ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SU APLICACIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: DORIAN ALEXANDER GÓMEZ MUÑOZ

DIRECTORA: Dra. MAYRA ELIZABETH CÁCERES Mgs.

Riobamba – Ecuador

2023

Yo, DORIAN ALEXANDER GÓMEZ MUÑOZ, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.
Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 14 de abril de 2023

Dorian Alexander Gómez Muñoz
180531518-9

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SU APLICACIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS**, realizado por: **DORIAN ALEXANDER GÓMEZ MUÑOZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Mat. Marcelo Cortez Bonilla Mgs. **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**	______________	2023-04-14
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena Mgs. **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**	____________	2023-04-14
Ing. María José Mendoza Salazar Mgs. **ASESOR DEL TRIBUNAL DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**	______________	2023-04-14

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre y a mi hermana quienes son el pilar más fuerte en mi vida a quienes dedico las horas de mi esfuerzo y constante superación.

Dorian

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero agradecimiento a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, por formarme como matemático y darme la oportunidad de obtener una profesión para ser un aporte a la sociedad.

Dorian

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO V

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo de investigación fue generar un documento que sirva de referencia para la entendimiento y resoluciń de ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicaciń a vibraciones mecánicas, en específico al sistema resorte-masa. Para el desarrollo del estudio se consideró una investigación de tipo bibliográfico-documental con un enfoque cualitativo y nivel descriptivo, la recolección y análisis de la información se estructuró mediante un proceso de búsqueda documental, identificación, recolección y selección de textos y artículos disponibles en la Internet referente al tópico propuesto. El resultado que se obtuvo fue una guía de estudios bajo el título: ”Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden y su Aplicación a las Vibraciones Mecánicas”, la misma que describe de forma clara y concisa los temas métodos y resolución de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, así como la aplicación al sistema resorte-masa. Al finalizar esta investigación se concluye que la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de Matemática requiere de un minucioso y detallado estudio para profundizar en temas aplicativos, además del entendimiento de definiciones, teoremas, proposiciones y demostraciones. Se recomienda continuar el estudio sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y orden superior que pueden ser complementadas con las transformadas de Laplace para facilitar los cálculos.

Palabras clave: <MATEMÁTICA>, <ECUACIONES DIFERENCIALES>, <DERIVADAS>, <MÉTODOS DE SOLUCIÓN>, <TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES>, <VIBRACIONES MECÁNICAS>.

0744-DBRA-UTP-2023

SUMMARY/ABSTRACT

The aim of this research work was to generate a document used as a reference for the understanding and resolution of second order differential equations and their application to mechanical vibrations, specifically to the spring-mass system. For the development of the study, bibliographic-documentary research with a qualitative approach and descriptive level was considered, the collection and analysis of the information was structured through a process of documentary search, identification, collection and selection of texts and articles available on the Internet and related to the proposed topic. The result obtained was a study guide called: ”Second Order Differential Equations and their Application to Mechanical Vibrations”, which describes in a clear and concise way the methods and resolution of the first and second order differential equations, as well as the application to the spring-mass system. At the end of this research, it was concluded that the differential equations subject, belonging to the Mathematics degree program requires a thorough and detailed study to deepen in applicative topics, in addition to the understanding of definitions, theorems, propositions and demonstrations. It is recommended to continue the study on the applications of second and higher order differential equations that can be complemented with Laplace transforms to ease the calculations.

Keywords: <MATHEMATICS>, <DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <DERIVATIVES>, <METHODS OF SOLUTION>, <THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <MECHANICAL VIBRATIONS>.

Lic. Paúl Rolando Armas Pasántes Mgs.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

El cálculo tuvo sus origenes en la Matemática de los griegos los cuales tocaron diferentes tópicos matemáticos en específico el cálculo de áreas y el trazado de rectas tangentes, diversos personajes de caracter helénico dieron sus aportaciones a los temas mencionados en concreto Arquímides dio varias aportaciones que dieron un idea mucho más clara. A mediados del siglo XVII existieron estudios matemáticos que prepararon el camino para lo que hoy conocemos como el cálculo poniendo interes en problemas geométricos que no se podían resolver facilmente así como las nociones de límite entre los matemáticos mas influyentes de aquella época tenemos a Bonaventura Cavalieri, Jhon Wallis, Pierre de Fermat, Gilles de Roberval e Isaac Barrow que dieron grandes avances en el cálculo y posterior a ello matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Leibniz darían lo que hoy es la construcción formal de lo que conocemos como el cálculo.

En 1684 Gottfried Leibniz fue quien dió el primer impreso de seis hojas en el acta de *Eroditorium* cuyo contenido tenía la definicón de la diferencial y algunas reglas sencillas para el cálculo en sumas, productos, potencias, cocientes y raíces además incluyo pequeñas aplicaciones enfocados a problemas de tangentes y puntos críticos, aunque desafortunadamente aquel corto informe de Leibniz contenía algunos errores lo que ocasionó que perdiera credibilidad su trabajo ante los ojos de los demás matemáticos de la época (Valdés, 1998, p.55).

El trabajo de Isaac Newton llamado *Principia* que fue publicado en 1687 contenía la base del método de fluxaciones donde se encuentran algunas propiedades de límites y direcciones para encontrar momentos infinitesimalmente pequeños de productos, potencias y raíces.

Los hermanos Bernoulli fueron los que tomaron las riendas en el camino hacia el nuevo cálculo; diversos matemáticos consolidaron sus teorías que han ido transmitiendo a sus sucesores, así como el matemático Jean instruyo a L'Hôpital y él mismo instruyo a Huygens. En este nuevo mundo del cálculo a finales del siglo XVII, entre los años de 1691 a 1692 Jean desarrolló dos pequeños libros, los cuales trataban sobre el cálculo integral, posterior a ello se desarrollaría con más profundidad el cálculo diferencial.

De los creadores de este nuevo mundo en las matemáticas el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, en su comienzo se presentaba como parte de un problema más general el cual era el problema inverso del análisis infinitesimal, lo cual involucraba a diferentes ecuaciones de primer orden, cuya solución consistía en buscar funciones algebraícas o trascendentes elementales.

El primer método ocupado para resolver el problema de ecuaciones diferenciales que usaron los analistas y sus alumnos de aquella época fue el de separar las variables para cada ecuación diferencial, lo que hoy conocemos como el método de variables separables.

Las ciencias básicas como la Física, la Química y la Biología utilizan las ecuaciones diferenciales ya sean ordinarias o parciales para describir ciertos fenómenos de la naturaleza. También se utilizan para modelar problemas reales en la Ingeniería, Economía y en la Astronomía para explicar el comportamiento del universo. En particular, las ecuaciones diferenciales de segundo orden han sido la principal herramienta matemática para estudiar la mecánica clásica y han servido para modelar problemas como sistemas de resorte-masa.

A principios del siglo XVIII aparecen resultados de carácter general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden por parte del matemático de ascendencia italiana J.F.Riccati que estudio la ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha$ donde a, b, α son constantes, determinando la integrabilidad en funciones elementales de dicha expresión, luego se llegó a la denominación extendida a todas las ecuaciones del tipo $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ donde P, Q y R son funciones continuas, además la investigación de esta ecuación fue estudiada por: Leibniz, Goldbach, Johann I, Nicolas I y Daniel Bernoulli, entre otros matemáticos.

Con el desarrollo del Álgebra y la Geometría en los siglos XVII y XVIII, el Álgebra Lineal y multilineal se encargaría en profundizar la teoría de los determinantes, así como las combinaciones lineales, dependencia lineal, grupos conmutativos, transformaciones lineales y valores propios que serían la base para una correcta estucturación de la matemática. Los valores propios aparecen bajo la noción general de un endomorfismo y no en relación con las transformaciones lineales, los valores propios tienen que ver con la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En 1762, Lagrange, al examinar los pequeños movimientos de un sistema con n parámetros en la vecindad de una posición de equilibrio, es llevado a integrar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$x_j'' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{1}$$

donde los a_{jk} son constantes; buscando, según el método dado por Euler para ecuaciones escalares de cualquier orden, una solución de la forma $x_j(t) = y_j e^{\rho t}$, donde y_j son constantes a determinar y ρ un número complejo y de esa forma se llega al sistema lineal

$$\rho^2 y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{2}$$

y como los y_k no deben ser todos cero, ρ^2 debe ser en términos modernos el valor propio de la matriz (a_{jk}). Lagrange no habla de un determinante y se limita a decir que la eliminación de los y_k en el sistema conduce a una ecuación de orden n en p^2 y que se puede determinar el y_k dentro de un factor escalar cuando se ha elegido una raíz de esta ecuación, al menos cuando tiene raíces simples (Dieudonne, 1978, p.63) .

En 1774 se encontró un sistema análogo en la teoría de las desigualdades seculares de los planetas y Laplace también estudió este problema en 1784. En estas preguntas, las partes imaginarias de los exponentes ρ aparecen como las frecuencias de los fenómenos estudiados. Tratándose de sistemas mecánicos dependientes de una infinidad de parámetros, como las tarjetas vibratorias, la relación entre el problema de determinar estas frecuencias y lo que ahora llamamos el espectro de un operador diferencial lineal de segundo orden ya está prevista por Daniel Bernoulli, ya que llega a la ecuación de las cuerdas vibrantes por un paso al límite del movimiento de un número finito de masas distribuidas en la tarjeta a intervalos equidistantes.

Para dar solución a las ecuaciones diferenciales de segundo orden se usan los siguinetes métodos: método de ecuaciones homogéneas y no homogéneas, reducción de orden, ecuaciones lineales homogéneas con coeficinetes constantes, método de superposición y del anulador para coeficientes indeterminados y el metodo de variación de parámetros.

El científico inglés Robert Hooke fue quien explicó el comportamiento elástico lineal de los cuerpos sólidos que condujo al problema de modelizar dicho comportamiento, el cual es un tipo de vibración mecánica para cual necesitamos averiguar y calcular la fuerza, condiciones de equilibrio, constante de proporcionalidad y ecuaciones de movimiento.

En las aplicaciones nos centraremos en los siguientes tópicos:

1. **Sistema de resorte-masa movimiento libre no amortiguado:** Es un tipo de movimiento en el que no existen fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y donde la masa se mueve libre de otras fuerzas externas, cuya ecuación diferencial viene dada en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

   Donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$, además dicha ecuación describe el movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado.

2. **Sistema de resorte-masa movimiento libre amortiguado** Es un tipo de movimiento en donde se deberá considerar el efecto de la resistencia del medio sobre la masa, cuya ecuación diferencial viene dada en la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

   donde β es una constante de amortiguamiento.

3. **Sistema de resorte-masa movimiento forzado** Es un tipo de movimiento en el que se considera una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibrante en un resorte cuya ecuación diferencial

viene dada en la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{5}$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se definen como aquellas expresiones donde se relacionan una función con su primera y segunda derivada, la solución está estrechamente relacionada con la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden, siendo el orden la mayor derivada de la ecuación, y para resolver las ecuaciones de primer orden tenemos métodos como son: ecuaciones de variables separables, exactas, homogéneas y lineales.

El presente proyecto de investigación se ha organizado de tal manera que se consiga estudiar los tópicos esperados, por ello se ha estructurado de la siguiente forma:

a.- Se hablará sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias, definiciones y su clasificación según el orden, linealidad y grado, luego de ello se estudiará los métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

b.- Se analizará los métodos existentes para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

c.- Se desarrollará un estudio de algunos problemas de aplicación de vibraciones mecánicas en específico de los sistemas resorte-masa para el movimiento libre no amortiguado, movimiento amortiguado y forzado.

d.- Finalmente se generará como resultado un documento escrito, el cual será un precedente de consulta y referencia para futuras generaciones de estudiantes de la carrera de Física y Matemática.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Desarrollar una investigación de tipo documental sobre el tema de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación en la resolución de problemas de vibraciones mecánicas, a fin de generar un documento referencial del tópico para estudiantes de la carrera de Matemática y Física.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Generar un documento que sirva de referencia para el entendimiento y resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a sistemas de vibraciones mecánicas; a través de una investigación documental.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Determinar estrategias de búsqueda de información, estableciendo aquellas fuentes más apropiadas que garantice alcanzar la investigación planteada.
- Generar una lectura reflexiva y crítica de textos, *papers*, documentos y guías que faciliten la comprensión de los tópicos.
- Desarrollar la teoría correspondiente a las ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- Analizar y documentar los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- Mostrar la aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden a problemas de vibraciones en el sistema resorte-masa.

1.3. Justificación

La carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo tiene a su disposición una gran cantidad de material bibliográfico para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, pero no es así para el tema de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a vibraciones mecánicas, por tanto es una necesidad crear una guía de estudios que sea amigable con los lectores y que conste de material didáctico que sirva de guía para los estudiantes de Matemática y Física, en especial tomando en consideración que los temas aplicativos son de interés en el ámbito laboral del país y que tienen una gran acogida.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referencias teóricas

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), en la facultad de Ciencias, dentro de la carrera de Matemática, en la malla curricular actual se encuentra la materia de Ecuaciones Diferenciales, la cual tiene la duración de un semestre, pero comprende tópicos que no se llegan a estudiar en profundidad debido a la falta de tiempo, debido a este problema el trabajo de titulación pretende crear una guía de estudios, la misma que servirá de referencia y consulta bibliográfica para estudiantes de las carrera de Matemática, Física y al público en general que busque una introducción a las ecuaciones diferenciales.

En el presente trabajo de investigación se plantea una búsqueda, recoleccción, análisis y estructuración de la información de la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación en las vibraciones mecánicas, en específico en el sistema resorte-masa, las bases bibliográficas serán extraidas de textos, papers, tesis y documentos que se encuentran en el repositorio de google académico.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo y diseño de investigación

El desarrollo del presente estudio requiere una metodología adecuada, que guíe correctamente la recolección y análisis de la información, necesario para cumplir con los objetivos planteados. Una investigación académica puede clasificarse de varias formas, según su orientación, método, nivel, modalidad, diseño y enfoque.

La investigación se ejecuta con una modalidad bibliográfica-documental, porque en primera instancia, se centra en la revisión de la literatura matemática, como base para la recopilación, análisis y redacción de la información. Además, fundamenta el análisis de resultados a través de la revisión documental argumentativa o exploratoria.

3.2. Nivel de investigación

La ruta metodológica para este trabajo tiene un punto de vista descriptivo, ya que el propósito fue generar una guía de estudios, donde se describan los conceptos, deficiones, teoremas y ejemplos de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a las vibraciones mecánicas.

3.3. Enfoque de investigación

El trabajo propuesto se lo realizo bajo un enfoque cualitativo no interactivo, ya que no se está en contacto con personas sino con textos, artículos, *papers*, tesis, etc. Se interpreto de manera subjetiva los tópicos de la bibliografía selecionada para poder describir los temas que se estudian referente a las ecuaciones diferenciales en la carrera de Matemática de la ESPOCH.

3.3.1. *Recolección y análisis de la información*

La recoleción de información está estructurada por: un proceso de búsqueda documental, idetificación, recolección y selección de textos y artículos disponibles en la Internet en repositorios académicos como *Google académico*, relacionados con contenidos oportunos y relevantes sobre profesionales en Matemática respecto al tópico de Ecuaciones Diferenciales.

Ulteriormente se procede a realiazar una lectura crítica y selectiva del material bibliográfico, luego se clasifica la información para elegir los documentos que brinden un aporte sustancial en el entendimiento y desarrollo del tema propuesto.

3.3.2. *Redacción del trabajo de investigación*

La guía de estudios sobre las ecuaciones diferenciales de segundo orden, está enfocada a los estudiantes que quieren tener un primer contacto con la asignatura, por ello se escribió el documento de forma clara y concisa, además posee una lectura amigable y didáctica, se usan ejemplos para mejorar el entendimientos del lector sobre los tópicos propuestos.

El documento guía contempla tres etapas; pre-escritura, redacción y revisión.

La **pre-escritura** conlleva la lectura reflexiba y crítica sobre las ecuaciones diferenciales de segundo orden, analizar y entender definiciones, teoremas, corolarios, proposiciones y ejemplos. Luego se escribio los temas en un borrador a mano en el cual se detallan los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden así como las deducciones de los métodos, ecuaciones, demostraciones y el desarrollo de ejemplos de una forma ordenada y detallada.

En la etapa de **redacción** del documento, se procedió a escribir el documento digital, para lo cual se uso el editor de textos Latex. Finalmente en la etapa de **revisión**, se baso en la depuración del documento guía para que no exista confusiones.

De esta forma, se generó el documento guía ”Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden y su Aplicación en las Vibraciones Mecánicas”, con el propósito de aportar y ayudar en el aprendizaje a futuros estudiantes de Física y Matemática.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Resultado

La investigación propuesta posee un diseño documental con un nivel descriptivo y enfoque cualitativo no interactivo, generó como resultado una guía de estudios bajo el título: ”Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden y su Aplicación a las Vibraciones Mecánicas, con la idea de ser utilizada por los estudiantes de las carreras de Matemática y Física de la ESPOCH, la guía de estudios contempla los tópicos referentes a métodos y resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden así como la aplicación del sistema resorte-masa. El propósito de la guía de estudios facilita el entendimiento y comprensión de definiciones, teoremas, corolarios, ejemplos y demostraciones influyendo positivamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de las carreras mencionadas.

4.2. Estructura del documento guía

Capítulo I Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: En este capítulo se detallan conceptos básicos y definiciones asi como teoremas, métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y ejemplos detallados.

Capítulo II Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden: Esta capítulo abarcó el estudio de definiciones básicas, teoremas de existencia y unicidad, desarrollo detallado y minucioso de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, partiendo de ecuaciones homogéneas y no homogéneas, ecuaciones lineales con coeficientes constantes, coeficientes indeterminados en el cual se estudió el método de coeficientes indeterminados y variación de parámetro, finalizando con el estudio de las ecuaciones de Cauchy-Euler, además se detallan ejercicios para cada método propuesto.

Capítulo III Aplicación al problema de vibraciones mecánicas: En este capítulo se contempla una introducción a las vibraciones mecánicas y se trabajo con el sistema resorte-masa donde se detalló las ecuaciones que modelan el comportamiento del resorte al aplicar una fuerza y una masa en el extremo de un resorte suspendido en un techo donde se analiza cómo cambia la posición de la masa respecto a la fuerza que se le aplica, existen tres tipos de ecuaciones que van a modelar el sistema resorte-masa que son el movimiento libre no amortiguado, el movimiento libre amortiguado y el movimiento forzado.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

Al realizar este documento se cumplió con los establecido en el objetivo general que enuncia generar un documento que sirva de refencia para el entendimiento y resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a sistemas de vibraciones mecánicas; a través de una investigación documental, en dicha investigación se analizó textos, documentos, tesis que permitieron explicar de una forma sencilla a personas y estudiantes que van a empezar con el estudio de las ecuaciones diferenciales, como resultado del trabajo de integración curricular se deja una guía de estudios, que puede ser utilizada de ayuda y apoyo académico didáctico para el estudios de ecuaciones diferenciales.

En la elaboración de la guía, el capítulo II tomó mas tiempo del esperado debido a la profundidad sobre el estudio del los teoremas que validad la existencia y unicidad, superposición y linealidad de las ecuaciones diferenciales asi como el minucioso detalle en los métodos de solución.

Se mostró la aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden a problemas de vibraciones mecánicas en específico para el sistema resorte-masa, el cual no presentó complicaciones en su comprensión e hiso posible la repectiva modelización de la ecuación de movimiento.

Se espera que la guía de estudios sea de uso para futuras generaciones de matemáticos de la ESPOCH, y que su uso influya positivamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

5.2. RECOMENDACIONES

La guía de estudios de ”Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden y su Aplicación a las Vibraciones Mecánicas” está enfocada para futuras generaciones de matemáticos y físicos, se recomienda el fácil acceso de la guía de estudios, además es importante y deseable un estudio sobre la influencia en el aprendizaje y desempeño académico de los estudiantes de la cátedra de Ecuaciones Diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales tienen mĺtiples aplicaciones como, por ejemplo; en circuitos eléctricos, Biología, Química, Medicina entre otras. Se recomienda continuar con el estudio de las aplicaciones a profundidad y manejar un software especializado que permita ser dinámico en el proceso de modelización matemática, además de estudiar las transformadas de Laplace para facilitar los cálculos.

Finalmente se recomienda a los lectores tener conocimientos previos de cálculo y álgebra antes de iniciar la lectura de la guía de estudios.

BIBLIOGRAFÍA

ALCÁNTARA, A & DIAZ, D. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por el método de Splines Cúbicos. [En línea] (Trabajo de titulación. (Pregrado) Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática. Labayeque-Perú. 2020. pp. 3-87 [Consulta: 29 de octubre 2022]. Dispocible en: https://hdl.handle.net/20.500.12893/9407

ALFARO, C., FLORES, P., VALVERDE, G. "La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas." Uniciencia [en línea], 2019,(Costa Rica) vol. 33, no 2, pp. 55-75. [Consulta: 27 de Diciembre 2022]. ISSN 2215-3470. Dispocible en: https://www.redalyc.org/journal/4759/475960592005/html/

ÁLVAREZ, C. *Metodología de la investigación: Diseño y Desarrollo del proceso de investigación en ciencias empresariales.* [en línea]. 5 ed. Bogotá-Colombia: Alpha Editorial S.A., 2020. [Consulta: 15 de Noviembre 2022]. Dispocible en: https://pure.urosario.edu.co/es/publications/metodolog%C3%ADa-de-la-investigaci%C3%B3n-dise%C3%B1o-y-desarrollo-del-proceso-d

ARANGO, C., PEREZ, C., ALVAREZ, A., RUBIANO, N. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejemplos y ejercicios.*. 9 ed. Bogotá-Colombia: Escuela Colombiana de Ingenieria, 2006. pp.1-130

CARMONA, I & FILIO, E. *Ecuaciones diferenciales.* [en línea]. 5 ed. México: Pearson Educación de México, 2011. [Consulta: 8 de Enero 2023]. Dispocible en: https://dokumen.tips/education/ecuaciones-diferenciales-isabel-carmona-5ta-edicion.html?page=17

CERDA, L & MOROCHO, J. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias* [en línea]. Riobamba-Ecuador: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, 2018. [Consulta: 1 de Noviembre 2022]. Dispocible en: http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2019-09-19-143504-78%20Libro%20Ecuaciones%20diferenciales%20ordinarias.pdf

DIEUDONNE, J. *Abregé d histoire des Mathématiques*. 9 ed. París-Francia: Hermann, 1978. ISBN 2 7056 6024 0, pp.1-149

EDWARDS, C., PENNEY,H., DAVID E. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera cómputo y modelado.* [en línea]. 4 ed. México:

Pearson Educación de México, 2009. [Consulta: 24 de Enero 2023]. Dispocible en:https://mathunam.files.wordpress.com/2018/10/edwards-ecuaciones-diferenciales.pdf

ESPINOZA, I., et al. ”Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales a las Vibraciones no Amortiguadas con Excitación Armónica”. Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún [en línea], 2020,(México) vol. 7, no 13, pp. 49-55. [Consulta: 27 de Diciembre 2022]. ISSN 2007-784X. Dispocible en: https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/sahagun/article/view/5001/6796

GUTIÉRREZ ARIAS, J & MAKÁROV, N. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* [en línea].Puebla-México: Facultad de Ciencias de la Electrónica, 2005. [Consulta: 16 de Enero 2023]. Dispocible en:https://www.academia.edu/21747008/Ecuaciones_diferenciales_BUAP

MOYA, L. & ROJAS, E. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: técnicas de resolución.* [en línea]. Bogotá-Colombia: Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias, 2020. [Consulta: 10 de diciembre 2022]. Dispocible en: http://ciencias.bogota.unal.edu.co/fileadmin/Facultad_de_Ciencias/Publicaciones/Imagenes/Portadas_Libros/Matematicas/Ecuaciones_Diferenciales_Ordinarias/EcuacionesDiferenciales Ordinarias.pdf

NAGLE KENT, R., SAFF EDWARD B., SNIDER, A. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* [en línea]. Pearson Educación, 2000. [Consulta: 25 de diciembre 2022]. Dispocible en: https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/04/03.-Ecuaciones-Diferenciales-y-probs-con-vals-a-la-front-Nagle-4ta-ed.pdf.

OSPINA ABANCIN, R. ”17.-Profesión de matemática: Aproximación conceptual a través de sus quehaceres.” Revista EDUCARE-UPEL-IPB-Segunda Nueva Etapa 2.0 [en línea], 2022,(Ecuador) vol. 26, no 1, pp. 361-388. [Consulta: 18 de Noviembre 2022]. ISSN 2244-7296. Dispocible en: https://revistas.investigacion-upelipb.com/index.php/educare/article/view/1601/1593

PAITÁN, H., et al. *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis.* [en línea]. 4 ed. Bogotá-Colombia: Ediciones de la U, 2014. [Consulta: 20 de Octubre 2022]. Dispocible en: https://fdiazca.files.wordpress.com/2020/06/046.-mastertesis-metodologicc81a-de-la-investigaciocc81n-cuantitativa-cualitativa-y-redacciocc81n-de-la-tesis-4ed-humberto-ncc83aupas-paitacc81n-2014.pdf

PRIETO, J. & DE LA ORDEN HOZ, A. *Metodología de la investigación.* [en línea]. México: Pearson Educación, 2011. [Consulta: 17 de Octubre 2022]. Dispocible en: https://issuu.com/maiquim.floresm./docs/259310380-metodologia-de-la-investi

SINGIRESU, R. *Vibraciones mecánicas* [en línea]. Pearson Educación, 2012. [Consulta: 27 de diciembre 2022]. Dispocible en: https://www.academia.edu/43013460/Vibraciones_MecC3A1nicas_5ta_Ed_Singiresu_S_Rao

VALDÉS NÁPOLES, J. ”El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”. Consideraciones (auto) críticas. Boletín de matemáticas [en línea], 1998, vol. 5, no 1, p. 53-79. [Consulta: 16 de octubre 2022]. ISSN 0120-0380. Dispocible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6950859.pdf

ZILL, D. & CULLEN, M *Ecuaciones diferenciales* [en línea]. McGraw-Hill Interamericana, 2008. [Consulta: 18 de octubre 2022]. Dispocible en: https://marihendtqm.files.wordpress.com/2014/08/ecuaciones-diferenciales-zill-vol-1.pdf

ANEXOS

ANEXO A: GUÍA DE ESTUDIOS DE ”ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SU APLICACIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS”.

