cos(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) + c_2 \left(\sin(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) + \frac{\delta}{\gamma}, \\ y = c_1 \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \sin(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) - c_2 \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\delta}}{\beta\delta} \cos(\sqrt{\alpha\delta}t) \right) + \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Al graficar el plano de fase en el campo de direcciones tenemos lo siguiente

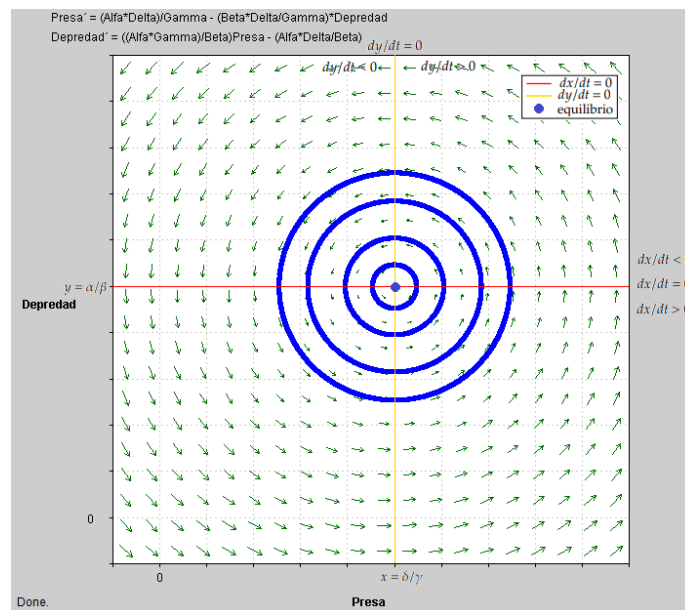
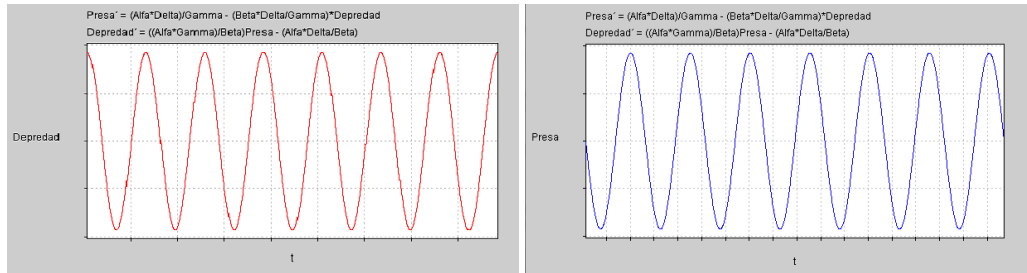


Ilustración 10-4: Plano de fase para el sistema linealizado en $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Lo que verifica que el punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ es un centro, y además sus soluciones tienen un comportamiento del tipo ondulatorio



(a) Solución $x(t)$ del sistema linealizado

(b) Solución $y(t)$ del sistema linealizado

Ilustración 11-4: Representación de la solución en el sistema linealizado

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Entonces en las cercanías del punto de equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ este se comporta como un centro para el sistema no lineal, teniendo así que sus trayectorias son cerradas.

Este análisis realizado con el proceso de linealización sólo es aplicable en las cercanías de los puntos de equilibrio $(0,0)$ y $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$. Como los términos que se cancelaron con el proceso de linealización son $-\beta xy$ y γxy entonces la aproximación lineal ya no será válida una vez que el tamaño estos términos sean considerables. Pero con el análisis cualitativo obtenido con las isoclinas nulas y el plano de fase entonces tenemos una imagen más completa del comportamiento de las trayectorias por lo tanto para el sistema de Lotka-Volterra el punto $(0,0)$ es un punto de silla y el punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ es un centro.

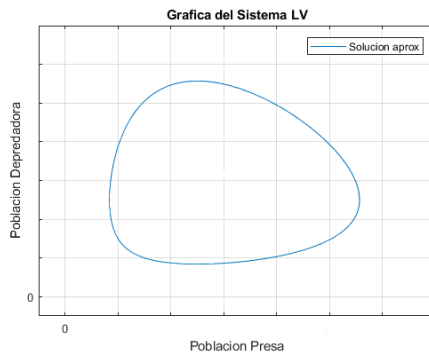
4.1.6. Runge-Kutta de cuarto orden para Lotka-Volterra

Para tener una idea más detallada del comportamiento de las soluciones de este sistema, usamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden y así también corroborar y fundamentar el análisis realizado anteriormente sobre las ecuaciones de Lotka-Volterra, dicho método lo aplicaremos en el software matemático MATLAB el cual posee varias herramientas para resolver numéricamente un sistema de EDO como ode23, ode45, etc. Donde ode23 utiliza un par de fórmulas de segundo y tercer orden para obtener una precisión intermedia y ode45 utiliza un par de fórmulas de cuarto y quinto orden para obtener una mayor precisión. Estas funciones se usan para conseguir la solución numérica de EDO las cuales utilizan los métodos de integración de Runge-Kutta de tamaño de paso variable, por lo que utilizamos el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso lo suficientemente óptimo para tener una buena aproximación a la solución dada una condición inicial para el sistema.

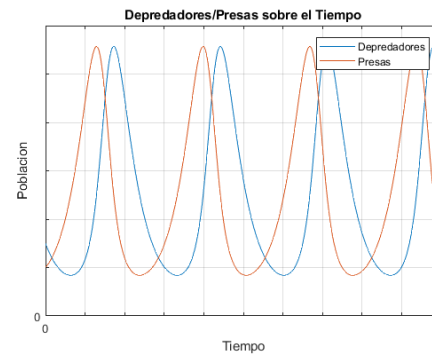
Para simular el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra, se creó una función que nos devuelva dos gráficas (una representa las poblaciones de ambas especies con respecto al tiempo, la otra muestra la relación entre ambas especies) y tres vectores columnas según sean dados los valores de α, β, γ y

δ en un intervalo del tiempo bajo ciertas condiciones iniciales dadas (Ver: **ANEXO A**).

De la linealización sabemos que si las condiciones iniciales se encuentran cerca del origen generan trayectorias que se mueven hacia afuera alejándose del origen, y si las condiciones iniciales están cerca del punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$, entonces las trayectorias giran alrededor del mismo punto siendo un centro.



(a) Trayectoria cerca del punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$

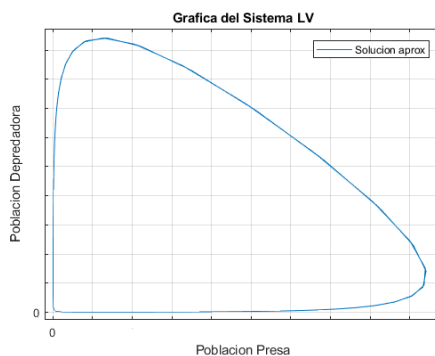


(b) Funciones solución cerca de $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$

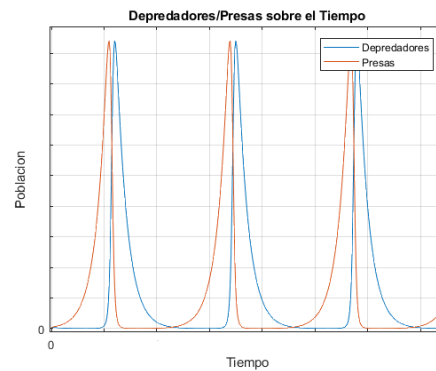
Ilustración 12-4: Solución cerca del punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Si tomamos una condición inicial cerca del punto $(0,0)$ la gráfica del método numérico nos muestra que la trayectoria se aleja del este punto pero a la vez esta es una trayectoria cerrada que gira alrededor de $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$.



(a) Trayectoria cerca del punto $(0,0)$



(b) Funciones solución cerca de $(0,0)$

Ilustración 13-4: Solución cerca del punto $(0,0)$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Para evidenciar los análisis realizados cualitativa y numéricamente sobre el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra necesitamos comprobarlo en una aplicación simulando un modelo de dinámica poblacional, por lo que se va a considerar el problema del libro de (Burden y Faires, 2002, p. 323).

