ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: PABLO ANDRÉS AGILA HIDALGO

DIRECTORA: Dra. MAYRA ELIZABETH CÁCERES Mgs.

Riobamba – Ecuador

2022

Yo, PABLO ANDRÉS AGILA HIDALGO, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 08 de noviembre de 2022

Pablo Andrés Agila Hidalgo
110579468-7

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES**, realizado por: **PABLO ANDRÉS AGILA HIDALGO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Mat. Marcelo Cortez Bonilla Mgs. **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**	______________	2022-11-08
Dra. Mayra Elizabeth Cáceres Mena Mgs. **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**	___________	2022-11-08
Ing. María de Lourdes Palacios Robalino Mgs. **MIEMBRO DEL TRIBUNAL**	______________	2022-11-08

DEDICATORIA

A todes.

Pablo

AGRADECIMIENTO

En mi reducido sentido de retribución, quisiera expresar gratitud a mi familia, por haber sido el sostén en mi estabilidad emocional, al Dr. Francisco Carreras por ser mi guía durante toda esta caótica travesía llamada integración curricular, a la Dra. Mayra Cáceres por haberme *adoptado* finalmente como su nuevo tesista, a mis amigos por ser mi distracción suficiente y necesaria; y al final, pero no por ello menos importante a ***MFM***, quien desde el 8 de agosto y hasta ahora, me ha brindado la cantidad precisa de cariño, motivación y ánimos que necesitaba recibir.

Pablo

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El objetivo del presente Trabajo de Integración Curricular fue generar un documento guía de estudio referente a los sistemas de ecuaciones diferenciales, soportado en la bibliografía existente y más destacada. El desarrollo de este trabajo de investigación de tipo documental, se llevó a cabo mediante la búsqueda, recopilación, análisis y redacción de información sobre el tópico antes mencionado, detallando también algunos métodos de resolución de dichos sistemas tales como: el método por operadores diferenciales, por eliminación de términos, por métodos matriciales, por la transformada de Laplace, y por variación de parámetros. De igual forma se estudió dos aplicaciones que pueden ser representadas con un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, el primero, de tanques interconectados y el segundo de circuitos eléctricos. Luego de finalizar esta investigación se concluye que el documento guía de estudio titulada: “Introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales”, ayudará a nuevos y actuales estudiantes de la carrera de Matemática, a comprender e interpretar situaciones que modelen sistemas de ecuaciones diferenciales, así como también su resolución y representación gráfica. Finalmente, se recomienda como una ampliación de esta investigación, realizar un estudio de circunstancias o problemas de aplicación los cuales puedan ser representados como un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, así como los métodos existentes, cuantitativos o cualitativos, para su resolución.

Palabras clave: <MATEMÁTICA>, <SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES>, <TANQUES>, <CIRCUITOS ELÉCTRICOS>.

D.B.R.A.I

Ing. Cristhian Castillo

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

DBRA

2309-DBRA-UTP-2022

SUMMARY/ABSTRACT

The aim of the current Curricular Integration Work was to generate a study guide document regarding the systems of differential equations, supported by the existing and most relevant bibliography. The development of this documentary-type research work was carried out through the search, compilation, analysis and writing of information on the topic mentioned above; so, it was necessary to detail some resolution methods of these systems such as: the method with differential operators, elimination method, matrix methods, Laplace transform and variation parameters. In the same way, two applications which can be represented with a linear system of differential equations were studied; the first one had to do with interconnected tanks and the second one with electrical circuits. After completing this research, it was concluded that the study guide document called: Ïntroduction to the systems of differential equations", will help new and current students of Mathematics to understand and interpret situations modeling systems of differential equations, as well as their resolution and graphical representation. Finally, it is recommended to carry out a study on the circumstances or application problems, as an extension of this research; so that, it can be represented as a nonlinear system of differential equations, as well as the existing quantitative or qualitative methods for their resolution.

Keywords: <MATHEMATICS>, <SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS>, <TANKS>, <ELECTRICAL CIRCUITS>.

Lic. Paúl Rolando Armas Pasántes Mgs.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

El cálculo infinitesimal o solamente, cálculo, es una de las ramas de la matemática de mayor acogida por distintas carreras universitarias a nivel mundial, esto debido a su vasta aplicabilidad en diferentes ciencias como medicina, biología, entre otras. Pero el cálculo no siempre ha sido como se lo conoce en la actualidad, pues desde su descubrimiento ha venido sufriendo cambios y modificaciones con la finalidad de adaptarlo de mejor manera a nuestros estudios.

A mitades del siglo XVII, grandes interrogantes surgieron en torno al desarrollo de problemas con tangentes, máximos, mínimos, y algunos de ellos relacionados a la derivación y por consiguiente con integración , dichos problemas presentaron soluciones particulares, pero ¿existía alguna forma de generalizar todos estos problemas?, esa fue la pregunta que varios físicos y matemáticos de la época se plantearon, entre ellos destacaron Isaac Newton(1642 - 1727) y Gottfried Leibnitz(1646 - 1716), quienes realizaron algunas de las más importantes investigaciones, las cuales tenían como principal objetivo, crear un método que generalice y permita solucionar todos estos problemas, sin embargo, tanto Newton como Leibnitz tomarían caminos diferentes para lograr dicho cometido. (Gonzáles, 2008. p. 53-60)

Por una parte el cálculo estudiado desde el punto de vista físico - mecánico de Newton contiene extensas anotaciones, en las que, en 1666, introduce el término *fluxiones* a lo que hoy se conoce como derivadas, imaginando, por un lado, una curva de una función $f(x,y)=0$, donde este tomaba a x e y como funciones relacionadas con el tiempo, es así que vemos su punto de vista mecánico, pues partió de la imagen cinemática de una curva determinada como trayectoria de un cuerpo en movimiento, a lo largo de los ejes $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a las cuales Newton denominó fluxiones y para encontrar la pendiente a una curva determinada solamente calculaba el cociente $\frac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Luego, se propuso calcular el problema inverso, es decir que dado el cociente como una función de tipo $f(x)=\frac{\overline{y}}{\overline{x}}$, y ahora la gran pregunta que se planteaba, ¿cómo encontrar la función y en función de la función x?, esto dio paso al estudio de casos particulares de la función f y de aquellas variables de las que dependía. Es lo que hoy se conoce como resolución de ecuaciones diferenciales o antidiferenciación. El procedimiento que Newton empleó fue esencialmente cambiar variables para intentar transformar la ecuación diferencial que tenía en otra ecuación con variables separables:

$$f(x)dx=g(y)dy,$$

pues su solución se calculaba inmediatamente por medio del uso de cuadraturas. Cabe mencionar que aquí también surge el primer método para resolver ecuaciones diferenciales.(Pollard, 1973. p. 30)

Por otro lado, el cálculo según Leibniz fue con base a anotaciones esporádicas, es así que la noción

del cálculo aparece en primera instancia en una memoria de seis páginas.(Leibniz, 1989. p. 20)
De igual manera incluyó la primitiva definición de *diferencial*, así como algunas reglas generales para su cálculo, este también introdujo la relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y, además cuyas anotaciones sobre los diferenciales involucraban operaciones entre ellos, tales como suma, resta, productos, cocientes, potencia y raíces. (Valdés & Segura, 2022)
En 1675, Leibniz escribió la ecuación: $\int ydy = \frac{y^2}{2}$, pero no haciendo énfasis en su resolución sino que sería un paso previo a lo que hoy conocemos como el símbolo de la integral.
Como se puede ver, tanto las investigaciones realizadas por Newton como las de Leibniz fueron los precedentes oportunos para dar origen a las ecuaciones diferenciales, pues ambos estudiaron el problema inverso a la diferenciación. Cuando Newton realizó sus investigaciones, empleó expansiones de expresiones en series de potencias con la finalidad de mostrar que el problema inverso de las tangentes se podría resolver, mientras que Leibniz empezó por tomar en cuenta la naturaleza de las curvas objeto de estudio, senalando su inconformidad con el uso de series para resolver el método invertido de las tangentes, dando a conocer vacíos de conocimiento sobre dicho método. Para mediados del siglo XVIII cuando se hablaba de ecuaciones diferenciales se trataba como una rama propia e independiente en la matemática y su resolución un fin en sí mismo.
Ahora bien, cuando se habla del surgimiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales, se habla de que su intencionalidad se estrecha con el origen de las mismas ecuaciones diferenciales, pues de igual manera buscaban dar respuesta a algunos problemas de sistemas físicos relacionados con la astronomía, uno de los problemas matemáticos fundamentales fue el de estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros, lo que básicamente era resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción gravitatoria común fue analizado de manera rigurosa por Euler, Laplace y Lagrange, los cuales solo obtuvieron resultados parciales. Por ello y al no haber conseguido métodos generales para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, las mentes matemáticas de ese entonces centraron su atención en los sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. (Torroba et at., 2011)

El presente proyecto de investigación tiene la intención de realizar un estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y algunas de sus aplicaciones, y se ha organizado de forma que se logre estudiar los tópicos esperados, por ello se ha estructurado de la siguiente manera:

- Se hablará sobre las ecuaciones diferenciales, definiciones y su clasificación según el orden, linealidad y grado, luego de ello se estudiará los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

- Se analizará algunos de los métodos existentes para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, entre ellos destaca el método por eliminación, método con operadores, métodos matriciales, por variación de parámetros y por la transformada de Laplace.

- Se desarrollará un estudio de algunos problemas de aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales, los cuales hablarán de tanques interconectados y circuitos eléctricos con varias ramas.

- Por último, al finalizar esta investigación de tipo documental se generará como resultado un documento escrito, el cual será un precedente de consulta y referencia para futuras generaciones de estudiantes de la carrera de Matemática.

CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

1.1. Antecedentes

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), dentro de la facultad de Ciencias, carrera de Matemática, en la malla curricular vigente se halla la asignatura de Ecuaciones diferenciales, la cual se pretende estudiar durante un semestre de la carrera, pero, debido al vasto material y contenido teórico con el que cuenta esta asignatura, es difícil completar el pénsum de estudios en dicho tiempo, por lo que en este trabajo de titulación se pretende crear una guía de estudio, la cual sirva de referencia y consulta bibliográfica a estudiantes de la carrera de Matemática y al público en general que esté interesado en tal información.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. *Enunciado del problema*

Desarrollar una investigación documental sobre el tópico de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, a fin de generar un documento que sirva de referencia a futuras generaciones de estudiantes en la carrera de Matemática.

1.3. Justificación

La carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo cuenta con una basta cantidad de material de referencia para el estudio del tópico de las ecuaciones diferenciales, pero no es así para el tópico de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, por lo que se divisa la necesidad de generar guías o materiales didácticos que sirvan de apoyo a la comunidad de jóvenes estudiantes de Matemática, especialmente porque en el medio laboral del país se encuentra la industria, donde estos temas aplicativos son de gran interés y por ende tienen una excelente apertura.

1.4. Objetivos

1.4.1. *Objetivo general*

Hacer un estudio general de los sistemas de ecuaciones diferenciales, soportado en la bibliografía existente y más destacada, para producir un documento que sirva de guía en este tópico a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales de la carrera de Matemática.

1.4.2. *Objetivos específicos*

- Estudiar la teoría subyacente de los sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Analizar algunos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Desarrollar un estudio de algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

1.5. Fuentes de investigación

En el presente trabajo de investigación, se propone realizar una búsqueda, recopilación, análisis y redacción del suficiente material bibliográfico correspondiente al tópico de Sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, para posteriormente redactar un documento guía de estudio. Por otro lado, cabe resaltar la bibliografía especialmente en matemática empleada al momento de desarrollar este proyecto de investigación de tipo documental, para ello, se ha considerado las siguientes referencias bibliográficas:

- Matemáticas avanzadas para ingeniería. (Zill et al., 2008)
- Ecuaciones diferenciales y problemas con valor en la frontera. (Nagle et al., 2000)
- Ecuaciones diferenciales ordinarias. (Arias & Makárov, 2005)

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se hablará acerca de cómo se consiguió el objetivo que se planteó en el presente proyecto de investigación, como señala Franco (2011), se describirá el tipo de investigación al que corresponde el proyecto, y de igual forma se abordará a detalle los pasos propuestos que se siguieron durante el proceso de elaboración del proyecto de investigación (p.118). En ese sentido, y como menciona Arias (2022) este capítulo es la herramienta fundamental para que el lector tenga una clara visión de lo desarrollado en este estudio, es decir del por qué y cómo se hizo este proyecto de investigación. (p. 16)

2.1. Tipo y diseño de investigación

El presente proyecto de investigación es un tipo de investigación monográfica, según Arias (2012) pues se centró en el estudio descriptivo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, detallando de forma sistemática y ordenada definiciones, teoremas, ejemplos, aplicaciones, etc. (p.31)

De igual manera, se explicó ejemplos detallados de cada tópico con la finalidad de lograr una mejor comprensión del contenido estudiado.

Por último, teniendo en cuenta el propósito de este proyecto de investigación, se profundizó en un único tema, en concreto los sistemas de ecuaciones diferenciales y dos de sus aplicaciones, tomando en cuenta su restringido límite en cuanto al tópico, haciendo énfasis en la recopilación, organización y procesamiento de información ya desarrollada por otros autores, por ello es por lo que este proyecto investigación es de tipo investigación documental de diseño bibliográfico.