GUÍA DE ESTUDIO

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SU

APLICACIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS

AUTOR: DORIAN ALEXANDER GÓMEZ MUÑOZ

Riobamba – Ecuador

2023

TABLA DE CONTENIDOS

1

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.1 Definiciones

Cuando se observa las palabras ecuación y diferencial se puede pensar en una expresión que involucre a la derivada. Así la derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ es otra función $f'(x)$ la cual se puede hallar usando reglas apropiadas para esta operación. Por ejemplo la función $y = e^{2x^2}$ es derivable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, con la ayuda de la regla de la cadena, se obtiene que su derivada es $dy/dx = 4xe^{2x^2}$. Si se sustituye $y = e^{2x^2}$ en el lado derecho de la última ecuación, la derivada será

$$\frac{dy}{dx} = 4xy \tag{1.1}$$

Por ejemplo, (1.1) es una ecuación que relaciona a la variable dependiente y con la derivada $\frac{dy}{dx}$ y donde se puede ver que $y = e^{2x^2}$ satisface a dicha ecuación. Lo que lleva a la pregunta de cómo se construyo la ecuación (1.1) y más profundamente cuál es la función representada con el símbolo $y = f(x)$ [Zill.2013].

Definición 1.1.1: Ecuación Diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

Veamos que toda ecuación ordinaria de orden n en la variable dependiente y la podemos expresar en la forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ para alguna función de $n + 2$ variables de F, cuando sea posible despejar $y^{(n)}$ de esa ecuación, tendremos una expresión de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

esta expresión resulta ser más conveniente para fines prácticos [López et al.2006].

Para una función $y = h(x)$ que está definida sobre un intervalo I, se dice que es una solución de la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ en dicho intervalo, si la función h tiene en I derivadas al menos hasta orden n y

$$F(x, h(x), h'(x), h''(x), ..., h^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.3}$$

para todo x en I [López et al.2006].

Ejemplo 1.1.1: Ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 5xy - 2y = 4$$

$$x^2y'' + 5xy' - 2y = e^x$$

$$5y'' - 3y' + 4y = 0$$

Usando la notación de Leibniz se tiene el siguiente ejemplo:

$$5\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4y = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

1.2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Para hablar acerca de ecuaciones diferenciales es necesario clasificarlas por tipo, orden y linealidad.

Clasificación por tipo:

Cuando una ecuación contiene sólo derivadas de una o mas variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria y se denota por **EDO**. Cuando una ecuación tiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o mas variables independientes, se llama ecuación diferencial parcial y se denota por **EDP**.

Ejemplo 1.2.1: Los siguientes ejemplos son de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2x + y$$

Ejemplo 1.2.2: Los siguientes ejemplos son de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Clasificación por orden:

El orden de una ecuación diferencial ya sea EDO o EDP, es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

Ejemplo 1.2.3: Orden de una EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = e^x$$
$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 5xy = 10$$
$$\frac{dy}{dx} = x(y-1)$$

En el primer ejemplo se ve que es una ecuación diferencial de segundo orden ya que es el orden de la mayor derivada, es decir, la expresión d^2y/dx^2 es de segundo orden, mientras que en el segundo ejemplo $(d^3y/dx^3)^2$ es de orden tres y grado dos, recordando que solo la mayor derivada de una ecuación diferencial determina el orden de la misma.

El grado de una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial es el exponente de la mayor derivada contenida en la ecuación, no confundir el exponente que representa el grado de una ecuación diferencial con el orden de la derivada.

Clasificación por linealidad:

Se dice que una ecuación diferencial de n-ésimo orden es lineal si F es lineal en $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, es decir, que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ es de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0 \tag{1.4}$$

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si está formada por la suma de términos lineales, definidos estos como:

a.- La variable dependiente y todas sus derivadas son de grado uno.

b.- No hay productos de las variables dependientes, por ejemplo, $y'y^3$ y $2yy''$.

c.- Los $a_i(x)$, con $i = 1, ..., n$ son funciones que dependen de x. Funciones como por ejemplo $\operatorname{sen} y$, $\cos y$ y $\log 2y$ entre otras, no son validas para la expresión de los a_n.

Las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo orden co $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente tienen la siguiente forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0 \qquad y \qquad a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$$

Ejemplo 1.2.4: Ejemplo ED lineales

$$(x-1)y''' + 5y = y''$$

Usando la notación de Leibniz tenemos el siguiente ejemplo:

$$2x^4\frac{d^3y}{dx^3} + \operatorname{sen}\left(2x^3\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(3x^5 + \ln\ x\right)\frac{dy}{dx} + \left(2x^3\right)y = 4e^{5x}$$

Ahora se mostrara ejemplos de ecuaciones diferenciales que no son lineales.

Ejemplo 1.2.5: Ejemplo ED no lineales

$$(1-y)y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \ln\ y = 0, \qquad \frac{d^5y}{dx^5} + 3y^3 = 2x$$

1.3 Soluciones de una ecuación diferencial

Uno de los objetivos cuando se estudia ecuaciones diferenciales es resolver o encontrar soluciones a las mismas. En la siguiente definición se considerará el concepto de una solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición 1.3.1: Solución de una EDO

Se denomina una solución de la ecuación en el intervalo I a cualquier función ϕ definida en el intervalo y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad.

Dicho de otra forma, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ es una función ϕ que posee al menos n derivadas para las que $F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$, para toda x en I [Zill.2013].

Cunado se habla de la solución de una ecuación diferencial ordinaria relacionada a ella esta el intervalo. El intervalo I también se conoce bajo los nombres de intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), entre otros intervalos que se pueden dar [Zill.2013].

Ejemplo 1.3.1: Verificación de una solución

Verificar que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2; \quad y = -\frac{1}{7 + x^2}$$

Solución. Para verificar que la función dada es una solución, debemos observar una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda x en el intervalo. Se empezará evaluar en lado izquierdo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2 + 7)^2}$$

Ahora se sustituirá la solución y para evaluará en lado derecho

$$2xy^2 = 2x\left(-\frac{1}{7 + x^2}\right)^2 = \frac{2x}{(x^2 + 7)^2}$$

con lo cual se verifica la igualdad.

En este ejemplo se observa que la ecuación diferencial tiene también la solución constante $y = 0$, la cual se le conoce como la solución trivial [Zill.2013].

También es importante hablar sobre la curva solución ya que la gráfica de una solución ϕ de una ecuación diferencial ordinaria se llama curva solución. Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Además puede existir diferencia entre la gráfica de la función ϕ y la gráfica de la solución ϕ, dicho en otras palabras, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución ϕ [Zill.2013].

Para poder explicar lo dicho en el párrafo anterior es necesario proponer el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3.2: Diferencia entre una solución de una ED y una función

Dada la ecuacíon diferencial $xy' + y = 0$ que es una ecuación lineal, para la cual se tiene una solución $y = 3/x$

Cuando se considera a la solución $y = 3/x$ simplemente como una función $(y = f(x) = 3/x)$, el dominio es $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, así la función racional $y = 3/x$ es discontinua en $x = 0$, como se puede observar en el Gráfico 1.1

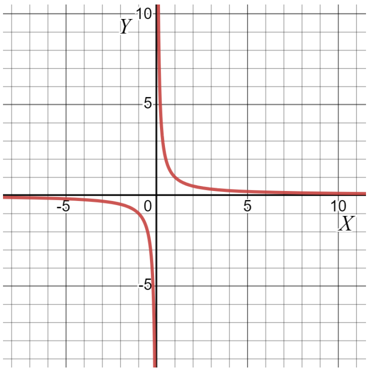

Gráfico 1.1: función $y = 3/x$, $x \neq 0$

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

Ahora, como $y = 3/x$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$, esto quiere decir que es una función definida en un intervalo I en la que es derivable y satisface a la ecuación, dicho de otra forma, $y = 3/x$ es una solución de la ED en cualquier intervalo que no contenga al cero, como por ejemplo $(-4, -2)$, $(\frac{1}{3}, 10)$,$(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$, esto se debe a que las curvas solución definidas por $y = 3/x$

para $-4 < x < -2$ y $\frac{1}{3} < x < 10$ son tramos o partes de las curvas solución definidas por $y = 3/x$ para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$ respectivamente. Así tiene sentido tomar el intervalo I tan grande como sea posible, de ese manera se tiene que I sea $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. De esa manera la curva solución en $(-\infty, 0)$ se muestra en el Gráfico 1.2.

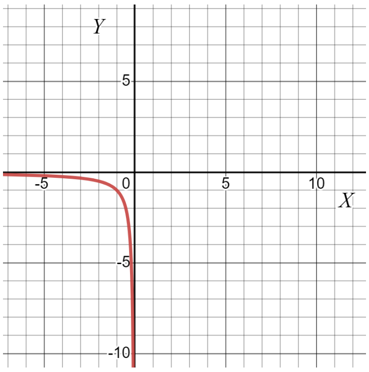

Gráfico 1.2: Solución $y = 3/x$, $(-\infty, 0)$

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

Cuando se habla de soluciones de una ecuación diferencial es importante hablar sobre las soluciones explícitas e implícitas.

1.3.1 Tipos de Soluciones

Definición 1.3.2: Solución explícita

Una solución explícita de la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ es una función $y = f(x)$, donde y está escrita explícitamente en términos de x ; es decir, y se ha despejado en términos de x.

Se entiende que una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente, se dice que es una solución explícita. Se considerará una solución explícita como una expresión $y = f(x)$ que se pueda manejar, evaluar y derivar usando las reglas usuales.

Ejemplo 1.3.3: Solución explícita

$$y = \frac{1}{36}x^6, \quad y = 2xe^{2x}, \quad y = \frac{3}{x}$$

Cabe recalcar que la solución trivial $y = 0$ es una solución explícita de las ecuaciones del Ejemplo 1.1.3, cuando ya se vea los método de solución, se verá que no siempre se llega a una solución explícita $y = f(x)$, este hecho ocurre particularmente cuando se intentan resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, a menudo se tiene una expresión $G(x, y) = 0$ que define una solución de la ecuación diferencial.

Definición 1.3.3: Solución implícita

Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Cuando se habla de una solución implícita, se considera una relación $G(x, y) = 0$ la cual define una solución de la ecuación diferencial ordinaria $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ en el intervalo I, si se satisfacen las siguientes condiciones:

i. La relación $G(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x sobre el intervalo I; es decir, existe una función $\phi(x)$ definida sobre I, tal que para todo $x \in I$ se verifica $G(x, \phi(x)) = 0$.

ii. La función $\phi(x)$ es n veces diferenciable en el intervalo I y satisface

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

para todo $x \in I$.

Ejemplo 1.3.4: Solución implícita

La relación $x^2 + y^2 = 36$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Solución. Se mostrará que $x^2 + y^2 = 36$ en verdad es una solución, usando derivación implícita se tiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

luego

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Así se ha verificado que cumple la igualdad de la ED que se propone en este ejemplo.

Ejemplo 1.3.5: Solución implícita

Otro ejemplo de solución implícita es

$$\left(2xy - \sec^2 x\right) dx + \left(x^2 + 2y\right) dy = 0$$

cuya solución implicita es

$$x^2y - \tan x + y^2 = 0$$

Solución. Usando derivación implícita se tiene

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} - \sec^2 x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(x^2 + 2y\right)\frac{dy}{dx} + \left(2xy - \sec^2 x\right) = 0$$

$$\left(x^2 + 2y\right) dy + \left(2xy - \sec^2 x\right) dx = 0$$

así se ha comprobado que $x^2y - \tan x + y^2 = 0$ es una solución de la ecuación diferencial propuesta en este ejemplo.

Observación. Nótese que $G(x, y) = 0$ es una ecuación y una ecuación nunca es una solución de una ecuación diferencial ya que solo las funciones pueden ser soluciones de estas. Lo que se quiere decir que la relación $G(x, y) = 0$ define una solución implícita de una ecuación diferencial, es que la función $y = \phi(x)$, definida por la relación $G(x, \phi(x)) = 0$, es la solución [Moya.2020].

Definición 1.3.4: Solución general

La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las funciones que verifican la ecuación diferencial. Cuando se resuelve una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ se obtiene una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro C. Así una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, C) = 0$ de soluciones llamado familia de soluciones uniparamétrica.

Cuando se habla de resolver una ecuación diferencial de orden n que tiene la expresión $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, lo que se busca es una familia de soluciones n-paramétricas de la forma $G(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, esto quiere decir que una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones, correspondiendo a un número ilimitado de eleciones de los parámetros (C_i).

Ejemplo 1.3.6: Soluciones generales

a.- Dada la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ cuya solución general es $y(x) = \frac{C_1}{x}$.

b.- Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$ cuya solución general es $y_1(x) = -\sqrt{C_1 + 2x^2}$ e $y_2(x) = \sqrt{C_1 + 2x^2}$, se tiene dos soluciones debido a que se está trabajando con una hipérbola cuya ecuación para este ejemplo es $y^2 = 2x^2 + C_1$.

c.- Dada la ecuación diferencial $(1 + x)dy - ydx = 0$ cuya solución general es $y(x) = C_1(x + 1)$.

d.- Dada la ecuación diferencial $y'' + y + 2x = 1$ en cuya solución general estan involucradas dos constantes $y(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) - 2x + 1$.

En el caso de hablar de una solución particular, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.3.5: Solución Particular

Se llama solución particular de la ecuación diferencial a aquella función que no contiene parámetro, es decir, que se obtiene al dar un valor al parámetro en la solución general.

Para ello tenemos los siguientes ejemplos basados en el Ejemplo1.3.6:

Ejemplo 1.3.7: Soluciones particulares

a.- Dada la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ cuya solución particular es $y(x) = \frac{1}{x}$, donde la constante $C_1 = 1$.

b.- Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$ cuya solución particular es $y(x) = \sqrt{5 + 2x^2}$, donde la constante $C_1 = 5$.

c.- Dada la ecuación diferencial $(1 + x)dy - ydx = 0$ cuya solución. particular es $y(x) = 10x + 10$, donde la constante $C_1 = 10$.

d.- Dada la ecuación diferencial $y'' + y + 2x = 1$ en cuya solución particular es $y(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 5\cos(x) - 2x + 1$ donde las constantes toman los valores $C_1 = 2$ y $C_2 = 5$.

Una solución particular se puede obtener fijando valores a los parámetros de la familia de funciones que son solución de la ecuación [Moya.2020].

Definición 1.3.6: Solución Singular

Una solución singular es una función que satisface a la ecuación diferencial, pero que no se obtiene a partir de la solución general.

De esta forma para la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$, los valores donde $f(x, y) = 0$ para la variable y serán las posibles soluciones singulares, las cuales se validarán como soluciones singulares si no es posible hallar una constante que al sustituirla en la solución general de la ecuación diferencial nos de dicha solución. En tal caso se verificará entonces que la solución es singular.

Para explicar de mejor manera lo que es una solución singular se usará una ecuación $y' =$

$x\sqrt{y}$ cuya solución general es $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + C\right)^2$, donde $C \geq 0$ y donde $x \in (-\infty, \infty)$ con esta familia de soluciones algunas soluciones particulares son

$$y = \frac{x^4}{16}, \quad y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2, \quad y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \pi\right)^2$$

Donde los valores de C son $C = 0$, $C = 1$ y $C = \pi$ respectivamente, pero que sucede cuando se toma $y = 0$, no existe ninguna constante C por la cual se puede obtener la funcion $y = 0$. Se comprueba que la función $y = 0$ satisface la ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$, siendo $y = 0$ y $y' = 0$

$$y' = x\sqrt{y}$$

$$0 = x\sqrt{0}$$

$$0 = 0$$

Así se dice que $y = 0$ es una solución singular de la ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$.

1.4 Problema de Cuachy de condiciones inicales

Habitualmente se interesa en resolver problemas en los que se busca una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x)$ debe satisfacer condiciones, las condiciones impuestas para $y(x)$ desconocida o sus derivadas, en algún intervalo I que contiene a x_0, es llamado problema de condiciones iniciales o el problema de Cauchy.

1.4.1 El Problema de condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales de primer orden

Tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

interpretando este hecho en términos geométricos, se busca una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0 donde su gráfica pase por el punto (x_0, y_0), con el siguiente gráfico se puede se puede ver este hecho.

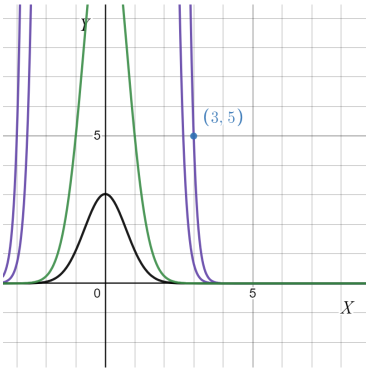

Gráfico 1.3: Problema de condiciones iniciales de una ED de primer Orden

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

En el Gráfico 1.3 se puede ver gráficas de algunas funciones que son soluciones de la ecuación diferencial $y' + 2xy = 0$, pero debido a la condición $y(3) = 5$ se busca una solución en específico que contenga al punto (3,5).

Ejemplo 1.4.1: Condiciones iniciales para una ED de primer orden

Dada la ecuación diferencial $y' + y + 2x = 0$ cuya solución general es

$$y(x) = C_1 e^{-x} - 2x + 2$$

que se rigen a las condiciones iniciales

a) $y(4) = 1$

b) $y(4) = 6$

Solución. Literal a)

Se evaluará primero $y(4) = 1$, donde se reemplazará $y = 1$ y $x = 4$ en la solución general de la ecuación diferencial, se deberá hallar el valor de C_1 para luego construir la función que satisface las condiciones iniciales propuestas.

$$y = C_1 e^{-x} - 2x + 2$$

$$1 = C_1e^{-4} - 8 + 2$$

$$1 = C_1e^{-4} - 6$$

$$7 = C_1e^{-4}$$

$$C_1 = \frac{7}{e^{-4}}$$

$$C_1 = 7e^4$$

Luego

$$y = 7e^4e^{-x} - 2x + 2$$

$$y = 7e^{4-x} - 2x + 2$$

Se corrobora con el siguiente Gráfico , que en realidad el punto (4,1) esta en la función $y = 7e^{4-x} - 2x + 2$ que satisface las condiciones iniciales.

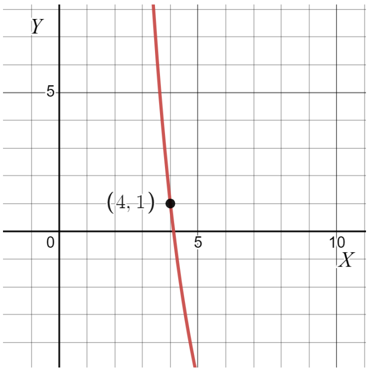

Gráfico 1.4: solución $y = 7e^{4-x} - 2x + 2$

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

Solución. Literal b)

Ahora cuando la condición inicial es $y(4) = 6$ se tiene que

$$y = C_1e^{-x} - 2x + 2$$

$$6 = C_1 e^{-4} - 8 + 2$$

$$6 = C_1 e^{-4} - 6$$

$$C_1 = 12e^4$$

Así, se tiene que la función que satisface las condiciones iniciales es

$$y = 12e^4 e^{-x} - 2x + 2$$

$$y = 12e^{4-x} - 2x + 2$$

Se corrobora con el Gráfico 1.5 , que en realidad el punto (4,6) está en la función $y = 12e^{4-x} - 2x + 2$ que satisface las condiciones iniciales.

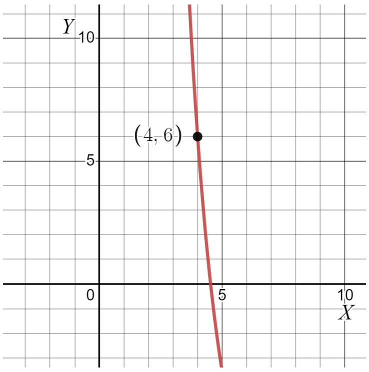

Gráfico 1.5: solución $y = 12e^{4-x} - 2x + 2$

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

1.4.2 El Problema de condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales de segundo orden

El problema de valor inicial cuando se habla de ecuaciones diferenciales de segundo orden tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y,y') \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

La interpretación desde un punto de vista geométrico para este problema es que se quiere determinar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x,y,y')$ en un intervalo I que contenga x_0 de modo que su gráfica no solo pase por el punto (x_0, y_0), sino que también la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto sea el número y_1, en el Gráfico 1.6 se tiene graficadas algunas funciones que son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, cuya solución general es $y(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$ sujeta a las condiciones iniciales $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ y $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ donde $y_1 = 1$ viene a ser la pendiente de la recta tangente en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$. La solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ que satisface a las condiciones planteadas es $y = 2\operatorname{sen}(x) - \cos(x)$.

Observación. Cuando se tiene las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ donde $y_1 = m$ se debe considerar dos cosas, la primera el punto (x_0, y_0) y $y_1 = m$ y segundo mediante la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ se obtiene la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0), esto se evidencia en la el Gráfico 1.6.

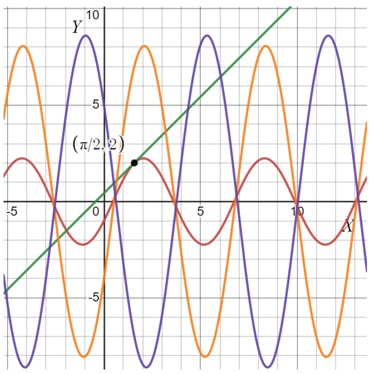

Gráfico 1.6: Problema de condiciones iniciales de una ED de segundo Orden

Realizado por: Gómez, Dorian, 2023.

Ejemplo 1.4.2: Problema de valor inicial de segundo orden

Dada la ecuación diferencial $y'' + 8y = 0$ cuya familia de soluciones tiene dos parámetros siendo $y(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2x}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{2x}\right)$, se va a determinar una solución del problema con valores iniciales

$$y'' + 8y = 0 \quad sujeto\, a \quad y\left(2\pi^2\right) = 5, y'\left(2\pi^2\right) = 1$$

Solución. Primero se empieza evaluando evaluando $y\left(2\pi^2\right) = 5$ en la solución de la ecuación y se tiene

$$\begin{aligned}
5 &= C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2(2\pi^2}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{2(2\pi^2}\right) \\
5 &= C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{4\pi^2}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{4\pi^2}\right) \\
5 &= C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + C_2 \cos(2\pi) \\
5 &= C_1(0) + C_2 \\
C_2 &= 5
\end{aligned}$$

Luego derivando la solución de la ecuación diferencial y reemplazando $y'\left(2\pi^2\right) = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_1 \cos\left(\sqrt{2x}\right)\frac{1}{\sqrt{2x}} - C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2x}\right)\frac{1}{\sqrt{2x}} \\
1 &= C_1 \cos\left(\sqrt{4\pi^2}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} - 5 \operatorname{sen}\left(\sqrt{4\pi^2}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} \\
1 &= C_1 \cos(2\pi)\frac{1}{2\pi} - 5 \operatorname{sen}(2\pi)\frac{1}{2\pi} \\
1 &= C_1\frac{1}{2\pi} - 5(0)\frac{1}{2\pi} \\
1 &= C_1\frac{1}{2\pi} \\
C_1 &= 2\pi
\end{aligned}$$

Por tanto $y(x) = 2\pi \operatorname{sen}\left(\sqrt{2x}\right) + 5\cos\left(\sqrt{2x}\right)$ es una solución dadas las condiciones iniciales.

En forma general cuando se pide resolver problemas de valores iniciales se tiene una estructura como

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.7}$$

en un intervalo I, donde $x_0 \in I$ y $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ son constantes dadas, esto significa hallar todas las soluciones en I en el caso de que existe alguna de la ecuación que satisfaga las n condiciones dadas [López et al.2006].

Con lo cual se busca una solución definida en un intervalo I sujeta a n condiciones

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}$$

en un punto $x_0 \in I$ y donde $y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ son constantes dadas.

El conjunto de datos que consta de la ecuación diferencial y de las n condiciones toma el nombre de problema de valor inicial (PVI) o también es llamado problema de Cauchy.

Cuando se considera problemas con valores iniciales surgen dos preguntas que son importantes, la primera de ellas es relacionada con la existencia de la solución del problema, y la otra sobre si dicha solución es única, el siguiente teorema dejará mas claro este hecho.

Teorema 1.4.1: Existencia de una solución única

Sea *R* una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contienen al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en *R*, entonces existe algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (1.5).

En el Gráfico 1.7 se puede apreciar lo que enuncia el teorema 1.4.1.

Observaciones.

a) Cuando una ecuación satisface la hipótesis del teorema 1.4.1, se tiene la seguridad de que existe una solución al problema con valor inicial.

b) Cuando se satisfacen las hipótesis del teorema 1.4.1, existe una única solución del problema con valor inicial.

c) Si se puede determinar una solución, entonces ésta es la única solución para el problema con valor inicial.

d) Graficamente el teorema 1.4.1 dice que sólo hay una curva de solución que pasa por el punto (x_0, y_0), es decir, para una ecuación de primer orden, no puede ocurrir que se crucen dos soluciones en algun punto del rectángulo.

e) Se observa que la existencia y unicidad de la solución sólo es válida en alguna vecindad $(x_0 - h, x_0 + h)$.