4.2. Aplicación a un modelo de dinámica poblacional

Tomando los datos del problema de (Burden y Faires, 2002, p. 323) el cual nos pide predecir la población de dos especies usando el sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t), \end{cases}$$

para $t \in [0, 4]$, con poblaciones iniciales de 1000 y 500 para las presa y los depredadores respectivamente, donde $k_1 = 3, k_2 = 0.002, k_3 = 0.0006$ y $k_4 = 0.5$. Además nos pide esbozar las soluciones del problema, graficando ambas poblaciones con respecto a t y determinar los valores de x_1 y x_2 para que el modelo posea una solución estable.

Con la información del problema vemos que tenemos un modelo básico del tipo presa-depredador de Lotka-Volterra, entonces sobre este ejercicio vamos a realizar todos los análisis hechos anteriormente y a contestar las preguntas planteadas.

Nota. Adaptamos la notación vista anteriormente con la dada por el problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y, \end{cases} = \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1x_1 - k_2x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = k_3x_1x_2 - k_4x_2, \end{cases} = \begin{cases} x_1' = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t), \\ x_2' = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t). \end{cases}$$

Donde se tiene otro tipo de abreviación para las constantes y las incógnitas del ejercicio siendo la siguiente:

- La población presa: $x = x_1$.
- La población depredadora: $y = x_2$.
- Las constantes positivas: $\alpha = k_1 = 3, \beta = k_2 = 0.002, \gamma = k_3 = 0.0006, \delta = k_4 = 0.5$.

Con esta notación procedemos a estudiar el modelo con los datos presentados.

4.2.1. Isoclinas nulas

Las isoclinas nulas $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$ vienen dadas por

$$\begin{cases} x_1(k_1 - k_2x_2) = 0, \\ x_2(k_3x_1 - k_4) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{3}{0.002} = 1500, \\ x_2 = 0, x_1 = \frac{k_4}{k_3} = \frac{0.5}{0.0006} = \frac{2500}{3}. \end{cases}$$

Las isoclinas nulas para $dx_1/dt = 0$ (presas) resultan ser dos líneas constantes ubicadas en el cuadrante positivo del plano con movimiento vertical para $x_1 = 0$ o $x_2 = 1500$.

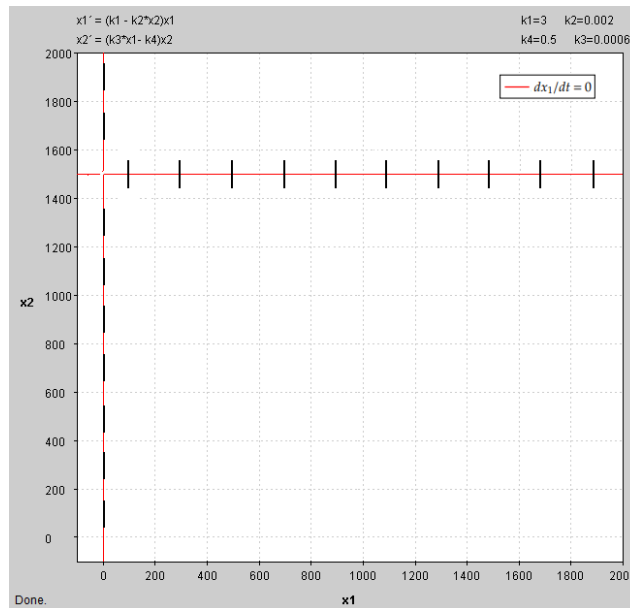


Ilustración 14-4: Isoclina nula especie presa $dx_1/dt = 0$
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Las isoclinas nulas para $dx_2/dt = 0$ (depredadores) son las dos rectas en el cuadrante positivo del plano con movimiento es puramente horizontal y esto ocurre cuando $x_2 = 0$ o $x_1 = 2500/3$.

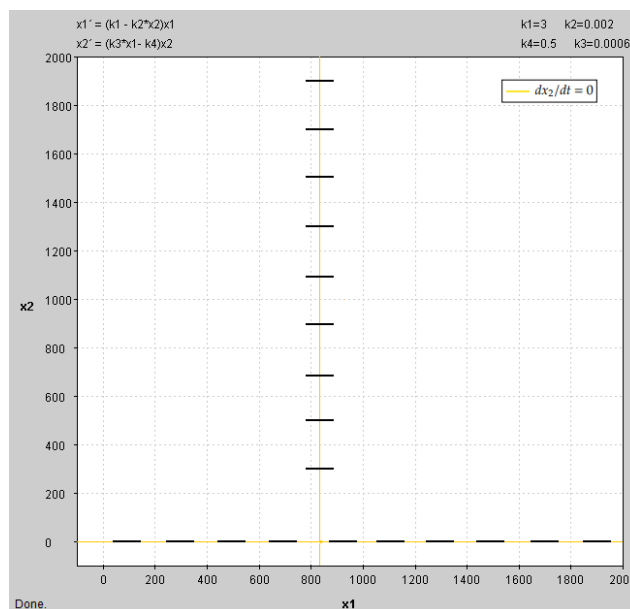


Ilustración 15-4: Isoclina nula especie depredadora
 $dx_2/dt = 0$
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Al unir las nulclinas de la especie presa y depredadora los puntos de intersección serán los puntos de equilibrio del sistema.

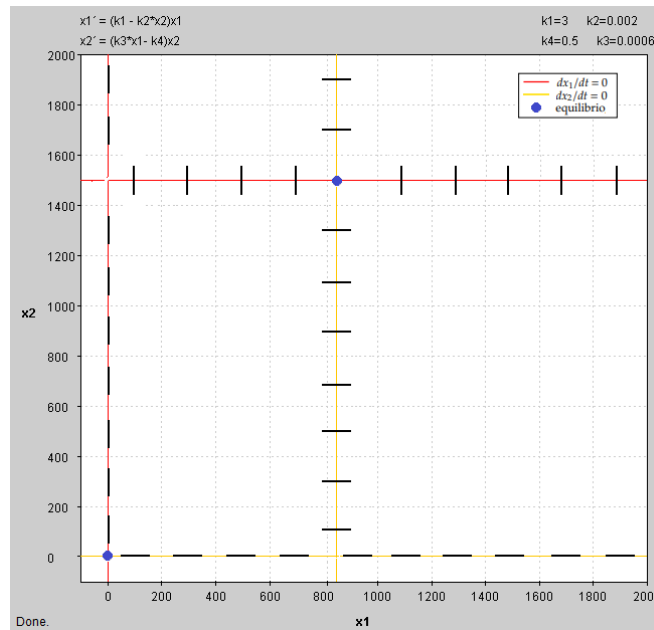


Ilustración 16-4: Isoclinas presa-depredador

$$dx_1/dt = dx_2/dt = 0$$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Para comprender la dirección de las trayectorias del sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra vamos a estudiar su plano de fase.

4.2.2. Plano de fase

Veamos cómo será el comportamiento de las soluciones a través del plano de fase para los valores dados con todas las consideraciones y observaciones del análisis del sistema.

1. Para la razón de cambio de la especie presa por unidad de tiempo dx_1/dt , se tiene que los signos cambian cuando

$$x_1' > 0 \Rightarrow k_1x_1 - k_2x_1x_2 > 0 \Rightarrow x_1(k_1 - k_2x_2) > 0 \Rightarrow x_1 > 0 \wedge (k_1 - k_2x_2) > 0 \Rightarrow x_2 < 1500,$$

$$x_1' < 0 \Rightarrow k_1x_1 - k_2x_1x_2 < 0 \Rightarrow x_1(k_1 - k_2x_2) < 0 \Rightarrow x_1 > 0 \wedge (k_1 - k_2x_2) < 0 \Rightarrow x_2 > 1500.$$

Es decir que $x_1' > 0$ cuando $x_2 < 1500$ y, $x_1' < 0$ cuando $x_2 > 1500$, todo esto siempre para valores de $x_1 > 0$.