2.2. Método de investigación

2.2.1. *Método descriptivo*

En el presente proyecto de investigación se usó el método descriptivo, pues al ser una investigación de tipo documental, su marco referencial está en base a la información recopilada, organizada y analizada, ya desarrollada por otros autores con anterioridad. Este método fue fundamental para describir la teoría pertinente al tópico de la investigación referente a Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones, pues se describió la noción de los sistemas de ED, así como algunos de los métodos para resolverlos, para finalmente estudiar dos de sus aplicaciones a tanques interconectados y circuitos eléctricos.

2.3. Recolección y análisis de la información

Para la recolección y selección de la información pertinente, se realizó una minuciosa organización principalmente de libros más destacados del tópico de (SED), para luego realizar una clasificación de la información oportuna para la redacción de este proyecto de investigación.

2.4. Redacción del trabajo de investigación

En esta etapa se culmina el proceso de investigación, de esta manera, se mostró los resultados obtenidos de manera escrita, así las ideas, y aportes del autor en esta sección toman relevancia y adquieren un carácter permanente y puede ser tomadas como referencia y consulta por toda la comunidad que lo requiera. Al comprender la información seleccionada, se procedió a redactar los primeros borradores de cada capítulo correspondiente al tópico de la investigación, se ha dividido en dos partes, un primer borrador, el cual podría ser uno o varios, dependiendo de la capacidad del autor para redactar sobre el tópico en cuestión y luego, un escrito posterior y final.

- Primer borrador: Como lo señala Garza (2007), “el primer borrador es la redacción de las ideas iniciales de forma organizada, ordenada, con sentido y conexión que se presentarán el escrito final, las cuales están sujetas a cambio, corrección o eliminación”.

- Redacción final: Una vez que el primer borrador fue leído, revisado y corregido, se procedió a la redacción del documento final, este como es evidente verlo, cumple el papel de tener mayor claridad y coherencia, donde se comuniquen los resultados.

CAPÍTULO III

3. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

3.1. Resultado

En este capítulo se hablará de los resultados obtenidos al momento de concluir el presente proyecto de investigación, por ello la necesidad de su redacción pues a manera de resumen se describirán los resultados y aportes generados.

Este proyecto de investigación generó un documento guía de estudio, el cual consta de tres capítulos a analizar, los cuales se organizaron de acuerdo con su complejidad a manera de lograr una mejor comprensión por parte del lector.

Es así que en el primer capítulo se habla de las preliminares de este proyecto, de aquellos conocimientos necesarios para estudiar el contenido de los siguientes capítulos, aquí se habla sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, de su clasificación, de los tipos de soluciones que encontramos al resolver una (ED), y de los diferentes métodos que existen para resolver (ED) de acuerdo al tipo al que pertenezcan. En el segundo capítulo se eleva la complejidad de los contenidos, pues se habla propiamente de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, de (SED) lineales homogéneos y no homogéneos, de las soluciones que presentan los (SED), de las formas de representarlos y la parte más importante de este capítulo, de cómo resolver los (SEDL), es decir, de algunos de los métodos para resolver (SED), entre ellos destacan los métodos por eliminación, operadores diferenciales, la transformada de Laplace, métodos matriciales y variación de parámetros, estos conocimientos serán clave para entender las aplicaciones de las cuales se hablará al concluir el presente proyecto de investigación. Finalmente, el tercer capítulo es la parte aplicativa de este proyecto de investigación, concretamente se hablará de dos aplicaciones de los (SEDL), las cuales son: tanques interconectados y circuitos eléctricos.

3.2. Estructura del documento guía

Este proyecto de investigación propone el siguiente esquema de contenido:

1. Ecuaciones diferenciales (ED)

- Ecuaciones diferenciales ordinarias
- Clasificación de (ED)
- Soluciones de (ED)

- Métodos para resolver (ED)

2. Sistemas de ecuaciones diferenciales (SED)

- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (SEDL)
- Métodos para resolver (SEDL)

3. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. (SEDL)

- Tanques interconectados
- Circuitos eléctricos

Se ha considerado este esquema, debido a la secuencialidad que presenta, puesto que se estudia desde tópicos de carácter básico, como lo es la definición de ecuación diferencial, hasta llegar a profundizar en las aplicaciones de los (SED), esto con la finalidad de que haya una mejor comprensión por parte del lector y de esta forma, evitar confusiones futuras mientras se estudie el presente escrito.

CONCLUSIONES

Se realizó un estudio general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (SEDL), teniendo en cuenta la bibliografía más destacada sobre el tópico mencionado, de tal forma que se logró estructurar el contenido de manera sistemática, es decir, aprender cada contenido previo es clave para comprender el contenido posterior, es así que luego de la recopilación, revisión, estudio y análisis de la información pertinente, se redactó un documento guía de estudio referente al tópico, mismo que se encuentra estructurado de tal forma que sea comprensible para los y las estudiantes de la carrera de Matemática, dicho anexo se presentará adjunto a este trabajo de investigación.
Se estudió la teoría subyacente de los sistemas de ecuaciones diferenciales, haciendo hincapié en los de tipo lineal, de igual manera se profundizó en las formas matriciales en las que se puede denotar a un (SEDL), así como también en los métodos más destacados para resolver dichos sistemas, detallando su procedimiento de forma general hasta mostrar ejemplos de casos particulares.
Se detalló los métodos más destacados de resolución de (SEDL), empezando por los más simples de comprender como el método por eliminación o por operadores diferenciales, pasando por los métodos matriciales donde se habló de casos particulares los cuales dependían de los autovalores y autovectores determinados del (SEDL), también se estudió el método por la transformada de *Laplace*, mostrando su eficacia para resolver esta clase de sistemas bajo ciertas condiciones iniciales, y por último, se estudió el método por variación de parámetros, el cual corresponde al método más complicado y más extenso, por lo que se debe tener cuidado al momento de su procedimiento.
Finalmente, se estudió dos aplicaciones de los (SEDL), de tal forma que se mostró la aplicabilidad de este tópico en dos problemas enmarcados en el área de mecánica, específicamente hablando de tanques interconectados y circuitos eléctricos, los cuales siguieron un procedimiento detallado para su análisis y resolución, de esta manera se logró presentar una propuesta de estudio la cual profundizaba en la interpretación y explicación de estos problemas, los cuales generaban un (SEDL), mismo que fue resuelto empleando los métodos de resolución descritos en la anterior conclusión.

RECOMENDACIONES

En la naturaleza, existen situaciones y problemas que pueden modelarse mediante uno o varios sistemas de ecuaciones diferenciales, pero no todos ellos pueden modelarse mediante un sistema lineal, es así que, a manera de ampliación de esta investigación, se recomienda realizar un estudio de problemas de aplicación que pueden ser representados mediante un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, así como también de los métodos analíticos y numéricos que existen para resolver los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

ARIAS, FIDIAS G. *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica*. [Libro electrónico] 6ta. Caracas - Venezuela: Editorial Episteme, 2012. [Consulta 03 abril 2022]. Disponible en `https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=W5n0BgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA11&dq=arias+marco+metodol%C3%B3gico&ots=kYoOckyqh2&sig=EKG-0efVe2K-yb0g1jwvlWJusd4#v=onepage&q=arias%20marco%20metodol%C3%B3gico&f=false`

ARIAS, M. & MAKÁROV, N. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. [en línea] Puebla - México: Academia, 2005. [Consulta: 04 abril 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/513r4`

DÍAZ, J. *Ecuaciones Diferenciales* [en línea]. Salamanca - Madrid: 1982. [Consulta: 05 abril 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/2ekgsm`

DURÁN, A. *Cálculo infinitesimal, el lenguaje matemático de la naturaleza* [en línea]. Madrid - España: Los Libros De La Catarata, 2020. [Consulta 02 de marzo 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/mfega`

FRANCO, Y *Research Thesis. Methodological framework.* [blog] Venezuela. 2011. [Consulta: 05 de abril 2022] Disponible en: `http://tesisdeinvestig.blogspot.com/2011/06/marcometodologico-defunción.html`

LÓPEZ P., M. "Ramanujan: Matemático genial desde la pobreza extrema." *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* 2014, vol. 107, no 1, p. 43-54. [Consulta: 17 junio 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/lobe5n`

MCMILLAN, J. *Investigación educativa*. 5ta ed. España: Pearson Addison Wesley, 84-205-4163-X, pp. 100 - 148.

NAGLE, R. KANT; SAFF, EDWARD B.; SNIDER, A. David. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Pearson Educación, 2000.

ROSADO, E.; EDO, ETS Arquitectura. 1 *Introducción a las ecuaciones diferenciales.* [Consulta: 12 junio 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/kc6pu`

VON LEIBIZ, G. *La naissance du calcul différentiel* [en línea]. Vrin - Suiza: Librairie Pholosophieque J. Vrin, 1995. [Consulta: 20 marzo 2022]. Disponible en: `https://n9.cl/vf5l7`

ZILL, D. & CULLEN, M. *Matemáticas avazadas para ingeniería.* [Libro electrónico]. México: MC Graw Hill Interamericana, 2008. [Consulta: 12 marzo 2022]. Disponible en: `http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1625`

ANEXOS

ANEXO A: GUÍA DE ESTUDIO INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES.

GUÍA DE ESTUDIO

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES

AUTOR: PABLO ANDRES AGILA HIDALGO

Riobamba – Ecuador

2022

PRÓLOGO

Desocupado lector, en mi incesante búsqueda de conocimiento y ante la necesitada situación por la que atraviesa el autor de este escrito, se vislumbra la acertada idea de redactar este texto, combinando mi afán persistente de escribir con mi pasión desmedida por las matemáticas, nace esta guía de estudio destinada a quien corresponda, a quien necesite o a quien siquiera quiera aprender un poco más de Ecuaciones diferenciales o simplemente tenga una mera curiosidad por saber lo que *Pablo Agila* escribió.

Este es el caso de este escrito, alguien con trayectoria en literatura quizá podría decir que este prólogo es una banal copia de otro conocido prólogo del *Quijote*, y de hecho lo es, bueno, no del todo, pues ni siquiera podría compararme a tal ejemplo, mi escrito es 99 % matemática, quizá $0,01$ % de literatura, y el sobrante puede ser cualquier cosa menos matemática, menos literatura.

En fin, y para centrar este prólogo, puedo decir que me tomé este espacio para clarificar y dar una nota al lector, sobre el contenido del escrito, sobre lo que pienso de él y sobre lo que significó desarrollarlo, más allá de su simple redacción. Con cada segundo que me tomó desarrollar esta guía de estudio, esta más se alejó de solo ser una guía, cada capítulo representa cada día, cada tarde, cada noche y por supuesto, cada madrugada que hicieron falta para su desarrollo; seguro de que el lector sabrá cómo abordar ese hecho y por ello, sabrá apreciar el contenido del mismo, no es matemática pura, pero es trabajo honesto.

El autor

Contenido General

Fuentes de investigación

En este apartado se mostrará el material bibliográfico que se tomó en cuenta al momento de la consulta y redacción de este documento guía de estudio.

Fuentes Principales:

- Matemáticas avanzadas para ingeniería. Ver (Zill & Cullen, 2008)
- Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ver (Arias, 2005)
- Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Ver (Nagle et al., 2000)

Complementarias:

- El álgebra lineal y los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias en la facultad de ingeniería. Ver (Costa & Vacchino, 2009)
- Resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, método matricial. Ver (Porras et al., 2019)
- *La naissance du calcul diffeéntiel.* Ver (Von Leibniz, 1989)
- El cálculo infinitesimal y su historia en la obra de Julio rey pastor entre 1921 - 1949. Ver (González, 2008)
- Cálculo infinitesimal: El lenguaje matemático de la naturaleza. (Durán, 2020)

1

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Términos como ecuación, derivada o diferencial son definiciones que, sin duda, se conocen, sin embargo, se ha creído conveniente el desarrollo de esta sección donde se introducirán términos y conceptos clave para la comprensión del posterior contenido.

1.1 Ecuaciones diferenciales

Definición 1.1 (Derivada)**.** Es el resultado del límite que representa la pendiente de la recta tangente, o como va cambiando una variable respecto a otra, a esto se le denomina *derivada* y la denotaremos de la siguiente manera:

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dx}{dy}$$

Definición 1.2. Decimos que una **ecuación diferencial (ED)** es una ecuación que involucra las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Ejemplos. A continuación se ilustran algunas ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x \tag{1.1}$$

$$y' + 2x = \frac{e^x}{3} \tag{1.2}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{2x} \tag{1.3}$$

Nota. Se observa la diferente notación que se puede tener en ecuaciones diferenciales, recordemos que si se tiene una función $y = f(x)$ comúnmente se suele usar la notación

$\frac{dy}{dx}$ para representar la derivada de y con respecto a x, véase ejemplo (1.1) , la cual es la notación desarrollada por **Leibniz** y especialmente útil cuando se habla de derivadas parciales de funciones multivariables, y por otro lado se tiene la notación empleada por **Newton** como $y', y'', ..., y^{(n)}$, véase ejemplos (1.2) (1.3) a lo que él, inicialmente, denominaba *fluxiones.*

Sobre toda la gama de ecuaciones diferenciales que existen, se puede realizar una clasificación de estas, de acuerdo a las derivadas que componen la ecuación.

1.2 Clasificación de ecuaciones diferenciales

Existen algunos tipos de ecuaciones diferenciales y realizar una clasificación de (ED) es necesaria, pues de esta manera su estudio es más específico, lo cual mejora la comprensión de conocimiento al estudiar estos tópicos por primera vez, ahora bien, las (ED) se clasifican de acuerdo a su tipo, orden, grado y linealidad.