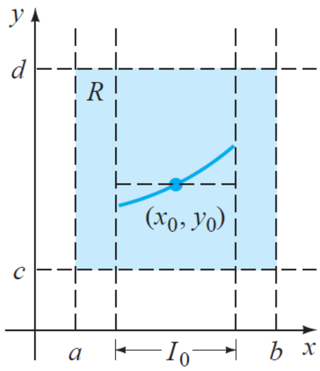

Gráfico 1.7: Región rectangular *R*

Fuente: (Zill,2013)

Nota. La demostración del teorema 1.4.1 no se la realizará porque no es el objetivo de este texto, pero se puede indicar que para la demostración del teorema 1.4.1 implica la conversión del problema con valores iniciales en una ecuación integral y el uso del método de Picard para generar una sucesión de aproximaciones que convergen a la solución [Nagle et al.2000].

Ejemplo 1.4.3: Problema con valor inicial

Dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - xy^4 \text{ sujeta al problema de valor inicial } y(2) = 10$$

¿Implica el teorema 1.4.1 la existencia de una solución única?

Solución. En el caso $f(x, y) = x^3 - xy^4$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy^3$, ambas funciones son continuas en cualquier rectángulo que contenga al punto $(2, 10)$, así se cumplen las hipótesis del teorema 1.4.1 con lo cual el problema de valor de inicial para este ejemplo tiene una solución única en un intervalo con centro $x = 2$, de la forma $(2 - h, 2 + h)$ donde h es un número positivo.

Ejemplo 1.4.4: Problema con valor inicial

Dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \text{ sujeta al problema de valor inicial } y(4) = 0$$

¿Implica el teorema 1.4.1 la existencia de una solución única?

En el caso $f(x, y) = 3y^{2/3}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua, en consecuencia no hay rectángulo que contenga a $(4, 0)$ donde f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean continuas. Como no se cumplen las hipótesis del teorema 1.4.1, en conclusión se puede ver que el problema con valor inicial no tiene una solución única.

1.5 Métodos de solución para ED de primer orden

1.5.1 Ecuaciones de variables separables

Una clase sencilla de ecuaciones diferenciales de primer orden se puede resolver mediante el método de variables separables, dichas ecuaciones tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

la idea es que se pueda reescribir las variables y sus diferenciales de forma que queden aisladas en lados opuestos de la ecuación como por ejemplo

$$h(y)dy = g(x)dx$$

y posteriormente se procede a integrar ambos miembros de la igualdad

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \tag{1.8}$$

Observación. El lado derecho $dy/dx = f(x, y)$ debe tener la forma factorizada

$$f(x, y) = g(x) \cdot \frac{1}{h(y)}$$

por comodidad se escribe $p(y) = 1/h(y)$

formalme esta idea queda más clara con la siguiente definición:

Definición 1.5.1: Ecuación separable

Si el lado derecho de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se puede expresar como una función $g(x)$ que sólo depende de x, por una función $p(y)$ que sólo depende de y, entonces la ecuación diferencial es separable.

Dicho de otra forma, una ecuación diferencial de primer orden es separable si se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

Método para resolver ecuaciones separables

Dada la ED en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

recordando que $p(y) = 1/h(y)$, con lo cual se obtiene

$$h(y)dy = g(x)dx$$

posteriormente se integra ambos lados de la ecuación

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

y se obtiene la solución general que tiene la forma

$$H(y) = G(x) + C$$

Observación. Las dos constante de integración se ponen en un sólo símbolo C, además la solución $H(y) = G(x) + C$ esta en forma implícita.

Ejemplo 1.5.1: Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$ye^{2x}dx = (4 + e^{2x})dy$$

Solución. Primero se separa las variables y luego se procede a integrar, con lo que se obtiene

$$\int \frac{e^{2x}}{4 + e^{2x}}dx = \int \frac{1}{y}dy, \quad y \neq 0 \tag{1.9}$$

Entonces se tiene:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(4 + e^{2x}) + C_1 \tag{1.10}$$

$$y^2 = C_2(4 + e^{2x}), \text{ donde } C_2 = e^{2C_1} \tag{1.11}$$

Se observa que la restricción que se indica en (1.8), evidentemente excluye a la solución $y = 0$. Ésta solución se encuebtra incluida en la familia de soluciones en el caso que se permita $C_2 = 0$, se puede decir que la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y^2 = C_2(4 + e^{2x}), \quad C_2 \geq 0}$$

Ejemplo 1.5.2: Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y\ln x dx = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2 dy$$

Solución.

$$\begin{aligned}
y\ln x dx &= \left(\frac{y+1}{x}\right)^2 dy \\
y\ln x dx &= \frac{(y+1)^2}{x^2}dy \\
x^2\ln x dx &= \frac{(y+1)^2}{y}dy \\
\int x^2\ln x dx &= \int \frac{(y+1)^2}{y}dy \\
\int \frac{y^2+2y+1}{y}dy &= \int x^2\ln x dx \\
\int y + 2 + y^{-1}dy &= \int x^2\ln x dx \\
\frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C
\end{aligned}$$

Asi se tiene la solución implícita

$$\boxed{\frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C}$$

1.5.2 Ecuaciones transformables en variables separables

Cuando se tiene una ecuación como $y' - e^{x+y} = -1$ o $(4x + 5y + 8)dx + (x + 9y)dy = 0$ separar las variables ya no resulta tan sencillo por lo que es ideal efectuar un cambio de variable. Cuando se tiene una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{1.12}$$

si $a = 0$ o $b = 0$ se dice que la ecuación es separable, en cambio si a, b, c son constantes y $b \neq 0$, puede reducirse a una ecuación de variables separables, para ello se efectuará el cambio de variable

$$z = ax + by + c$$

del cambio de variable propuesto se obtiene

$$z' = a + by'$$

por tanto

$$y' = \frac{z' - a}{b}$$

así sustituyendo en (1.12) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{z' - a}{b} &= f(z) \\ z' &= a + bf(z) \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables y se escribirá de la siguiente manera

$$dx = \frac{dz}{a + bf(z)}$$

el siguiente paso será integrar

$$x = \int (a + bf(z))^{-1}\, dz = \phi(z, C)$$

por lo que las soluciones de la ecuación diferencial de la forma (1.9) serán

$$x = \phi(ax + by, C)$$

de ese modo se ha encontrado y como función de x expresada en forma implícita.

Ejemplo 1.5.3: Desarrollar la siguiente ecuación diferencial

$$(2x + y + 6)dx + (2x + y)dy = 0$$

Solución. Primero se coloca la ED en la forma (1.12)

$$\begin{aligned}
(2x + y + 6)dx + (2x + y)dy &= 0 \\
(2x + y + 6) + (2x + y)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{(2x + y + 6)}{2x + y} \\
y' &= -\frac{(2x + y + 6)}{2x + y}
\end{aligned}$$

Se realiza el respectivo cambio de variable

$$z = 2x + y$$

de donde se obtiene $z' = 2 + y'$, despejando y' se tiene $y' = z' - 2$ luego reemplazando el cambio de variable en la ecuación diferencial $y' = -\frac{(2x+y+6)}{2x+y}$

$$\begin{aligned}
z' - 2 &= -\frac{z + 6}{z} \\
z' &= 2 - \frac{z + 6}{z}
\end{aligned}$$

ahora procedemos a separar las variables

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= 2 - \frac{z + 6}{z} \\
\frac{dz}{dx} &= \frac{z - 6}{z} \\
\frac{dz}{\frac{z-6}{z}} &= dx \\
\frac{zdz}{z - 6} &= dx
\end{aligned}$$

ahora se procede a integrar

$$\begin{aligned}
\int \frac{zdz}{z - 6} &= dx \\
z + 6\ln|z - 6| &= x + C_1
\end{aligned}$$

volviendo a las variables iniciales se tiene

$$\begin{aligned} 2x + y + 6\ln|2x + y - 6| &= x + C_1 \\ x + y + 6\ln|2x + y - 6| &= C_1 \end{aligned}$$

así la solución de la ecuacución diferencial es

$$\boxed{x + y + 6\ln|2x + y - 6| = C}$$

1.5.3 Ecuaciones homogéneas

Definición 1.5.2: Funciones homogéneas

Se dice que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n, si para algún número real n se tiene

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Para evidenciar lo que enuncia la definición 1.5.2 se tiene el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.5.4: Función homogénea

Dada la ecuación diferencial

$$f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$$

determine si es una función homogénea y que grado tiene la ED propuesta.

Solución.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - 3\sqrt{xy} + 5y \\ f(tx, ty) &= tx - 3\sqrt{txty} + 5ty \\ &= tx - 3t\sqrt{xy} + 5ty \\ &= t\left(x - 3\sqrt{xy} + 5y\right) \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$

por lo que se puede concluir que $f(x, y)$ es una función homogénea y es de grado $n = 1$.

Definición 1.5.3: Ecuación homogénea

Si una ecuación en su forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

tiene la propiedad

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \text{ y } N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

se dice que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea o que tiene coeficientes homogéneos

Se puede llegar a ser separable las ecuaciones homogéneas mediantes sustituciones o cambios de variable.

Definición 1.5.4: Ecuación homogénea

Si el lado derecho de la Ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se puede expresar como una función que sólo depende del cociente y/x, entonces se dice que la ecuación es homogénea.

como por ejemplo

Ejemplo 1.5.5: Ecuación homogénea

$$(x-y)dx + xdy = 0$$

La ecuación del Ejemplo 1.5.5 se escribir de la forma

$$\begin{aligned} (x-y)dx + xdy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y-x}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} - 1 \end{aligned}$$

de esa forma se puedo expresar $(y-x)/x$ como función del cociente y/x entonces la ecuación del Ejemplo 1.5.5 es homogénea.

Para resolver una ecuación homogénea se aplican una de las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} y = ux, &\quad (dy = udx + xdu) \\ x = yu, &\quad (dx = udy + ydu) \end{aligned}$$

que permiten separar las variables en la ecuación resultante.

Procedimiento para resolver una ecuación diferencial homogénea:

a) Ver si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas y del mismo grado.

b) Buscar la sustitución adecuada para llegar a poder separar las variables.

c) Integrar cada término.

d) Volver a las variables iniciales.

Método de solución

Una vez comprobado que M y N son funciones homogéneas del mismo grado, se utiliza el cambio $y = ux$

$$\begin{aligned} M(x, ux)dx + N(x, ux)[xdu + udx] &= 0 \\ xM(1, u)dx + xN(1, u)[xdu + udx] &= 0 \\ M(1, u)dx + N(1, u)[xdu + udx] &= 0 \end{aligned}$$

aplicamos la propiedad distributiva y agrupamos los términos

$$\begin{aligned} M(1, u)dx + xN(1, u)du + uN(1, u)dx &= 0 \\ \left[M(1, u) + uN(1, u)\right] dx + xN(1, u)du &= 0 \\ \frac{\left[M(1, u) + uN(1, u)\right] dx}{x\left[M(1, u) + uN(1, u)\right]} + \frac{xN(1, u)du}{x\left[M(1, u) + uN(1, u)\right]} &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{\left[M(1, u) + uN(1, u)\right]} &= 0 \end{aligned}$$

luego se tiene una ecuación de variables separables y se procede a integrar

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)du}{[M(1,u) + uN(1,u)]} \quad = \quad 0$$

Pare dejar claro este método se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.6: Ecuación homogénea

Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - xy\right) dy = 0$$

Solución. primero se va a verificar sin son ecuaciones homogéneas y del mismo grado

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= t^2x^2 + t^2y^2 \\ &= t^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N(tx, ty) &= t^2x^2 - txty \\ &= t^2x^2 - t^2(xy) \\ &= t^2(x^2 - xy) \end{aligned}$$

por lo que se comprueba que son ecuaciones homogéneas y de grado $n = 2$. Ahora se va a buscar la sustitución adecuada para llegar a variables separables, sea $y = ux$ y $dy = udx + xdu$, realizando el respectivo cambio de variable se tiene

$$\left(x^2 + u^2x^2\right) dx + \left(x^2 - x^2u\right) (udx + xdu)$$

ahora se procede a sacar factor común, simplificar expresiones y agrupar términos

$$\begin{aligned}
x^2(1+u^2)dx + x^2(1-u)(udx+xdu) &= 0\\
\frac{x^2}{x^2}(1+u^2)dx + \frac{x^2}{x^2}(1-u)(udx+xdu) &= 0\\
(1+u^2)dx + (1-u)(udx+xdu) &= 0\\
dx + u^2dx + udx + xdu - u^2dx - uxdu &= 0\\
dx + udx + xdu - uxdu &= 0\\
(1+u)dx + (x-ux)du &= 0\\
\frac{(1+u)}{x(1+u)}dx + \frac{x(1-u)}{x(1+u)}du &= 0\\
\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)}{(1+u)}du &= 0
\end{aligned}$$

integramos cada término

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1-u)}{(1+u)}du &= 0\\
\ln|x| + \int \frac{(1-u+1-1)}{(1+u)}du &= C_1\\
\ln|x| + \int \frac{2-(u+1)}{(1+u)}du &= C_1\\
\ln|x| + \int \frac{2}{(1+u)}du - \int \frac{(1+u)}{(1+u)}du &= C_1\\
\ln|x| + \int \frac{2}{(1+u)}du - \int du &= C_1\\
\ln|x| + 2\ln|1+u| - u &= C_1
\end{aligned}$$

se regresa a las variables iniciales mediante $u = y/x$ y considerando $C_1 = -\ln C_2$

$$
\begin{aligned}
\ln|x| + 2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} &= -\ln C_2 \\
\ln|x| + \ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\right| + \ln C_2 &= \frac{y}{x} \\
\ln\left|x\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 C_2\right| &= \frac{y}{x} \\
\ln\left|\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right) C_2\right| &= \frac{y}{x} \\
e^{\ln\left|\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right) C_2\right|} &= e^{y/x} \\
\frac{(x+y)^2}{x} &= e^{y/x} C_3
\end{aligned}
$$

finalmente se tiene la solución

$$\boxed{C_2(x+y)^2 = xe^{y/x}}$$

1.5.4 Ecuaciones exactas

Definición 1.5.5: Ecuación exacta

Una expresión diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano XY si ésta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$ definida en R, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Es decir la diferencial total de $f(x,y)$ satisface

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es una ecuación exacta.

Observación. En el tema de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, no es tan usual que se presente un ecuación diferencial en su forma diferencial exacta.

Existe un criterio para una diferencial exacta, dicho criterio enuncia que dado $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean continuas y que tienen primeras derivadas parciales continuas en un región rectangular R definida por $a < x < b$ y $c < y < d$, entonces se dice que una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.13}$$

esto queda expresado de mejor manera con el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1: Criterio de exactitud

Suponga que las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas en un rectángulo $\mathbb{R}$. Entonces

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta en $\mathbb{R}$ si y sólo si la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

se cumple para toda (x, y) en $\mathbb{R}$.

Es preciso entender este criterio enunciado en el teorema 1.5.1 propuesto ya que servirá para identificar si una ecuación diferencial es exacta o no y de ello depende para posteriormente aplicar el respectivo método de solución, es conveniente mostrar este criterio con un ejemplo antes de pasar a demostrar el teorema 1.5.1

Ejemplo 1.5.7: Aplicación del criterio de exactitud para una ED

Dada la siguiente ecuación diferencial determina si es exacta

$$(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$$

Solución. Primero se identificará la funcion $M(x, y)$ y $N(x, y)$

$$\begin{aligned} M(x,y) &= (2x-1) \\ N(x,y) &= (3y+7) \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

con eso se compruebe que en efecto la ecuación diferencial $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$ es una ecuación exacta.

Ahora en el siguiente ejemplo se verá una ecuación que no cumple con dicho criterio.

Ejemplo 1.5.8: Aplicación del criterio de exactitud para una ED

Dada la siguiente ecuación diferencial determina si es exacta

$$(2x+y)dx - (x+6y)dy = 0$$

Solución. Primero se identificará la función $M(x, y)$ y $N(x, y)$

$$\begin{aligned} M(x,y) &= (2x+y) \\ N(x,y) &= (-x-6y) \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

con eso se compruebe que en efecto la ecuación diferencial $(2x+y)dx - (x+6y)dy = 0$ no es una ecuación exacta.

Observación. Por ejemplo las ecuaciones diferenciales

$$\frac{4xy^3+4}{4x^3y}dx + dy = 0 \ \text{ y } \ dx + \frac{4x^3y}{4xy^3+4}dy$$

no satisfacen las condiciones de compatibilidad.

Demostración del teorema 1.5.1. Para este teorema se considera dos aspectos importantes los cuales son la compatibilidad y la exactitud, como se pudo evidenciar en los ejemplos propuestos se buscaba que se cumpla $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, que son las parciales mixtas $\partial M/\partial x \partial y$, $\partial N/\partial y \partial x$ de una función $F(x, y)$, dicha igualdad queda garantizada por el teorema del cálculo que afirma que las segundas parciales mixtas son iguales si son continuas además por hipótesis del teorema 1.5.1 también queda evidenciado que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ deben ser continuas, por lo cual esta parte queda sustentada.

Ahora se deducirá una fórmula para una función $F(x, y)$ que cumpla $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$, se procede a integrar la primera ecuación con respecto a x se tiene

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \tag{1.14}$$

hay que tener en cuenta que en vez de utilizar C para representar las constante de integración se escribió $g(y)$. Este hecho se realiza debido a que y permanece constante al integrar con respecto a x, por esto la constante podría depender de y. Para determinar $g(y)$ se deriva ambos lados de la ecuación (1.14) con respecto a y, de esa forma se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + g'(y) \tag{1.15}$$

luego al despejar $g'(y)$ en la ecuación (1.15) se tiene

$$g'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$$

como $\partial F/\partial y(x, y) = N(x, y)$, así la ecuación nos queda

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \tag{1.16}$$

Observación. Aunque el lado derecho de la ecuación (1.16) indica un posible dependencia de x, las apariciones de esta variable deben cancelarse, pues el lado izquierdo $g'(y)$ solo depende de y.

Nota. Nótese que la expresión

$$N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$$

es independiente de x debido a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial Y} = 0$$

Así al integrar la ecuación (1.16) con respecto de y se puede determinar $g(y)$ salvo una constante numérica, a partir de las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$

$$g(y) = \int N(x, y)dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx\right] dy$$

Para finalizar la demostración es necesario probar la condición (1.13) lo cual implica que $Mdx + Ndy = 0$ es una ecuación exacta, así se debe mostar una función $F(x, y)$ que satisface $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$, para probar esto nos debemos fijar en el análisis que se realizó en la ecuación (1.14) que sugiera a esta ecuación como una posible función $F(x, y)$, donde $g'(y)$ está dada por (1.16), con estas consideraciones se define $F(x, y)$ como

$$F(x, y) := \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + g(y) \tag{1.17}$$

se considera (x_0, y_0) es un punto fijo en el rectángulo R y $g(y)$ queda determinada, salvo una constante numérica, está dada por la ecuación

$$g'(y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt \tag{1.18}$$

■

A continuación se mostrará de forma resumida el método para resolver ecuaciones diferenciales exactas.

Método de solución:

a) Si la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta, entonces $\partial F/\partial x = M$, se procede a integrar esta última ecuación con respecto a x para obtener

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y).$$

b) Para determinar $g(y)$, se calcula la derivada parcial con respecto a y en ambos lados de la ecuación $F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$ y se sustituye N por $\partial F/\partial y$, de esa manera se puede hallar $g'(y)$.

c) Integrar $g'(y)$ para obtener $g(y)$ salvo una constante numérica, luego al sustituir $g(y)$ en la ecuación $F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$ se obtiene $F(x, y)$.

d) La solución de $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ está dada de manera implícita por

$$F(x, y) = C.$$

Nota. Se puede iniciar el procedimiento anterior bajo la suposición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

depués al integrar N con respecto a y , luego derivando el resultado que se obtiene, se encontrará las ecuaciones que son análogas a (1.14) y (1.16), así

$$f(x, y) = \int N(x, y)dy + h(x) \quad y \quad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)dy$$

Ejemplo 1.5.9: Solución de ED exacta

Resolver

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

Solución. Primero se identifica que $M(x, y) = 5x + 4y$ y $N(x, y) = 4x - 8y^3$, luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

como se cumple la condición, entonces existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 8y^3$$

Integrando la primera de estas ecuaciones respecto de x se tiene

$$f(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4yx + g(y)$$

luego se toma la derivada parcial con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + g'(y)$$

ahora se iguala el resultado a $N(x, y) = 4x - 8y^3$

$$\begin{aligned} 4x + g'(y) &= 4x - 8y^3 \\ g'(y) &= -8y^3 \\ \int g'(y) &= \int -8y^3 dy \\ g(y) &= -2y^4 + C \end{aligned}$$

finalmente se tiene la solución implícita es

$$\boxed{\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C}$$

Ejemplo 1.5.10: Solución de ED exacta

Resolver

$$(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$$

Solución. Primero se identifica que $M(x, y) = 2y^2x - 3$ y $N(x, y) = 2yx^2 + 4$, luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

como se cumple la condición, entonces existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$$

Integrando la primera de estas ecuaciones con respecto de x se tiene

$$f(x, y) = x^2y^2 - 3x + g(y)$$

luego se toma la derivada parcial con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + g'(y)$$

ahora se iguala el resultado a $N(x, y) = 2yx^2 + 4$

$$\begin{aligned}
2yx^2 + g'(y) &= 2yx^2 + 4 \\
g'(y) &= 4 \\
\int g'(y) &= \int 4dy \\
g(y) &= 4y + C
\end{aligned}$$

finalmente se tiene la solución implícita es

$$\boxed{x^2y^2 - 3x + 4y = C}$$

1.5.5 Ecuaciones lineales

Definición 1.5.6: Ecuación lineal

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.19}$$

se dice que es una ecuación lineal en la variable dependiente y.

Cuando la función $g(x) = 0$ en (1.19), entonces dicha ecuación se la llama homogénea y si $g(x) \neq 0$ entonces es una ecuación no homogénea. Generalmente se usa la forma estándar de una ecuación lineal, para llegar a la forma estándar hay que dividir ambos lados de la ecuación (1.19) entre el coeficiente $a_1(x)$, así se obtiene una forma más útil, donde se formará una función $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ y una función $f(x) = g(x)/a_1(x)$, la nueva ecuación será de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{1.20}$$

Para la ecuación (1.20) se busca una solución en un intervalo I, donde las funciones P y f sean continuas.

La ecuación diferencial (1.20) tiene la propiedad de que su solución es la suma de las dos soluciones $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{1.21}$$

por otro lado y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea (1.20).

Para ver lo que esa propiedad dice se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[y_c + y_p\right] + P(x)\left[y_c + y_p\right] = \left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right] + \left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right] = f(x) \tag{1.22}$$

La ecuación (1.21) es separable, por lo que se puede determinar y_c, se debe escribir la ecuación (1.21) de la siguiente forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

luego se procede a integrar

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} + P(x)dx &= 0 \\
\frac{dy}{y} &= -P(x)dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int -P(x)dx \\
\ln|y| &= -\int P(x)dx + k \\
e^{\ln|y|} &= e^{-\int P(x)dx + k} \\
y_c &= e^{-\int P(x)dx} e^{k} \\
y_c &= Ce^{-\int P(x)dx}
\end{aligned}
$$

donde k es una constante y $C = e^k$

Así se obtiene la expresión $y_c = Ce^{-\int P(x)dx}$, por comodidad se escribirá $y_c = Cy_1(x)$ donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$ asi se tiene una expresión $y_c = Cy_1(x)$, luego se utiliza el hecho de que

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$$

con lo cual se determinará y_p.

Para definir una solución particular de la ecuación (1.20) se utilizará un procedimiento que se denomina variación de parámetros cuya idea es encontrar una función u tal que $y_p = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ que sea una solución de la ecuación (1.20). Dicho de otra forma la suposición para y_p es la misma que $y_c = Cy_1(x)$ pero C se ha sustituido por el parámetro variable u, luego sustituyendo $y_p = uy_1$ en la ecuación (1.20) se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + P(x)y &= f(x) \\
u\frac{dy_1}{dx} + P(x)uy_1 &= f(x) \\
y_1\frac{du}{dx} + u\frac{dy_1}{dx} + P(x)uy_1 &= f(x) \\
u\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right] + y_1\frac{du}{dx} &= f(x) \\
u[0] + y_1\frac{du}{dx} &= f(x)
\end{aligned}
$$

por tanto

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

ahora separando las variables e integrando se obtiene

$$\begin{aligned} du &= \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \\ u &= \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \end{aligned}$$

dado que $y_1(x) = e^{-\int P(x)dx}$, se puede ver que $1/y_1(x) = e^{\int P(x)dx}$ por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p &= uy_1 \\ &= \left(\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx\right) e^{-\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$y_c + y_p = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \tag{1.23}$$

Si la ecuación (1.20) tiene una solución, debe ser de la forma de la ecuación (1.23), así para resolver la ecuación (1.20) de una forma más sencilla es conveninte multiplicar $e^{\int P(x)dx}$ por la ecuación (1.23)

$$e^{\int P(x)dx} y = c + \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \tag{1.24}$$

recordando que $u(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$ es el factor integrante, luego se deriva la ecuación (1.24)

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x) \tag{1.25}$$

así se obtiene

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx} y = e^{\int P(x)dx} f(x) \tag{1.26}$$

este último resultado se divide para $e^{\int P(x)dx}$ y así se obtiene la ecuación (1.20).