2. El cambio de signo para la razón de cambio de la especie depredadora por unidad de tiempo dx_2/dt , sucede cuando

$$x_2' > 0 \Rightarrow k_3x_1x_2 - k_4x_2 > 0 \Rightarrow x_2(k_3x_1 - k_4) > 0 \Rightarrow x_2 > 0 \wedge (k_3x_1 - k_4) > 0 \Rightarrow x_1 > \frac{2500}{3},$$

$$x_2' < 0 \Rightarrow k_3x_1x_2 - k_4x_2 < 0 \Rightarrow x_2(k_3x_1 - k_4) < 0 \Rightarrow x_2 > 0 \wedge (k_3x_1 - k_4) < 0 \Rightarrow x_1 < \frac{2500}{3}.$$

Es decir que $x_2' > 0$ cuando $x_1 > 2500/3$ y que, $x_2' < 0$ cuando $x_1 < 2500/3$, todo esto para valores de $x_2 > 0$.

Teniendo así las cuatro regiones anteriormente mencionadas en el análisis de las ecuaciones de Lotka-Volterra; sobre cada región la dirección de las trayectorias se comporta de manera diferente, y las denotamos como regiones \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} .

1. **Región \mathcal{A}** : Para esta región se tiene primero que $x_1' > 0$ y esto sucede cuando $x_2 < 1500$, y también se tiene que $x_2' > 0$ cuando $x_1 > 2500/3$.

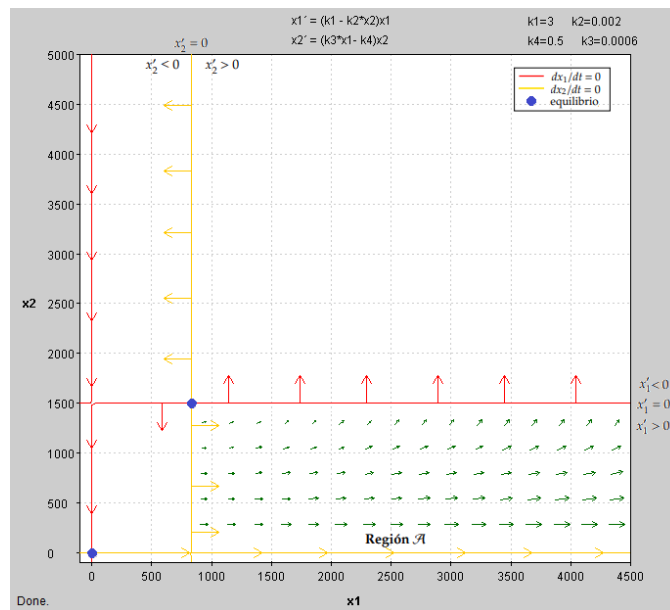


Ilustración 17-4: Región \mathcal{A} para un determinado problema
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

2. **Región \mathcal{B}** : Se presenta un cambio de dirección para las trayectorias x_1' ya que $x_1' < 0$ esto implica que $x_2 > 1500$, el comportamiento en la dirección de las trayectorias para x_2' es el mismo ya que se tiene $x_2' > 0$ y esto ocurriría cuando $x_1 > 2500/3$.

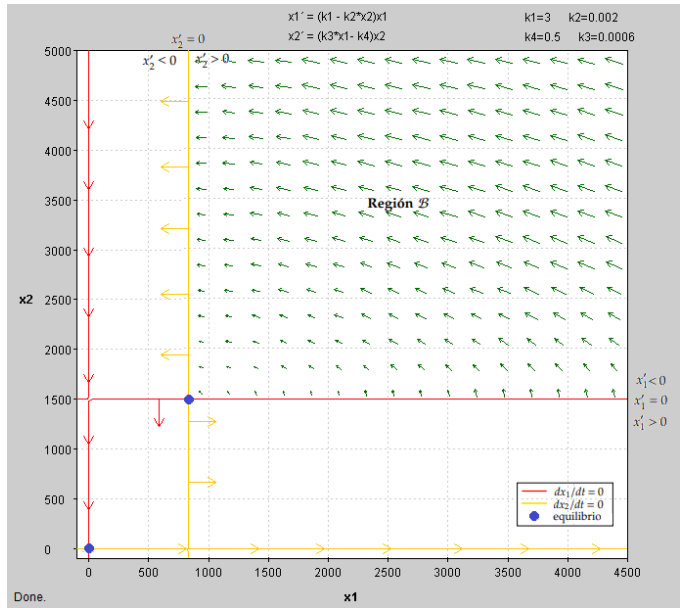


Ilustración 18-4: Región \mathcal{B} para un determinado problema
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

3. **Región \mathcal{C} :** El comportamiento en las direcciones de las trayectorias es contrario a la región \mathcal{A} , ya que $x_1' < 0$ y esto ocurre cuando $x_2 > 1500$, y por otro lado se tiene $x_2' < 0$ lo que implicaba que $x_1 < 2500/3$.

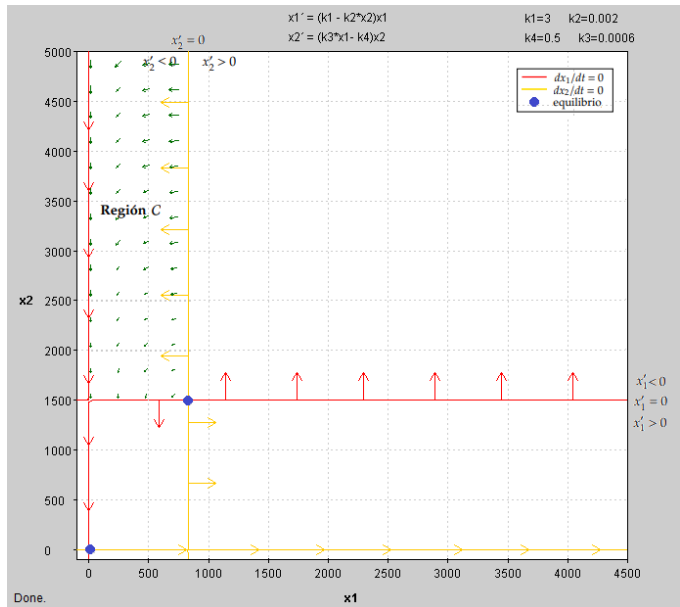


Ilustración 19-4: Región \mathcal{C} para un determinado problema
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

4. **Región \mathcal{D} :** Se tiene un comportamiento opuesto pero con las trayectorias de la región \mathcal{B} , es decir $x_1' > 0$ que ocurre cuando $x_2 < 1500$, y también se tiene $x_2' < 0$ y esto ocurre cuando $x_1 < 2500/3$.

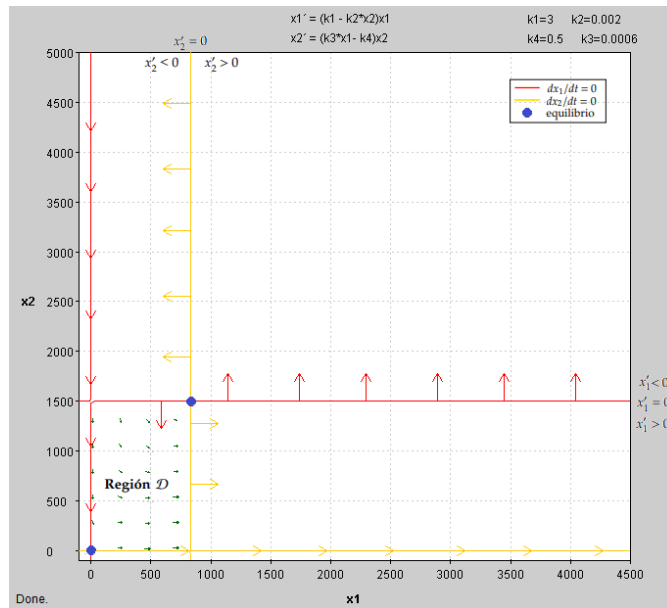


Ilustración 20-4: Región \mathcal{D} para un determinado problema
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Con esto se corrobora el análisis realizado sobre las ecuaciones de Lotka-Volterra para el modelo dado, es decir se tiene que las trayectorias envuelven al punto $(2500/3, 1500)$. Al unir estas regiones en una sola gráfica se tiene el campo de direcciones en el plano de fase para el modelo de dinámica poblacional con la condición inicial $x_1(0) = 1000, x_2(0) = 500$.