1.2.1 Por su tipo

Si una ecuación diferencial contiene solamente derivadas de una o varias variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, decimos que se trata de una **ecuación diferencial ordinaria**. (**EDO**)

Ejemplo 1. A continuación se muestran algunas ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{dy}{dx} + 5 = e^x;$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Ahora, si se tiene que una ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o varias variables dependientes con respecto a dos o más variables independienres, se dice que es una **ecuación diferencial parcial**. (**EDP**)

Ejemplo 2. A continuación se ilustran algunas ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t},$$

1.2.2 Por su orden

Cuando se habla del **orden de una ecuación diferencial** (EDO o EDP), se hace referencia al orden de la derivada más alta que conforme la ecuación diferencial.

Ejemplo 3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x, \tag{1.4}$$

representa una ecuación diferencial de segundo orden.

Nota. Se debe tener especial cuidado en no confundir el **orden de la derivada** con el **grado** de la misma. En la ecuación (1.4) vimos que la (ED) tiene orden 2 o es de segundo orden, pero ¿cúal es su grado?

1.2.3 Por su grado

Cuando se habla del **grado de una ecuación diferencial** se hace alusión al exponente de la mayor de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Ejemplo 4. Retomando y respondiendo la pregunta de la Nota anterior se puede decir que el grado de la ecuación diferencial (1.4) es 1.

Ejemplo 5. Determine el grado y el orden de la siguiente ecuación diferencial

$$2y''' - y^2 + 2x + (3y')^4 = 0$$

Aquí podemos ver que el **orden de la ED** es 3, mientras que si se habla del grado de la misma **ED** es de grado 1.

Simbólicamente y por practicidad definimos la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^n\right) = 0, \tag{1.5}$$

donde F es una función real con $n + 2$ variables.
Ahora, la ecuación diferencial

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}), \tag{1.6}$$

tal que f es una función continua con valores reales y se dice que es la **forma normal** de (1.5).

1.2.4 Por su linealidad

Una ecuación diferencial de n-ésimo orden (1.5) es **lineal** si F es lineal en $y, y', ..., y^{(n)}$, es decir, cualquier EDO de n-ésimo orden es lineal cuando (1.5) es

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0,$$

o mejor expresado como

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.7}$$

Aquí surgen dos casos especiales:
Cuando $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente se tiene

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad y \qquad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.8}$$

ecuación lineal de primer y de segundo orden, respectivamente hablando.

En este punto cabe mencionar que dos propiedades características importantes de una EDO lineal son:

- La variable dependiente así como todas sus derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$ tienen como potencia máxima 1, es decir son de primer grado.
- Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ de $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ dependen de la variable independiente x.

Hablemos ahora de las **ecuaciones diferenciales no lineales**.

Ejemplo 6. Algunos ejemplos de estas son:

$$(1 - y)y' + 2y = e^x \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + lny = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 3y^2 = 2x \tag{1.11}$$

Nota. Los ejemplos anteriores no son ecuaciones diferenciales lineales porque:
En (1.9) el coeficiente de y' depende de la variable y.
En (1.10) debido a la función de logartimo lny, la función no es lineal de y.
En (1.11) la potencia a la que está elevada la función y es diferente de 1.

1.3 Soluciones de una ecuación diferencial

Cuando se resuelve una ecuación algebraica, obtenemos un tipo de solución de acuerdo al grado que tenga esta, por otro lado, cuando se habla de ecuaciones diferenciales, sean (EDO) o (EDP) no solo tienen una solución, sino que pueden tener múltiples soluciones de acuerdo a lo que busquemos, es así que en esta sección se hablará del tipo de soluciones que pueden haber al momento de resolver una ecuación diferencial.

Observación. Como ya se ha mencionado, en esta subsección se hablará sobre las posibles soluciones que se pueden presentar al resolver una (ED), esta nota se cree necesaria puesto que en esta subsección, no se dará especial importancia al proceso de resolución de las (ED), sino únicamente en su solución, es decir, que dada una ecuación diferencial, no profundizaremos en el proceso para obtener su solución, sino que más bien la daremos inmediatamente para su estudio. Dejamos la resolución de ecuaciones diferenciales para la siguiente subsección, véase (1.6).

Definición 1.3. Toda función f definida sobre un intervalo I con n derivadas continuas en I y cuando se sustituye en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden, reduce la ecuación a una identidad, se dice entonces que es una **solución** de la ecuación diferencial sobre el intervalo I.

Ejemplo 7. Dada la ecuación diferencial, verifique la función dada representa una solución para la misma, sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.
Ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$
Función: $y = \dfrac{x^4}{16}$
Si la función dada es solución, debe satisfacer la igualdad, veamos el desarrollo de cada miembro.
Del miembro izquierdo: dada $y = \dfrac{x^4}{16}$ se tiene que $\dfrac{dy}{dx}\left[\dfrac{x^4}{16}\right] = \dfrac{x^3}{4}$ Del extremo derecho:

Dada $y = \dfrac{x^4}{16}$ se tiene que $xy^{1/2} = x\left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x.\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^3}{4}$,

vemos que ambos extremos son iguales, por tanto la función dada, sí es solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 8. Dada la ecuación diferencial

$$y' + y - x^2 - 2x = 0,$$

¿es la función $y = x^2$ solución de esta? Si nos fijamos en la ecuación diferencial, vemos que es de orden 1, por lo que se necesitará solamente la primera derivada de y', esto es $y' = 2x$, ahora remplazando en la ecuación diferencial, se tiene que

$$\begin{aligned} y' + y - x^2 - 2x &= 0 \\ 2x + x^2 - x^2 - 2x &= 0, \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Nota. Efectivamente se consigue una igualdad, por ello la función $y = x^2$ sí es una solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 9. Sea

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x},$$

una ecuación diferencial, con la función $y = e^{3x} + 10e^{2x}$, comprobar que y es una solución de la (ED).

Dado que tenemos $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ se tiene que

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x} + 20e^{2x} \\ 3e^{3x} + 20e^{2x} - 2(e^{3x} + 10e^{2x} &= e^{3x} \\ 3e^{3x} + 20e^{2x} - 2e^{3x} - 20e^{2x} &= e^{3x} \\ e^{3x} &= e^{3x} \end{aligned}$$

Nota. Al comprobar la igualdad, se concluye que la función $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ sí es solución de la ecuación diferencial dada.

Definición 1.4. Recordemos la ecuación diferencial (1.5) de la forma

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^n\right) = 0,$$

decimos que dada una función $\phi(x)$ tal que al ser remplazada en la variable y de la (ED) (1.5) para cada x en un intervalo I corresponde a una **solución explícita** de (1.5).

Definición 1.5. Se llama a una relación de tipo $G(x, y) = 0$ como una **solución implícita** de la (ED) (1.5) en un intervalo definido I si define una o más soluciones explícitas en dicho intervalo.

Ejemplo 10. Mostrar que la función $\phi(x) = x^3 - 2x^2$ es una solución explícita de la siguiente (ED).

$$\frac{dy}{dx}x - 3y = 2x^2$$

Para resolver el ejercicio, vemos que la (ED) incluye una derivada de $\phi(x)$, así que debemos calcular dicha derivada y luego sustituir en la (ED), así

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x^3 - 2x^2 \\ \Rightarrow \phi'(x) &= 3x^2 - 4x. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (3x^2 - 4x)x - 3(x^3 - 2x^2) &= 2x^2 \\ 3x^3 - 4x^2 - 3x^3 + 6x^2 &= 2x^2 \\ 2x^2 &= 2x^2 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Vemos que se cumple la igualdad, por lo que $\phi(x)$, en efecto, sí es una solución explícita de la (ED).

Ejemplo 11. Considere la ecuación diferencial

$$(2xy - sec^2x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0.$$

Muestre que la relación $x^2y - tanx + y^2 = 0$, es una solución implícita de la (ED) dada.

Para este caso, primero identifiquemos la ecuación diferencial, y luego encontremos el término dy/dx de la (ED), para ello, se divide entre dx a la (ED), así

$$\begin{aligned} \frac{[(2xy - sec^2x)dx + (x^2 + 2y)dy]}{dx} &= \frac{0}{dx} \\ 2xy - sec^2x + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} &= sec^2x - 2xy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{sec^2x - 2xy}{x^2 + 2y}. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación anterior, obtengamos su derivada implícita con respecto a x y comparemos, entonces

$$\begin{aligned} x^2y - tanx + y^2 &= 0 \\ x^2(dy/dx) + 2xy - sec^2x + 2y(dy/dx) &= 0 \\ \frac{dy}{dx}(x^2+2y) &= sec^2x - 2xy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{sec^2x - 2xy}{x^2+2y}. \end{aligned}$$

Así vemos que en ambos casos la derivada coincide, por tanto la relación dada satisface la (ED) y se considera como una solución implícita de dicha (ED).

Definición 1.6. De forma similar, cuando se habla de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, resolviendo la ecuación $F(x,y,y') = 0$ generalemente se tiene como resultado una sola constante arbitraria o también llamado *parámetro* c, es así que si una solución contiene dicha constante arbitraria se denota como un conjunto $G(x,y,c) = 0$ de soluciones de la ecuación diferencial, a lo que se le conoce como **familia de soluciones de un parámetro**.

Nota. Al considerar estas familias de soluciones, debemos considerar lo siguiente:

- Si la (ED) es de primer orden, la solución es uniparamétrica, es decir hay un parámetro c_1 que pueden tomar diferentes valores.
- Si la (ED) es de segundo orden, la solucón es biparamétrica, es decir, hay dos parámetros c_1 y c_2 que pueden tomar diferentes valores.
- Si la (ED) es de n orden, la solución es n-paramétrica, pues hay parámetros $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ que pueden tomar diferentes valores.

Ejemplo 12. Un ejemplo sencillo de ver es, dada la ecuación diferencial

$$y' = y \tag{1.12}$$

Al resolverla tenemos la solución

$$\begin{aligned} y &= e^{x+c}, \quad c \in \mathbb{R} \\ y &= e^x e^c \\ y &= ce^x. \end{aligned} \tag{1.13}$$

En este caso, aparece un único parámetro c en la función solución, por ello a la función (1.13) se le denomina **familia uniparamétrica de soluciones** de la ecuación diferencial (1.12).

Ejemplo 13. Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

cuya solución general es

$$\phi(x) = (c_1 + xc_2)e^{2x}. \tag{1.15}$$

Nota. Veamos que para el ejemplo anterior, se tiene dos parámetros c_1 y c_2 constantes reales, entonces decimos que (1.15) es una familia biparamétrica de soluciones de la (ED) (1.14).

Observación. Cabe mencionar que cuando resolvemos una ecuación diferencial (ED), se busca una función de tipo $y = f(x)$ que satisfaga a dicha (ED), al encontrar la familia de soluciones de la (ED) se obtiene también la solución general de la (ED), y al momento de dar valores arbitrarios y/o determinados por el ejercicio al parámetro c, obtenemos las soluciones particulares de la (ED). Por ejemplo, las funciones $\phi(x) = 2e^x$ y $\gamma(x) = 3e^x$, son soluciones particulares diferentes de la (ED) (1.12).

Definición 1.7. Llamamos **solución particular** a una solución generada de la solucón general de una ecuación diferencial que se encuentra libre de parámetros arbitrarios.

Ejemplo 14. Sea la (ED)

$$y' + y - x^2 - 2x = 0,$$

cuya solución es

$$y(x) = x^2 + \frac{c_1}{e^x}.$$

Si nosotros asignamos un valor arbitrario a c_1, por ejemplo $c_1 = 0$, obtenemos una solución particular de la (ED), que sería

$$y = x^2.$$

Por otro lado, si asignamos un valor diferente al parámetro, es decir, $c_1 = 3$, se tiene una solución particular diferente para la misma (ED), esto es

$$y(x) = x^2 + \frac{3}{e^x}$$

Definición 1.8. Se denomina **solución singular** de una ecuación diferencial a cualquier solución que no se pueda obtener partiendo de la solución general mediante alguna selección particular de las constantes arbitrarias conocidas, sin embargo satisface la (ED).

Ejemplo 15. Dada la ecuación diferencial

$$y' = 3y^{2/3}, \tag{1.16}$$

con solución general

$$y = (x + c)^3, \tag{1.17}$$

Sin embargo, la función

$$y = 0, \tag{1.18}$$

también satisface (1.16).

La ecuación (1.18) es un ejemplo de solución singular de la (ED), puesto que no se puede obtener de la solución general (1.17) de la (ED) mediante ningún valor arbitrario del parámetro c. Así, la solución no es única.

Nota. Como pudimos ver, para una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$, una forma general de obtener las soluciones singulares es haciendo $f(x, y) = 0$ para la variable y. Estas serán las posibles soluciones singulares de la (ED) y serán si no se pueden obtener a partir de la variación arbitraria de los parámetros de la solución general de dicha (ED).

Nota. Algunos autores emplean la terminología de **solución general** para referirse a todas las soluciones de una ecuación diferencial en sus textos, (esto es, incluyendo todas aquellas que hemos llamado soluciones singulares). En el presente, se considera conveniente especificar el tipo de solución al cual se refiere un ejercicio determinado, como ya se ha indicado, se tiene un punto de vista práctico que generalmente no se interesa en todas las soluciones, sino en aquella solución de una ecuación diferencial de orden n que contiene n constantes arbitrarias las cuales pueden afortunadamente determinarse a partir de n condiciones asociadas.