Método de solución de una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

i) Poner la ecuación lineal en la forma estándar.

ii) Identificar $P(x)$ de la forma estándar y luego hallar el factor integrante $u(x)$

iii) Multiplicar la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. Recordar que el lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del factor integrante $y\frac{du}{dx} = f(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

iv) Finalmente integrar ambos lados de esta última ecuación y despejar la variable y.

Ejemplo 1.5.11: Solución de una ED lineal homogénea

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Solución. Se puede resolver por separación de variables como se había mencionado anteriormente, pero para este ejercicio se desarrollará por el método de solución de una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden, se indentifica que la ecuación diferencial que se pide resolver ya está en la forma estándar y se puede ver que $P(x) = 4$ por tanto el factor integrante es

$$e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

luego se multiplica el factor integrante por la ecuación diferencial que se propone en el ejercicio y nos queda

$$e^{4x}\frac{dy}{dx} + 4e^{4x}y = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{4x}y\right] = 0$$

luego integrando se tiene

$$e^{4x}y = C$$

la solución explícita es $y = Ce^{-4x}$.

Ejemplo 1.5.12: Solución de una ED lineal no homogénea

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 8$$

Solución. Como la ecuación está en la forma estandar se procede a buscar el factor integrante, $P(x) = 4$ entonces

$$e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

luego multiplicando el factor integrante a toda le ecuación planteada en el ejemplo se tiene que

$$e^{4x}\frac{dy}{dx}+4e^{4x}y=8e^{4x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{4x}y\right]=8e^{4x}$$

luego integrando se tiene

$$e^{4x}y=2e^{4x}+C$$

la solución explícita es $y=2+Ce^{-4x}$.

Observación. De los dos ejemplos que se plantearon se observa que el ejemplo (1.5.12) es la suma de dos soluciones es decir $y=y_c+y_p$, donde $y_c=Ce^{-4x}$ que es la solución de la ecuación homogénea del ejemplo (1.5.11) y $y_p=2$ que es la solución particular de la ecuación no homogénea $y'+4y=8$.

Ejemplo 1.5.13: Solución de una ED lineal

Resolver

$$x\frac{dy}{dx}-y=x^2\operatorname{sen}x$$

Solución. Dado que la ecuación propuesta no está en la forma estándar se procede a dividir toda la ecuación por x para llevarla a la forma estándar, asi se tiene que

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x\operatorname{sen}x$$

se identifica que $P(x)=-1/x$ y $f(x)=x\operatorname{sen}x$, se procede a hallar el factor integrante

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int -\frac{1}{x}dx} \\ &= e^{-\ln x} \\ &= x^{-1} \end{aligned}$$

Ahora se multiplicará a la ecuación propuesta en la forma estándar por el factor integrante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}-\frac{y}{x} &= x\operatorname{sen}x \\ x^{-1}\frac{dy}{dx}-x^{-1}\frac{y}{x} &= x^{-1}x\operatorname{sen}x \\ \frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right] &= \operatorname{sen}x \end{aligned}$$

luego se integra ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} x^{-1}y &= \int \operatorname{sen} x dx \\ x^{-1}y &= -\cos x + C \end{aligned}$$

finalmente la solución en su forma explícita es

$$y = -x\cos x + xC$$

Ejemplo 1.5.14: Solución de una ED lineal

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$$

Solución. Se indentifica que la ecuación propuesta es una ecuación lineal de primer orden y además ya está en su forma estándar con lo que se procede a indentificar que $P(x) = \cot x$ y $f(x) = 2\cos x$, de tal modo que el factor integrante es

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int \cot x dx} \\ &= e^{\ln|\operatorname{sen} x|} \\ &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

ahora se multiplicará cada término de la ecuación propuesta por el factor integrante

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + y\operatorname{sen} x\cot x &= 2\cos x\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + y\operatorname{sen} x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} &= 2\cos x\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + y\cos x &= 2\cos x\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

como el miembro de la izquierda de la ecuación anterior es el desarrollo de la derivada del producto $y\operatorname{sen} x$, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[y\operatorname{sen} x\right] = 2\cos x\operatorname{sen} x$$

luego integrando ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} y \operatorname{sen} x &= \int 2\cos x \operatorname{sen} x \\ y \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}^2 x + C \end{aligned}$$

finalmente la solución en su forma explícita es

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen} x + \frac{C}{\operatorname{sen} x} \\ y &= \operatorname{sen} x + C \csc x \end{aligned}$$

Observación. Como $P(x) = \cot x$ tal que su dominio es $domP = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $f(x) = 2\cos x$ cuyo dominio es $domf = \mathbb{R}$, los coeficientes son continuos en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en los que $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y así se concluye que la solución general y un intervalo de solución es

$$y = \operatorname{sen} x + C \csc x, \quad x \in (0, \pi)$$

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

2.1 Definiciones

En esta sección dejamos atrás las ecuaciones diferenciales de primer orden donde se trabajó con ecuaciones donde solo se tenían derivadas de primer orden, pero que sucede en el caso que se encuentre una derivada de segundo orden, para este caso se presentará las definiciones y la forma en como resolver las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es una ecuación que liga la variable independiente x , una función incógnita $y = y(x)$ y su segunda derivada y'' y presentan la siguiente forma

$$F(x, y, y'') = 0 \quad \text{(forma implícita)}$$

o se puede despejar la derivada de mayor orden

$$y'' = f(x, y) \quad \text{(forma explícita)}$$

Observación. A la función $y = y(x)$ se le conoce como función incógnita.

Definición 2.1.1:

Se dice que una ecuación diferencial de segundo orden es lineal si tiene la siguiente forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

donde las funciones $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ y $g(x)$ dependen solamente de la variable x.

Este tipo de ecuaciones cumplen con la propiedad de poder ser consideradas como operadores lineales, de aquí surge el concepto para poder encontrar sus soluciones.

Para la solución de una ecuación diferencial de segundo orden se considera una ecuación $F(x, y, y'') = 0$ y se llama solución de dicha ecuación a toda función $\phi(x)$ tal que $F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$, en otras palabras, una solución de una ecuación diferencial de segundo orden es toda función que sustituida junto con sus derivadas en la ecuación conduce a una identidad.

2.1.1 Tipos de Soluciones

Las soluciones de una ecuación diferencial de segundo pueden ser de tres tipos:
Solución general: se llama así a una expresión de la forma $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.1.1: Solución general

Dada la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 0$ donde la solución general para esta ecuación es $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$

Solucion Particular: son las soluciones que se obtienen fijando el valor de las constantes arbitrarias C_1 y C_2 de la solución general.

Ejemplo 2.1.2: Solución Particular

Dada la ecuación $x^2 y'' - xy' + y = 0$ donde la solución particular para esta ecuación es $y = 3x - 4x \ln x$

Solución Singular: Son aquellas soluciones que no están incluidas en la solución general, es decir, que no se pueden obtener a partir de la solución general asignando un valor conveniente a las constantes.

Ejemplo 2.1.3: Solución Singular

Dada la ecuación $y = xy' - (y')^2$ donde la solución general para esta ecuación es $y = Cx - C^2$ y donde la solución singular es $y = x^2/4$

2.1.2 Problemas de Cauchy o de valores iniciales

Toma el nombre de problema de Cauchy de segundo orden o problemas de valores iniciales al conjunto formado por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en forma explícita y dos condiciones iniciales, esto es, un problema de la forma

$$\begin{aligned} a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y &= g(x) \quad \text{(Ecuación diferencial)} \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) &= y_1 \quad \text{(Condiciones iniciales)} \end{aligned}$$

se puede revisar el ejemplo de la sección 1.4.2 donde se detalla el proceso.

La existencia y unicidad es muy importante, cabe recalcar lo que se vió en la sección 1.4.1 y la sección 1.4.2 donde se explica lo referente a las condiciones con las cuales se garantiza la existencia y unicidad de una solución de un problema con valores iniciales de primer y segundo orden, ahora se enunciará el siguiente teorema donde se resume la existencia de una solución única para el problema de Cauchy de segundo orden.

Teorema 2.1.1: Existencia de una solución única

Sean $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_2(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ en cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales de segundo orden existe en el intervalo y es única.

2.1.3 Conceptos básicos

Definición 2.1.2: Dependencia Lineal

Un conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de funciones definidas en un intervalo I, si existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, no todas iguales a cero, tales que

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_n f_n \equiv 0$$

es decir,

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x) = 0$$

para todo x en el intervalo I. Por otro lado si todas las constantes son iguales a cero, se dice que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es un conjunto linealmente independiente.

Es necesario tomar en consideración la defición del Wronskiano

Definición 2.1.3: Wronskiano

Dadas las funciones $f_1, \ldots, f_n$ se define su wronskiano como el determinante

$$W[f_1, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Proposición. Si un conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$ continuas con derivadas de orden n continuas es linealmente dependiente en un intervalo (a, b), entonces el wronskiano es igual a cero en (a, b).

La proposición anterior da condiciones necesarias para la dependencia lineal de un conjunto de funciones, pero la condición propuesta no es suficiente. Si el wronskiano de un conjunto de funciones es cero en (a, b) no se puede concluir que el conjunto es linealmente dependiente, de la proposición 2.1 lo que si es cierto es la negación, es decir,

Corolario 2.1. *Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es un conjunto de funciones continuas con derivadas de orden n en un intervalo (a, b). Si el wronskiano $W(f_1, \ldots, f_n)$ es diferente de cero* *por lo menos en un punto $x_0 \in (a,b)$, entonces el conjunto $\{f_1,\ldots,f_n\}$ es linealmente independiente.*

Ejemplo 2.1.4: Dependencia lineal

Mostrar que las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = 2e^x - e^{-x}$ son:

a.- Linealmente dependientes.

a.- Mostrar que $W(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 0$.

Se puede observar que es evidente la dependencia lineal ya que $f_3(x)$ se la puede obtener como una combinación lineal de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con lo cual se tiene una expresión de la siguiente forma:

$$f_3(x) = 2f_1(x) - f_2(x) \Rightarrow 2f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) = 0$$

Para el segundo literal se debe resolver el Wronskiano.

$$\begin{aligned} W(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 2e^x - e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^x + e^{-x} \\ e^x & e^{-x} & 2e^x - e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-x} - 2e^x + 2e^x + e^{-x} + 2e^x - e^{-x} \\ &\quad - \left[e^{-x} - 2e^x + 2e^x - e^{-x} + 2e^x + e^{-x}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se concluye que las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son linealmente dependientes.

Ejemplo 2.1.5: Independencia lineal

Demuestre que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Debido a que el Wronskiano es

$$\begin{aligned} W\left(e^{x}, e^{-x}\right) &= \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{x}e^{-x} - e^{x}e^{-x} \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

para todo x que pertenece a $\mathbb{R}$ y por el Corolario 2.1, se concluye que las funciones f y g son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

2.2 Ecuaciones reducibles a primer orden

Si una ecuación diferencial de segundo orden no contiene a x o no contiene a y, ésta puede reducirse a una ecuación diferencial de primer orden por medio de un adecuado cambio de variable, se puede usar los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= f\left(x, \frac{dy}{dx}\right), \quad \text{Cambio de variable} \quad z = \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= f\left(y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \text{Cambio de variable} \quad z' = \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.1: Resolver la ecuación diferencial

Dada la ecuación

$$xy'' + y' = 1$$

para $x > 0$.

Solución. Al realizar la sustitución $z = dy/dx$ la ecuación toma la forma

$$xz' + z = 1$$

o equivalentemente se tiene

$$x\frac{dz}{dx} = 1 - z$$

Si $z = 1$, entonces $y = x + C$, que evidentemente es solución de la ecuación para toda $C \in \mathbb{R}$.

Si $z \neq 1$, usando el método de variables separables se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{1-z} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dz}{1-z} &= \int \frac{dx}{x} \\
-\ln|1-z| &= \ln x + C_1 \\
e^{-\ln|1-z|} &= e^{\ln x + C_1} \\
e^{\ln|1-z|^{-1}} &= e^{\ln x} + e_1^C \\
(1-z)^{-1} &= x + C_1 \\
\frac{1}{1-z} &= x + C_1
\end{aligned}$$

despejando z se tiene que

$$z = \frac{x - C_1}{x}$$

donde se sabe que

$$\frac{dy}{dx} = z = \frac{x - C_1}{x}$$

y

$$C_1 = \pm e^{-C}$$

luego reemplazando el cambio de variable y usando el método de separación de variables se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x - C_1}{x} \\
dy &= \frac{x - C_1}{x} dx \\
\int dy &= \int \frac{x - C_1}{x} dx
\end{aligned}$$

finalmente la solución en su forma explícita es

$$\boxed{y = x - C_1 \ln x + C_2}$$

Admitiendo que C_1 puede tomar cualquier valor real, ésta es la solución general de la ecuación en el intervalo $(0, \infty)$.

Ejemplo 2.2.2: Resolver la ecuación diferencial

Dada la ecuación

$$4y''\sqrt{y} = 1$$

si la derivada es con respecto a x

Solución. Notar que las funciones constantes $y = C$ no son soluciones de la ecuación diferencial, suponer entonces que y no es una constante. Se usará el cambio de variable $z = dy/dx$ por lo que $z' = d^2y/dx^2$, además la ecuación diferencial para este ejercicio solo contiene a la variable y, la ecuación que se propone en el ejemplo toma la forma

$$\begin{aligned}
4y''\sqrt{y} &= 1 \\
4\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{y} &= 1 \\
4z'\sqrt{y} &= 1 \\
4\sqrt{y}\frac{dz}{dy} &= 1 \\
4dz\sqrt{y} &= dy \\
4dz &= \frac{dy}{\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

ahora se procede a usar el método de separación de variables

$$\begin{aligned}
4\int dz &= \int \frac{dy}{\sqrt{y}} \\
4\frac{z^2}{2} &= 2\sqrt{y} + C \\
2z^2 &= 2\sqrt{y} + C \\
z^2 &= \sqrt{y} + C
\end{aligned}$$

es decir que

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$$

entonces

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = \pm \int dx$$

para resolver la integral del lado izquierdo se hace una sustitución

$$w = \sqrt{\sqrt{y}+C_1}$$

con lo que $4w(w^2 - C_1)dw = dy$ de donde resulta que

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} &= 4\int (w^2 - C_1)dw \\ &= 4\left(\frac{1}{3}w^3 - C_1 w\right) + C_2 \end{aligned}$$

y así se obtiene que

$$\boxed{4\left[\frac{\left(\sqrt{y}+C_1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right] + C_2 = \pm x}$$

2.3 Ecuaciones homogéneas

Cuando se tiene una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{2.2}$$

se dice que es una ecuación homogénea, por otro lado una ecuación de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.3}$$

donde $g(x) \neq 0$, se dice que que es no homogénea.

Por ejemplo, $4y'' + y' - 10y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, mientras que $2x^3y''' + 6y' + 6y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden no homogénea. El término homogénea en este contexto no hace referencia a los coeficientes que son funciones homogéneas.

Observación. Para las funciones coeficientes, es decir, $a_i(x)$ con $i = 0, 1, \dots, n$ y $g(x)$ deben ser continuas, además $a_n(x) \neq 0$ para toda x en un intervalo.

Cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales homogeńeas de segundo orden tienen la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{2.4}$$

y cuando no sea una ecuación homogénea de segundo orden tendra la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.5}$$

Observación. Para resolver una ecuación lineal no homogénea, primero es necesario resolver la ecuación homogénea asociada

Operadores diferenciales:

El símbolo D toma el nombre operador diferencial ya que convierte una función derivable en otra función. Por ejemplo, $D(\cos 7x^2) = -14x\operatorname{sen}(7x^2)$ y $D(4x^4 - 12x^2) = 16x^3 - 24x$. Las derivadas de orden superior se expresan en términos de D de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2(y) \quad \text{y, en general} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

donde y representa una función suficientemente derivable [Zill.2013]. Para expresiones polinomiales en las que están inmersas D como por ejemplo $D + 12$, $2D^2 + 5D - 8$ y $24x^3D^3 + 17x^2D^2 + 8xD + 13$, son también operadores diferenciales. En un sentido más general, se define un operador diferencial de n-ésimo orden u operador polinomial como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{2.6}$$

y un operador diferencial de segundo orden se define como

$$L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x) \tag{2.7}$$

Como una consecuencia de dos propiedades básicas de la derivada, $D(Cf(x)) = CDf(x)$, C es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de linealidad, en otras palabras, L operando sobre una combonación lineal de dos funciones derivables es lo mismo que la combinación lineal de L operando en cada una de las funciones, esto se expresa como

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)) \tag{2.8}$$

donde α y β son constantes. Como resultado de (2.8) se dice que el operador diferencial de n-ésimo orden es un operador lineal [Zill.2013].

Ecuaciones Diferenciales

Para cualquier ecuación diferencial lineal se puede expresar en términos de la notación D. Por ejemplo dada la ecuación diferencial $2y'' + 8y' + 20y = 10x - 6$ se puede escribir como $2D^2y + 8Dy + 20y = 10x - 6$ que es una forma compacta de escribir la ecuación diferencial, otra forma de escribirla es tomando como factor común la variable y, por lo que se tiene $(2D^2 + 8D + 20)\, y = 10x - 6$.

Usando la ecuación (2.6), se puede escribir de una forma más compacta las ecuaciones (2.2) y (2.3) con lo cual se tendrá una expresión como la siguiente

$$L(y) = 0 \quad \text{y} \quad L(y) = g(x) \tag{2.9}$$

respectivamente.

Principio de superposición

Para el siguiente teorema se observará que la suma o la llamada superposición de dos o mas soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

Teorema 2.3.1: Principio de superposición de ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ky_k(x)$$

donde las C_i con $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución del intervalo.

Demostración. Se demuestra el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial que se definió en la ecuación (2.6) y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

Si se define $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene que

$$\begin{aligned} L(y) &= L\{C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\} \\ &= C_1L(y_1) + C_2L(y_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

A partir de este teorema se tiene dos corolarios que enuncian los siguiente

A) Un múltiplo constante $y = C_1y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

B) Una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial $y = 0$.

Ejemplo 2.3.1: Superposición de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{-3x}$ y $y_2 = e^{4x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - y' - 12y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Por el principio de superposición se tiene que la combinación lineal

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo.

Ejemplo 2.3.2: Superposición de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = x^3$ y $y_2 = x^4$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.

Por el principio de superposición se tiene que la combinación lineal

$$y = C_1x^3 + C_2x^4$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo.

Ejemplo 2.3.3: Superposición de una ED homogénea

Las función $y = e^{7x}$ es una solución de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y' + 14y = 0$.

Dado que la ecuación diferencial es lineal y homogénea, se considera al múltiplo constante $y = Ce^{7x}$ como una solución, para algunos valores de C se observa que $y = 27e^{7x}$, la solución trivial $y = 0$, $y = -\sqrt{82}e^{7x}$, en otras soluciones de la forma $y = Ce^{7x}$, son todas soluciones de la ecuación diferencial propuesta para este ejemplo.

Dependencia lineal e Independencia lineal

Definición 2.3.1: Dependencia e Independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ es linealmente dependienteen un intervalo I si existen constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ no todas nulas, tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x) = 0$$

para todo x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Dicho de otra forma un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I si para todas las constantes $C_1, \ldots, C_n$ son cero, es decir, si para toda x en el intervalo son $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Esta definición aplicada a un conjunto de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ consiste en demostar que existen dos constantes C_1 y C_2, ambas distintas de cero, si para toda x en el intervalo $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = 0$ y se supone que $C_1 \neq 0$ se puede inferir que

$$f_1(x) = \left(-\frac{C_2}{C_1}\right) f_2(x)$$

entonces se entiende que si un conjunto de dos funciones es linealmente dependiente una función es un múltiplo constante de la otra y por el contrario es linealmente independiente cuando ninguna función es múltiplo constante de la otra [Zill.2013].

Ejemplo 2.3.4: Soluciones linealmente independientes

Sean dos soluciones de una ecuación diferencial $y_1 = x^2$ y $y_2 = 5x + 2x^2$ probar que son soluciones linealmente independientes

Para probar este ejercicio lo que se debe hacer es multiplicar por una constante C_1 a y_1 y C_2 a y_2, luego se igualan las expresiones con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} C_1 y_1 &= C_2 y_2 \\ C_1 x^2 &= C_2 \left(5x + 2x^2\right) \\ C_1 x^2 &= 5C_2 x + 2C_2 x^2 \end{aligned}$$

se llega a una igualdad de polinomios, cuando se tiene una igualdad de polinomios significa que los coeficiente de la x del mismo grado deben ser iguales, por lo tanto

$$\begin{aligned} C_1 &= 2C_2 \\ 0 &= 5C_2 \end{aligned}$$

se llega a obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al resolver el sistema se tiene $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, por lo tanto las dos funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 2.3.5: Soluciones linealmente dependientes

Determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente, $f_1(x) = \cos 2x$ $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \cos^2 x$.

El conjunto de funciones $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \cos^2 x$ es linealmente dependiente ya que $f_1(x)$ se puedo obtener como una combinación lineal de $f_2(x)$ y $f_3(x)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (-1) f_2(x) + 2 f_3(x) \\ f_1(x) &= (-1)(1) + 2\cos^2 x \\ f_1(x) &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

aquí se usa la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Principalmente se busca funciones linealmente independientes, es decir, se busca soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal, resulta que si el conjunto de n soluciones $y_1, y_2, ..., y_n$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden es linealmente independiente se puede establecer de una forma un poco mecánica usando un determinante [Zill.2013].

Definición 2.3.2: wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ tienen al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

donde las primas denitan derivadas, se llama el Wronkskiano de las funciones.

Teorema 2.3.2: Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1, y_2, ..., y_n$ n soluciones de la ecuación difernecial lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y sólo si $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo x en el intervalo.

Cuando hay soluciones de una ecuación diferencial en un determinado intervalo el wronskiano es igual a cero o nunca es cero en el intervalo.

Definición 2.3.3: Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden (2.2) en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

Esta definición hace notar una cuestión básica sobre la existencia de un cojunto fundamental de soluciones para una ecuación lineal, lo cual se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3: Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I

Cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I se expresa como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en I, es decir, n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son los bloques básicos para la solución general de la ecuación [Zill.2013].

Teorema 2.3.4: Solución general; ecuaciones homogéneas

Sea $y_1, y_2, ..., y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación difernciał lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$$

donde C_i con $i = 1, ..., n$ son constantes arbitrarias.

El teorema 2.3.3 enuncia que si $Y(x)$ es alguna solución de la ecuación 2.2 en un intervalo I, entonces se puede econtrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_3(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

Se procederá a demostrar el caso cuando $n = 2$

Demostración. Sea Y una solución y y_1, y_2 soluciones linealmente independites de $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ en un intervalo I. Se supone que $x = t$ es un punto en I para el cual $W(y_1(t), y_2(t) \neq 0)$, se supondrá también que $Y(t) = k_1$ y $Y'(t) = k_2$. Si se examinan las ecuaciones se tendria una expresión como la siguiente

$$\begin{aligned} C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) &= k_1 \\ C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) &= k_2 \end{aligned}$$

De esa forma se puede determinar tanto C_1 como C_2 de manera única, para ello la condición de que el determinante de los coeficientes debe satisfacer

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Este determinante no es más que el Wronskiano evaluado en $x = t$ y por suposición $W \neq 0$. Si se define $G(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, se puede ver que $G(x)$ satisface la ecuación diferencial debido a que es una superposición de dos soluciones conocidas, así $G(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$G(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1 \quad \text{y} \quad G'(t) = C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2$$

y $Y(x)$ satisface la misma ecuación lineal y las mismas condiciones iniciales debido a que la solución de este problema con valores iniciales lineal es única esto se puede afirmar debido al teorema 2.1.1, luego se tiene $Y(x) = G(x)$ o expresado de una forma más clara sería $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. ■

Ejemplo 2.3.6: Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{-3x}$ y $y_2 = e^{4x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - y' - 12y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución. Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x, este hecho se corrobora al observar que el Wronskiano es

$$\begin{aligned} W\left(e^{-3x}, e^{4x}\right) &= \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-3x} \cdot 4e^{4x} - \left(-3e^{-3x} \cdot e^{4x}\right) \\ &= 4e^{x} + 3e^{x} \\ &= 7e^{x} \neq 0 \end{aligned}$$

para toda x. Se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y por tanto $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo.

Ejemplo 2.3.7: Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{x}\cos 2x$ y $y_2 = e^{x}\operatorname{sen} 2x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 2y' + 5y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución. Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x, este hecho se corrobora al observar que el Wronskiano es

$$
\begin{aligned}
W\left(e^x \cos 2x, e^x \operatorname{sen} 2x\right) &= \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \operatorname{sen} 2x \\ e^x \cos 2x - 2e^x \operatorname{sen} 2x & e^x \operatorname{sen} 2x + 2e^x \cos 2x \end{vmatrix} \\
&= \left(e^x \cos 2x\right) \cdot \left(e^x \operatorname{sen} 2x + 2e^x \cos 2x\right) \\
&\quad - \left(e^x \cos 2x - 2e^x \operatorname{sen} 2x\right) \cdot \left(e^x \operatorname{sen} 2x\right) \\
&= e^x \cos 2x \cdot e^x \operatorname{sen} 2x + e^x \cos 2x \cdot 2e^x \cos 2x - e^x \cos 2x \cdot e^x \operatorname{sen} 2x \\
&\quad + e^x \operatorname{sen} 2x \cdot 2e^x \operatorname{sen} 2x \\
&= +e^x \cos 2x \cdot 2e^x \cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x \cdot 2e^x \operatorname{sen} 2x \neq 0
\end{aligned}
$$

para toda x. Se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y por tanto $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$ es la solución general de la ecuación en el intervalo.