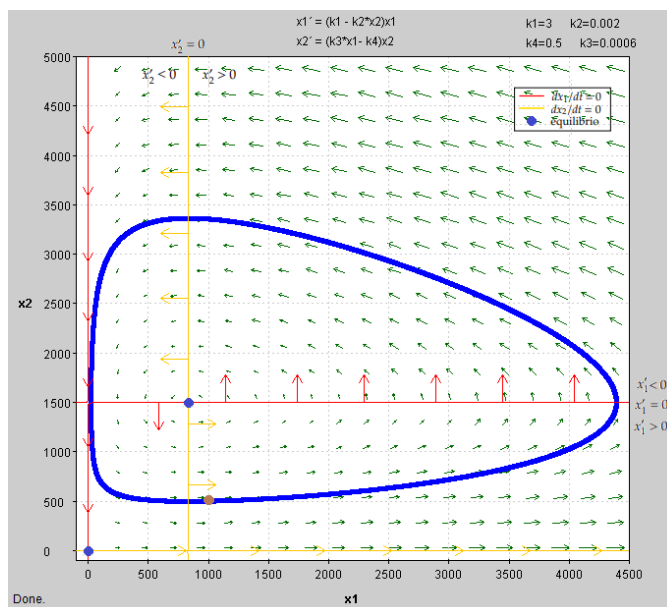


Ilustración 21-4: Representación cualitativa para $x_1(0) = 1000$
y $x_2(0) = 500$
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Para fundamentar el análisis cualitativo realizado en el plano de fase, vamos a determinar y clasificar los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra asociados al modelo

de dinámica poblacional con el análisis anteriormente realizado.

4.2.3. Puntos de equilibrio

Para determinar los puntos de equilibrio debemos calcular los puntos en los que la razón de cambio de ambas especies se anulan

$$\begin{cases} x_1' = 0, \\ x_2' = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1x_1 - k_2x_1x_2 = 0, \\ k_3x_1x_2 - k_4x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k_1 - k_2x_2) = 0, \\ x_2(k_3x_1 - k_4) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \vee x_2 = 1500, \\ x_2 = 0 \vee x_1 = \frac{2500}{3}. \end{cases}$$

Entonces los puntos que anulan el sistema simultáneamente son $(0, 0)$ y $(2500/3, 1500)$, (esto se verifica en la intersección de las isoclinas nulas del sistema) estos son los denominados puntos de equilibrio del sistema e Lotka-Volterra, por lo que ahora debemos de clasificarlos para determinar su estabilidad, para ello, usaremos el proceso de linealización ya que el modelo es un sistema no lineal.

4.2.4. Linealización

Con el análisis realizado podemos aproximar el sistema no lineal en las cercanías de los puntos de equilibrio haciendo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$, siendo \mathbf{A} la matriz Jacobiana en los respectivos puntos de equilibrio \mathbf{X}_0 .

1. Para el punto de equilibrio $(0, 0)$ la matriz Jacobina \mathbf{A} es

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{df_{(x_0,y_0)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x_2} \\ \frac{dg_{(x_0,y_0)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 - k_2x_2)_{(0,0)} & (-k_2x_1)_{(0,0)} \\ (k_3x_2)_{(0,0)} & (k_3x_1 - k_4)_{(0,0)} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces la linealización para las cercanías del punto de equilibrio $(0, 0)$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teniendo así el sistema lineal asociado al punto de equilibrio (0,0)

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = -0.5x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -0.5x_2(t). \end{cases}$$

2. Para el punto de equilibrio (2500/3, 1500) la matriz Jacobina resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (k_1 - k_2x_2)_{(2500/3,1500)} & (-k_2x_1)_{(2500/3,1500)} \\ (k_3x_2)_{(2500/3,1500)} & (k_3x_1 - k_4)_{(2500/3,1500)} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(0.002)\left(\frac{2500}{3}\right) \\ (0.0006)(1500) & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la linealización para las cercanías de (2500/3, 1500) resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2500}{3} \\ 1500 \end{pmatrix} \right], \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2500}{3} \\ x_2 - 1500 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}(x_2 - 1500) \\ \frac{9}{10}(x_1 - \frac{2500}{3}) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2500 - \frac{5}{3}x_2 \\ \frac{9}{10}x_1 - 750 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces mediante el proceso de linealización para el punto de equilibrio (2500/3, 1500) se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1' = 2500 - \frac{5}{3}x_2, \\ x_2' = \frac{9}{10}x_1 - 750, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2500 - \frac{5}{3}x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{9}{10}x_1(t) - 750. \end{cases}$$

Gracias a la linealización ahora podremos clasificar ambos puntos de equilibrio y determinar su estabilidad en sus cercanías.

4.2.5. Clasificación de los puntos de equilibrio

Para clasificar a los puntos $(0,0)$ y $(2500/3, 1500)$ del sistema no lineal necesitamos considerar su matriz Jacobiana determinada con el proceso de linealización y así obtener su traza, determinante y su discriminante $(\tau, \Delta, \tau^2 - 4\Delta)$.

1. El punto de equilibrio $(0,0)$ posee la matriz Jacobina

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} \tau &= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0, \\ \Delta &= (3) \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0, \\ \tau^2 - 4\Delta &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{4} > 0. \end{aligned}$$

Como el $\tau^2 - 4\Delta > 0$ entonces se tendrán valores propios reales diferentes, y debido a que $\Delta < 0$ entonces los valores propios tendrán signos opuestos $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, por lo tanto el punto de equilibrio $(0,0)$ es un punto de silla, por ende es un punto inestable.

2. La matriz asociada del punto de equilibrio $(2500/3, 1500)$ resulta ser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix},$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} \tau &= 0 + 0 = 0, \\ \Delta &= -\left(\frac{9}{10}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2} = 1.5 > 0, \\ \tau^2 - 4\Delta &= 0 - 4(1.5) = -6 < 0. \end{aligned}$$

Debido a que $\tau^2 - 4\Delta < 0$ entonces se tendrán valores propios complejos, y como $\Delta > 0, \tau = 0$

implica que el punto de equilibrio podría ser una espiral estable/inestable o un centro, es decir, aún no es posible determinar si $(2500/3, 1500)$ es estable o inestable. Pero como se mencionó en la sección del análisis del modelo, esto se lo determina con el método del plano de fase, teniendo así que el punto $(2500/3, 1500)$ es un centro, es decir es un punto estable.

Es posible comprobar este hecho para las cercanías del punto de equilibrio, es decir, analizar el sistema linealizado para el punto $(2500/3, 1500)$, que resultado ser

$$\begin{cases} x_1' = 2500 - \frac{5}{3}x_2, \\ x_2' = \frac{9}{10}x_1 - 750, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2500 - \frac{5}{3}x_2, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{9}{10}x_1 - 750. \end{cases}$$