Definición 1.9 (Intervalo de definición). Cuando se hable de un intervalo I y una función $f(x, y, ...)$ se habla del intervalo donde dicha función es continua y está bien definida, a I también se lo conoce como intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución, y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un invervalo infinito (a, ∞), etcétera.

Sin embargo, en ecuaciones diferenciales (ED) no solo se habla de intervalos solución, sino también de curvas de solución, y como es de imaginar, la gráfica de una solución y

de una (ED), se denomina **curva de solución**. Ya que y es una función diferenciable, será continua sobre su intervalo I de definición. Es así que, usualmente, la gráfica de la función y y la gráfica de la solución y son diferentes, puesto que el dominio de la función y no necesariamente es el mismo que el intervalo de definición I llamado también domiunio de la solución y.

Por ejemplo, veamos el siguiente ejercicio tomado del libro de Zill:

Ejemplo 16. Dada la función diferencial

$$xy' + y = 0, \tag{1.19}$$

cuya solución general es $y = \dfrac{c_1}{x}$

Haciendo $c = 1$, se tiene la función $y = 1/x$ (Solución particular de (1.19)), el dominio de esta función son todos los reales a excepción del 0 y su gráfica es:

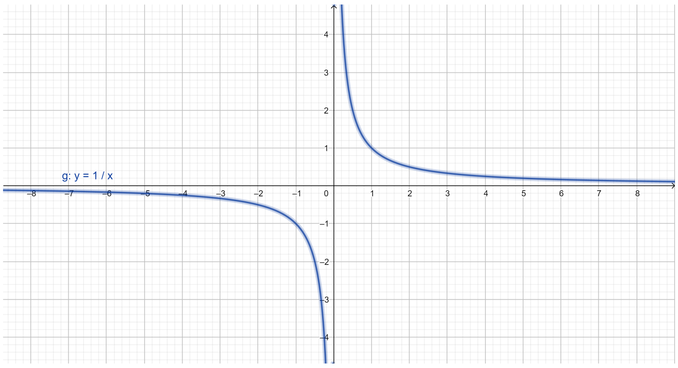


Gráfico 1.1: Gráfica de la función solución particular $y = \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$

Dicha función es discontinua en $x = 0$ y tampoco es diferenciable en dicho punto, esta ecuación representa una asíntota vertical de la gráfica. Por otra parte la función $y = 1/x$ es solución de la (ED), lo cual significa que es una función definida en un intervalo I sobre el cual es diferenciable y satisface la (ED) en todo intervalo que no contenga al 0. Ya que las curvas de solución definidas por $y = 1/x$ sobre cualquier intervalo que no contenga al 0, son básicamente segmentos o secciones de las curvas de solución definidas por $y = 1/x$, entonces tiene sentido tomar el intervalo I más grande posible, de este modo, se tomará I para que fuera $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$, entonces, la curva solución sobre $(0, +\infty)$ es:

Esto nos muestra la diferencia que queríamos notar que existe entre una función solución y la gráfica de dicha solución.

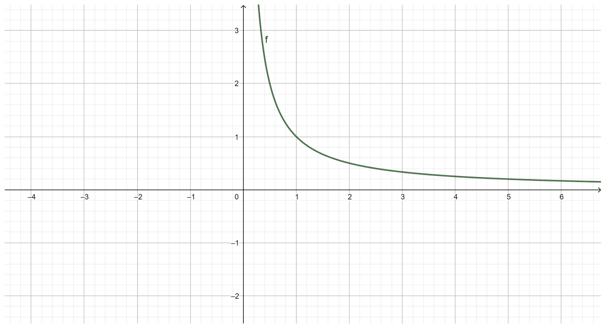


Gráfico 1.2: Solución $y = \dfrac{1}{x}$ con $x \in (0, +\infty)$

1.4 Problema de Cauchy de valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial arbitraria $y' = f(x, y)$ y cualquier punto (x_0, y_0) que pertenezca al dominio de definición de f, nos surge la siguiente interrogante:

¿a qué condiciones debe estar sujeta la función f para que exista una única solución $y = f(x)$ de la ecuación diferencial, tal que se cumpla que $y_0 = f(x_0)$?

Ahora bien, a la condición $y_0 = f(x_0)$ se denomina **condición inicial**. Y en general, a este problema se lo conoce como **Problema de Cauchy o de valor inicial**.

Sea el problema de valor inicial para la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b], \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

1.4.1 Interpretación Gráfica del PVI de primer orden

Cuando tenemos a una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y^{(n-1)}$$

sujeta a condiciones

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)} = y_{n-1},$$

a esto conocemos como un (PVI).

Cuando en la solución general de dicha (ED) sustituimos y aplicamos los valores iniciales de la (ED), se obtiene la solución particular sujeta a esas condiciones iniciales, vemos por ejemplo cuando se tiene una (ED) de primer orden, esto es dada la (ED),

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

sujeta a

$$y(x_o) = y_0.$$

La interpretación en este caso, es sencillo, pues cuando hablamos de ecuaciones diferenciales de primer orden, y encontramos la solución general, nosotros encontramos un punto, pues a partir de la solución general sustituimos el valor x_0 en dicha función, y así obtenemos el valor y_0, dicho nuevo punto (x_o, y_0) corresponde al punto por el cual pasa la curva solución de la (ED).

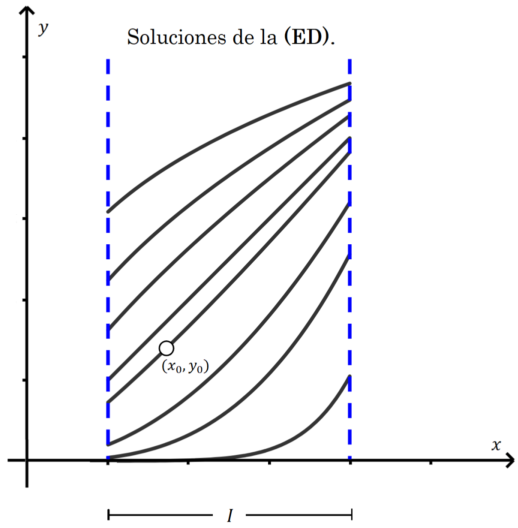


Gráfico 1.3: Interpretación gráfica del PVI de una (ED) de primer orden.

Para una ecuación diferencial de segundo orden, habrán dos condiciones, así podemos darnos cuenta que las condiciones presentes dependen del orden de la (ED).

Ahora bien, para

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$$

sujeta a

$$y(x_0) = y_0 \; ; \; y'(x_0) = y_1,$$

Recordemos que en el caso de las (ED) de primer orden, nos daba como resultado un punto por el cual pasaba la curva solución de la (ED), ahora bien en (ED) de segundo orden, además del punto por el cual pasará la curva solución de la (ED), tendremos el valor de la pendiente de la recta tangente por donde pasa esa curva solución de la (ED).

A continuación veremos un gráfico que expresará mejor lo dicho anteriormente, donde se tendrá dos puntos, el primero inicial y el segundo final.

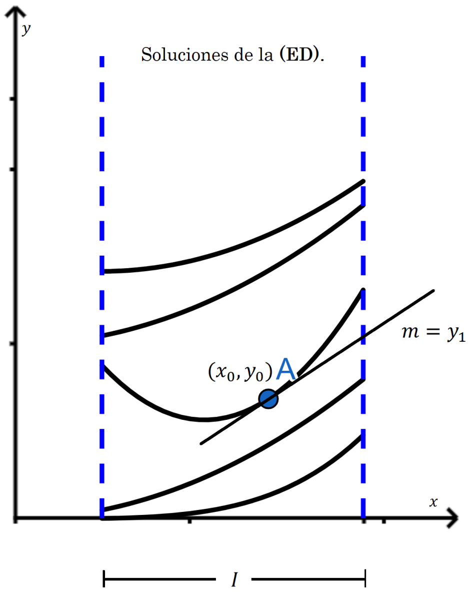


Gráfico 1.4: Interpretación gráfica del PVI de una (ED) de segundo orden.

Definición 1.10. Una función derivable $y(t)$ se puede llamar solución del problema de valor inicial (1.20) en el intervalo $[a, b]$ si cumple:

1) $y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [a, b]$

2) $y(x_0) = y_0$.

Así, consideremos los siguientes ejemplos que ilustran mejor lo mencionado anteriormente:

Ejemplo 17. Dada la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y^2}$$

cuya condición inicial es $y(0) = 1$, hallar la solución particular de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{y^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y^2} \\ \int y^2 dy &= \int x dx \\ \frac{y^3}{3} &= \frac{x^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Desarrollando y simplificando esta expresión se tiene que

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3c \tag{1.21}$$

Y recordando la condición inicial dada, $y(0) = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} (1)^3 &= \frac{3(0)^2}{2} + 3c \\ 1 &= 3c \\ \Rightarrow c &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto la solución particular sería

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{3}$$

Nota. Podemos ver que la expresión (1.21) corresponde a la solución general de este ejercicio, pues la constante c toma valores arbitrarios.

Ejemplo 18. Veamos la ecuación diferencial lineal

$$1 + e^{-3x} y' = 0,$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$.

Resolvemos esta ecuación diferencial, reescribiendo

$$\begin{aligned} 1 + e^{-3x} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ e^{-3x} \frac{dy}{dx} &= -1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{e^{-3x}} \\ \frac{dy}{dx} &= -e^{3x} \\ dy &= -e^{3x} dx. \end{aligned}$$

Integrando se tiene,

$$\int dy = \int -e^{3x} dx$$

Integramos, usando $\int e^v dv = e^v$, así se tiene,

$$y = -\frac{1}{3}e^{3x} + c. \tag{1.22}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial, $y(0) = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{3}e^0 + c \\ 1 &= -\frac{1}{3} + c \\ \frac{1}{3} + 1 &= c \\ \Rightarrow c &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos la solución particular

$$y = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$$

Ejemplo 19. Sea la ecuación diferencial

$$y''' + y = 0,$$

con solución general $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$ sujeto a las condiciones $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y' = 1$, $x = 0$, $y'' = -2$

Así, teniendo la función solución general $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$, obtenemos y' y y'',

$$\begin{aligned} y' &= c_{''} - c_3e^{-x} \\ y'' &= c_3e^{-x}. \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta las condiciones, armamos el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(0) + c_3e^0 &= 0 \\ c_2 - c_3e^0 &= 1 \\ c_3e^0 &= -2, \end{aligned}$$

resolviendo el sistema, se tiene que $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ y $c_3 = -2$.

Así se tiene que la función solución particular de la (ED) es $y = 2 - x - 2e^x$

Cuando se formule un problema de **valor inicial**, se debe realizar las siguientes interrogantes:

- Pregunta de existencia: ¿Existe alguna solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones dadas?
- Pregunta de unicidad. Si existe, ¿puede haber otra solución diferente que satisfaga las condiciones dadas?
- Pregunta de determinación: ¿Cómo se encontraría la solución que satisfaga las condiciones dadas?

Por ello, se tiene el siguiente *Teorema* (1.1), el cual será una herramienta fundamental para estudiar la existencia y unicidad de soluciones en problemas de Cauchy o de valor inicial.

Teorema 1.1 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones). *Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden*

$$y' = F(x, y), \tag{1.23}$$

y la condición inicial $y = y_0$, *cuando* $x = x_0$.

El punto (x_0, y_0) *está contenido en una región* R *del plano* XY.

Vamos a suponer que la función $F(x, y)$ *satisface las siguientes condiciones:*
i. La función $F(x, y)$ *es real, finita y continua en tododos los puntos de la región* R *dada del plano* XY.
ii. La derivada parcial $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ *de esta función con respecto a la variable dependiente* y *es también real, finita y continua en todos los puntos de la región* R *dada del plano* XY.
Si todas las condiciones se satisfacen, entonces en la región R *dada existe una y sólo una solución*

$$y = f(x), \tag{1.24}$$

de la ecuación diferencial (1.23), *tal que la variable dependiente* y *es igual a* y_0 *cuando la variable independiente* x *es igual a* x_0, *esto es*

$$y_0 = f(x_0) \tag{1.25}$$

1.5 Problema de Valor de Frontera

Anteriormente se habló de problemas con un valor inicial dado, pero ahora, en su lugar se formulará *condiciones de frontera o condiciones de borde*. Estas condiciones son muy diversas y es importante notar que estas condiciones siempre se escriben y/o formulan sobre la función f desconocida y sus derivadas en dos o más valores diferentes de la variable independiente x (en dos o más puntos de un intervalo I donde la variable independiente x está definida). A un ejercicio que nos brinda condiciones de frontera se lo denomina como *problema con valores de frontera*

Un **problema con valores en la frontera** es aquel que consiste en (ED) de segundo orden cuyos datos conocidos son el valor inicial y un valor final por donde pasa una curva solución de dicha (ED).

1.5.1 Interpretación Gráfica del PVF

Llamamos a los valores

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1,$$

condiciones en la frontera, y cuando se habla de esta clase de problemas, una solución es una función que satisface la (ED) sobre algún intervalo I, que contenga tanto a a como a b, por ello la gráfica de esta curva (véase *Gráfica 1.5*) pasaa por los puntos (a, y_0) y (b, y_1).