2.4 Ecuaciones no homogéneas

Para cualquier función y_p o también llamada función particular, libre de parámetros arbitrarios que satisfaga a la ecuación (2.3) se dice que es una solución particular de la ecuación.

En un sentido general si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de (2.2) en un determinado intervalo I y y_p es cualquier solución particular de (2.3) en I, se tiene que la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_k y_k(x) + y_p$$

es también una solución de la ecuación homogénea (2.3), en específico para ecuaciones diferenciales de segundo orden se tendria una solución como la siguiente

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p$$

Teorema 2.4.1: Solución general de ecuaciones no homogéneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I y sea $y_1, y_2, ..., y_n$ n un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada en I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_p \tag{2.10}$$

donde C_i con $i = 1, ..., n$ son constantes arbitrarias.

Demostración. Sea L el operador diferencial como se definió en la ecuación (2.6) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogégea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene que

$$\begin{aligned} L(u) &= L\{Y(x) - y_p(x)\} \\ &= L(Y(x)) - L(y_p(x)) \\ &= g(x) - g(x) \end{aligned}$$

esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Así por el teorema 2.3.4, se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \\ Y(x) - y_p(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \\ Y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + y_p(x) \end{aligned}$$

■

Función Complementaria

Como se ve en el teorema (2.4.1) que la solución general de una ecuación lineal no homogénea esta compuesta por la suma de dos funciones

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

La combinación lineal $y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$ que es la solución general de (2.2), se llama función complementaria para la ecuación (2.3), es decir, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se encuentra una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$$y\text{= función complementaria} + \text{cualquier solución particular}$$

en símbolos sería

$$y = y_c + y_p$$

Ejemplo 2.4.1: Solución general de una ED no homogénea

Por sustitución se verifica que la función $y_p = 1/2x^2 + 3/2x + 7/4$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

Se procederá a verificar la solución particular, primero es importante obtener y_p' y y_p''

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \\ y_p' &= x + \frac{3}{2} \\ y_p'' &= 1 \end{aligned}$$

ahora se procede a sustituir y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= x^2 \\ 1 - 3\left(x + \frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) &= x^2 \\ 1 - 3x - \frac{9}{2} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} &= x^2 \\ x^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Para escribir la solución general, también se debe poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

cuya solución en el intervalo$(-\infty, \infty)$ es $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^x$, por tanto la solución general em dicho intervalo es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1e^{2x} + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2: Solución general de una ED no homogénea

Compruebe que dada la familia de soluciones de dos parámetros se trata de la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado, da la ecuación diferencial $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$ cuya solución general es $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$, definido en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Se procederá a verificar la solución particular, primero es importante obtener y_p' y y_p''

$$\begin{aligned} y_p &= 6e^x \\ y_p' &= 6e^x \\ y_p'' &= 6e^x \end{aligned}$$

ahora se procede a sustituir y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 7y' + 10y &= 24e^x \\ 6e^x - 7(6e^x) + 10(6e^x) &= 24e^x \\ 6e^x - 42e^x + 60e^x &= 24e^x \\ 6e^x + 18e^x &= 24e^x \\ 24e^x &= 24e^x \end{aligned}$$

Para escribir la solución general, también se debe poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y'' - 7y' + 10y = 24e^x = 0$$

cuya solución en el intervalo$(-\infty, \infty)$ es $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$, por tanto la solución general em dicho intervalo es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x \end{aligned}$$

Teorema 2.4.2: Principio de superposición de ecuaciones no homogéneas

Sean $y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pk}$ con k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{p1} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x), \tag{2.11}$$

donde $i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_1(x) + y_{p2}(x) + \cdots + y_{pk}(x) \tag{2.12}$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x) \tag{2.13}$$

Demostración. Se demostrará para el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial definido en la ecuación (2.6) y sean $y_{p1}(x)$ y $y_{p2}(x)$ soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas $L(y) = g_1(x)$ y $L(y) = g_2(x)$, respectivamente. Si se define $y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$, se quiere demostrar que y_p es una solución particular de $L(y) = g_1(x) + g_2(x)$, se deduce el resultado por la linealidad del operador L:

$$\begin{aligned} L(y_p) &= \{y_{p1}(x) + y_{p2}(x)\} \\ &= L(y_{p1}(x)) + L(y_{p1}(x)) \\ &= g_1(x) + g_2(x) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.3: Superposición de ED no homogénea

Comprobar que

$$
\begin{aligned}
y_{p1} &= 5x \quad \text{es una solución particular de} \quad y'' + 2y' = 10 \\
y_{p2} &= -x^2 + x \quad \text{es una solución particular de} \quad y'' + 2y' = -4x \\
y_{p3} &= 2x^2 + \frac{x}{2} \quad \text{es una solución particular de} \quad y'' + 2y' = 8x + 5
\end{aligned}
$$

Por el teorema 2.4.2, en específico usando la ecuación (2.12), la superposición de y_{p1}, y_{p2} y y_{p3} nos da una nueva solución

$$
\begin{aligned}
y &= y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} \\
y &= 5x - x^2 + x + 2x^2 + \frac{x}{2} \\
y &= x^2 + \frac{13}{2}
\end{aligned}
$$

es una solución de

$$
\begin{aligned}
y'' + 2y' &= 10 - 4x + 8x + 5 \\
y'' + 2y' &= 4x + 15
\end{aligned}
$$

Se procederá a verificar la solución particular, primero es importante obtener y_p' y y_p''

$$
\begin{aligned}
y_p &= x^2 + \frac{13}{2}x \\
y_p' &= 2x + \frac{13}{2} \\
y_p'' &= 2
\end{aligned}
$$

ahora se procede a sustituir y_p, y_p' y y_p'' en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + 2y' &= 4x + 15 \\ 2 + 2\left(2x + \frac{13}{2}\right) &= 24x + 154e^{x} \\ 2 + 4x + 13 &= 4x + 15 \\ 4x + 15 &= 4x + 15 \end{aligned}$$

2.5 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

El método para resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes es un método que utiliza sólo álgebra.

Observación. Al despejar y' de la ecuación $ay' + by = 0$ se tiene que $y' = -b/ay$ donde $k = -b/a$, resaltando que k es una constante, de esa forma se tiene una expresión $y' = ky$.

Esta observación revela la naturaleza de la solución que se busca, es decir, obtener y. Existe una única función elemental no trivial cuya derivada es constante múltiple de si misma, se esta hablando de la función exponencial e^{mx}, se procede a sustituir $y = e^{mx}$ y $y' = me^{mx}$ en la ecuación diferencial $ay' + by = 0$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} ame^{mx} + be^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am + b) &= 0 \end{aligned}$$

Se sabe que e^{mx} no toma el valor de cero para valores reales de x, dicho esto la ecuación $e^{mx}(am + b) = 0$ solo se satisface cuando m es una solución o raíz de la ecuación polinomial de primer grado $am + b = 0$. Para mostar este hecho se considera la ecuación diferencial $8y' + 24y = 0$.

Observación. No es necesario realizar la derivación y la sustitución de $y = e^{mx}$ en la ecuación diferencial.

Se pone la ecuación diferencial propuesta en una forma auxiliar $8m + 24 = 0$, se despeja m y obtiene $m = -3$ por tanto la solución de la ecuacion diferencial es $y = C_1e^{-3x}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficinetes constantes se sigue el proceso que se detalla a continuación.

Dada la ecuación diferencial homogénea

$$ay'' + by + cy = 0 \tag{2.14}$$

donde a, b, c son constantes, se trata de buscar una solución de la forma $y = e^{mx}$ luego se procede a buscar su primera y segunda derivada, es decir, $y' = me^{mx}$ y m^2e^{mx}, estas expresiones se reemplazan en la ecuación diferencial (2.14) y se tiene

$$\begin{aligned} a\left(m^2e^{mx}\right) + b\left(me^{mx}\right) + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) &= 0 \end{aligned}$$

debido a que $e^{mx} \neq 0$ para toda x, por tanto la única forma $y = e^{mx}$ satisfaga a la ecuación diferencial (2.14) es tomando m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.15}$$

Esta última ecuación toma el nombre de ecuación auxiliar de la ecuación diferencial (2.14), se sabe que al ser la expresión (2.15) una ecuación cuadrática, por tanto tiene dos soluciones o raíces las cuales por la fórmula general se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ m_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Observación. Existen tres formas posibles de la solución general que enmarcan tres posibles casos

- m_1 y m_2 son raíces reales y distintas cuando el discriminante es $b^2 - 4ac > 0$.
- m_1 y m_2 son raíces reales e iguales cuando el discriminante es $b^2 - 4ac = 0$.
- m_1 y m_2 son números conjugados complejos cuando el discriminante es $b^2 - 4ac < 0$.

Caso 1: Raíces reales y distintas.

Bajo el supuesto que m_1 y m_2 son reales y distintas se plantean dos soluciones $y_1 = C_1e^{m_1x}$ y $y_2 = C_2e^{m_2x}$, además estas funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$, por lo tanto, forman un conjunto fundamental. La solución general tiene la forma:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.5.1: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $m^2 - 3m + 2 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-3)^2 - 4(1 * 2) \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces se tienen dos raíces reales y distintas, factorizando se tiene que

$$(m-2)(m-1) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} m_1 &= 2 \\ m_2 &= 1 \end{aligned}$$

por lo que la solución general es

$$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}}$$

Ejemplo 2.5.2: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $m^2 + 5m + 6 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (5)^2 - 4(1 * 6) \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces se tienen dos raíces reales y distintas, factorizando se tiene que

$$(m+3)(m+2) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} m_1 &= -3 \\ m_2 &= -2 \end{aligned}$$

por lo que la solución general es

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}}$$

Caso 2: Raíces reales e iguales.

Debido a que $m_1 = m_2$ se tiene una sola solución $y_1 = em_1x$. Analizando un poco más a profundidad la fórmula cuadrática se halla que $m_1 = -b/2a$ ya que $b^2 - 4ac = 0$, entonces se plantea una segunda solución

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_2 x}}{e^{2m_2 x}} dx \\ y_2 &= e^{m_1 x} \int dx \\ y_2 &= x e^{m_1 x} \end{aligned}$$

Observación. Se usó el hecho de que $-b/a = 2m_1$.

La solución general tiene la forma

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} \tag{2.17}$$

Ejemplo 2.5.3: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $m^2 + 8m + 16 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 8^2 - 4(1 * 16) \\ &= 64 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces se tienen dos raíces reales e iguales, aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se tiene que

$$m_1 = m_2 = -4$$

por lo que la solución general es

$$\boxed{y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}}$$

Ejemplo 2.5.4: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $m^2 - 4m + 4 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(1 * 4) \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces se tiene dos raíces reales e iguales, aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se tiene que

$$m_1 = m_2 = 2$$

por lo que la solución general es

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}$$

Caso 3: Raíces complejas conjugadas.

Dado que m_1 y m_2 son raíces complejas se escribe $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β son mayores que cero y además son reales, recordar que $i^2 = -1$, luego se tiene que la solución se expresa como:

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Observación. En la práctica es preferible trabajar con funciones reales en lugar de exponenciales complejas, preferentemente se usa la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

donde θ es cualquier número real.

De la fórmula de Euler se deduce que

$$\begin{aligned} e^{i\beta x} &= \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \\ e^{-i\beta x} &= \cos\beta - +i \operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

donde se usaron $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. Tome en cuenta que si primero se suma y luego se restan las dos ecuaciones $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\operatorname{sen}\beta x$ y $e^{-i\beta x} = \cos\beta - +i\operatorname{sen}\beta x$, se obtiene, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\operatorname{sen}\beta x$$

Puesto que $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ es una solución de (2.14) para alguna elección de las constantes C_1 y C_2, las elecciones $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = C_2 = -1$ dan, a su vez, dos soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Pero

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

Por tanto, del corolario A) del teorema del teorema 2.3.1 sobre el principio de superposición de ecuaciones homogéneas, los dos últimos resultados muestran que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones reales de (2.14). Además, estas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$, de esa manera, la solución general es

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x\right) \tag{2.18}$$

Ejemplo 2.5.5: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $m^2 - 4m + 5 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(1 * 5) \\ &= 16 - 20 \\ &= -4 \end{aligned}$$

entonces se tiene dos raíces que son números conjugados complejos, aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 &= 2+i \\ m_2 &= 2-i \end{aligned}$$

donde $\alpha = 2$ y $\beta = 1$por lo que la solución general es

$$\boxed{y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x\right)}$$

Ejemplo 2.5.6: ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Obtenga la solución general de la ED planteada

$$2y'' + 2y' + y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar es $2m^2 + 2m + 1 = 0$, se analiza que el discriminante es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2)^2 - 4(2 * 1) \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 \end{aligned}$$

entonces se tiene dos raíces que son números conjugados complejos, aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1+i}{2} \\ m_2 &= \frac{-1-i}{2} \end{aligned}$$

donde $\alpha = -1/2$ y $\beta = 1/2$ por lo que la solución general es

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{1}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x\right)}$$

2.6 Coeficientes indeterminados

En la seccón anterior se vio como resolver una ecuación diferencial homogénea mediante coeficientes constantes lo que sirve para dar una solución complementaria y_c que es es la solución de la ecuación homogénea asociada, ahora cuando se tiene una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

en su forma general y para ED de segundo orden se tiene

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

para resolverla es preciso conocer una solución particular llamada y_p, la cual junto con la solución complementaria dará la solución general

$$y = y_c + y_p$$

en un sentido general una solución para la ecuación diferencial no homogenea sería

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p \tag{2.19}$$

y para el caso de una ED no homogénea de segundo orden la solución sería

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$$

En esta sección se presentará dos métodos para hallar la solución particular lo cuales son el método de superposición y método del anulador.

Método de superposición

Este método enuncia que la idea fundamental es una conjetura acerca de la forma de y_p . El método general se limita a ED lineales como (2.11), es decir, este método solo se puede aplicar a una clase bastante restringida de funciones $F(x)$ y tiene la ventaja de ser un método sencillo de aplicar, es importante conocer la siguiente definición antes de hablar sobre el método de resolución [Cerda Romero & Morocho Yaucán.2018].

Definición 2.6.1: Función de tipo CI

Se llama función de tipo CI a las funciones que tienen la siguiente forma:

1. x^n para todo $n \geq 0$
2. Sea $e^{\alpha x}$ donde α es una constante diferente de cero.
3. $\operatorname{sen}(\alpha x + \beta)$ donde α y β son constantes y donde $\alpha \neq 0$.
4. $\cos(\alpha x + \beta)$ donde α y β son constantes y donde $\alpha \neq 0$.
5. Cualquier función que se pueda conseguir como una suma finita de productos finitos de funciones de las clases anteriores.

Nota. Se dice que $g(x) = K$ donde la K es una constante, donde $g(x) = K$ es una función polinomial.

las siguientes funciones son algunos ejemplos de los tipos de entradas $g(x)$ que cumple con la definición 2.6.1:

$$g(x) = 69, \;\; g(x) = 2x^2 - 10x, \;\; g(x) = 24x - 15 + e^{-x}, \;\; g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 4x$$

El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma (2.11) cuando

$$g(x) = \ln x, \;\; g(x) = \frac{1}{x}, \;\; g(x) = \tan x, \;\; g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$$

entre otras funciones que son del mismo tipo como las que se mostraron anteriormente [Zill.2013].

Observación. Si bien una función de tipo CI pertenece a una clase restringida de funciones, esta cubre una gama bastante amplia de funciones que tienen la ventaja de aparecer en muchas aplicaciones físicas, además el método de coeficientes indeterminados es aplicable únicamente a funciones del tipo CI.

Ahora se procederá a dar un definición sobre lo que es un conjunto asociado a una función de tipo CI

Definición 2.6.2: Conjunto asociado a una función de tipo CI

Sea f una función de tipo CI. Se llama cojunto CI asociado a la función f al conjunto CI_f formado por la función f y todas las funciones de tipo CI que se consiguen de f por la derivación.

Por ejemplo se considera a la función f definida como $f(x) = x^4$, se sabe que f es un función de tipo CI, luego es lógico hallar el conjunto CI asociado a x^4. Al derivar se consiguen las funciones de tipo CI siguientes: $x^4, x^3, x^2, x, 1$. Por tanto, el conjunto $CI_(x^4)$ es

$$CI_(x^4) = \{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$$

En el siguiente ejemplo se procederá a ir detallando el método que permite hallar la solución y_p y luego determinar la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$.

Ejemplo 2.6.1: Solución general usando coeficientes indeterminados

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 2y' - y = x^2 - 3x + 6$$

Solución. **Paso 1.-** Consiste en resolver la ecuación homogénea asociada es decir la ecuación $y'' + 2y' - y = 0$, usando la ecuación auxliar $m^2 + 2m - 1 = 0$ se debe hallar las raíces, para lo cual se usa la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, así dichas raíces son $m_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $m_2 = -1 - \sqrt{2}$, con lo cual la función complementaria es

$$y_c = C_1 e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{-\left(1+\sqrt{2}\right)x}$$

Paso 2.- Debido a que la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, se supondrá que una solución particular es también de la forma de un polinimio cuadrático;

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Se requiere determinar coeficientes A, B y C para los cuales y_p es una solución para la ecuación diferencial propuesta. Ahora sustituyendo y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{y} \quad y_p^{''} = 2A$$

en la ecuación (2.12), se tiene que completando la sustitución propuesta se obtiene

$$\begin{aligned} 2A + 2\,(2Ax + B) - \left(Ax^2 + Bx + C\right) &= x^2 - 3x + 6 \\ 2A + 4Ax + 2B - Ax^2 - Bx - C &= x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

Ahora procedemos a armar el sistema, se supone que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de los exponentes semenjantes a x deben ser iguales, reordenando la expresión, entonces se tiene

$$(-A)\,x^2 + (4A - B)\,x + (2A + 2B - C) = x^2 - 3x + 6$$

con lo cual se establece el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -A &= 1 \\ 4A - B &= -3 \\ 2A + 2B - C &= 6 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -7 \\ C &= -22 \end{aligned}$$

cin lo cual la solución particular

$$y_p = -x^2 - 7x - 22$$

Paso 3.- La solución general de la ecuación dada es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ y &= C_1 e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{-\left(1+\sqrt{2}\right)x} - x^2 - 7x - 22 \end{aligned}$$

Observación. Es importante considerar el conjunto asociado a una función de tipo CI ya que dependiendo de ese conjunto CI_f se llegará a suponer la forma que debe tener la solución particular para posteriormente hallar los coeficientes para los cuales y_p es una solución para la ecuación diferencial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$.

Ejemplo 2.6.2: Solución general usando coeficientes indeterminados

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2\operatorname{sen} 3x \tag{2.20}$$

Solución. **Paso 1.-** Consiste en resolver la ecuación homogénea asociada es decir la ecuación $y'' - y' + y = 0$, usando la ecuación auxliar $m^2 - m + 1 = 0$ se debe hallar las raíces, usando el criterio del discriminante se tiene

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-1)^2 - 4(1 * 1) \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

por lo que se tiene dos raíces complejas conjugadas, para lo cual se usa la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, así dichas raíces son

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ m_2 &= \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1/2$ y $\beta = \sqrt{3}/2$, con lo cual la función complementaria es

$$y_c = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Paso 2.- Una suposición adecuada para hallar la solución particular y_p sería $A\operatorname{sen} 3x$, pero debido a que las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen} 3x$ dan $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$, llevaría a suponer una solución particular de la forma

$$y_p = A\cos 3x + B\,\mathrm{sen}\,3x$$

se debe hallar y_p'' y y_p', entonces:

$$\begin{aligned} y_p' &= -3A\,\mathrm{sen}\,3x + 3B\cos 3x \\ y_p'' &= -9A\cos 3x - 9B\,\mathrm{sen}\,3x \end{aligned}$$

ahora se procede a sustituir los resultados en la ecuación diferencial propuesta:

$$\begin{aligned} y'' - y' + y &= -9A\cos 3x - 9B\,\mathrm{sen}\,3x + 3A\,\mathrm{sen}\,3x - 3B\cos 3x + A\cos 3x + B\,\mathrm{sen}\,3x \\ &= \cos 3x\,(-9A - 3B + A) + \mathrm{sen}\,3x\,(-9B + 3A + B) \\ &= (-8A - 3B)\cos 3x + (-3A - 8B)\,\mathrm{sen}\,3x \end{aligned}$$

entonces

$$y'' - y' + y = (-8A - 3B)\cos 3x + (-3A - 8B)\,\mathrm{sen}\,3x = 2\,\mathrm{sen}\,3x$$

ahora se procede a armar el sistema, pero antes tiene que quedar claro que

$$y'' - y' + y = (-8A - 3B)\cos 3x + (-3A - 8B)\,\mathrm{sen}\,3x = 0\cos 3x 2\,\mathrm{sen}\,3x$$

ahora procedemos a armar el sistema:

$$\begin{aligned} -8A - 3B &= 0 \\ 3A - 8B &= 2 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de dos incógnitas y dos ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \frac{6}{73} \\ B &= -\frac{16}{73} \end{aligned}$$

por lo cual la solución particular sería

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\operatorname{sen} 3x$$

Paso 3.- Como paso final es escribir la solución general de la ecuación diferencial propuesta para este ejercicio

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ y &= e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

Observación. La forma que se supone para dar una expresión para la solución particular y_p es una intuición educada, es decir, no es una intuición a ciegas. Esta intuición educada debe considerar no solo los tipos de funciones que componen a $g(x)$ sino también las funciones que conforman la función complementaria y_c

Método del anulador

Se sabe que una ecuación diferencial

$$a_2D^2y + a_1D + a_0y = g(x) \tag{2.21}$$

donde

$$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{y} \quad Dy = \frac{dy}{dx}$$

es una notación más simplificada usando los operadores diferenciales, además la ecuación (2.21) puede ser escrita como $L(y) = g(x)$, donde L denota al operador diferencial de segundo orden

$$a_2D^2 + a_1D + a_0$$

Observación. La notación de operador es una abreviatura conveniente, los operadores diferenciales permiten en cierta forma justificar las reglas para hallar la forma de la solución particular y_p, con lo que para esta sección no existe reglas especiales para hallar la forma de y_p, la forma de y_p se deduce al instante una vez que se halla un operador diferencial adecuado que anula a $g(x)$ en (2.21).

Antes de presentar el método de solución es importante tener claro dos conceptos, los cuales se presentarán a continuación.

Factorización de operadores

Se tiene los coeficientes coeficientes a_2, a_1 y a_0 son constantes reales, un operador diferencial lineal (2.21) puede ser factorizado como el polinomio característico

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 \tag{2.22}$$

siempre y cuando sea factorizable. Si r_1 es una raíz de la ecuacíın auxiliar

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0$$

entonces $L(D - r_1)P(D)$, donde $P(D)$ es una expresión polinomial el cual es un operador diferencial lineal de orden $n - 1$.

Para que se pueda comprender, es preciso dar un ejemplo, considerar el operador $D^2 + 9D + 20$ el cual se factorizar como $(D + 5)(D + 4)$ y al ser la multiplicación una operación con la propiedad de ser conmutativa, también se puede expresar la factorización que se obtuvo como $(D + 4)(D + 5)$. Por lo que si una función $y = f(x)$ tiene una segunda derivada entonces

$$\left(D^2 + 9D + 20\right) y = (D + 5)(D + 4)\, y = (D + 4)(D + 5)\, y$$

Observación. Los factores de un operador diferencial con coeficientes constantes conmutan.

Considerar la ecuación diferencial $y'' + 10y' + 25 = 0$ la misma que puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \left(D^2 + 10D + 25\right) y &= 0 \quad \text{o puede ser escrita como} \\ (D + 5)(D + 5) &= 0 \quad \text{o puede ser escrita como} \\ (D + 5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Operador Anulador

Definición 2.6.3: Operador Anulador

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente derivable tal que

$$L\left(f(x)\right) = 0$$

entonces se dice que L es un operador anulador de la función.

Observación. El operador D anula una función constante $y = K$ debido a que $DK = 0$. El operador diferencial D^2 anula la función $y = x$ ya que la primera y segunda derivada de x son 1 y 0 respectivamente. De forma similar con el operador $D^3x^2 = 0$ y asi en forma general con $D^n x^{n-1}$.

Definición 2.6.4: Operador Diferencial

El operador diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$1, x, x^2, ..., x^{n-1}$$

y si se tiene D^2 anula a las funciones

$$1.x$$

Observación. Por la definición anterior, en consecuencia y debido a que la derivación se puede hacer término a término, un polinomio de la forma:

$$C_0 + C_1X + C_2x^2 + \cdots + C_{n-1}x^{n-1}$$

se anula al encontrarse un operador que suprima la potencia más alta de x.

Definición 2.6.5: Funciones que se anulan por un Operador Diferencial

Las funciones que se anulan por un operador diferencial lineal de segundo orden L, son aquellas funciones que se consiguen a partir de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

Esta definición es validamente aplicable para funciones que se anulen por un operador diferencial de $n-$ésimo orden.

Definición 2.6.6: Anuladores

El operador diferencial $(D-\alpha)^n$ anula cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}$$

Si el operador diferencial es $(D-\alpha)^2$, entonces anula a las funciones

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$$

En general sucede que la ecuación auxiliar de la ecuaciń diferencial homogénea $(D-\alpha)^n y = 0$ es $(m-\alpha)^n = 0$, dado que α es una raíz que tiene multiplicidad n, la solución general es

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x} + C_3x^2e^{\alpha x} + \cdots + C_nx^{n-1}e^{\alpha x}$$

y si $(D-\alpha)^2 y = 0$, la ecuación auxiliar sería $(m-\alpha)^2 = 0$, entonces se entiende que α tiene multipicidad $n = 2$, la solución general tendría la forma

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x}$$

Ejemplo 2.6.3: Operadores Anuladores

Hallar un operador diferencial que anule a la función dada

$$7x^3 + 10x^2 - 14$$

Solución. Un operador para la expresión dada sería $D^4x^3 = 0$ de modo que

$$D^4\left(7x^3 + 10x^2 - 14\right) = 0$$

Sean α y β, donde $\beta > 0$ son números reales, la fórmula cuadrática revele que $\left[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2+\beta^2)\right]^n = 0$ tiene raíces complejas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, ambas raíces de multiplicidad n y por el estudio de las raíces complejas congujadas en el método de coeficientes indeterminados por el método de superposición se tiene la siguiente definición.