Pero dado que ya se analizó este sistema lineal no homogéneo en la anterior sección se tiene la solución general del tipo (4.2) con $\alpha = k_1 = 3, \beta = k_2 = 0.002, \gamma = k_3 = 0.0006$ y $\delta = k_4 = 0.5$ y la solución general resulta ser

$$\begin{cases} x = c_1 \left(\cos \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right) \right) + c_2 \left(\sin \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right) \right) + \frac{2500}{3}, \\ y = c_1 \left(\frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right) \right) - c_2 \left(\frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right) \right) + 1500, \end{cases}$$

y esta solución al graficarla en el plano resulta ser

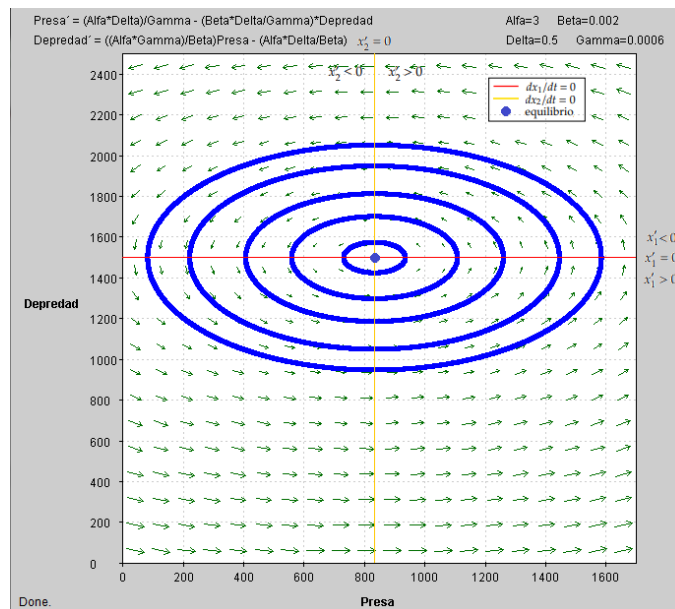
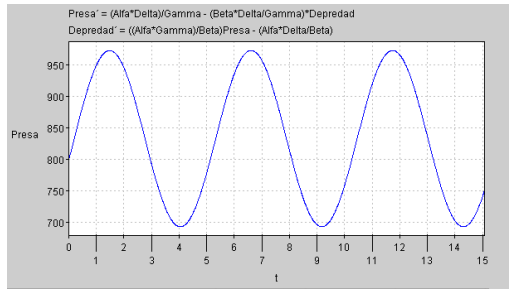
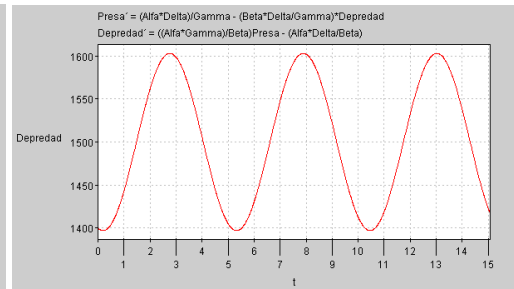


Ilustración 22-4: Plano de fase para el sistema linealizado
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

y sus soluciones tienen movimiento oscilatorio dependiendo la condición inicial que se tome para el sistema linealizado, como por ejemplo, al tomar $x_1(t_0) = 800, x_2(t_0) = 1400$ se tiene



(a) Solución $x_1(t)$ del sistema linealizado



(b) Solución $x_2(t)$ del sistema linealizado

Ilustración 23-4: Solución para $x_1(t_0) = 800, x_2(t_0) = 1400$ en $0 \leq t \leq 15$

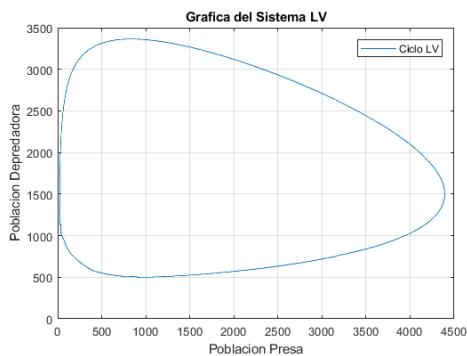
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Con esto verificamos que el punto de equilibrio $(2500/3, 1500)$ sigue siendo un centro con el sistema linealizado en sus cercanías.

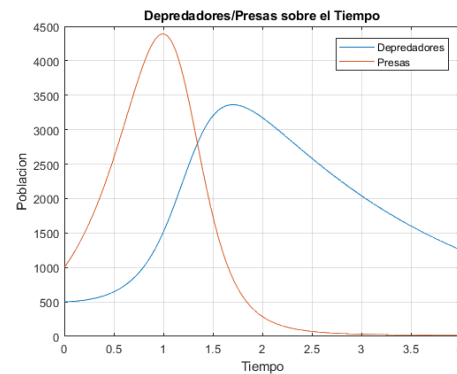
Dado que la condición inicial del problema $x_1(t_0) = 1000, x_2(t_0) = 500$ se encuentra alejada del punto de equilibrio $(2500/3, 1500)$ entonces por si sola, la linealización no nos garantiza que el equilibrio siga siendo un centro, es por ello que se realizó el análisis cualitativo con el plano de fase y las isoclinas nulas para así poder tener una visión completa del comportamiento de las trayectorias aún si la condición inicial se encuentra lejos del punto de equilibrio, por lo tanto el punto $(2500/3, 1500)$ sigue siendo estable, y el punto $(0, 0)$ sigue siendo un punto inestable. Por último usaremos el análisis numérico para constatar lo mencionado con el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

4.2.6. Runge-Kutta de cuarto orden para Lotka Volterra

Con la construcción del algoritmo (ANEXO: A) realizado en el software MATLAB, introducimos los datos del ejercicio generando lo siguiente



(a) Trayectoria solución con los datos propuestos



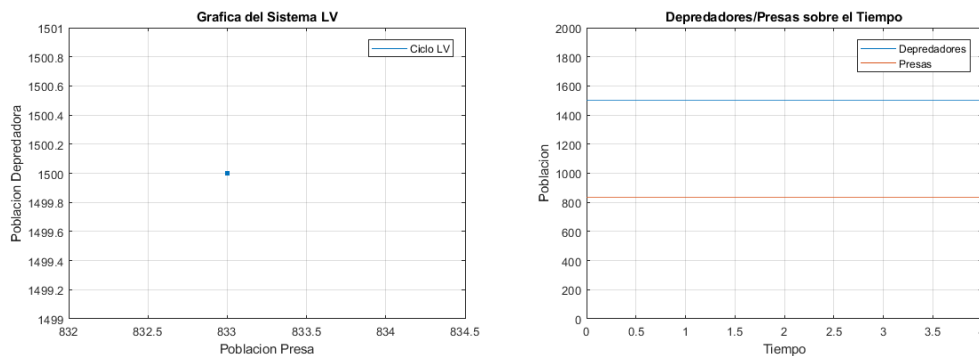
(b) Funciones solución con los datos propuestos

Ilustración 24-4: Solución del sistema con Runge-Kutta

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

El comportamiento de esta última ilustración es similar y obedece al de las ilustraciones (12-4) y (13-4) refutando que el punto de equilibrio $(2500/3, 1500)$ del sistema sigue siendo un centro aún cuando la condición inicial se encuentra distante de este punto; y el punto de equilibrio $(0,0)$ es un punto inestable ya que la trayectoria solución se aleja cuando se encuentra cerca de este punto. Hasta aquí hemos descrito los fenómenos que presenta el sistema con métodos cualitativos y numéricos, nos resta responder las preguntas planteadas por el problema las cuales son: ¿Tiene este modelo demográfico una solución estable?. De ser así, ¿con qué valores de x_1 y x_2 es estable la solución?.

El modelo como ya mencionamos tiene dos puntos de equilibrio que son $(0,0)$ y $(2500/3, 1500)$, el primero siendo inestable y el segundo siendo un centro, es decir, para este último si se toma el centro como condición inicial entonces no se van a presentar cambios en el ecosistema siempre va a permanecer constante sin cambios en sus poblaciones, veamos esto con el algoritmo (**ANEXO: A**) realizado en MATLAB para la condición inicial $x_1(0) = 2500/3, x_2(0) = 1500$



(a) Trayectoria para $x_0 = 2500/3, y_0 = 1500$

(b) Funciones para $x_0 = 2500/3, y_0 = 1500$

Ilustración 25-4: Solución en $x_1(0) = 2500/3, x_2(0) = 1500$ en $0 \leq t \leq 4$

Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Como vemos la representación de las funciones solución permanecen constantes a lo largo del intervalo (en general permanece constante cualquiera que sea el intervalo) y la trayectoria se reduce a un punto que es el punto de la condición inicial, por lo tanto el sistema si tiene una solución estable para los valores de $x_1 = 2500/3$ y $x_2 = 1500$.