Concretamente con las (ED) de segundo orden, se consideran estos pares de condiciones de fronteras:

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0, & y(b) &= y_1 \\ y'(a) &= y_0, & y(b) &= y_1 \\ y(a) &= y_0, & y'(b) &= y_1 \\ y'(a) &= y_0, & y'(b) &= y_1, \end{aligned}$$

tal que y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias.

De forma general se tendría que las condiciones generales en la frontera son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

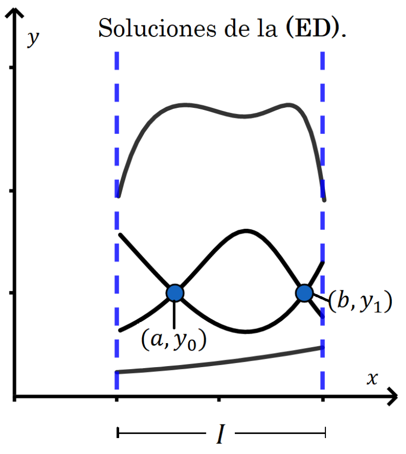


Gráfico 1.5: Interpretación gráfica del PVI de una (ED) de segundo orden.

Ejemplo 20. Considere la siguiente (ED)

$$y'' - 2y + 2y = 0,$$

cuya familia de soluciones es

$$y = c_1 e^x cosx + c_2 e^x senx.$$

sujeta a las condiciones $y(0) = 1$ y $y(\pi) = -1$.

Encontrar los parámetros c_1 y c_2.

Considerando la primera condición $y(0) = 1$, esto es

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x cosx + c_2 e^x senx. \\ 1 &= c_1 e^0 cos(0) + c_2 e^0 sen(0) \\ 1 &= c_1(1)(1) + c_2(1)(0) \\ c_1 &= 1. \end{aligned}$$

Ahora, considerando la otra condición de frontera $y(\pi/2) = 1$ se tiene,

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x cosx + c_2 e^x senx \\ 1 &= c_1 e^{\pi/2} cos(\pi/2) + c_2 e^{\pi/2} sen(\pi/2) \\ 1 &= c_1 e^{\pi/2}(0) + c_2 e^{\pi/2}(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= -c_2 e^{\pi/2} \\ c_2 &= \frac{1}{e^{\pi/2}} \\ c_2 &= e^{-\pi/2} \end{aligned}$$

Dados c_1 y c_2, se tiene la solución

$$y = e^x cosx + e^{-\pi/2} e^x senx$$

$$y = e^x cosx + e^{x-\pi/2} senx.$$

Ejemplo 21. Dada la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 0$$

Verificar que la función $y(x) = c_1 sen2x + c_2 cos2x$ con la (ED) sujeta a las condiciones de frontera $y(0) = 1$ y $y'(\pi/2) = 2$

Nos damos cuenta que es un PVF ya que tanto la función como su derivada están evaluadas para diferentes valores de x, así

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 sen(2.0) + c_2 cos(2.0) \\ y(0) &= c_2 \text{ y tenemos que} \\ y(0) &= 1 \\ \Rightarrow c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ahora evaluemos,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1 cos(2x) - 2c_2 sen(2x) \\ y'(\pi/2) &= 2c_1 cos(\pi) - 2c_2 sen(\pi) \\ y'(\pi/2) &= -2c_1, \end{aligned}$$

y recordemos

$$\begin{aligned} y'(\pi/2) &= 2, \\ 2 &= -2c_1 \\ \Rightarrow c_1 &= -1. \end{aligned}$$

Por tanto la función solución para la (ED) sería $y(x) = -sen2x + cos2x$

1.6 Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales

Cuando hablamos de resolver una ecuación diferencial (ED), es clave reconocer la forma que estas tienen , pues es así que se puede determinar el mejor método para su resolución.

1.6.1 Separación de variables

Se dice que una ecuación de la forma $f(x,y,y')=0$ es una ecuación de variables separables si se puede escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=f(x).g(y); \quad \frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{g(y)}{f(x)}, \tag{1.26}$$

O de forma general si se tiene que

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y),$$

donde $F(x,y)$, puede tomar cualquiera de las formas descritas en (1.26).

Luego, si se toma a dy/dx como un cociente de diferenciales, se puede también expresar como

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x)}{g(y)}\\ g(y)dy &= f(x)dx\\ f(x)dx-g(y)dy &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo $g_1(y)=-g(y)$, se tiene la expresión descrita de forma general

$$f(x)dx+g_1(y)dy=0.$$

Nota. En definitiva, este método es eficaz para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, un caso especial y simple de este método y usual de encontrar, pues es donde se puede escribir a la ecuación diferencial como

$$f(x)dx+g(y)dy=0, \tag{1.27}$$

donde se puede notar que la función de x solo involucra a x, mientras que la función de y involucra solo a y. Es así que se puede resolver inmmediatamente empleando integración, esto es

$$\int f(x)dx+\int g(y)dy=c, \tag{1.28}$$

donde c denota a la constante de integración

A continuación se observa algunos otros ejemplos de estas ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser resueltas mediante este método de separación de variables.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x^2y^3, \\
y' &= (3x^2+5)(2y^2-3y+8), \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{y+1}, \\
y' &= \frac{e^y+3}{x^3+2x}, \\
y' &= x.
\end{aligned}$$

Nota. Notamos que todos los ejemplos mostrados anteriormente están sujetos a la estructura descrita en (1.26), por ello es que se pueden resolver aplicando el método de separación de variables.

Ejemplo 22. (a) Encontrar la solución general de

$$y' = \frac{4x^3+1}{4-2y}$$

y (b) determinar la solución particular para la cual $y = 5$ cuando $x = -2$.

(a) Primeramente expresamos y' como $\frac{dy}{dx}$ esto para tener más claro la separación de variables que se hará.

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3+1}{4-2y} \tag{1.29}$$

Tratando a $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de diferenciales, separando las variables se puede expresar a (1.29) como

$$(4x^3+1)dx + (2y-4)dy = 0 \tag{1.30}$$

Usamos la integración para encontrar la solución general requerida,

$$\begin{aligned}
\int (4x^3+1)dx + \int (2y-4)dy &= \int 0 \\
\frac{4x^4}{4} + x + \frac{2y^2}{2} - 4y &= c,
\end{aligned}$$

Simplicando los términos se tiene

$$x^4 + x + y^2 - 4y = c \tag{1.31}$$

A (1.31) denominamos **solución general** de la ecuación diferencial.

(b) Dado que tenemos $y = 5$ cuando $x = -2$, remplazando en (1.31) se tiene que

$$\begin{aligned} (-2)^4 + (-2) + (5)^2 - 4(5) &= c \\ 16 - 2 + 25 - 20 &= c \\ 19 &= c \end{aligned}$$

Obteniendo la solución particular

$$x^4 + x + y^2 - 4y = 19$$

Ejemplo 23. Si se tiene la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{4y - 2x} \tag{1.32}$$

También se puede expresar como

$$(2x - y)dx + (2x - 4y)dy = 0. \tag{1.33}$$

Nota. No todas las ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas empleando el método de separación de variables, por ejemplo, si observamos (1.33), notamos que es imposible llevarla a la forma de (1.27). Por ello es que se requiere de buscar otros métodos de resolución, lo cual se estudiará en el resto de este capítulo.

1.6.2 Cambio de variable para resolver algunos tipos de (ED)

Como pudimos ver, usando el método de separacíon de variables podemos resolver ecuaciones diferenciales sumamente sencillas, por ello es que surge la siguiente interrogante:

Existen ecuaciones diferenciales que tienen variables que no son separables, pero ¿se las podrá transformar en (ED) con variables separables?

La respuesta es sí, de hecho denominamos a este método de solución de (ED) como **Cambio de variables** o **Transformación de variables**, que tal y como lo nombre lo indica, este método consiste en dada una (ED) se busca reducirla a otra de algún tipo conocido que se pueda resolver. Dentro de esta sección se estudiará las ecuaciones homogéneas, el método de transformación de (ED) de variables no separables a variables separables y algunas otras transformaciones especiales.

1. **Método para transformar (ED) de variables no separables a variables separables**

Ahora veamos el método para transformar una (ED) de variables no separables a una (ED) de variables separables, esto es un tipo de (ED) que casi siempre se puede transformar a una (ED) de variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

usando la transformación $y/x = u$ o $y = ux$, el cual es el cambio de variable dependiente y a la variable u, conservando la variable independiente x, luego

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

y la ecuación se convierte en

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u),$$

tal que

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}.$$

Ahora vemos que las variables están separadas, y luego se obtiene la solución mediante integración. Recodemos que $y = ux$ y que su diferencial $dy = udx + xdu$, de donde se podría despejar du sin problemas para la sustitución.

Ejemplo 24. Sea la (ED)

$$(y^2 + yx)dx + x^2dy = 0,$$

veamos si esta (ED) es separable, esto es

$$y^2dx + yxdx + x^2dy = 0,$$

si agrupamos notamos que no podemos emplear el método de separación de variables, así consideremos el siguiente cambio de variable

$$y = ux,$$

con

$$dy = xdu + udx,$$

Entonces se tendría lo siguiente

$$
\begin{aligned}
((ux)^2 + (ux)x)dx + x^2(xdu + udx) &= 0, \\
(u^2x^2 + ux^2)dx + x^3du + ux^2dx &= 0, \\
u^2x^2dx + ux^2dx + x^3du + ux^2dx &= 0, \\
u^2x^2dx + 2ux^2dx &= -x^3du \\
x^2dx(u^2 + 2u) &= -x^3du \\
\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}}dx &= -\frac{1}{u^2+2u}du \\
\frac{1}{x} &= -\frac{1}{u^2+2u}du
\end{aligned}
$$

Ahora vemos que tenemos una (ED) que se puede resolver por el método de variables separables, así

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}dx &= \int \left[-\frac{1}{u^2+2u}du\right] \\
ln|x| &= \frac{1}{2}\left[ln|u+2| - ln|u|\right] + c_1 \\
ln|x| &= \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{u+2}{u}\right)\right] + c_1 \\
ln|x| &= \left[ln\left(\frac{u+2}{u}\right)^{1/2}\right] + c_1 \\
e^{ln|x|} &= e^{\left[ln\left(\frac{u+2}{u}\right)^{1/2}\right]+c_1} \\
x &= \left(\frac{u+2}{u}\right)^{1/2} e^{c_1} \\
\left[\frac{x}{c_2}\right]^2 &= \left[\left(\frac{u+2}{u}\right)^{1/2}\right]^2 \text{ con } c_2 = e^{c_1} \\
\frac{x^2}{c_2^2} &= \left(\frac{u+2}{u}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora volviendo a las variables iniciales x e y, con $u = y/x$ se tiene

$$
\begin{aligned}
x^2 &= c_3\left(\frac{\frac{y}{x}+2}{\frac{y}{x}}\right) \\
x^2 &= c_3\left(\frac{\frac{y+2x}{x}}{\frac{y}{x}}\right) \\
x^2 &= c_3\left(\frac{xy+2x^2}{yx}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
x^3y &= c_3xy + 2x^2c_3 \\
x^3y - c_3xy &= 2x^2c_3 \\
y(x^3 - c_3xy) &= 2x^2c_3 \\
y &= \frac{2x^2c_3}{(x^3 - c_3x)} \\
y &= \frac{2x^{\cancel{2}}c_3}{\cancel{x}(x^2 - c_3)}
\end{aligned}$$

Así se tiene

$$y = \frac{2xc_3}{(x^2 - c_3)}$$

Por otro lado existen varios tipos de transformaciones especiales, donde no conviene hacer el cambio de $y = ux$ sino que el cambio depende de cada (ED), un caso particular es el siguiente:

Ejemplo 25. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \sqrt{x + y}. \tag{1.34}$$

Lo primero que notamos es que (1.34) no es separable, de igual manera, la presencia de $x + y$ sugiere una transformación de variables dependiente de y a v, dada por

$$v^2 = x + y, \tag{1.35}$$

$$y = v^2 - x. \tag{1.36}$$

nótese que se usa v^2 para evitar las raíces cuadradas, entonces se obtiene y' a partir de (1.35), esto es

$$y' = \frac{d}{dx}(v^2 - x) = 2v\frac{dv}{dx} - 1. \tag{1.37}$$

Así, sustituyendo en la ecuación diferencial (1.34), se tiene

$$2v\frac{dv}{dx} - 1 = v \tag{1.38}$$

Escribiendo (1.38) en forma separable, se tiene que

$$\begin{aligned}
2v\frac{dv}{dx} &= v + 1 \\
\frac{2v}{v+1}dv &= dx.
\end{aligned}$$

Desarrollando esa expresión mediante el método de variables separables, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{2vdv}{v+1} &= \int dx \\ 2\int \frac{(v+1)-1}{v+1}dv &= x+c \\ 2\int 1-\frac{1}{v+1}dv &= x+c \\ 2v-2ln(v+1) &= x+c \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que la solución general de (1.38) es

$$2v-2ln(v+1) = x+c \tag{1.39}$$

Remplazando v por $\sqrt{x+y}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2v-2ln(v+1) &= x+c \\ 2(\sqrt{x+y})-2ln(\sqrt{x+y}+1) &= x+c \end{aligned}$$

Obteniendo así la solución general de la ecuación diferencial (1.34).

2. **Ecuaciones diferenciales homogéneas**

Definición 1.11. Si una función f posee la propiedad $f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$ para algún número real α, entonces se dice que f es una **función homogénea** de grado α.