Definición 2.6.7: Anuladores

El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula cada una de las funciones

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos\beta x \quad &, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, n^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \quad &, \quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots, n^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

Si el operador diferencial es $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^2$, anula a las funciones

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos\beta x \quad &, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \quad &, \quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.4: Operadores Anuladores

Hallar un operador diferencial que anule a la función dada

$$4e^{-4x}\cos 5x - 12e^{-4x}\operatorname{sen} 5x$$

Solución. De acuerdo a la inspección de las funciones $e^{-4x}\cos 5x$ y $e^{-4x}\operatorname{sen} 5x$, se puede ver que $\alpha = -4$ y $\beta = 5$. De acuerdo a lo enunciado en la definición 2.6.7, se tiene el operador anulador

$$\begin{aligned} D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \\ D^2 - 2(-4)D + \left((-4)^2 + (5)^2\right) \\ D^2 + 8D + 41 \end{aligned}$$

el cual anulará a cualquier función que sea combinación lineas de la función propuesta $4e^{-4x}\cos 5x - 12e^{-4x}\operatorname{sen} 5x$.

Observación. En el caso que $\alpha = 0$ y $n = 1$, el cual es un caso especial de la definición 2.6.7 es decir

$$\left(D^2 + \beta^2\right)\begin{cases} \cos\beta x = 0 \\ \operatorname{sen}\beta x = 0 \end{cases}$$

lo que conlleva, por ejemplo $D^2 + 36$ anulará a cualquier combinación lineal de $\operatorname{sen} 6x$ y $\cos 6x$.

Proposición. Sea L_1 y L_2 operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces el producto de los operadores diferenciales $L_1 L_2$ anula a la suma $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Demostración. Al ser L un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces se supone que L anulará a la combinación lineal $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, se procederá a usar la linealidad y el hecho de que $L_1 L_2 = L_2 L_1$, es decir, que los operadores conmutan por tanto

$$\begin{aligned} L_1 L_2(y_1 + y_2) &= L_1 L_2(y_1) + L_1 L_2(y_2) \\ &= L_2\left[L_1(y_1)\right] + L_1\left[L_2(y_2)\right] \\ &= L_2 \cdot 0 + L_1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así queda demostrado que el producto de los operadores diferenciales $L_1 L_2$ anula a la suma $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. ■

Observación. El operador diferencial que anula una función no es único. Es importante buscar un operador diferencial para una función $y = f(x)$ tal que, dicho operador sea del mínimo orden posible que anule a $f(x)$.

Si se tiene $L(y) = g(x)$ una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y en la que $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de funciones, en otras palabras, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones como:

$$K, x^m, x^m e^{\alpha x}, x^m e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \quad \text{y} \quad x^m e^{\alpha x} \cos \beta x$$

donde m es un entero no negativo y $\alpha\beta \in \mathbb{R}$, entonces $g(x)$ puede ser anulada por un operador diferencial L_1 de menor orden, que es producto de los operadores D^n, $(D-\alpha)^n$ y $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2\beta^2)^n$ [Zill.2013].

Observación. Si se multiplica L_1 a la expresión $L(y) = g(x)$ se tiene $L_1 L(y) = L_1 g(x) = 0$, con lo cual se llega a tener una solución particular y_p para la ecuación original no homogénea $L(y) = g(x)$, luego se procede a sustituir esta expresión supuesta en $L(y) = g(x)$ para hallar una solución particular explícita.

Recordar que la solución general de una ecuación diferencial no homogénea $L(y) = g(x)$, es decir, $y = y_c + y_p$, donde y_c es la solución general de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$.

Observación. La solución general de cada ecuación $L(y) = g(x)$ se define en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ahora se mostrara el método de solución mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6.5: Solución general usando coeficientes indeterminados

Resolver

$$2y'' + y' - 3y = 4x^2$$

Solución. Paso 1.- Primero se resuelve la ecuación homogénea asociada $2y'' + y' - 3y = 0$, para lo cual usamos la ecuación auxiliar $2m^2 + m - 3$, haciendo usa de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado se obtiene las raíces $m_1 = 1$ y $m_2 = -3/2$ por consiguiente la función complementaria es

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3/2x}$$

Paso 2.- En este paso se busca el operador anulador, en este caso el operador anulador para $4x^2$ será el operador diferencial D^3, se ve que $D^3(2D^2 + D - 3)\,y = 4D^3x^2$, es lo mismo que

$$D^3\left(2D^2 + D - 3\right) y = 0 \tag{2.23}$$

para lo cual se requiere de la ecuación auxiliar de quinto orden en (2.23)

$$m^3\left(2m^2 + m - 3\right) = 0$$

sencillamente se obtienen las raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0, m_4 = 1$ y $m_5 = -3/2$, por lo tanto la solución general es

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + C_5 e^{-3/2x} \tag{2.24}$$

debemos entender que los términos $C_4 e^{-x} + C_5 e^{-3/2x}$ en la ecuación (2.24) es la función complementaria para la la ecuación propuesta en el ejemplo 2.6.5, dicho esto se argumenta que una solución particular y_p también debe satisfacer la ecuación (2.23), esto nos indica que los términos restantes de la ecuación (2.24) deben tener la forma básica de y_p:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \tag{2.25}$$

de manera conveniente se ha remplazado C_1, C_2 y C_3 por A, B y C respectivamente. Para que la ecuación (2.25) sea una solución particular de $2y'' + y' - 3y = 4x^2$, es necesario encontrar coeficientes A, B y C. Se procede a encontrar la primera y segunda derivada de la ecuación (2.25)

$$y_p' = B + 2Cx, \quad \text{y} \quad y_p'' = 2C$$

esta estas expresiones se sustituyen en la ecuación $2y'' + y' - 3y = 4x^2$ y se obtiene

$$\begin{aligned} 2y_p'' + y_p' - 3y_p &= 4x^2 \\ 2C + B + 2Cx - 3A + 3Bx + 3Cx^2 &= 4x^2 \end{aligned}$$

Ahora procedemos a armar el sistema de ecuaciones, se supone que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de los exponentes semenjantes a x deben ser iguales, reordenando la expresión, entonces se tiene

$$(3C)\,x^2 + (2C + 3B)\,x + (-3A + B + 2C) = 4x^2 + 0x + 0$$

con lo cual se establece el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3C &= 4 \\ 2C + 3B &= 0 \\ -3A + B + 2C &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{16}{27} \\ B &= -\frac{8}{9} \\ C &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución particular es

$$y_p = \frac{16}{27} - \frac{8}{9}x + \frac{4}{3}x^2$$

Paso 3.- La solución general de la ecuación $2y'' + y' - 3y = 4x^2$ es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ y &= y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3/2x} + \frac{16}{27} - \frac{8}{9}x + \frac{4}{3}x^2 \end{aligned}$$

En resumen el método del anulador parate de la ecuación diferencial $L(y) = g(x)$ que tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, cosenos y senos para lo cual sigue un procedimiento detallado como lo se explican en los siguientes pasos:

1.- Encontrar la función complementaria y_c para la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$.

2.- Operar ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ con un operador diferencial L_1 que anula a la función $g(x)$.

3.- Determinar la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden dos $L_1 L(y) = 0$.

4.- Eliminar de la solución del paso 3 los términos que se duplican en la solución complementaria y_c encontrada en el paso 1, luego se procede a formar una combinación lineal y_p de los términos restantes, así se tiene la forma de una solución particular de $L(y) = g(x)$.

5.- Sustituir la solución particular encontrada y_p en el paso 4 en $L(y) = g(x)$, se iguala los coeficientes de las distintas funciones en cada lado de la igualdad y se resuelve el sistema resultante de ecuaciones para determinar los coeficientes desconocidos de y_p.

6.- Con la solución particular encontrada en el paso 5, se procede a formar la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

2.7 Variación de parámetros

Se ha dado un método para resolver coeficientes indeterminados, un método en el cual se busca una solución particular cuando la ecuación tiene coeficientes constantes y el término no homogéneo es decir la función $g(x)$ es de un tipo CI como ya se explicó anteriormente, mientras que el método de variación de parámetro sirve para cualquier función $g(x)$ como por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + y &= \tan x \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 2y &= 2\ln 3x \end{aligned}$$

entre muchas otras funciones.

El método de variación de parámetro busca hallar una solución particular de una manera más general de $n-$ésimo orden o en este caso interesa que sea segundo orden, además este método puede aplicarse a ecuaciones lineales con coeficientes variables [Cerda Romero & Morocho Yaucán.2018], es decir, se presentará un método para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden el cual será de caracter más general para hallar soluciones particulares, para empezar considere la siguiente ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{2.26}$$

y considere $\{y_1(t), y_2(t)\}$ dos soluciones linealmente idependientes para la ecuación no homogénea correspondiente

$$ay'' + by' + cy = 0$$

con lo cual se sabe que para construir una solución general de dicha ecuación homogénea se tiene

$$y_h(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) \tag{2.27}$$

donde C_1 y C_2 son constantes, como se requiere hallar una solución particular de la ecuación no homogénea, entra en juego la estrategia de la variación de parámetros que consiste en reemplazar las constantes de la ecuación (2.27) por funciones de t, en otras palabras, se requiere hallar una solución de las forma

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \tag{2.28}$$

Al momento de introducir dos funciones incógnitas $v_1(t)$ y $v_2(t)$, el razomiento lleva a esperar que se pueda imponer dos ecuaciones sobre estas funciones, como es de esperar una de estas ecuaciones proviene de la ecuación (2.26), lo que se procede es a sustituir $y_p(t)$ de la ecuación (2.28) en la ecuación (2.26), pero para poder realizar esto es necesario calcular la primera y segunda derivada de $y_p(t)$

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= v_1'(t)y_1(t) + v_1(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2(t) + v_2(t)y_2'(t) \\ y_p'(t) &= (v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t)) + (v_1(t)y_1'(t) + v_2(t)y_2'(t)) \end{aligned}$$

se ha agrupado los términos de una forma conveniente para luego proceder a simplificar los cálculos y evitar las segundas derivada de segundo orden para las incógnitas v_1 y v_2 cuando se calcule la segunda derivada de $y_p(t)$, para lo cual es necesario imponer la siguiente condición

$$(v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t)) = 0 \tag{2.29}$$

con lo cual la expresión $y_p'(t)$ toma la forma

$$y_p'(t) = (v_1(t)y_1'(t) + v_2(t)y_2'(t)) \tag{2.30}$$

ahora se calcula $y_p''(t)$

$$y_p''(t) = v_1'(t)y_1'(t) + v_1(t)y_1''(t) + v_2'(t)y_2'(t) + v_2(t)y_2''(t) \tag{2.31}$$

por consiguiente al sustituir $y_p(t), y_p'(t)$ y $y_p''(t)$ en la ecuación (2.26) se tiene

$$\begin{aligned} g &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\ g &= a\left(v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''\right) + b\left((v_1y_1' + v_2y_2')\right) + c\left(v_1y_1 + v_2y_2\right) \end{aligned}$$

agrupando los términos de una forma conveniente se tiene

$$
\begin{aligned}
g &= av_1'y_1' + av_1y_1'' + av_2'y_2' + av_2y_2'' + bv_1y_1' + bv_2y_2' + cv_1y_1 + cv_2y_2\\
g &= a\left(v_1'y_1' + v_2'y_2'\right) + av_1y_1'' + av_2y_2'' + bv_1y_1' + bv_2y_2' + cv_1y_1 + cv_2y_2\\
g &= a\left(v_1'y_1' + v_2'y_2'\right) + v_1\left(ay + 1'' + by_1' + cy_1\right) + av_2y_2'' + bv_2y_2' + cv_2y_2\\
g &= a\left(v_1'y_1' + v_2'y_2'\right) + v_1\left(ay + 1'' + by_1' + cy_1\right) + v_2\left(ay_2'' + by_2' + cy_2\right)
\end{aligned}
$$

como se considero la ecuación homogénea de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
g &= a\left(v_1'y_1' + v_2'y_2'\right) + v_1(0) + v_2(0)\\
g &= a\left(v_1'y_1' + v_2'y_2'\right)
\end{aligned}
$$

ya que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación $g = ay_p'' + by_p' + cy_p$ se tiene que

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{g}{a} \tag{2.32}$$

con lo cual si se puede hallar v_1 y v_2 que satisfaga las ecuaciones (2.29) y la ecuación (2.32), es decir,

$$
\begin{aligned}
\left(v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t)\right) &= 0, \qquad (2.33)\\
v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t) &= \frac{g(t)}{a} \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

entonces la solución particular y_p será una solución particular de (2.26). Ahora para obtener v_1 y v_2 se debe resolver el sistema lineal propuesto en (2.33) y (2.34) en términos de v_1' y v_2', usando la regla de Cramer se tiene

$$v_1'(y) = \frac{-g(t)y_2(t)}{a\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]} \quad \text{y} \quad v_2'(y) = \frac{g(t)y_1(t)}{a\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]} \tag{2.35}$$

donde la expresión en corchete en el denominador es el llamado Wronskiano que nunca se anula de acuerdo con el lema . Luego al integrar estas ecuaciones se obtiene finalmente

$$v_1'(y) = \int \frac{-g(t)y_2(t)}{a\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]} \quad \text{y} \quad v_2'(y) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{a\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]} \tag{2.36}$$

En resumen el método de variación de parametro enuncia según [Nagle et al.2000] enuncia que:

Método de Variación de Parámetros

Para determinar una solución particular de $ay'' + by' + cy = g$ es necesario entender los siguientes pasos:

a) Se hallan dos soluciones linealmente independientes $\{y_1(t), y_2(t)\}$ de la ecuación homogénea correspondiente y se considera

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t).$$

b) Se determinan $v_1(t)$ y $v_2(t)$ resolviendo el sistema que contempla a las ecuaciones (2.33) y (2.34) en términos de $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$ y se integra.

c) Se sustituye $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en la expresión para $y_p(t)$ y así obtener una solución particular.

Observación. En el paso b) pueden ser usadas las ecuaciones propuestas en (2.36), pero considere su uso dependiendo con la función que esté trabajanddo ya que $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son fáciles de derivar, por tanto no es aconsejable memorizar la ecuación (2.36).

Ejemplo 2.7.1: Variación de parámetros

Determinar la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t$$

Solución. Se puede observar que dos soluciones independiente de la ecuación homogénea $2y'' + y = 0$ son $\cos y$ y $\operatorname{sen} t$, con lo cual se plantea la solución particular

$$y_p = C_1(t)\cos t + C_2(t)\operatorname{sen} t$$

la cual se obtiene por el método de coeficientes constantes, ahora se construye una solución particular y_p a partir de y_c, donde las constantes son funciones v_1 y v_2 que se quiere hallar:

$$y_p = v_1(t)\cos t + v_2(t)\operatorname{sen} t$$

se procede solamente a calcular la primera derivada

$$y_p' = v_1'(t)\cos t - v_1(t)\operatorname{sen} t + v_2'(t)\operatorname{sen} t + v_2(t)\cos t$$

aplicando el porceso visto en el desarrollo del método y para facilitar las simplificaciones se asume que $v_1'(t)\cos t + v_2'(t)\operatorname{sen} t = 0$, por lo tanto

$$y_p' = -v_1(t)\operatorname{sen} t + v_2(t)\cos t$$

de esa manera aplicando el sistema que se propuso en (2.33) y (2.34) se tiene

$$\begin{aligned}(\cos t)\, v_1'(t) + (\operatorname{sen} t)\, v_2'(t) &= 0\\ (-\operatorname{sen} t)\, v_1'(t) + (\cos t)\, v_2'(t) &= \tan t\end{aligned}$$

se debe hallar v_1' y v_2' para ello se usará la regla de Cramer, primero se determinará el determinante de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix}\operatorname{sen} t & \cos t\\ \cos t & -\operatorname{sen} t\end{bmatrix}$$

en donde

$$\det A = -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t = -1$$

como el determinante de la matriz A es distinto de cero entonces la solución queda determinada por

$$v_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1.2$$

continuando con el proceso, la matriz A_i es la matriz que se obtiene de la matriz A reemplazando cada columna de la matriz A por un vector columna correspondiente a las constantes del sistema propuesto

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \det \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ \tan t & \cos t \end{bmatrix} = -\operatorname{sen} t \tan t \\
v_2 &= \det \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \tan t \end{bmatrix} = \cos t \tan t = \operatorname{sen} t
\end{aligned}
$$

Así se llega a obtener

$$
\begin{aligned}
v_1'(t) &= -\operatorname{sen} t \tan t \\
v_2'(t) &= \operatorname{sen} t
\end{aligned}
$$

Al integrar se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int v_1'(t) &= -\int \operatorname{sen} t \tan t dt \\
v_1(t) &= -\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} dt \\
&= -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt \\
&= -\int \frac{1}{\cos t} - \frac{\cos^2 t}{\cos t} \\
&= -\int (\sec t - \cos t)\, dt \\
&= -\int \sec t dt + \int \cos t dt \\
&= -\ln|\sec t + \tan t| + \operatorname{sen} t \\
\int v_2'(t) &= \int \operatorname{sen} t dt \\
v_2(t) &= \int \operatorname{sen} t dt \\
&= -\cos t
\end{aligned}
$$

dado que se necesita una solución particular, por ese motivo se iguala las constantes para hacer más sencillos los cálculos, al sustituir $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en $y_p = v_1(t)\cos t + v_2(t)\operatorname{sen} t$ se tiene

$$y_p(t) = (\operatorname{sen} t - \ln|\sec t + \tan t|)\cos t + (-\cos t)\operatorname{sen} t$$

simplificando la expresión

$$y_p(t) = -(\cos t)\ln|\sec t + \tan t|$$

lo que lleva a decir que la solución general es

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - (\cos t)\ln(\sec t + \tan t)$$

En el siguiente ejemplo se puede ver una forma un tanto más detallada para resolver una ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.

Ejemplo 2.7.2: Variación de parámetro

Determinar la solución general de

$$y'' + y = \sec^2 x$$

Solución. Primero se procede a resolver la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + y = 0$$

mediante el discriminante $b^2 - 4ac$ y planteando la ecuación auxiliar $m^2 + 1 = 0$, se sabe que

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 - 4(1 \cdot 1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

por tanto, se tendrá dos raíces complejas conjugadas, aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas se tiene que $m_1 = i$ y $m_2 = -i$, la solución tiene la forma

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

donde $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, entonces

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Para resolver la ecuación diferencial no homogénea es necesario encontrar una solución particular y_p de $y'' + y = \sec^2 x$, se considera la solución y_c en la que se cambian las constantes C_1 y C_2 por v_1 y v_2 respectivamente

$$y_p = v_1 \operatorname{sen} x + v_2 \cos x$$

ahora se aplicarán las ecuaciones vistas en (2.36) para hallar v_1 y v_2.

Se considera $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$ y $g(x) = \sec^2 x$, ahora se calculará el Wronskiano

$$W(\operatorname{sen} x, \cos x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -1$$

Luego se debe resolver

$$\begin{aligned} v_1 &= -\int \frac{y_2 g(x)}{W} dx \\ v_2 &= \int \frac{y_1 g(x)}{W} dx \end{aligned}$$

desarrollo: primero hallamos v_1

$$\begin{aligned} v_1 &= -\int \frac{\cos x \sec^2 x}{-1} dx \\ v_1 &= \int \cos x \sec^2 x dx \\ v_1 &= \int \cos x \sec x \sec x dx \end{aligned}$$

usando la identidad trigonométrica $\cos x \sec x = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} v_1 &= \int \sec x dx \\ v_1 &= |\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

Observación. No hace falta sumar una constante de integración ya que únicamente se busca una función.

Usando la identidad trigonométrica $\sec x = 1/cosx$ para v_2, te obtiene

$$\begin{aligned}
v_2 &= \int \frac{\operatorname{sen} x \sec^2 x}{-1} dx \\
v_2 &= -\int \operatorname{sen} x \sec^2 x dx \\
v_2 &= -\int \operatorname{sen} x \sec x \sec x dx \\
v_2 &= -\int \operatorname{sen} x \frac{1}{\cos x} \sec x dx \\
v_2 &= -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} secx dx \\
v_2 &= -\int \tan x \sec x dx \\
v_2 &= -\sec x
\end{aligned}$$

se ha hallado v_1 y v_2, a partir de esto se puede hallar la solución particular y_p

$$\begin{aligned}
y_p &= v_1 \operatorname{sen} x + v_2 \cos x \\
y_p &= |\sec x + \tan x| \operatorname{sen} x - \sec x \cos x \\
y_p &= \operatorname{sen} x |\sec x + \tan x| - 1
\end{aligned}$$

finalmente se obtiene la solución general

$$\begin{aligned}
y &= y_c + y_p \\
y &= C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x |\sec x + \tan x| - 1
\end{aligned}$$

2.8 Ecuaciones de Cauchy-Euler

En los métodos expuestos anteriormente se pudo encontrar soluciones explícitas de ecuaciones lineales de segundo orden en las cuales los coeficientes eran constantes pero con este método las cosas cambian se busca la solución a una ecuación lineal con coeficientes variables donde la solución general se expresa en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas. Cabe recalcar que el método que se va a presentar es similar al de ecuaciones con coeficientes constantes en los cuales se debe resolver una ecuación auxiliar [Zill.2013].

Una ecuación diferencial de la forma

$$a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a_2x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x) \tag{2.37}$$

donde los coeficientes a_2, a_1 y a_0 son constantes, se le atribuye el nombre de ecuación de Cuachy-Euler, esta ecuación se caracteriza por tener grado $k = 0, 1, 2$ de los coeficientes monomiales x^k los cuales coinciden con el orden k de la derivación d^ky/dx^k, por ejemplo para las ecuaciones de segundo orden x^2 y d^2y/dx^2 donde el $k = 2$ coincide.

Observación. El análisis para la solución general de la eciación diferencial homogénea parte de la ecuación

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + dx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Luego se procede a resolver la ecuación diferencial no homogénea $a^2y'' + bxy' + cy = g(x)$ mediante el método de variación de parámetros.

Nota. El coeficiente ax^2 de y'' es cero en $x = 0$, es necesario garantizar que los resultados del teorema 2.1.1 sobre la existencia de una solución única puedan aplicarse a la ecuación de Cauchy-Euler, además hay que hallar las soluciones definidas en el intervalo $(0, \infty)$

Observación. Las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ se consiguen al sustituir $t = -x$ en la ecuación diferencial.

Método de solución: Según [Zill.2013] se probará una solución de la forma $y = x^m$, donde m es un valor que se debe determinar. Análogo a lo que sucede cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, al sustituir x^m en cada término de una ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en m veces x^m de esa manera se tiene

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m \\ &= (am(m-1) + bm + c)\,x^m \end{aligned}$$

con lo cual $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{2.38}$$

Observación. Se debe considerar tres casos distintos que dependen si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales o complejas, en el último caso las raíces aparecen como un par conjugado [Zill.2013].

Caso I: Raíces reales y distintas Sea m_1 y m_2 las raíces reales de (2.38), donde se cumpla que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones [Zill.2013]. Por lo tanto, la solución general es

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} \tag{2.39}$$

Ejemplo 2.8.1: Raíces distintas

Resolver

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Solución. Memorizar la ecuación (2.38) no es la mejor opción para abordar el problema, sino mas bien suponer que $y = x^m$ como la solución para entender el origen y la diferencia entre esta nueva forma de ecuación auxiliar y la forma que se obtubo cuando se abordo las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, cuya solución general es $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$.

Se deriva dos veces la expresión $y = x^m$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} 2x^2\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} - 4y &= 2x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} + 4x \cdot mx^{m-1} - 4x^m \\ &= x^m\left(2m(m-1) + 4m - 4\right) \\ &= x^m\left(2m^2 + 2m - 4\right) = 0 \end{aligned}$$

se obtienen las raíces $m_1 = 1$ y $m_2 = -2$, con lo cual la solución esta determinada por

$$y = C_1 x + C_2 x^{-2}$$

Ejemplo 2.8.2: Raíces distintas

Resolver

$$x^2 y'' + 8xy' + 6y = 0$$

Solución. Se supone que $y = x^m$ y luego se halla y' y y'' para reemplazar en la ecuación diferencial propuesta

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx} + 8x\frac{dy}{dx} + 6y &= x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} + 8x \cdot mx^{m-1} + 6x^m \\ &= x^m\left(m(m-1) + 8m + 6\right) \\ &= x^m\left(m^2 + 7m + 6\right) = 0 \end{aligned}$$

se obtienen las raíces $m_1 = -1$ y $m_2 = -6$, con lo cual la solución esta determinada por

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-6}$$

Caso II: Raíces reales repetidas Si las raíces de (2.38) son repetidas, se tiene $m_1 = m_2$, entonces se consigue una solución particular $y = x^{m_1}$. Si las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes es cero, es decir, $b^2 - 4ac = 0$. De la fórmula cuadrática se infiere que las raíces deben ser

$$m_1 = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.40}$$

$$m_1 = \frac{-(b-a)}{2a} \tag{2.41}$$

(2.42)

Se procede a construir una segunda solución y_2, con la ecuación

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \tag{2.43}$$

Observación. La ecuación (2.43) es la solución general de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

dicha solución (2.43) se obtiene a partir de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2.44}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$, donde $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ y además son continuas en un intervalo I.