Pero esta interpretación no puede ser cierta ya que para cualquier ecosistema donde convivan una especie depredadora y una especie presa siempre van a tener que alimentarse para sobrevivir, para el caso de la especie presa no tendría problema ya que el ecosistema que contempla el modelo supone que esta especie tendría una cantidad ilimitada de alimento, pero la especie depredadora no podría subsistir ya que su dieta depende unicamente de la especie presa por lo que no podría existir este equilibrio para el modelo.

4.3. Resultados

Por medio de la documentación de información referente a los sistemas de ecuaciones diferenciales y los diferentes trabajos de varios autores considerados en el Capítulo III se obtuvieron los análisis necesarios para entender el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra con métodos cualitativos y numéricos, lo que nos permitió entender el comportamiento y los fenómenos del mismo sin necesidad de resolverlo de manera analítica.

El uso de cualquiera de estos métodos por separado nos permite tener una respuesta aproximada a la solución bastante aceptable, pero conjuntamente al implementar el uso de ambos métodos se obtiene una respuesta más fundamentada y confiable que asegura los análisis hechos con el otro método, es decir, ambos métodos se complementan para brindar un análisis completo sobre el modelo de Lotka-Volterra.

La implementación del método cualitativo como el mismo nombre lo dice, nos permitió entender el comportamiento de las trayectorias del sistema, es decir, entender e interpretar cómo actuará el sistema dependiendo donde se tenga la condición inicial establecida.

Con el algoritmo (**ANEXO: A**) construido en el software de MATLAB para el uso del método numérico considerado (Runge-Kutta de cuarto orden) se obtuvo la verificación necesaria con el uso de los valores numéricos del problema de dinámica poblacional del autor (Burden y Faires, 2002, p. 323), con este método el análisis se fundamentó obteniendo resultados y gráficas previamente preestablecidos con el primer análisis realizado (análisis cualitativo).

La siguiente ilustración nos muestra cómo es el comportamiento de las trayectorias para el sistema de Lotka-Volterra con herramientas cualitativas como el plano de fase y las isoclinas nulas.

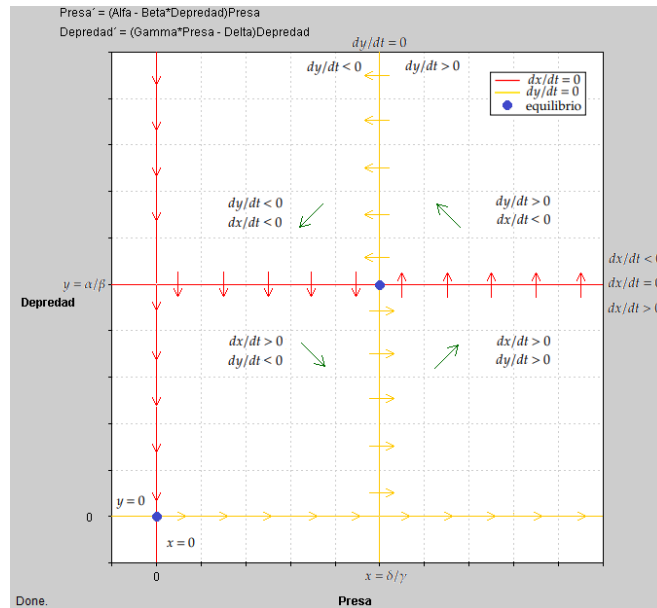


Ilustración 26-4: Comportamiento de las trayectorias
Realizado por: Villacrés, Fernando, 2022.

Dado que el sistema se requiere tener valores positivos para sus variables y constantes entonces el análisis se lo interpreta en el cuadrante positivo en el plano de fase. Además este sistema divide al plano de fase en cuatro regiones donde cada una de estas regiones posee una interpretación diferente las cuales se encuentran descritas en la sección (4.1.2.) de este Capítulo o de manera resumida nos dice:

- La razón de cambio de la presa incrementa ($dx/dt > 0$) cuando la cantidad de la especie depredadora es menor que α/β , y además cuando la razón de cambio de los depredadores disminuye ($dy/dt < 0$) entonces el número de presas es menor que δ/γ .
- De manera similar, la razón de cambio de la presa incrementa ($dx/dt > 0$) cuando el número de depredadores es menor que α/β , pero ahora se tiene un incremento para la razón de cambio de los depredadores ($dy/dt > 0$) que ocurre cuando el número de presas es mayor que δ/γ .
- Para la siguiente zona se tiene un comportamiento opuesto al primero descrito el cual nos dice que la razón de cambio de la presa decrece ($dx/dt < 0$) cuando los depredadores son mayor que α/β , y también se tiene la razón de cambio de los depredadores aumenta ($dy/dt > 0$) cuando la cantidad de las presas es mayor que δ/γ .
- En la última zona se tiene que la razón de cambio de las presas se reduce ($dx/dt < 0$) cuando la cantidad de la especie depredadora es mayor que α/β , y la razón de cambio de los depredadores decrece ($dy/dt < 0$) cuando la cantidad de presas es menor que δ/γ .

Con estos comportamientos se observa un comportamiento de trayectorias que es cerrado envolviendo al punto de equilibrio no trivial del sistema en sentido anti horario, lo que significa que tras pasar un determinado período de tiempo las trayectorias volverán a empezar su comportamiento en su condición inicial, teniendo así lo que se conoce como el ciclo de Lotka-Volterra.

El uso de la herramienta cualitativa llamada linealización nos permitió corroborar el análisis realizado con el plano de fase pero limitándose a las cercanías del punto de equilibrio no trivial, es por ello que con la ayuda del método numérico considerado se pudo obtener una certeza y argumentación más amplia del comportamiento de las soluciones del sistema.

Todos estos análisis e interpretaciones cualitativas se fundamentan al momento de utilizar el algoritmo numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de dos ecuaciones diferenciales (**ANEXO: A**) construido en el software de MATLAB, con este se obtuvo la corroboración de todo lo anterior dicho y además, la representación de la solución (tanto gráfica como numérica) de ambas especies con respecto al tiempo (12-4).

Al momento de aplicar estos análisis al problema de dinámica poblacional se consiguió obtener resultados pronosticados pero ahora utilizando los valores numéricos del problema, teniendo así lo necesario (análisis y aplicación) para asegurar la complementación de ambos métodos utilizados en este trabajo.

Por último se dio respuesta la última cuestión planteada por el problema, la cual menciona que ¿para qué cantidad de ambas especies la solución es estable?, para responder esto se utiliza el análisis y clasificación de los dos puntos de equilibrio del sistema y además el uso del algoritmo numérico:

1. El punto de equilibrio trivial $(0,0)$ tras el análisis del sistema se obtuvo que se clasificaba un punto inestable, esto se lo puede comprobar con el Teorema (3.19) o también de manera visual, dado que al tomar cualquier condición inicial (en el cuadrante positivo) cercana al punto trivial $(0,0)$ esta se aleja del punto.
2. El punto de equilibrio no trivial $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ con el proceso de linealización en las cercanías resultaba ser un centro, pero para el sistema original esto se lo comprueba con el plano de fase teniendo así la clasificación del punto como un centro.
3. Con la implementación del método numérico al tomar el centro como condición inicial, es decir, al tomar el punto $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ se ratifica lo anterior descrito, por lo que no se produciría cambios en el sistema, es decir, permanecerá constante para cualquier intervalo de tiempo.

Específicamente para el problema de dinámica poblacional considerado, al tener una condición inicial de 2500/3 para la cantidad de presas y 1500 para la cantidad de depredadores, se obtiene

una solución estable, es decir, una solución que permanece constante a lo largo del tiempo.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Las herramientas cualitativas son principalmente usadas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, sin embargo existen problemas en los cuales estas herramientas no son suficientes para brindar una respuesta deseada.

Gracias al Teorema de existencia y unicidad local de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos determinar que modelos poseen o no una solución aunque este Teorema no nos dice como es dicha solución, por lo que no siempre los métodos existentes a la fecha nos brindan una solución analítica exacta para resolver cualquier ecuación o sistema.