Ejemplo 26. Veamos el caso de la función

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3+y^3 \\ f(tx,ty) &= (tx)^3+(ty)^3 \\ &= t^3x^3+t^3y^3 \\ &= t^3(x^3+y^3) \\ &= t^3f(x,y) \end{aligned}$$

por tanto, $f(x,y)$ es una ecuación homogénea de grado 3.

Nota. Por otro lado, veamos si la ecuación $f(x,y) = x^3+y^3-1$ es homogénea, para ello veamos

$$f(tx,ty) = (tx)^3+(ty)^3-1 = t^3x^3+t^3y^3-1$$

, la cual no es considerada homogénea.

Definición 1.12. Una ecuación diferencial de primer orden, escrita en la forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1.40}$$

se dice que es una **(ED) homogénea**, si ambas compenentes M y N son funciones homogéneas del mismo grados, es decir, se debe cumplir que $M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$ y $N(tx,ty) = t^{\alpha}N(x,y)$

Si M y N son funciones homogéneas de grado α, también podemos escribir:

$$M(x,y) = x^{\alpha}M(1,u) \text{ y } N(x,y) = x^{\alpha}N(1,u), \text{ donde } u = y/x \tag{1.41}$$

$$M(x,y) = y^{\alpha}M(v,1) \text{ y } N(x,y) = y^{\alpha}N(v,1), \text{ donde } v = x/y, \tag{1.42}$$

Las dos ecuaciones anteriores, sugieren algún tipo de sustitución, ya sea $y = ux$ o $x = vy$, donde u y v sean nuevas variables dependientes, reducirán la ecuación homogénea (1.40) a una ecuación de variables separables de primer orden, y la sustitución que se suele presentar es

$$\begin{aligned} y &= ux \qquad dy = udx + xdu \\ x &= vy \qquad dx = vdy + ydv, \end{aligned}$$

así $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} x^{\alpha}M(1,u)dx + x^{\alpha}N(1,u)dy &= 0 \\ M(1,u)dx + N(1,u)dy &= 0, \end{aligned}$$

donde $u = y/x$ o $y = ux$. Al sustituir el diferencial $dy = udx + xdu$ en la última ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} M(1,u)dx + N(1,u)\left[udx + xdu\right] &= 0 \\ \left[M(1,u) + uN(1,u)\right]dx + xN(1,u) &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} &= 0 \\ \left[\frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}\right]du &= 0 \end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial separable en las variables u y x.

Nota. Cabe mencionar que esta sustitución es la usual, más no una regla, por lo que el proceso para despejar las variables determinadas no se debería memorizar mecánicamente, sino que debe hacerse cada vez que se requiera.

Ejemplo 27. Determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea y resuélvala.

$$xy' = \left(y + xe^{y/x}\right) \tag{1.43}$$

Escribamos (1.43) en la forma (1.40), esto es

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= \left(y + xe^{y/x}\right) \\ xdy &= \left(y + xe^{y/x}\right) dx \\ \left(y + xe^{y/x}\right) dx - xdy &= 0. \end{aligned}$$

Aasí $M(x, y) = \left(y + xe^{y/x}\right)$ y $N = (-x)$, veamos si es homogénea, para ello consideramos

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= \left(ty + txe^{ty/tx}\right) \\ &= \left(ty + txe^{y/x}\right) \\ &= t\left(y + xe^{y/x}\right) \\ &= tM(x, y). \end{aligned}$$

Con ello, nos damos cuenta que la componente M sí es una función homogénea de grado 1.

Es fácil ver que la componente N también es una función homogénea de grado 1, pues

$$\begin{aligned} N(tx, ty) &= -(-tx) \\ &= -t(x) \\ &= tN(x, y). \end{aligned}$$

Dado que tanto M y N son funcioes homogéneas de primer grado, procedemos a resolver dicha (ED), para ello consideremos la sustitución $y = ux$ teniendo en cuenta $dy = udx + xdu$

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= \left(y + xe^{y/x}\right) \\ x\frac{udx + xdu}{dx} &= (ux + xe^{u}) \\ \Rightarrow x(udx + xdu) &= x(u + e^{u})dx \\ \Rightarrow udx + xdu &= udx + e^{u}dx \\ \Rightarrow xdu &= e^{u}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{du}{e^u} &= \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow \int e^{-u}du &= \int \frac{dx}{x} \\
-e^{-u} &= ln|x| + c \quad \text{pero } u = y/x \\
\Rightarrow -e^{-y/x} &= ln|x| + c \\
e^{-y/x} &= -\left(ln|x| + c\right) \\
ln\left[e^{-y/x}\right] &= ln\left(-ln|x| - c\right) \\
-\frac{y}{x} &= ln\left(-ln|x| - c\right)
\end{aligned}$$

Así la función solución es:

$$y = -xln\left(-ln|x| - c\right)$$

Ejemplo 28. Considere la ecuación diferencial

$$(x-y)dx + xdy = 0, \tag{1.44}$$

determine si es homogénea, si lo es, resuelva.

Veamos si la (ED) (1.44) es homogénea, para ello

$$\begin{aligned}
(xt - ty)dx + txdy &= 0 \\
\Rightarrow t(x-y)dx + txdy &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La (ED) (1.44) es homogénea de grado 1

Usando la sustitución $y = ux$ con $dy = udx + xdu$

$$\begin{aligned}
(x-y)dx + xdy &= 0 \\
\Rightarrow (x - ux)dx + x(udx + xdu) &= 0 \\
xdx - uxdx + xudx + x^2du &= 0 \\
xdx + x^2du &= 0 \\
xdx &= -x^2du \\
-\frac{x}{x^2}dx &= du
\end{aligned}$$

Integrando, se tiene

$$\begin{aligned}
\int -\frac{1}{x}dx &= \int du \\
\int du &= -\int \frac{1}{x}dx \\
u &= -ln|x| + c
\end{aligned}$$

Y recordemos,

$$u = y/x \quad \Rightarrow \frac{y}{x} \quad = \quad -ln|x| + c$$

Así, la solución general de (1.44) es

$$= \quad -xln|x| + cx.$$

3. Transformaciones Especiales

En este apartado, se estudiarán algunas transformaciones especiales sugeridas por la forma de la (ED) dada, de igual forma se hará especial hincapié en aquellas (ED) que se pueden reducir a homogenéneas, ahora bien, considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 29. Considere la siguiente ecuación diferencial,

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0, \tag{1.45}$$

Observamos que (1.45) no es homogénea pues

$$(tx + yt - 2)dx + (tx - ty + 4)dy = 0,$$

no se puede expresar de la forma $t^{\alpha}M(x,y)dx + t^{\alpha}N(x,y) = 0$

Para reducir esta (ED) a una homogénea, se procede de la siguiente manera:

Se forma el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

El determinante del sistema sería:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Resolviendo el sistema (1.46) se tiene por solución $x_0 = -1$ y $y_0 = 3$ y haciendo el cambio de variables se tiene que

$$\begin{cases} x = x_1 - 1 \\ y = y_1 + 3. \end{cases}$$

Al notar que los diferenciales de las nuevas variables son iguales a los anteriores se puede hacer: $dx = dx_1$ y $dy = dy_1$; sustituyendo en (1.45) se tiene

$$\begin{aligned} (x_1 - 1 + (y_1 + 3) - 2)dx_1 + (x_1 - 1 - (y_1 + 3) + 4)dy_1 &= 0 \\ \Rightarrow (x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 - y_1)dy_1 &= 0. \end{aligned}$$

Podemos ver que la nueva (ED) sí es una ecuación homogénea.

Haciendo el cambio $y_1 = ux_1$ con $dy_1 = udx_1 + x_1du$, así encontramos la nueva ecuación

$$\begin{aligned}
(x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 - y_1)dy_1 &= 0 \\
(x_1 + x_1u)dx_1 + (x_1 - ux_1)(udx_1 + x_1du) &= 0 \\
x_1dx_1 + ux_1dx_1 + ux_1dx_1 - u^2x_1dx_1 + x_1^2du - ux_1^2du &= 0 \\
\left(x_1dx_1 + 2ux_1dx_1 - u^2x_1dx_1\right) + \left(x_1^2du - ux_1^2du\right) &= 0 \\
\text{Ordenando se tiene } (x_1 + 2ux_1 - u^2x_1)dx_1 + (x_1^2 - ux_1^2)du &= 0 \\
x_1(1 + 2u - u^2)dx_1 + x_1^2(1 - u)du &= 0 \\
(1 + 2u - u^2)dx_1 + x_1(1 - u)du &= 0.
\end{aligned}$$

Separando variables se tiene que

$$\begin{aligned}
x_1(1 - u)du &= -(1 + 2u - u^2)dx_1 \\
\frac{(1 - u)}{(1 + 2u - u^2)}du &= -\frac{1}{x_1}dx_1.
\end{aligned}$$

Integrando en ambos miembros se obtiene

$$\int \frac{(1 - u)}{(1 + 2u - u^2)}du = \int -\frac{1}{x_1}dx_1.$$

El miembro derecho no presenta mayor problema, y sería

$$-\int \frac{1}{x_1}dx_1 = -ln|x_1| + c.$$

Ahora, resolviendo el miembro izquierdo se tiene

$$\int \frac{(1 - u)}{(1 + 2u - u^2)}du.$$

Usando la sustitución

$$1 + 2u - u^2 = t, \text{ con } \frac{dt}{du} = 2(1 - u).$$

Luego, se tiene que

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t|.$$

Cambiando al valor original de t

$$\frac{1}{2}ln|1 + 2u - u^2|.$$

Entonces se ha obtenido

$$\int \frac{(1-u)}{(1+2u-u^2)}du \quad = \quad \frac{1}{2}ln|1+2u-u^2|.$$

Armando lo obtenido tenemos

$$\frac{1}{2}ln|1+2u-u^2| = -ln|x| + ln|c|.$$

O bien, se tendría

$$ln|1+2u-u^2| + 2ln|x| = 2ln|c|.$$

Desarrollando los logaritmos mediante propiedades se tiene

$$\begin{aligned} ln|1+2u-u^2| + ln|x_1|^2 &= ln|c^2| \\ ln|(1+2u-u^2)(x_1^2)| &= ln|c^2|. \end{aligned}$$

Tomando la exponencial a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned} e^{ln|(1+2u-u^2)(x_1^2)|} &= e^{ln|c^2|} \\ (1+2u-u^2)(x_1^2) &= c^2. \end{aligned}$$

Volvemos a los valores originales en lugar de $u = \frac{y_1}{x_1}$ y se tiene

$$\left(1+2\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)(x_1^2) = c^2.$$

Remplazamos las variables orginales, teniendo en cuenta $x = x_1 - 1$ y $y = y_1 + 3$

$$\left(1+2\left(\frac{y-3}{1+x}\right) - \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right)((1+x)^2) = c^2.$$

Desarrollando las operaciones necesarias, se tiene

$$\begin{aligned} \left(1+2\left(\frac{y-3}{1+x}\right) - \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right)((1+x)^2) &= c^2 \\ \left(\frac{(x+1)^2+2(x+1)(y-3)-(y-3)^2}{(x+1)^2}\right)((1+x)^2) &= c^2 \\ (x+1)^2+2(x+1)(y-3)-(y-3)^2 &= c^2 \\ x^2+2x+1+(2x+2)(y-3)-(y^2-6y+9) &= c^2 \\ x^2+2x+1+2xy-6x+2y-6-y^2+6y-9 &= c^2 \\ x^2-4x+2xy+8y-y^2-14 &= c^2 \\ x^2-4x+2xy+8y-y^2 &= c^2+14. \end{aligned}$$

Haciendo $c^2 + 14 = C$ se tiene la función solución de la ecuación diferencial (1.45)

$$x^2 - 4x + 2xy + 8y - y^2 = C.$$

1.6.3 Método para resolver (ED) exactas

Definición 1.13. Una (ED) de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1.47}$$

es una ecuación diferencial exacta, si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta (o total) de alguna función $F(x,y)$.
Lo cual significa que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv dF(x,y). \tag{1.48}$$

Si es así, la ecuación tiene la forma

$$dF(x,y) = 0.$$

Por tanto, su solución general es de la forma

$$F(x,y) = c,$$

con c la constante arbitraria.

Teorema 1.2 (Criterio para una diferencial exacta)**.** *Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$, funciones continuas con derivadas parciales continuas en una región rectangular R, definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta, es que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

El procedimiento general para resolvere sta clase de (ED) es el siguiente

Ejemplo 30. Determinar si la siguiente (ED) es exacta, si lo es, resuelva.

$$2y(y-1)dx + x(2y-1)dy = 0 \tag{1.49}$$

Se tiene que expresar (1.49) en la forma (1.47) por ello, ingresamos todo dentro de los paréntesis y se tiene:

$$(2y^2 - 2y)dx + (2xy - x)dy = 0$$

Luego se tiene $M(x,y)dx = (2y^2 - 2y)dx$ y $N(x,y)dy = (2xy - x)dy$
Se deriva M con respecto a y dejando a x como constante y se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y - 2 \tag{1.50}$$

Se deriva N con respecto a x dejando a y como constante y se tiene

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1 \tag{1.51}$$

Aquí, vemos que (1.50) y (1.51) no coinciden, es decir

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Con lo cual, la (ED) (1.49) no es exacta por lo que no hay que resolverla.

Método de solución general para resolver (ED) exactas

Veamos ahora ejemplos de (ED) exactas, pero antes describamos el método de solución general para resolver estas (ED) exactas descrito por (Zill, D., & Cullen, M. 2005).