La ecuación (2.43) se deduce de la siguiente manera, se supone que $y_1(x)$ es una solución conocida de la ecuacción (2.44) en I y $y_(x) \neq 0$, para toda x en el intervalo I. Se define $y = u(x)y_1(x)$, se halla la primera y segunda derivada de y

$$\begin{aligned} y' &= uy_1' + y_1'u \\ y'' &= u'y_1' + uy_1'' + y_1'u' + y_1u'' \\ y'' &= uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' \end{aligned}$$

luego se reemplaza y' y y'' en (2.44), entonces se tiene

$$\begin{aligned} uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' + P(x)(uy_1' + y_1'u) + Q(x)y_1u &= 0 \\ u\left(P(x)y_1' + Q(x)y_1 + y_1''\right) + y_1u'' + \left(2y_1' + P(x)y_1\right)u' &= 0 \end{aligned}$$

por lo que se tendría

$$y_1u'' + \left(2y_1' + P(x)y_1\right)u' = 0$$

Por conveniencia se considerará $w = u'$ y $w' = u''$, cono lo que

$$y_1w' + \left(2y_1' + P(x)y_1\right)w = 0$$

la última ecuación que se obtubo el lineal y separable, por tanto, al seperar las variables y posteriormente integrar se tiene que

$$
\begin{aligned}
y_1 w' + (2y_1' + P(x)y_1)\, w &= 0 \\
\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P(x)dx &= 0 \\
\int \frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx &= \int -P(x)dx \\
\ln\left|wy_1^2\right| &= -\int P(x)dx \\
e^{\ln\left|wy_1^2\right|} &= e^{-\int P(x)dx} + C_1 \\
wy_1^2 &= e^{-\int P(x)dx}
\end{aligned}
$$

despejado w se tiene

$$
w = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}
$$

se usa el hecho $w = u'$, luego se integra nuevamente, entonces

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} \\
\int u' &= \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx \\
u &= \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2
\end{aligned}
$$

Ahora tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, se halla de la ecuación $y = u(x)y_1(x)$ una segundo solución de la ecuación (2.44), la cual es

$$
y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx
$$

Observación. La función $y_2(x)$ de la ecuación que se obtuvo anteriormente satisface a (2.44), además y_1 y y_2 son linealmente independientes en algún intervalo en el que $y_1(x)$ no es cero.

Continuando con el desarrollo del método de las ecuaciones de Cauchy-Euler y a partir de la ecuación (2.44)según [Zill.2013] lo primero que se requiere es escribir la ecuación en su forma estándar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0 \tag{2.45}$$

luego haciendo las idetificaciones respectivas. $P(x) = b/ax$ y

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{b}{ax}\right) dx &= \frac{b}{a}\int \frac{1}{x} \\
&= \frac{b}{a}\ln x
\end{aligned}$$

usando la ecuación (2.44) y donde $y_1(x) = x^{m_1}$

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx \\
&= x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx \\
&= x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx \\
&= x^{m_1}\int \frac{e^{\ln x^{-(b/a)}}}{x^{2m_1}}dx \\
&= x^{m_1}\int \frac{x^{-(b/a)}}{x^{2m_1}}dx \\
&= x^{m_1}\int x^{-(b/a)} \cdot x^{-2m_1}dx
\end{aligned}$$

debido a que se consideró $m_1 = -(b-a)/2a$, se puede hallar $-2m_1$:

$$\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{b-a}{2a} \\
-2m_1 &= -2\left(-\frac{b-a}{2a}\right) \\
-2m_1 &= \frac{b-a}{a}
\end{aligned}$$

ahora

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x^{m_1} \int x^{-(b/a)} \cdot x^{(b-a)/a} dx \\
&= x^{m_1} \int x^{-1} dx \\
&= x^{m_1} \ln x
\end{aligned}
$$

así la solución general es

$$
y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln x \tag{2.46}
$$

Ejemplo 2.8.3: Raíces repetidas

Resolver

$$
4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 16x \frac{dy}{dx} + 9y = 0
$$

Solución. Se deriva dos veces la expresión $y = x^m$

$$
\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}
$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
4x^2 m(m-1)x^{m-2} + 16xmx^{m-1} + 9x^m &= 0 \\
x^m \left(4m(m-1) + 16m + 9\right) &= 0 \\
x^m \left(4m^2 - 4m + 16m + 9\right) &= 0 \\
x^m \left(4m^2 + 12m + 9\right) &= 0
\end{aligned}
$$

de donde $4m^2 + 12m + 9$ se obtiene la raíz $m_1 = -\frac{3}{2}$, la solución general es

$$
y = C_1 x^{-3/2} + C_2 x^{-3/2} \ln x
$$

Ejemplo 2.8.4: Raíces repetidas

Resolver

$$
4x^2 y'' + y = 0
$$

Solución. Se deriva dos veces la expresión $y = x^m$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} 4x^2m(m-1)x^{m-2} + x^m &= 0 \\ x^m\left(4m(m-1)+1\right) &= 0 \\ x^m\left(4m^2 - 4m + 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $4m^2 - 4m + 1$ se obtiene la raíz $m_1 = \frac{1}{2}$, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= C_1x^{1/2} + C_2x^{1/2}\ln x \\ y &= C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\ln x \end{aligned}$$

Caso III: Raíces complejas y conjugadas En el caso que la ecuación (2.38) el discriminante sea menor que cero se tendrá raíces conjugadas y complejas, es decir, $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución sería:

$$y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta} \tag{2.47}$$

Observación. Como en el caso de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es mejor trabajar con una solución en términos de funciones reales.

Para ello se utilizará la siguiente identidad:

$$x^{i\beta} = \left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = e^{i\beta\ln x} \tag{2.48}$$

Usando la fórmula de Euler, se puede reescribir la expresión (2.48) como

$$x^{i\beta} = \cos\left(\beta\ln x\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)$$

de igual forma para la expresión

$$x^{-i\beta} = \cos\left(\beta\ln x\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)$$

Ahora se procede a sumar y restar las dos últimas expresiones:

$$
\begin{aligned}
x^{i\beta}+x^{-i\beta} &= \cos\left(\beta\ln x\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)+cos\left(\beta\ln x\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)\\
&= 2\cos\left(\beta\ln x\right)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
x^{i\beta}-x^{-i\beta} &= \cos\left(\beta\ln x\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)-cos\left(\beta\ln x\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)\\
&= 2i\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)
\end{aligned}
$$

A partir del hecho de la ecuación (2.47), la cual es una solución para cualquier tipo de constantes, hay que considerar cuando $C_1=C_2=1$ y $C_1=1$, $C_2=-1$ se tiene las soluciones

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x^{\alpha}\left(x^{i\beta}+x^{-i\beta}\right)\\
y_2 &= x^{\alpha}\left(x^{i\beta}-x^{-i\beta}\right)
\end{aligned}
$$

las cuales se pueden reescribir como

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln x\right)\\
y_2 &= 2ix^{\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)
\end{aligned}
$$

debido a que el Wronskiano $W\left(x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln x\right),x^{\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\beta\ln x\right)\right)$ es

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) & x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x) \\ \alpha x^{\alpha-1}\cos(\beta\ln x) - x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} & \alpha x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\ln x) + x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} \end{vmatrix} \\
&= x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\left(\alpha x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\ln x) + x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\frac{\beta}{x}\right) \\
&\quad -x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos(\beta\ln x) - x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\frac{\beta}{x}\right) \\
&= x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\cdot\alpha x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\ln x) + x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\cdot x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} \\
&\quad -x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\cdot\alpha x^{\alpha-1}\cos(\beta\ln x) + x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\cdot x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} \\
&= x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\cdot x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} + x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\cdot x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)\frac{\beta}{x} \\
&= \beta x^{2\alpha-1}\left(\cos^2(\beta\ln x) + \operatorname{sen}^2(\beta\ln x)\right) \\
&= \beta x^{2\alpha-1} > 0
\end{aligned}$$

esto ocurre en el intervalo $(0.\infty)$, por tanto las soluciones

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \\
y_2 &= x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x)
\end{aligned}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial, la solución general es

$$\begin{aligned}
y &= x^{\alpha}C_1\cos(\beta\ln x) + x^{\alpha}C_2\operatorname{sen}(\beta\ln x) \\
&= x^{\alpha}\left[C_1\cos(\beta\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\beta\ln x)\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8.5: Raíces congugadas complejas

Resolver

$$x^2y'' + xy + 4y = 0$$

Solución. Se deriva dos veces la expresión $y = x^m$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^2 m(m-1)x^{m-2} + x(xm^{m-1}) + 4x^m &= 0 \\ x^m\left(m(m-1)+m+4\right) &= 0 \\ x^m\left(m^2-m+m+4\right) &= 0 \\ x^m\left(m^2+4\right) &= 0 \end{aligned}$$

de donde m^2+4 se obtiene las raíces congujadas complejas $m_1 = 2i$ y $m_2 = -2i$, donde $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, así la solución general es

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha C_1 \cos\left(\beta \ln x\right) + x^\alpha C_2 \operatorname{sen}\left(\beta \ln x\right) \\ &= C_1 \cos\left(2\ln x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(2\ln x\right) \end{aligned}$$

Ahora se procederá a mostar la forma resolver un ejercicio en el cual se tenga una ecuación no homogénea, lo primero que se debe hacer es resolver la ecuación diferencial homogénea asociada para posteriormente hallar una solución particular mediante el método de variación de parámetros.

Ejemplo 2.8.6: Raíces congujadas complejas

Resolver

$$x^2y'' + xy - y = \ln x$$

Solución. Se supone que $y = x^m$ y luego se halla y' y y'' para reemplazar en la ecuación diferencial propuesta

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

luego se sustituye las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy - y &= 0 \\
x^2(m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} - x^m &= 0 \\
x^m\left(m(m-1) + m - 1\right) &= 0 \\
x^m\left(m^2 + m - m - 1\right) &= 0 \\
x^m\left(m^2 - 1\right) &= 0
\end{aligned}
$$

se obtienen las raíces $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$, con lo cual la solución homogénea asociada esta determinada por

$$y_c = C_1x + C_2x^{-1}$$

Ahora hay que buscar la solución particular de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy - y = \ln x$, a partir de la solución y_c se va a plantear la solución y_p, dado que cuando se vio el método de variación de parámetros la ecuación debe tener la forma $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ se procede a divir x^2 para toda la ecuación diferencial propuesta en este ejercicio

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy - y &= \ln x \\
\frac{x^2y''}{x^2} + \frac{xy'}{x^2} - \frac{y}{x^2} &= \frac{\ln x}{x^2}
\end{aligned}
$$

se trabajará con

$$y_p = u_1x + u_2x^{-1}$$

donde $f(x) = \ln x x^{-2}$ y $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$

se busca primero el wronskiano

$$
\begin{aligned}
w(x, x^{-1}) &= \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} \\
&= (x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \\
&= -\frac{2}{x^2}
\end{aligned}
$$

Se busca las funciones u_1 y u_2, para lo cual se usa una la siguiente expresión

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W}dx \\ &= -\int \frac{x^{-1}\ln x^{-2}}{-2x^{-1}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{x^{-3}\ln x}{x^{-1}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^{-2}\ln x dx \end{aligned}$$

usando integración partes se tiene que

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[\ln x(-\frac{1}{x}) - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx\right] \\ &= -\frac{\ln x}{2x} - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

ahora se busca u_2 con la siguiente expresión

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{y_1 f(x)}{W}dx \\ &= \int \frac{x\ln x \cdot x^{-2}}{-2x^{-1}}dx \\ &= \int \frac{x\ln \cdot x}{-2x}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{x\ln x}{x} \\ &= -\frac{1}{2}\int \ln x \end{aligned}$$

integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2}\left[x\ln x - \int x\cdot\frac{}{x}dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}x\ln x + x \end{aligned}$$

ahora se tiene la solución particular

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1x + u_2x^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\int x^{-2}\ln x dx\right)x - \left(\frac{1}{2}x\ln x + x\right)x^{-} \\
&= -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln x + 1 \\
&= -\ln x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

finalmente la solución general es

$$
\begin{aligned}
y &= y_c + y_p \\
y &= C_1x + C_2x^{-1} - \ln x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

-

3

APLICACIÓN AL PROBLEMA DE VIBRACIONES MECÁNICAS

3.1 Definiciones

Una vibración mecánica puede describirse como el movimiento de un cuerpo sólido alrededor de una posición de equilibrio, sin que se produzca desplazamiento neto del mismo. Si el objeto que vibra entra en contacto con alguna parte del cuerpo humano, le transmite la energía generada por la vibración. Esta energía es absorbida por el cuerpo y puede producir en él diversos efectos (no necesariamente perjudiciales) que dependen de las características de la vibración.

Definición 3.1.1: Vibración

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación.

Por ejemplo el movimiento de un péndulo o de una cuerda pulsada, más a profundiad la vibración es el estudios de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas a los mismos.

Un sistema vibratorio posee un medio para almacenar energía potencial, por ejemplo los resortes, además posee un medio para conservar la energía cinética como por son la masa o la inercia, por último posee un medio por el cual la energía se va perdiendo respecto al tiempo que es llamado amortiguador.

Observación. Cuando se habla de una vibración en específico de un sistema vibratorio se tiene una transformación de energía, es decir, de energía potencial a cinética y viceversa.

La vibración tiene varias maneras de clasificarla, las pertinentes de comprender para esta guía de estudios son:

Definición 3.1.2: Vibración libre

Se llama Vibración libre al sistema que vibra por si mismo después de una perturbación inicial, además ninguna fuerza externa actuá sobre el sistema.

Un ejemplo de vibración libre es el movimiento de un péndulo.

Definición 3.1.3: Vibración forzada

Se llama Vibración forzada al sistema que esta afectado por una fuerza externa, dicha fuerza generalmente es repetitiva.

Un ejemplo de este tipo de vibración es la oscilación de máquinas como motores.

Definición 3.1.4: Vibración no amortiguada

Se llama Vibración no amortiguada al sistema que no pierde la energía por fricción u otra resistencia durante la oscilación.

Definición 3.1.5: Vibración amortiguada

Se llama Vibración amortiguada al sistema que pierde la energía por fricción u otra resistencia durante la oscilación.

Cuando se habla de vibración lineal y no lineal hace referencia a los componentes para que dicho sistema se comporte linealmente, los componentes son el resorte, la masa y el amortiguador, dependen del comportamiento de los componentes de la oscilación para determinar si es lineal o no lineal.

3.2 Vibraciones Mecánicas

Se busca determinar la posición de un cuerpo sujeto al extremo de un resorte cuando este deja su posición de equilibrio como efecto de aplicarle una fuerza al sistema resorte-masa. Se trabajará bajo la hipótesis sobre el posible movimiento del cuerpo para que las ecuaciones sean más sencillas de construir y trabajar [Cerda Romero & Morocho Yaucán.2018].

Considere un resorte de longitud L que se ecuentra suspendido verticalmente desde el techo, luego se colocará un cuerpo de masa m sujeto a un extremo del resorte y se dejará que alcance su nueva posición de equilibrio, finalmente calcula la posición de equilibrio al sistema resorte-masa estirándolo o comprimiéndolo una longitud x, en los Gráficos 3.1, 3.2 y 3.3 se puede apreciar mejor la idea.

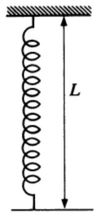

Gráfico 3.1: Resorte suspendido desde un techo, longitud natural L

Fuente: (Cerda Romero & Morocho Yaucán,2018)

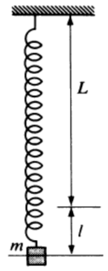

Gráfico 3.2: Masa en equilibrio, longitud del resorte $L + l$

Fuente: (Cerda Romero & Morocho Yaucán, 2018)

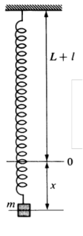

Gráfico 3.3: Masa a una distancia x por debajo de la posición de equilibrio; longitud del resorte $L + l + x$

Fuente: (Cerda Romero & Morocho Yaucán, 2018)

Observación. El modelo matemático que se va a constuir para determinar la posición de un cuerpo de masa m que considera que el movimiento de este ocurre solamente en una dimensión, es decir, en vertical. Con la hipótesis planteada se procederá a construir el modelo matemático, es importante considerar que la dirección positiva es hacia abajo.

Para construir el modelo matemático se utilizará la segunda ley de Newton la cual enuncia: "La sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo por la aceleración del mismo".

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo determinando en cada caso su valor, según [Cerda Romero & Morocho Yaucán.2018], el proceso para determinar el modelo matemático es el siguiente:

a) F_1, la fuerza de la gravedad. Si g es la aceleración de la gravedad (ya que esta actua en la dirección positiva, hacia abajo), entonces $F_1 = mg$.

b) F_2 la fuerza de resistencia del resorte, de acuerdo a la ley de Hooke, la fuerza que actua sobre un cuerpo es directamente proporcional a la elongación, es decir, la compresión del resorte. Como esta fuerza siempre se opone al movimiento del cuerpo se tiene que $F_2 = -k(x+l)$, donde k es la constante de proporcionalidad o también llamada como constante del resorte, generalmente expresada en Newtons sobre metros (N/m).

   Nota. Si $x = 0$ el cuerpo se encuentra en posición de equilibrio, entonces la fuerza F_2 debe ser igual a la fuerza de la gravedad y su dirección es hacia arriba, luego

$$\begin{aligned} F_2 &= -k(x+l) \\ F_2 &= -k(0+l) \\ F_2 &= -kl \\ -mg &= -kl \\ mg &= kl \end{aligned}$$

   reemplazando este valor en la expresión para F_2 se tiene

$$
\begin{aligned}
F_2 &= -kx - kl \\
F_2 &= -kx - mg
\end{aligned}
$$

c) F_3, la fuerza de resistencia al medio. No se conoce con exactitud cuál es la magnitud de esta fuerza, pero, para velocidades pequeñas, esta fuerza es proporcional a la velocidad, es decir, $F_3 = -\beta_a \frac{dx}{dt}$, donde β_a es una constante de amortiguamiento positiva, es decir, $\beta_a > 0$.

d) F_4, cualquier fuerza externa que actúa sobre el cuerpo. Como no se conoce con exactitud cual es la naturaleza de esta fuerza externa, se procederá a denotarla con $F(t)$.

A partir de la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

reemplazando los valores de cada una de las fuerzas descritas anteriormente, se tiene

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{4} F_i \\
m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\
&= mg - kx - mg - \beta_a\frac{dx}{dt} + F(t) \\
&= -kx - \beta_a\frac{dx}{dt} + F(t)
\end{aligned}
$$

de esa forma la ecuación diferencial que describe la posición de un cuerpo de masa m en cualquier instante t es descrita por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Si se impone las condiciones $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_1) = x_1$ se obtiene el siguiente problema de condiciones iniciales dependiendo de t_0 y t_1:

$$
\begin{cases}
m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \\
x(t_0) = x_0 \\
x'(t_1) = x_1
\end{cases} \tag{3.2}
$$

Observación. Cuando $F(t) = 0$ se dice que el cuerpo tiene un movimiento libre, caso contrario, se dice que el movimiento es forzado. Además, cuando la constante $\beta_a = 0$ se dice que el movimiento es no amortiguado y cuando $\beta_a \neq 0$ se dice que el movimiento es amortiguado.

Se pueden tener combinaciones de los tipos de movimientos, por ejemplo se puede hablar de un movimiento libre amortiguado, libre no amortiguado o de un movimiento forzado, en cada caso la ecuación (3.1) toma una forma específica.

3.3 Sistema resorte-masa: Movimiento libre no amortiguado

Es un tipo de movimiento en el que no existen fuerzas de retardo que actuen sobre el sistema y donde la masa se mueve libre de otras fuerzas externas, es decir, $F(t) = 0$, además $\beta_a = 0$, partiendo de la ecuación (3.1) y aplicando las consideraciones planteadas se tiene

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx &= F(t) \\ m\frac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0 \end{aligned}$$

se divide la ecuación para m

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.3}$$

esta ultima ecuación describe el movimiento armónico simple o tambien llamado movimiento libre no amortiguado, ω que es la frecuencia angular se define como

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

reemplazando ω^2 en la ecuación (3.3) se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \tag{3.4}$$

Ahora para resolver la ecuación (3.4) se usa el método de coefiientes constantes, primero se procede a hallar la ecuación auxiliar

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

ω^2 es una constante, por tanto analizando el discriminante

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2 \\ &= -4 \cdot 1 \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

luego $-4 \cdot 1 \cdot \omega^2 < 0$, se tiene el caso de raíces complejas conjugadas, donde $m_1 = i\omega$ y $m_2 = -i\omega$, por tanto la solución está dada por

$$x(t) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t \right)$$

entendiendo que $\alpha = 0$ y $\beta = \omega$

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.3.1: Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa 2 libras estira un resorte 6 pulgadas. En $t = 0$ la masa se libera de un punto situado a 8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 4/3 ft/s. determinar la ecuación de movimiento libre.

Solución. Debido a que se está usando el sistema de unidades para ingenieria, las mediciones dadas en términos de pulgadas (in) se deben convertir a pies ft, $L = 6$ in se sabe que 1ft=12 in, por tanto realizando la respeciva transformación $L = 1/2$ ft

Además se debe convertir las unidades de peso dadas en libras en unidades de masa, se sabe que

$$\begin{aligned} F_1 &= W \quad \text{peso o fuerza de gravedad (masa*aceleración)} \\ F_1 &= mg \\ m &= \frac{F_1}{g} \\ m &= \frac{2 \text{ lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} \\ m &= \frac{1}{16} \text{ slug} \end{aligned}$$

Con base a la ley de Hooke: La fuerza de recuperación es proporcional al del resorte por la cantidad de elongación

$$F_2 = -kL$$

Además,

$$F_2 = -F_1$$

La fuerza de resistencia del resorte es opuesta al peso o fuerza de gravedad

$$\begin{aligned} -K(x+L) &= -mg \\ -K\left(\frac{1}{2}ft\right) &= -\frac{1}{16} \text{ slug} \cdot 32 \, \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \\ k &= 4 \, \frac{\text{lb}}{\text{ft}} \end{aligned}$$

si el cuerpo tiene un movimiento libre $F(t) = 0$ y no amortiguado $a = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{K}{m} \\ \omega &= 8s^{-1} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

se plantea la ecuación auxiliar

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = \omega i$ y $m_2 = -\omega i$ se obtiene la ecuación

$$x(t) = e^{\alpha t} \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t\right)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} &= -4x \\
\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} + 64x &= 0
\end{aligned}$$

se sabe que en $t = 0$, $x = 2/3$ ft, la masa se libera de un punto situado a 8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio, además $x(0) = 2/3$ ft y $v_0 = -4/3$ ft/s, en consecuencia $x'(0) = -4/3$, finalmente la ecuación de movimiento libre es

$$x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \operatorname{sen} 8t$$

Aplicando las condiciones iniciales propuestas $x(0) = 2/3$ y $x'(0) = -4/3$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 \cos 8t + C_2 \operatorname{sen} 8t \\
x(0) &= C_1 \cos 8(0) + C_2 \operatorname{sen} 8(0) \\
C_1 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -8C_1 \operatorname{sen} 8t + 8C_2 \cos 8t \\
x'(0) &= -8C_1 \operatorname{sen} 8(0) + 8C_2 \cos 8(0) \\
-\frac{4}{3} &= 8C_2 \\
C_2 &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t$$

se puede ver en la gráfica que describe un movimiento armónico simple

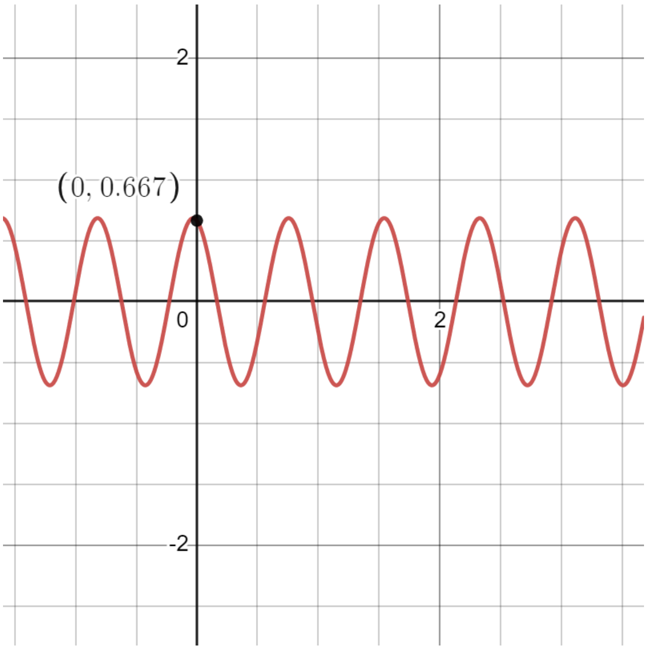

Gráfico 3.4: Gráfica de la ecuación de movimiento

Realizado por: Gómez, Dorian,2023.