Con la ayuda de los métodos cualitativos considerados podemos determinar el comportamiento de la solución del modelo de Lotka-Volterra sin conocerla y con ello conocer los cambios y conductas de sus trayectorias. El plano de fase con las isoclinas nulas nos brindan una representación visual con las cuales podemos analizar las trayectorias solución del sistema con ello sabemos de que manera se comporta el sistema y podemos describir los fenómenos que presenta.

El estudio de los puntos de equilibrio junto con el proceso de linealización nos ayuda de igual manera a determinar y verificar el análisis realizado con los procesos anteriores sobre cómo será el comportamiento de las trayectorias solución cuando se tienen condiciones iniciales cercanas a estos puntos y con ello poder clasificarlos.

Dado que el sistema considerado para estudiar el problema de dinámica poblacional es no lineal, la clasificación de los puntos de equilibrio puede variar dependiendo su matriz lineal asociada, por lo que para verificar cómo es la clasificación de estos puntos se recurre al análisis del plano de fase con las isoclinas nulas para así comprobar los análisis previamente establecidos.

La construcción del algoritmo realizado en MATLAB con el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales nos brinda la verificación necesaria para los análisis realizados con los métodos cualitativos ya que genera soluciones aproximadas bastante razonables.

El método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los mejores para aproximar las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, en particular el sistema de Lotka-Volterra, pero para tener una aproximación aceptable es necesario establecer un tamaño de paso considerable ya que entre más grande sea este valor, se tendrá un menor error de aproximación, pero esto implica

realizar un número significativo de iteraciones, es por eso que se recurrió al uso del programa MATLAB.

Para aplicar la construcción del código, y en general aplicar todos los análisis cualitativos hechos, se consideró un problema de dinámica poblacional, el cual fue extraído de la fuente bibliográfica citada. Sobre este problema se verifican todos los análisis realizados, teniendo la complementación en una aplicación usando ambos métodos sobre un problema de dinámica poblacional cumpliendo con el objetivo del trabajo propuesto.

En resumen, la implementación de métodos cualitativos y numéricos en la dinámica poblacional ofrece una solución integral al problema y permite una mejor comprensión del comportamiento del sistema. La combinación de ambos métodos es esencial para validar los análisis cualitativos y obtener soluciones numéricas precisas, lo que brinda información valiosa para la toma de decisiones en diversas áreas, como la ecología, la economía, la física, la salud pública, entre otras áreas.

5.2. Recomendaciones

Es importante destacar que existen otras herramientas y métodos que podrían ser considerados para complementar los análisis realizados en este trabajo y así obtener resultados más precisos y robustos. Una de estas herramientas es la ecuación del plano de fase, la cual permite determinar analíticamente la familia de trayectorias solución y realizar un análisis más detallado de las mismas. Además, es importante mencionar que los métodos utilizados en este trabajo pueden ser aplicados a otros modelos matemáticos similares, como por ejemplo, las variaciones del modelo de Lotka-Volterra para dos especies en competencia. La implementación de los métodos propuestos en este trabajo en otros modelos permitiría refutar los resultados obtenidos y validar la utilidad de dichos métodos en una amplia gama de problemas de dinámica poblacional.

Sería recomendable utilizar un método numérico de mayor precisión y eficiencia, como tal vez el método de Runge-Kutta-Fehlberg, el cual combina un método de cuarto orden con uno de quinto orden para obtener una solución más precisa con un menor número de iteraciones. Este método también tiene la ventaja de ajustar automáticamente el tamaño de paso para lograr un error de tolerancia deseado, lo que reduce significativamente el tiempo de cálculo en comparación con un método de tamaño de paso constante.

Una recomendación adicional sería la de realizar un análisis de sensibilidad para evaluar cómo cambia la solución del modelo ante pequeñas variaciones en los parámetros. Esto ayudaría entender mejor el comportamiento del modelo y cómo este podría ser afectado por cambios en las condiciones ambientales o en las interacciones entre las especies. Además es útil analizar como el error de aproximación se relaciona con el tamaño del paso y con la cantidad de iteraciones

para encontrar el valor óptimo del tamaño de paso que minimiza el error de aproximación y la eficiencia computacional en la implementación del método.

En resumen, se recomienda explorar otras herramientas y métodos para complementar los análisis realizados en este trabajo y aplicar los métodos propuestos en otros modelos para validar su utilidad en diferentes situaciones de dinámica poblacional.

BIBLIOGRAFÍA

APARICIO, M.M.; et al. *Análisis matemático para Ingeniería*. Madrid-España: Pearson Prentice Hall, 2007. pp. 750-789.

ARRIBAS, A. *Modelo de Lotka-Volterra*. Academia Accelerating the world's research [En línea], 2014, pp. 1-7. [Consulta: 10 marzo 2022]. Disponible en: https://www.academia.edu/12384742/Modelo_de_Lotka_Volterra

ASENCIO OGANICIAN, J. Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de La Laguna, Ciencias. España. 2017. pp. 1-10. [Consulta: 2021-12-03]. Disponible en: <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/6217>

BARTLE, R.G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. [en línea]. Nueva Jersey-USA: John Wiley & Sons. 2014. [Consulta: 24 febrero 2022]. Disponible en: https://books.google.es/books?id=aE1YBAAAQBAJ&dq=bartle+the+elements+of+integration&lr=&hl=es&source=gbs_navlinks_s

BLANCHARD, P.; et al. *Ecuaciones diferenciales*. [en línea]. Ciudad de México-México: International Thomson Editores. 1999. [Consulta: 16 noviembre 2021]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=2T-LQgAACAAJ>

BURDEN, R.L.; & FAIRES, J.D. *Análisis numérico* [en línea]. 1ª ed. Ciudad de México-México: International Thomson Editores. 2002. [Consulta: 15 noviembre 2021]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=2M-F1n4-1JIC>

CANO CANELA, A. Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Doctoral) UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia). España. 2011. pp. 5-55. [Consulta: 2022-05-13]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=kgjdCwAAQBAJ>

CÁMARA, M.A.G. Modelo depredador-presa. Aplicaciones al control biológico [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Doctoral) Universidad Almería, Ciencias Experimentales, Estadística y Matemática aplicada. España. 2000. pp. 5-15. [Consulta: 2022-03-17]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=kgjdCwAAQBAJ>

CHAPRA, S.C.; & CANALE, R.P. *Métodos numéricos para ingenieros* 7ª ed. Ciudad de México-México: Mcgraw-Hill Interamericana. 2015. pp. 740-835.

CODDINGTON, E.A. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ciudad de México-México: Compañía Editorial Continental. 1976. pp. 211-292.

ESCOBAR, J. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple* [en línea]. Medellín-Colombia: Universidad de Antioquia, 2008. [Consulta: 13 mayo 2022]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=WgkRMwEACAAJ>

GARCÍA, P.M. Un aspecto de la Dinámica de Poblaciones; Relación Depredador-Presa [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad Abierta Interamericana, Tecnología Informática. Argentina. 2011. pp. 3-39. [Consulta: 2022-11-27]. Disponible en: <http://imgbiblio.vaneduc.edu.ar/fulltext/files/TC104956.pdf>

HUGH HARVEY. *Pplane*. [en línea]. MATLAB Central File Exchange. 2020. [Consulta: 13 marzo 2022]. Disponible en: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane>

MATHEWS, J.H.; et al. *Métodos numéricos con MATLAB*. 3ª ed. Pearson Prentice Hall. 1999. pp. 490-539.