Si $z = f(x, y)$ una función multivariable, cuyas primeras derivadas son continuas en una región R del plano XY, entonces su diferencial total es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Dada una ecuación de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ debemos tener en cuenta que se cumpla el (Teorema (1.2), si lo hace, entonces podemos asegurar que existe una función f para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y).$$

Se puede encontrar f procediendo a integrar $M(x, y)$ con respecto a x, mientras que conservamos la variable y como constante, así

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y), \tag{1.52}$$

con $g(y)$ como función dependiente de y. Luego si derivamos (1.52) con respecto a y se tiene, asumiendo la igualdad $\partial f/\partial y = N(x, y)$ y se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + g'(y) = N(x, y).$$

Con lo cual se tiene que

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx. \tag{1.53}$$

Luego, integramos (2.3) con respecto a y y luego se sustituye en (1.52) Así tendremos la función solución de forma implícita de forma $f(x, y) = c$.

Ejemplo 31. Determinar si la siguiente (ED) es exacta, si lo es, resuelva.

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0 \tag{1.54}$$

Se deriva M con respecto a y dejando a x como constante y se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \tag{1.55}$$

Se deriva N con respecto a x dejando a y como constante y se tiene

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \tag{1.56}$$

Con lo cual, vemos que (1.55) Y (1.56) coinciden, entonces la (ED) (1.54) es exacta y se procede a su resolución.

Para resolver esta ecuación diferencial, suponemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

Integramos a ambos lados con respecto a x dejando a y como constante, se tiene

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = 2y \int xdx \Rightarrow f(x,y) = x^2y + g(y). \tag{1.57}$$

Ahora, derivamos (1.57) con respecto a y dejando a x como constante y la igualamos al término N

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \tag{1.58}$$

Ahora, para calcular $g(y)$ integramos (1.58) a ambos lados y se tiene

$$\int g'(y)dy = -\int dy \Rightarrow g(y) = -y + c. \tag{1.59}$$

Remplazando (1.59) en (1.57), se tiene que la función solución es

$$f(x,y) = x^2y - y + c$$

Ejemplo 32. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \tag{1.60}$$

Llevamos a la (ED) a la forma

$$\begin{aligned} 2x + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} &= 0 \\ (2x + y^2)dx + 2xydy &= 0. \end{aligned}$$

Notamos que (1.60) no es separable en variables, luego vemos que

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &= 2x + y^2 \\
N(x,y) &= 2xy.
\end{aligned}
$$

Y

$$
\begin{aligned}
M(tx,ty) &= (2tx + t^2y^2) \\
&= t(2x + ty^2) \\
&\neq M(x,y).
\end{aligned}
$$

Como no se cumple la igualdad decimos que $M(x,y)$ no es función homogénea, por tanto la (ED) tampoco será homogénea.

Luego, se procede a escribir (1.60) en forma de diferenciales, esto es

$$(2x + y^2)dx + 2xydy = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy^2\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy^2\right)dy = d(x^2 + xy^2).$$

Notamos que esta ecuación es la ecuación diferencial exacta, pues su parte izquierda es la diferencial total de la función $\left(x^2 + xy^2\right)$
Por eso la ecuación tiene de forma

$$d(x^2 + xy^2) = 0$$

Por lo tanto, su solución general es

$$x^2 + xy^2 = C \tag{1.61}$$

Nota. Nótese que (1.61) es la expresión implícita de la solución general, es decir una función implícita de la función solución $y(x)$. No en todas las ecuaciones diferenciales es fácil ver si son exactas, por el ello el Teorema (1.2) es de suma utilidad para poder determinarlo de forma sencilla y eficaz.

1.6.4 Factor integrante para (ED) no exactas

Sea la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1.62}$$

Pero ahora, esta ecuación no es exacta, es decir que se tiene que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{1.63}$$

Por ejemplo, vimos en la subsección anterior el (Ejemplo 1.64).

¿Cómo resolver esta clase de ecuaciones?

Si la (ED) de tipo (1.62) no es exacta, se puede buscar la función $\mu(x,y)$. Dicha función se le denomina **factor integrante** o **factor de integración.**

Definición 1.14. El factor integrante para una (ED) es una función $\mu(x,y)$ de dos variables x y y, la cual al ser multiplicada por toda la (ED), la ecuación se convierte a una (ED) exacta.

Observación. Es fundamental notar que el factor integrante existe para cualquier tipo de (ED), pero no hay ningún método general para encontrarlo, solo en algunos casos particulares se sabe con certeza cómo hallar el factor integrante.

A continuación, presentamos un método de solución propuesto para algunos casos cuando se puede conocer el factor integrante.

Método de resolución de (ED) no exactas

Dada la (ED) de tipo

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1.64}$$

Se procede a calcular las derivadas parciales, de la forma

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Las derivadas parciales serán diferentes pues la (ED) es no exacta,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Y se procede a encontrar el factor integrante, siguiendo el siguiente proceso
Sea $\mu(x,y)$ un factor integrante de la (ED) (1.64) original, entonces se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right].$$

Como μ, M, N son funciones, entonces aplicando la regla del producto de derivación se tiene

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\mu(x,y) = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\mu(x,y).$$

Agrupando términos semejantes se tiene

$$M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)\mu(x,y). \tag{1.65}$$

En este punto se debe considerar dos situaciones, la primera, supongamos que la función $\mu(x,y)$ solo depende de la variable x, esto es

$$\cancel{M(x,y)\frac{\partial \mu(x)}{\partial y}} - N(x,y)\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)\mu(x).$$

$$N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx} = -\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)\mu(x).$$

En este caso, la ecuación (1.65) se reduce a la (ED) de variables separables

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\right)\mu(x).$$

Donde la expresión $\left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\right)$ supuestamente solo depende de la variable x, así se tiene que

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\right)dx.$$

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int \left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\right)dx.$$

Resolviendo se tiene que la función factor integrante,

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\right)dx.}$$

es el factor integrante para la (ED) (1.65). De manera homóloga, si la (ED) (1.64) tiene un factor integrante $\mu(x,y)$ que depende solo de la variable y, entonces la ecuación (1.65) se reduce a la (ED) de variables separables

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = \left(\frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} \right) \mu(y).$$

Que al resolver como en el caso anterior, se tiene

$$\mu(y) = e^{\displaystyle\int \left(\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} \right) \mu(y)}$$

Ejemplo 33. Determinar el factor integrante de la siguiente ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{1.66}$$

Expresamos a la (ED) (1.66) como

$$\begin{aligned}
(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' &= 0 \\
(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(3xy + y^2) &= -(x^2 + xy)\frac{dy}{dx} \\
(3xy + y^2)dx &= -(x^2 + xy)dy \\
(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy &= 0.
\end{aligned}$$

Donde $M(x,y) = 3xy + y^2$ y $N(x,y) = (x^2 + xy)$, y calculando sus derivadas parciales respectivas, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 3x + 2y \\
\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 2x + y.
\end{aligned}$$

Con lo cual, notamos que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Por ello se dice que la (ED) no es exacta. De acuerdo al proceso que describimos anteriormente, calculamos la expresión (), es decir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] &= f(x)\\
\frac{1}{x^2+xy}\left[3x+2y-(2x+y))\right] &= f(x)\\
\frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} &= f(x)\\
\frac{x+y}{x(x+y)} &= f(x)\\
\frac{1}{x} &= f(x).
\end{aligned}$$

Ahora, calculando el factor integrante, se tiene

$$\mu(x)=e^{\int(1/x)dx}$$

$$\mu(x)=x$$

Ahora bien, multiplicando el factor integrante por la ecuación diferencial original (1.66) se tiene

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0. \tag{1.67}$$

Ahora, tenemos que

$$M(x,y)=(3x^2y+xy^2) \quad \text{y} \quad N(x,y)=(x^3+x^2y).$$

Y por ende tenemos como sus derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 3x^2+2xy\\
\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 3x^2+2xy.
\end{aligned}$$

Con lo cual, notamos que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Por tanto ahora, la ecuación diferencial (1.67) es exacta.

Ahora, se debe buscar y calcular una función $F(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=3x^2y+xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x^3+x^2y.$$

Tomamos entonces a la ecuación del lado izquierdo para calcular $F(x,y)$ y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 3x^2y + xy^2 \\
\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \int \left(3x^2y + xy^2\right) dx \\
F(x,y) &= 3\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + h(y).
\end{aligned}$$

Obteniendo

$$F(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y). \tag{1.68}$$

Ahora, se procede a derivar (1.68), con respecto a y, esto es

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 + x^2y + h'(y). \tag{1.69}$$

Luego, se iguala (1.69) a $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ y se tiene

$$\begin{aligned}
x^3 + x^2y + h'(y) &= x^3 + x^2y \\
\Rightarrow h'(y) &= 0 \\
\int h'(y) &= \int 0 \\
\Rightarrow h(y) &= c_1.
\end{aligned}$$

Ahora, se sustituye el valor de la función $h(y)$ en (1.68) y se tiene

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \\
F(x,y) &= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1.
\end{aligned}$$

Haciendo $F(x,y) = c_2$ se tiene la solución implícita de la (ED) (1.66).

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1. \\
c_2 &= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1.
\end{aligned}$$

O bien

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C \quad \text{con} \quad C = c_2 - c_1.$$

Ahora, veamos dos casos especiales del **factor de integración** los cuales son descritos por (Nagle et al., 2000) en el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Factores de integración especiales).

- *Si* $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ *es continua y solo depende de* x*, entonces*

$$\mu(x) = e^{\left[\int \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) dx\right]}, \tag{1.70}$$

es un factor integrante para la ecuación (1.62).

- *Si* $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ *es continua y solo depende de* y*, entonces*

$$\mu(y) = e^{\left[\int \left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right) dy\right]}, \tag{1.71}$$

es un factor integrante para la ecuación (1.62).

Este teorema detalla el siguiente procedimiento a seguir:

a. Si $Mdx + Ndy = 0$ no es una (ED) de variables separables, se debe calcular $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$. Si estas dos últimas $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces la (ED) es exacta. Si no se cumple esta igualdad, tomar en cuenta

$$\frac{\partial M/\partial y / - \partial N/\partial x}{N}. \tag{1.72}$$

b. Si la (ED) (1.72) solo depende de la variable x, entonces un factor de integración está dado por (1.70).

Si no, considere lo siguiente

$$\frac{\partial N/\partial x / - \partial M/\partial y}{M}. \tag{1.73}$$

Si (1.73) depende únicamente de la variable y, por tanto un factor de integración está dado por (1.71).

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a entender mejor el uso de este teorema.

Ejemplo 34. Resuelva la ecuación diferencial

$$(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0. \tag{1.74}$$

Consideremos a $M = (2y^2 + 2y + 4x^2)$ y a $N = (2xy + x)$, primero, veamos si es exacta, para ello calculemos la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esto es

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x}\\ 4y+2 &\neq 2y+1.\end{aligned}$$

Por tanto (1.74) no es exacta.

Entonces seguimos el procedimiento descrito en el teorema (1.3), luego se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} &= \frac{4y+2-(2y+1)}{2xy+x}\\ &= \frac{(2y+1)}{x(2y+1)}\\ &= 1/x.\end{aligned}$$

Como esta última ecuación solo depende de x, entonces según el teorema se tiene que

$$\mu(x) = e^{\int 1/x dx} = e^{ln|x|} = x. \tag{1.75}$$

Ahora, se procede a multiplicar nuestra (ED) (1.74) por el factor integrante (1.75) obtenido y se tiene

$$(2xy^2+2xy+4x^3)dx+(2x^2y+x^2)dy = 0.$$

Al nosotros ver esta nueva (ED), hacemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x+2x = 4xy+2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

por tanto, la nueva (ED) es exacta.

Ahora, resolvamos esta (ED) exacta, así obtengamos la $f(x,y)$ a partir de M, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\int Mdy = \int \left(2x^2\frac{y^2}{2}+x^2\right)dy &= x^2y^2+x^2y+g(x)\\ f(x,y) &= x^2y^2+x^2y+g(x).\end{aligned}$$

Ahora, se procede a derivar $f(x,y)$ con respecto a x y se tiene

$$\frac{d}{dx}[f(x,y)] = 2xy^2+2xy+g'(x) = 2xy^2+2xy+4x^3.$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}\int g'(x) &= \int 4x^3\\ g(x) &= 4\frac{x^4}{4}\\ g(x) &= x^4+c.\end{aligned}$$

Remplazando esta función $g(x)$ en la función $f(x, y)$ se tiene

$$f(x, y) = x^2y^2 + x^2y + x^4 + c.$$

Así despejando la constante c se tiene la solución implícita

$$x^2y^2 + x^2y + x^4 = c. \tag{1.76}$$

Una forma de encontrar la función solución explícita se tiene que a la función (1.76) se la puede considerar como una ecuación de segundo grado con respecto a y, con coeficientes $a = x^2$, $b = x^2$ y $c = x^4 - c$, así empleamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, entonces se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y &= \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4(x^2)(x^4 - c)}}{2x^2} \\ y &= \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^2(x^2 - 4(x^4 - c}}{2x^2} \\ y &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2 - 4(x^4 - c)}}{2x}. \end{aligned}$$

1.6.5 Método para resolver (ED) lineales de primer orden

Anteriormente vimos una noción básica de la linealidad de las ecuaciones diferenciales, en esta sección se hablará de manera formal de este hecho, de igual manera se abrodará los métodos de solución para estas (ED) lineales, el primero será el método usando factor integrante y el segundo hablará sobre la variación de parámetro, pero antes, daremos la definición de una (ED) lineal de primer orden.