3.4 Sistema resorte-masa: Movimiento libre amortiguado

Es un tipo de movimiento en donde se deberá considerar el efecto de la resistencia del medio sobre la masa, a partir de la ecuación (3.1) y consideran que $F(t) = 0$ y $\beta_a \neq 0$, se tiene la siguiente deducción

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx &= F(t) \\ m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx &= 0 \end{aligned}$$

dividiento para m la ecuación y considerando $\omega^2 = k/m$, además por comodidad al factorizar cuando se halle la ecuación auxiliar se tendra $2\lambda = \beta_a/m$, por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta_a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x &= 0
\end{aligned}$$

Donde se usará el método de coeficientes constantes para resolver la ecuación diferencial, primero se halla la ecuación auxiliar

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2$$

donde $a = 1$, $b = 2\lambda$ y $c = \omega^2$, aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

$$\begin{aligned}
m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
m &= \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2}}{2 \cdot 1} \\
m &= -\lambda \frac{\pm\sqrt{4\left(\lambda^2 - \omega^2\right)}}{2} \\
m &= -\lambda \frac{\pm\sqrt{2^2\left(\lambda^2 - \omega^2\right)}}{2} \\
m &= -\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}
\end{aligned}$$

se tiene las raíces

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)} \quad \text{y} \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}$$

Estudiando el discriminante $(\lambda^2 - \omega^2)$ se tendrán tres casos posibles, también se considerará el factor de amortiguamiento $e^{-\lambda t}$.

Observación. Los desplazamientos de la masa tienden a volverse despreciables conforme el tiempo t aumenta.

Caso I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, se tiene raíces reales y distintas, se habla de un movimiento sobreamortiguado ya que β_a es mayor en comparación con la constante k del resorte.

Este caso se soluciona con la ecuación

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \\ x(t) &= C_1 e^{-\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)} t} + C_2 e^{-\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)} t} \end{aligned}$$

finalmente la solución es

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 e^{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)} t} + C_2 e^{-\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)} t} \right) \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.4.1: Movimiento sobreamortiguado

Una masa de 1 kg se fija a un resorte cuya constante es de 16 N/m y luego el sistema completo se sumerge en un líquido que imparte una fuerza amortiguadora igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine las ecuaciones de movimiento si:

a) al inicio la masa se libera desde un punto situado a 1 m abajo de la posición de equilibrio y luego

b) la masa se libera inicialmente desde un punto a 1 metro abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 12 m/s

Solución. Se procede a determinar la ecuación de movimiento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_a \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se reemplazan los datos que se enuncian en el ejercico

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

se plantea la ecuación auxiliar

$$m^2 + 10m + 16 = 0$$

analizando el discriminante

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 \\ &= 36 \end{aligned}$$

por tanto se tienen dos raíces reales y distintas, se tiene $m_1 = -2$ y $m_2 = -8$, además se habla de un movimiendo sobreamortiguado por lo que la solución es

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$$

Ahora se va a resolver el literal a), se analizan las condiciones iniciales $x(0) = 1$ ya que la masa se libera desde un punto situado a 1 metro por debajo de la posición de equilibrio y al no tener velocinad en ese momento la masa entonces la otra condición inicial es $x'(0) = 0$, aplicando las condiciones iniciales se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t} \\ 1 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t} \\ 0 &= -2C_1 - 8C_2 \end{aligned}$$

se tiene el sistema

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - 8C_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde $C_1 = 4/3$ y $C_2 = -1/3$, por tanto la ecuación que describe el movimiento es

$$x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$$

graficando la ecuación se puede ver

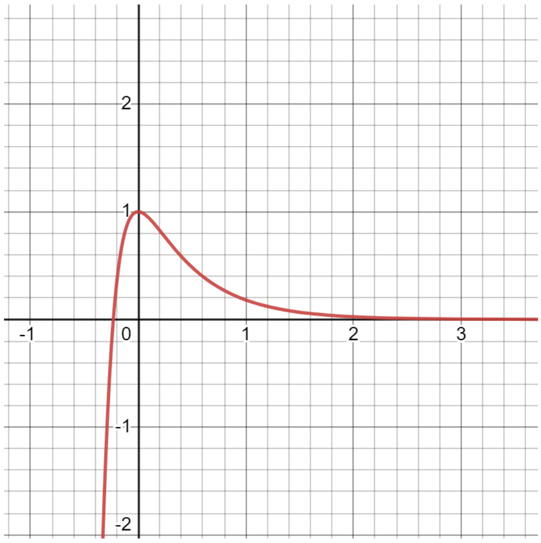

Gráfico 3.5: Gráfica de la ecuación de movimeinto

Realizado por: Gómez, Dorian,2023.

Se aprecia que rapidamente el objeto (masa) va perdiendo posición hasta llegar a quedarse sin movimiento.

Para desarrollar el literal b) se toma las nuevas consideraciones que están sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = 1$ ya que la masa se libera inicialmente desde un punto a 1 metro abajo de la posición de equilibro y además se le da una velocidad ascendente de $12\ m/s$ con lo cual la otra condición inicial es $x(0) = -12$ y se considera -12 debido al sentido en el que ocurre el movimiento.

Partiendo de la solución

$$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-8t}$$

se aplican las condiciones iniciales propuestas

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t} \\ 1 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t} \\ -12 &= -2C_1 - 8C_2 \end{aligned}$$

se tiene el sistema

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - 8C_2 &= -12 \end{aligned}$$

donde $C_1 = -2/3$ y $C_2 = 5/3$, por tanto la ecuación que describe el movimiento es

$$x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$$

Caso II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$,se tiene dos raíces reales e iguales, este tipo de movimiento se describe como críticamente amortiguado, ya que si se reduce la fuerza de amortiguamiento el resultado sería un movimiento oscilatorio.

La solución para este caso es dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t} \\ x(t) &= C_1 e^{-\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}t} + C_2 t e^{-\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}t} \\ x(t) &= C_1 e^{-\lambda} + C_2 t e^{-\lambda} \end{aligned}$$

finalmente

$$x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t)$$

Ejemplo 3.4.2: Movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 4 lb se una a un resorte cuya constante es 2 lb/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 ft/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en este instante?

Solución. Para este ejercicio se usará el sistema inglés, partiendo de la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se reemplazarán los datos que se indican en el ejercicio, donde

$$\begin{aligned} w &= m \cdot g \\ m &= \frac{w}{g} \\ m &= \frac{4\ lb}{32\ pies/s^2} \\ m &= \frac{1}{8}\ slug \end{aligned}$$

la constante del resorte $k = 2\ lb/ft$ y la constante de amortiguamiento es $\beta_a = 1$, luego

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

multiplicando la ecuación por 8

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

ahora se procede a plantear la ecuación auxiliar

$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

analizando el discriminante

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 \\ &= 64 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto se tiene dos raíces reales e iguales, que son $m_1 = m_2 = -4$, de esta forma se puede afirmar que el sistema es críticamente amortiguado, la solución será

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{m_1 t} + tC_2 e^{m_1 t} \\ x(t) &= C_1 e^{-4t} + tC_2 e^{-4t} \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales propuestas en este ejercicio se hallará las constantes C_1 y C_2.

Ya que la masa se libera desde un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio la condición inicial será $x(0) = -1$ y como la velocidad es descendente de $8pies/s$, entonces $x'(t) = 8$, partiendo de la solución $x(t) = C_1 e^{-4t} + tC_2 e^{-4t}$, se aplican las condiciones iniciales propuestas.

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-4t} + tC_2 e^{-4t} \\ -1 &= C_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'(t) &= -4C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-4t} - 4tC_2 e^{-4t} \\ 8 &= -4C_1 + C_2 \end{aligned}$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -1 \\
-4C_1 + C_2 &= 8
\end{aligned}
$$

por tato $C_1 = -1$ y $C_2 = 4$, luego

$$
x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}
$$

graficamente se puede ver que

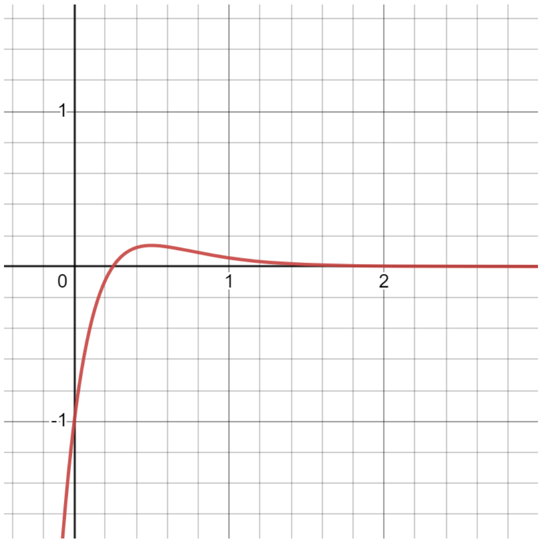

Gráfico 3.6: Gráfica de la ecuación de movimeinto

Realizado por: Gómez, Dorian,2023.

Observación. Se puede observar que el movimiento críticamente amortiguado alcanza una oscilación y en la vuelta va tendiendo a cero, diferente a lo que ocurre con el movimiento sobreamortiguado.

El ejercicio pide determinar el tiempo en el que la masa pasa por el punto de equilibrio, es decir, cuando $x = 0$, por tanto

$$\begin{aligned}
x(t) &= -e^{-4t} + 4te^{-4t} \\
0 &= -e^{-4t} + 4te^{-4t} \\
e^{-4t} &= 4te^{-4t} \\
1 &= 4t \\
t &= \frac{1}{4}s
\end{aligned}$$

la masa por la posición de equilibrio en $t = 1/4\ s$.

Lo siguiente es hallar el tiempo en el que la masa alacanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio, para ello se usará

$$x'(t) = 4e^{-4t} + 4e^{-4t} - 16te^{-4t}$$

y se buscará el tiempo para el cual $x'(t) = 0$

$$\begin{aligned}
4e^{-4t} + 4e^{-4t} - 16te^{-4t} &= 0 \\
e^{-4t}(4 + 4 - 16t) &= 0 \\
8 - 16t &= 0 \\
t = \frac{1}{2}s
\end{aligned}$$

luego se halla la posición de la masa en ese instante $t = 1/2\ s$

$$\begin{aligned}
x(t) &= -e^{-4t} + 4te^{-4t} \\
x\left(\frac{1}{2}\right) &= -e^{-41/2} + 4\frac{1}{2}e^{-41/2} \\
&= -e^{-2} + 2e^{-2} \\
&= e^{-2}ft
\end{aligned}$$

Caso III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, se tienes dos raíces complejas conjugadas, se habla de un movimiento subamortiguado ya que β_a es menor que la constante k, por tanto se tienen las raíces

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i \quad \text{y} \quad m_1 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i$$

donde $\alpha = -\lambda$ y $\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$, la solución para este caso está dada por

$$x(t) \quad = \quad e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t\right)$$

reemplazando los valores se tiene

$$x(t) \quad = \quad e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right) \tag{3.7}$$

Observación. El movimiento que describe la ecuación (3.7) es de carácter oscilatorio, pero debido a que $e^{-\lambda t}$ las amplitudes de vibración tienden a cero cuando t tiende al infinito.

Ejemplo 3.4.3: Movimiento subamortiguado

Una fuerza de 2 lb alarga 1 ft un resorte. Una masa que pesa 3.2 lb se une al resorte y luego se sumerge el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.4 veces la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si inicialmente se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 1 ft por encima de la posición de equilibrio.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en el ejemplo 3.4.1.

c) Encuentre la primera vez en que la masa pasa a través de la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

Solución. Partiendo de la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se reemplazarán los datos que se indican en el ejercicio, donde

$$
\begin{aligned}
w &= m \cdot g \\
m &= \frac{w}{g} \\
m &= \frac{3.2\ lb}{32\ ft/s^2} \\
m &= \frac{1}{10}\ slug
\end{aligned}
$$

la constante del resorte $k = 2\ lb/ft$ y la constante de amortiguamiento es $\beta_a = 2/5$, luego

$$
\frac{1}{10}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{5}\frac{dx}{dt} + 2x = 0
$$

luego se procede a plantear la ecuación auxiliar

$$
\frac{1}{10}m^2 + \frac{2}{5}m + 2 = 0
$$

analizando el discriminante

$$
\begin{aligned}
b^2 - 4ac &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 \\
&= \frac{4}{25} - \frac{4}{5} \\
&= -\frac{16}{25}
\end{aligned}
$$

como el discriminante es menor a cero se tiene dos raíces complejas conjugadas que son $m_1 = -2 + 4i$ y $m_2 = -2 - 4i$, con este hecho se corrobora que se trabajará con un sistema subamortiguado, la solución será

$$
x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t\right)
$$

donde $\alpha = -2$ y $\beta = 4$, entonces

$$x(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t\right)$$

Para terminar de resolver el literal a), se busca las condiciones iniciales, como se libera la masa desde el reposo en un punto situado a $1pie$ por encima de la posición de equilibrio, entonces $x(0) = -1$ y $x'(0) = 0$ porque parte del reposo.

Se aplican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}\left(C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t\right) \\ -1 &= C_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2e^{-2t}\left(C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t\right) + e^{-2t}\left(-4C_1 \operatorname{sen} 4t + 4C_2 \cos 4t\right) \\ 0 &= -2C_1 + 4C_2 \\ 0 &= -2(-1) + 4C_2 \\ C_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

por tanto la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{-2t}\left(-\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t\right) \tag{3.8}$$

graficamente la ecuación se ve en el Gráfico 3.7.

Para rersolver el literal b), se usará una forma alternativa de

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t\right)$$

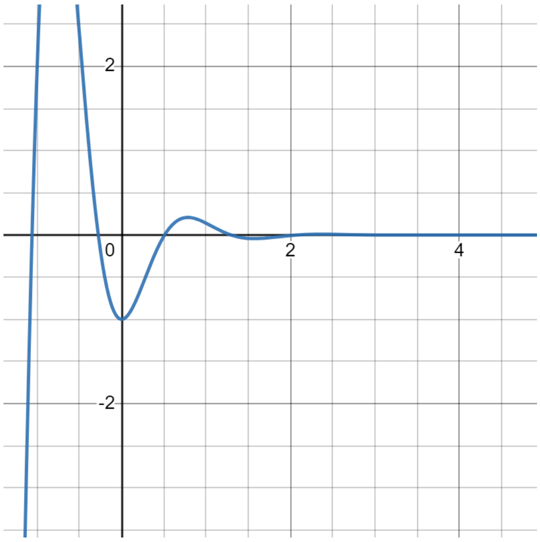

Gráfico 3.7: Gráfica de la ecuación de movimeinto

Realizado por: Gómez, Dorian,2023.

la cual pide escribir la ecuación en la forma

$$x(t) = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$

para esto

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi) &= A \operatorname{sen} \beta t \cdot \cos \phi + A \cos \beta t \operatorname{sen} \phi \\ &= A \cos \phi \cdot \operatorname{sen} \beta t + A \operatorname{sen} \phi \cos \beta t \end{aligned}$$

luego se entiende que

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen} \phi &= C_1 \\ \operatorname{sen} \phi &= \frac{C_1}{A} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A\cos\phi &= C_2 \\ \cos\phi &= \frac{C_2}{A} \end{aligned}$$

con lo que se forma un triángulo cuya hipotenusa es $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, así $\tan\phi = C_1/C_2$

luego se evalua

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{-1}{-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \\ \phi &= \arctan 2 \\ &= 1,1071 \end{aligned}$$

este ángulo está ubicado en el tercer cuadrante por lo que se le sumará $180° = \pi$, por tanto

$$\begin{aligned} \phi &= \pi + 1.1071 \\ &= 4,25\,rad \end{aligned}$$

por tanto la expresión se puede reescribir de la siguiente manera

$$x(t) = e^{-2t}\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen}(4t + 4,25rad) \tag{3.9}$$

Por último se resuelve el literal c), que pide hallar la primera vez que la masa pasa a través, de la posición de equilibrio en dirección hacia arriba. La expresión $x(t)$ en su forma alternativa es muy útil ya que $x(t) = 0$ y $\operatorname{sen} t = 0$ con lo que se anula la expresión, entonces el argumento del seno tiene que ser un múltiplo de 2π para que el seno sea cero, entonces

$$4t + 4.25 = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$$

como pide la primera vez

$$\begin{aligned} 4t + 4,25 &= 2\pi \\ t &= 1.29s \end{aligned}$$

Observación. Como es un sistema subamortiguado se presentan algunas oscilaciones antes que se detenga.

3.5 Sistema resorte-masa: Movimiento forzado

Se considerará una fuerza externa, la llamaremos $f(t)$, debido a que la ecuación (3.1) considera una función $F(t)$, debido a que $F(t) = f(t)/m$, $f(t)$ actúa sobre una masa vibrante en un resorte, por dar unos ejemplos de movimientos forzados se considera, el péndulo giratorio de Pohl, el movimiento vertical oscilatorio del apoyo, es decir, $f(t)$ representa una fuerza motriz que ocasiona un movimiento vertical oscilatorio del soporte del resorte.

La ecuación (3.1) se divide para m, con lo que se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta_a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

donde se considera $2\lambda = \beta_a/m$ por comodidad y $\omega^2 = k/m$, por tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \tag{3.10}$$

Observación. Para resolver la ecuación (3.10), se procede a hallar la solución homogénea asociada y posteriormente se busca una solución particular, para esto se usa los métodos de coeficientes constantes y coeficientes indeterminados que se mostraron en las secciones 2.5 y 2.6 respectivamente.

Ejemplo 3.5.1: Movimiento forzado amortiguado

Una masa que pesa 16 lb alarga 8/3 ft un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto de 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 1/2 de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$.

Solución. Analizando los datos

$$\begin{aligned} w &= mg \\ m &= \frac{w}{g} \\ &= \frac{16\ lb}{32\ ft/s^2} \\ &= \frac{1}{2}\ slug \end{aligned}$$

luego se halla la constante k

$$\begin{aligned} k &= \frac{16\ lb}{8/3\ ft} \\ &= 6\ lb/ft \end{aligned}$$

y la constante de amortiguamiento ya se enuncia claramente en el ejercicio la cual es $\beta_a = 1/2$, por tanto se puede plantaer la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_a\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + 6x = 10\cos 3t$$

que esta sujeta a las codiciones iniciales $x(0) = 2$ ya que la masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto de 2 ft abajo de la posición de equilibrio y como parte del reposo entonces $x'(0) = 0$. Se procede a hallar la solución que esta dada por $x(t) = x_c + x_p$, primero se halla la solución de la ecuación asociada

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

se plantea la ecuación auxiliar

$$\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 6 = 0$$

analizando el discriminante

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \\ &= \frac{1}{4} - 12 \\ &= -\frac{47}{4} \end{aligned}$$

por lo que se tienen dos raíces complejas conjugadas que son $m_1 = -1/2 + \sqrt{47}/2i$ y $m_1 = -1/2 - \sqrt{47}/2i$, donde $\alpha = -1/2$ y $\beta = \sqrt{47}/2$, por lo que la solución complementaria será

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \operatorname{sen}\beta t\right) \\ &= e^{-1/2t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \end{aligned}$$

ahora se procede a hallar la solución particular, para esto se usará el método de superposición, se plantea la solución y_p como

$$y_p = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t \tag{3.11}$$

la cual se introduce en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}+6x = 10\cos 3t \tag{3.12}$$

luego se halla y' y y''

$$\begin{aligned} y' &= -3A\operatorname{sen}3t+3B\cos 3t \\ y'' &= -9A\cos 3t-9B\operatorname{sen}3t \end{aligned}$$

se introducen estos valores en la ecuación (3.12)

$$\frac{1}{2}\left(-9A\cos 3t-9B\operatorname{sen}3t\right)+\frac{1}{2}\left(-3A\operatorname{sen}3t+3B\cos 3t\right)+6\left(A\cos 3t+B\operatorname{sen}3t\right) = 10\cos 3t$$

Se procede a establecer el sistema

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2}A+\frac{3}{2}B+6A &= 10 \\ -\frac{9}{2}B-\frac{3}{2}A+6B &= 0 \end{aligned}$$

realizando las operaciones

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}A+\frac{3}{2}B &= 10 \\ -\frac{3}{2}A+\frac{3}{2}B &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema se tiene $A=10/3$ y $B=10/3$, por tanto la solución particualar es

$$x(t)_p=\frac{10}{3}\cos 3t+\frac{10}{3}\operatorname{sen}3t$$

luego la solución general es

$$x(t)=e^{-1/2t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)+\frac{10}{3}\cos 3t+\frac{10}{3}\operatorname{sen}3t$$

Hay que hallar las constantes C_1 y C_2 en base a las condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $x'(0) = 0$

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-1/2t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\cos 3t + \frac{10}{3}\operatorname{sen} 3t \\
2 &= e^{-1/2\cdot 0}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}\cdot 0 + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}0\right) + \frac{10}{3}\cos 0 + \frac{10}{3}\operatorname{sen} 3\cdot 0 \\
2 &= C_1 + \frac{10}{3} \\
C_1 &= -\frac{10}{3} + 2 \\
C_1 &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

y luego se evalua la segunda condición inicial

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -\tfrac{1}{2}\; e^{-1/2t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \\
&\quad + e^{-1/2t}\left(-\frac{\sqrt{47}}{2}C_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - 10\operatorname{sen}3t + 10\cos 3t \\
0 &= -\frac{1}{2}e^{-1/2\cdot 0}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}\cdot 0 + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}\cdot 0\right) \\
&\quad + e^{-1/2\cdot 0}\left(-\frac{\sqrt{47}}{2}C_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{47}}{2}\cdot 0\right) - 10\operatorname{sen}3\cdot 0 + 10\cos 3\cdot 0 \\
0 &= -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2 + 10 \\
0 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{3}\right) + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2 + 10 \\
0 &= \frac{2}{3} + 10 + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2 \\
0 &= \frac{32}{3} + \frac{\sqrt{47}}{2}C_2 \\
C_2 &= \frac{\frac{-32}{3}}{\frac{\sqrt{47}}{2}} \\
C_2 &= \frac{-64}{3\sqrt{47}}
\end{aligned}$$

por tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{-1/2t}\left(-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + \frac{-64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\cos 3t + \frac{10}{3}\operatorname{sen} 3t$$

A continuación se presenta la gráfica que describe el movimiento

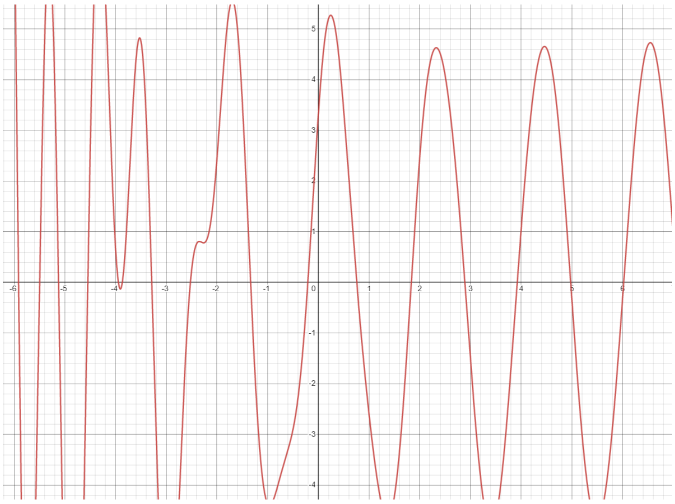

Gráfico 3.8: Gráfica de la ecuación de movimeinto

Realizado por: Gómez, Dorian,2023.

Bibliografía

[Alcántara.2020] Alcántara.E, Diaz.J. (2020). Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden por el método de splines cúbicos, asistido con Matlab [Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

[Alfaro-Carvajal et al.2019] Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). *La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas*. Uniciencia, 33(2), 55-75.

[Alvarez.2020] Alvarez, C. E. M. (2020). *Metodología de la investigación: Diseño y Desarrollo del proceso de investigación en ciencias empresariales*.

[Carmona.2011] Carmona, J., Filio, L (2011). *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación.

[Cerda Romero & Morocho Yaucán.2018] Cerda Romero, L. & Morocho Yaucán, J. (2018). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. En Ecuaciones diferenciales ordinarias (1.a ed., Vol. 1). Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

[Dieudonne.1986] Dieudonne, J.(1986). *Abregé d histoire des Mathématiques*. (9ed). Paris Hermann.

[Edwards.2009] Edwards, C.,Henry,P., David,E (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera cómputo y modelado* . México: Pearson Educación de México.

[Espinoza.2020] Espinoza, I. (2020). Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales a las Vibraciones no Amortiguadas con Excitación Armónica. Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún , 7(13), 49-55.

[Gutierréz.2005] Gutierréz, J & Makárov, N. (2005). *Ecuaciones diferenciales ordinarias* . México: Facultad de ciencias de la Electrénica.

[López et al.2006] López, C. A., Perez, C. A. A., & Rubiano, N. R. P. (2006). Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejemplos y ejercicios. Escuela Colombiana de Ingenieria.

[Moya.2020] Moya, L. M; & Rojas, E. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: técnicas de resolución*.(2020). Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias.

[Nagle et al.2000] Nagle, R. K., Saff, E. B; & Snider, A. D. (2000).*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.

[Ospina.2022] Ospina, R. A. (2022). 17.-*Profesión de matemática: Aproximación conceptual a través de sus quehaceres*. Revista EDUCARE-UPEL-IPB-Segunda Nueva Etapa 2.0, 26(1), 361-388.

[Paitán et al.2014] Paitán, H. Ñ., Mejía, E. M., Ramírez, E. N; & Paucar, A. V. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Ediciones de la U.

[Prieto & de la Orden Hoz.2012] Prieto, J. H. P., & de la Orden Hoz, A. (2012). *Metodología de la investigación*. Pearson Educación.

[Singiresu.2012] Singiresu, R. (2012). *Vibraciones mecánicas*. México: Pearson.

[Valdés.1998] Valdés, J. E. N. (1998). El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Consideraciones (auto) crícas. Boletín de matemícas, 5(1), 53-79.

[Zill.2013] Zill, D. G., y Cullen, M. R. (2013). *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill Interamericana.

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 14 / 04 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Dorian Alexander Gómez Muñoz
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

0744-DBRA-UTP-2023