MÉNDEZ HERNÁNDEZ, A.; & BARRERA ESCOBAR, R.V. Análisis de las ecuaciones de Lotka-Volterra y algunas de sus variantes [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de El Salvador, Ciencias Naturales y Matemática, Matemática. Salvador. 2013. pp. 24-34. [Consulta: 2022-11-20]. Disponible en: <https://ri.ues.edu.sv/id/eprint/9803/>

MUÑOZ FERNÁNDEZ, G.A.; & SEOANE SEPÚLVEDA, J.B. *Fundamentos y problemas resueltos de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales* [en línea]. Madrid-España: Ediciones Paraninfo, S.A. 2017. [Consulta: 14 junio 2022]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=GSE3DwAAQBAJ>

NAGLE, R.K.; et al. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* [en línea]. 4ª ed. Ciudad de México-México: Pearson Educación. 2005. [Consulta: 28 noviembre 2022]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=-P76slq9Kf8C>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Teorema de Existencia y Unicidad - Iterantes de Picard y Convergencia* [blog]. [Consulta: 20 marzo 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-iteraciones-de-picard-y-convergencia/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Teorema de Existencia y Unicidad – Ecuación Integral, Funciones Lipschitzianas y Lema de Gronwall* [blog]. [Consulta: 24 marzo 2022]. Disponible en:

<https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-ecuacion-i-integral-funciones-lipschitzianas-y-lema-de-gronwall/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Demostración del Teorema de Existencia y Unicidad de Picard – Lindelöf* [blog]. [Consulta: 27 marzo 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-demostracion-del-teorema-de-existencia-y-unicidad/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden* [blog]. [Consultado: 18 mayo del 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-para-sistemas-de-ecuaciones-diferenciales-de-primer-orden/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Sistemas autónomos, puntos de equilibrio y su estabilidad* [blog]. [Consulta: 12 septiembre 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-sistemas-autonomos-puntos-de-equilibrio-y-su-estabilidad/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Linealización de los puntos de equilibrio de sistemas no lineales* [blog]. [Consulta: 15 septiembre 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-linealizacion-de-los-puntos-de-equilibrio-de-sistemas-no-lineales/>

OMAR GONZALES, F. *Ecuaciones Diferenciales I: Linealización de los puntos de equilibrio de sistemas no lineales* [blog]. [Consulta: 10 septiembre 2022]. Disponible en: <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-introduccion-a-la-teoria-cualitativa-de-las-ecuaciones-diferenciales/>

RABENSTEIN, A.L. *Introduction to Ordinary Differential Equations* [en línea]. 1^a ed. Nueva York-USA: Academic Press. 1966. [Consulta: 13 abril 2022]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=JpjiBQAAQBAJ&dq>

RICARDO, H. *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna* [en línea]. 1^a ed. Barcelona-España: Revérte. 2008. [Consulta: 4 abril 2022]. Disponible en: https://books.google.com.pe/books?id=_mNXieHhvCkC&hl=es&source=gbs_navlinks_s

RODRÍGUEZ PRIETO, M. MODELO DE PREDADOR-PRESA: EFECTOS INDIRECTOS [En línea]. (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Pontificia Universidad Javeriana, Ciencias,

Matemáticas. Colombia. 2012. pp. 11-42. [Consulta: 2022-11-27]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10554/10344>

ROSS, S.L. *Ecuaciones diferenciales*. 1ª ed. Barcelona-España: Reverté, 1981. pp. 290-780.

ROSS, S.L. *Ecuaciones diferenciales* [en línea]. Barcelona-España: Reverté. 1992. [Consulta: 11 diciembre 2021]. Disponible en: <https://elibro.net/es/lc/epoch/titulos/174406>

SHAKIL, M.; et al. “Existence and Uniqueness of Solutions of Mathematical Models of Predator Prey Interactions”. *Journal of Mathematics* [en línea], 2017, (Pakistan) 49(2), pp. 2-12. [Consulta: 11 febrero 2021]. ISSN 1016-2526. Disponible en: <http://journals.pu.edu.pk/journals/index.php/pujm/article/viewArticle/3623>

TAKEUCHI, Y. *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems* [en línea]. Shizuoka-Japón: World Scientific. 1996. [Consulta: 19 enero 2022]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=HMvdmO8aSycC&dq=Global+Dynamical+Properties+of+Lotka-Volterra+Systems&source=gbs_navlinks_s

VALDIVIA UREÑA, M.; et al. *Análisis Matemático III, Tomo II* [en línea]. España-Madrid. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). 1998. [Consulta: 27 mayo 2022]. Disponible en: https://www.acasadellibro.com/es/libro/analisis-matematico-iii_4750380035

ZILL, D.; & CULLEN, M. *Ecuaciones Diferenciales: Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. 3ª ed. Ciudad de México-México: McGraw-Hill Interamericana. 2008. pp. 405-466.

ZILL, D.G. *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones de Modelado*. 10ª ed. Ciudad de México-México: Cengage Learning. 2015. pp. 5-440.

ANEXOS

ANEXO A: CÓDIGO DE SIMULACIÓN PARA EL SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

```
1 % =====
2 % Programa en MATLAB para obtener una aproximacion numerica y grafica a la
3 % solucion para el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra. El sistema se
4 % aproxima a su solucion usando el metodo numerico de Runge Kutta de 4to
5 % orden para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.
6 % =====Metodo de Runge Kutta para LV=====
7 function [] = RK4S2(f,g,x0,y0,a,b,M)
8 clc %Permite borrar el area de trabajo
9 clear %Permite borrar las variables almacenadas
10 format longG
11 % =====Valores de los parametros de la ecuacion=====
12 alfa=input('Introduzca el valor de alfa: ');
13 beta=input('Introduzca el valor de beta: ');
14 gamma=input('Introduzca el valor de gamma: ');
15 delta=input('Introduzca el valor de delta: ');
16 % =====Sistema de Ecuaciones de Lotka-Volterra=====
17 f=@(t,x,y) alfa*x-beta*x*y;
18 g=@(t,x,y) gamma*x*y-delta*y;
19 % =====Condiciones Iniciales=====
20 a=input('Introduzca el valor del tiempo inicial: ');
21 %Limite inferior, tiempo inicial.
22 b=input('Introduzca el valor del tiempo final: ');
23 %Limite superior, tiempo final.
24 x0=input('Introduzca el valor inicial de la especie presa: ');
25 %Valor inicial para x0.
26 y0=input('Introduzca el valor inicial de la especie depredadora: ');
27 %Valor inicial para y0.
28 M=500; %Nodos; Numero de pasos; Entre mayor el nodo mejor aproximacion.
29 h=(b-a)/M; %Tamano del paso.
30 t=a:h:b;
31 n=length(t);
32 x=[x0];
33 y=[y0];
34 for i=1:n-1
35     k1 = f(t(i),x(i),y(i));
36     l1 = g(t(i),x(i),y(i));
37
```

```

38     k2 = f(t(i)+h/2,x(i)+h*k1/2,y(i)+h*l1/2);
39     l2 = g(t(i)+h/2,x(i)+h*k1/2,y(i)+h*l1/2);
40
41     k3 = f(t(i)+h/2,x(i)+h*k2/2,y(i)+h*l2/2);
42     l3 = g(t(i)+h/2,x(i)+h*k2/2,y(i)+h*l2/2);
43
44     k4 = f(t(i)+h,x(i)+h*k3,y(i)+h*l3);
45     l4 = g(t(i)+h,x(i)+h*k3,y(i)+h*l3);
46
47     x(i+1)= x(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
48     y(i+1)= y(i)+(h/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
49     end
50 [t' x' y']
51 % =====
52 % ====Grafica de las especies presa y depredadora con respecto al tiempo.==
53 figure(1);
54 plot(t, y);
55 hold on;
56 plot(t, x);
57 title('Depredadores/Presas sobre el Tiempo');
58 xlabel('Tiempo');
59 ylabel('Poblacion');
60 legend('Depredadores','Presas');
61 % =====
62 % =====Grafica de la aproximacion a la solucion del sistema.=====
63 figure(2);
64 plot(x,y);
65 title('Grafica del Sistema LV');
66 xlabel('Poblacion Presa');
67 ylabel('Poblacion Depredadora');
68 legend('Ciclo LV');
69 end
70 % =====Fin=====

```




epoch

**Dirección de Bibliotecas y
Recursos del Aprendizaje**

**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y
DOCUMENTAL**

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 10 / 05 / 2022

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: FERNANDO ANTONIO VILLACRÉS LLUAY
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: CIENCIAS
Carrera: MATEMÁTICA
Título a optar: MATEMÁTICO
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

0767-DBRA-UTP-2023