Definición 1.15. Sea la ecuación diferencial de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1.77}$$

se la denomina **ecuación diferencial lineal** en la variable dependiente y.

Observaciones.

- Cuando $g(x) = 0$, decimos que la (ED) (1.77) es homogénea y se procede a su resolución como ya lo hemos visto con anterioridad, de lo contrario es no - homogénea.

- Notemos que si dividimos (1.77) entre el coeficiente $a_1(x)$ se obtiene la **forma estándar** de una (ED) lineal.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{1.78}$$

Nota. A continuación se estudiará la propiedad, método de solución y la fórmula necesarias para comprender este tópico de ecuaciones diferenciales lineales de primer ordem, los mismos que serán de utilidad cuando se estudie (ED) lineales de orden superior.

Teniendo en cuenta la (ED) (1.78) se puede generalizar y decir que tiene por solución la suma siguiente

$$y = y_c + y_p,$$

donde y_c es la solución de la ecuación homogénea asociada cuando

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{1.79}$$

y y_p es la solución particular de la (ED) (1.78) no homogénea.

Para una mejor apreciación de este hecho, observe:

$$\frac{d}{dx}[y_x + y_p] + P(x)[y_c + y_p] = \left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right] + \left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right] = f(x).$$

Luego, observemos que la (ED) homogénea (1.79) también es separable, y escribimos

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0.$$

Lo cual nos permitirá encontrar y_p más fácil y rápidamente.

Integrando con respecto de y se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} + P(x)dx &= 0. \\
\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx &= \int 0 \\
ln|y| + \int P(x)dx &= c_1 \\
ln|y| &= -\int P(x)dx + c_1 \\
e^{ln|y|} &= e^{-\int P(x)dx + c_1} \\
y &= e^{-\int P(x)dx}.e^{c_1} \\
y &= ce^{-\int P(x)dx}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $c = e^{c_1}$.

Por conveniencia se establece que $y_c = cy_1(x)$, donde $y_1 = ce^{-\int P(x)dx}$.

1. Métodos de solución por factor integrante

Observación. Como hemos visto anteriormente, el factor integración o de integración μ es una función tal que al multiplicarlo con una ecuación diferencial, inemediatamente la convierte en una (ED) exacta. Por lo general el factor integrante es una función de dos variables, que por conveniencia notamos con x e y, sin embargo, para el caso de las ecuaciones diferenciales lineales, hace falta encontrar un factor de integración que solo dependa de una variable independiente, generalmente x, esto es $\mu = \mu(x)$.

Ahora, veremos la solución general por factor integrante.

Ahora, escribimos a la (ED) (1.78) en forma diferencial, y se tiene

$$dy + [P(x)y - f(x)]\, dx = 0.$$

Multiplicando por el factor integrante $\mu(x)$ se tiene

$$\mu(x)dy + \mu(x)\,[P(x)y - f(x)]\, dx = 0. \tag{1.80}$$

Tendríamos $M(x,y) = \mu(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)\,[P(x)y - f(x)]$, además sabremos que la (ED) es exacta si se cumple

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\,[P(x)y - f(x)]\,.$$

Ahora, derivando explícitamente el miembro derecho con respecto a y se tiene la ecuación diferencial correspondiente al factor de integración $\mu(x)$

$$\frac{d\mu}{dx} = P(x)\mu,$$

y en forma diferencial tendríamos

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx.$$

Notamos que corresponde a una ecuación de variables separables, resolviendo se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int P(x)dx \\ ln\mu &= \int P(x)dx. \end{aligned}$$

Es así que encontramos la forma del factor integrante

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

Ahora, teniendo en cuenta la (ED) (1.80) y la reescribimos como

$$\mu(x)dy + \mu(x)P(x)ydx = \mu(x)f(x)dx.$$

Y ahora, usando la sustitución $\mu(x)P(x) = \mu'(x) = \dfrac{d\mu}{dx}$ del factor integrante, y se tiene

$$\mu(x)dx + y\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)f(x)dx. \tag{1.81}$$

Nótese que la parte izquierda de la ecuación corresponde a la diferencial exacta del producto de funciones μy, lo cual se puede consideran como una función multivariable, de dos variables en especial x y y, esto es

$$\mu(x)dx + y\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial\,[\mu(x)y]}{\partial y}dy + \frac{\partial\,[\mu(x)y]}{\partial x}dx = d\,[\mu(x)y]\,. \tag{1.82}$$

Entonces se obtiene la ecuación (1.81)en forma exacta, esto es

$$d\,[\mu(x)y] = \mu(x)f(x)dx. \tag{1.83}$$

Integrando, se obtiene la solución general de la ecuación diferencial, es decir

$$\begin{aligned}
d\,[\mu(x)y] &= \mu(x)f(x)dx \\
\int d\,[\mu(x)y] &= \int \mu(x)f(x)dx \\
\mu(x)y &= \int \mu(x)f(x)dx \\
y &= \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x)dx + c\right]
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, así tenemos que

$$y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\int e^{\int P(x)dx}f(x) + ce^{\int P(x)dx}. \tag{1.84}$$

Y así se tiene que (1.84) corresponde a la **solución general** de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ahora se demostrará cómo obtener una solución general de una ecuación lineal de primer orden, usando el **método de solución por factor integrante**, el proceso es el siguiente

- Empezamos escribiendo la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{1.85}$$

- Segundo, se debe buscar el factor integrante por resolver de la ecuación diferencial separable,

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx,$$

o al sustituir el coeficiente $P(x)$ en la fórmula integral,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

- Como tercer punto se tiene que reescribir la ecuación exacta,

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x), \tag{1.86}$$

O bien

$$d\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)f(x)dx. \tag{1.87}$$

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a entender mejor este método.

Ejemplo 35. Resolver la ecuación diferencial

$$y' + 4y = 0 \tag{1.88}$$

Reescribimos la (ED) (1.88) en la forma (1.85), esto es

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Hallamos el factor integrante

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int P(x)dx}, \text{ sabiendo que } P(x) = 4 \\
\mu(x) &= e^{\int 4dx} \\
\mu(x) &= e^{4x}.
\end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación exacta, de la forma (1.86)

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x),$$

o bien de la forma (1.87),

$$\begin{aligned}
d\left[\mu(x)y\right] &= \mu(x)f(x)dx \\
d\left[e^{4x}y\right] &= e^{4x}(0) \\
\int d\left[e^{4x}y\right] &= \int 0dx \\
\left[e^{4x}y\right] &= c_1 \\
y &= \frac{c_1}{e^{4x}}.
\end{aligned}$$

Así la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{-4x}$$

Ejemplo 36. Determinar el factor de integración y resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x. \tag{1.89}$$

Primero, se reescribe la (ED) (1.89) a la forma (1.85),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} &= \frac{x^6 e^x}{x}\\ \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y &= x^5 e^x.\end{aligned}$$

Viendo la forma de la ecuación se puede decir que $P(x) = -\frac{4}{x}$, y haciendo calculando el factor de integración tenemos

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int(-4/x)dx}\\ \mu(x) &= e^{-4ln|x|}\\ \mu(x) &= e^{ln|x^{-4}|}\\ \mu(x) &= x^{-4}.\end{aligned}$$

Ahora, escribimos la ecuación en la forma (1.86)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\mu(x)y] &= x^{-4}x^5 e^x,\\ \frac{d}{dx}[\mu(x)y] &= xe^x,\end{aligned}$$

o bien a la forma (1.87)

$$\begin{aligned}d\left[x^{-4}y\right] &= xe^x dx\\ \int d\left[x^{-4}y\right] &= \int [xe^x]\,dx\\ x^{-4}y &= \int [xe^x]\,dx.\end{aligned}$$

Resolviendo la integral por partes se tiene

$$\begin{aligned}\int [xe^x]\,dx &= xe^x - \int e^x dx\\ &= xe^x - e^x + c_1\\ &= e^x(x-1) + c_1.\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$x^{-4}y = e^x(x-1) + c_1$$
$$y = \frac{e^x(x-1)+c_1}{x^{-4}}$$
$$y = x^4(x-1)e^x + c_1x^4.$$

Así, la solución general de la ecuación general (1.89) es

$$y = x^4(x-1)e^x + c_1x^4.$$

Ejemplo 37. Dada la ecuación diferencial

$$x^2\frac{dy}{dx} + 3x^4y = y.$$

Reescribimos la ecuación de la forma (1.85) y se tiene

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} + 3x^4y &= y \\
x^2\frac{dy}{dx} + 3x^4y - y &= 0 \\
x^2\frac{dy}{dx} + (3x^4-1)y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} + (3x^4-1)\frac{y}{x^2} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} + \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right)y &= 0
\end{aligned}$$

Con $P(x) = (3x^2 - 1/x^2)$ entonces se tiene al factor integrante

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\
\mu(x) &= e^{\int 3x^2-1/(x^2)dx} \\
\mu(x) &= e^{x^3+1/x}.
\end{aligned}$$

Una vez calculado el factor integrante, armamos la ecuación diferencial de forma exacta (1.86) o directa a la forma (1.87), esto es

$$\begin{aligned}
d\left[\mu(x)y\right] &= \mu f(x)dx \\
d\left[e^{x^3+1/x}y\right] &= e^{x^3+1/x}(0)dx.
\end{aligned}$$

Entonces resolvemos y despejamos y, es decir

$$\begin{aligned}
\int d\left[e^{x^3+1/x}y\right] &= \int e^{x^3+1/x}(0)dx \\
e^{x^3+1/x}y &= \int 0dx \\
e^{x^3+1/x}y &= c_1 \\
y &= \frac{c_1}{e^{x^3+1/x}}.
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1.e^{-x^3+1/x}$$

2. Método de solución por variación de parámetros

Ahora, consideremos el segundo método para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Este se diferencia del anterior pues es más preciso pero, por lo general se utiliza para resolver (ED) lineales no homogéneas.

Definición 1.16. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{1.90}$$

Consideremos los casos siguientes:

- Si $f(x) = 0$, llamamos a la ecuación diferencial **homogénea**, con forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = 0, \text{ o bien} \frac{dy}{y} = -P(x)dx. \tag{1.91}$$

  Notamos que (1.91) es una (ED) de variables separables, cuya solución general es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -P(x) \\
\int \frac{dy}{y} &= \int [-P(x)]\, dx \\
ln|y| &= -\int P(x)dx + ln|c|, \\
e^{ln|y|} &= e^{-\int P(x)dx + ln|c|} \\
y &= e^{-\int P(x)dx}.e^{ln|c|}.
\end{aligned}$$

  O bien

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{1.92}$$

  con $C = e^{ln|c|}$

- Si $f(x) \neq 0$ denominamos a la ecuación diferencial **no-homogénea**, y para ello buscamos la solución general llamada $y_g(x)$, la cual se calcula como

$$y_g(x) = y_c(x) + y_p(x), \tag{1.93}$$

  donde $y_c(x)$ es la solución de la ecuación homogénea (1.91) y $y_p(x)$ es la solución particular de la ecuación no-homogénea original.

En este punto, suponemos que la solución particular $y_p(x)$ puede buscarse teniendo en cuenta (1.92) partiendo de la solución $y_c(x)$ de la ecuación homogénea. Pero ahora, tratamos al parámetro C como una función de x, es decir $C \to u(x)$, entonces

$$y_p(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.94}$$

Al sustituir $y_p(x)$ en (1.94) de la ecuación diferencial original (1.90), así se obtiene la ecuación diferencial para la función $u(x)$,

$$\begin{aligned} y_p' + P(x)y_p &= f(x) \to u'_(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)y(x)e^{-\int P(x)dx} \\ &= f(x) \to u'(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x). \end{aligned}$$

O bien,

$$u'(x) = f(x)e^{P(x)dx} = f(x).$$

Y encontrando $u(x)$ se tiene

$$u(x) = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx.$$

Entonces, teniendo en cuenta la forma de la solución particular, se tiene

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u(x)e^{-\int P(x)dx} \\ y_P(x) &= e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx. \end{aligned}$$

Observación. De lo visto anteriormente se puede observar que:

- El método de factor de integración es más específico con respecto a la resolución de estas ecuaciones diferenciales lineales, mientras que el de variación de parámetros es más útil para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior.

Veamos ahora, algunos ejemplos que ilustran mejor este método de resolución de ecuaciones lineales de primer orden.

Ejemplo 38. Sea la ecuación diferencial

$$xy' - 2y = x^3. \tag{1.95}$$

Resuelva usando el método de variación de parámetros para (ED) de primer orden.

Llevamos la (ED) (1.95) a la forma (1.90), esto es

$$\begin{aligned} x.\frac{dy}{dx} - 2y &= x^3 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} &= x^2, \end{aligned}$$

Ahora, haciendo (1.95) (ED) homogénea, es decir

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 0,$$

Resolviendo se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Resolviendo por variables separables, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{2y} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ ln|y| &= 2ln|x| + c \\ ln|y| &= ln|x^2| + ln|c| \\ ln|y| &= ln|cx^2| \\ y_h &= cx^2. \end{aligned}$$

Ahora, buscamos la $y_p(x)$, para ello tomamos

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u(x).y_h \\ y_p(x) &= u(x)x^2. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos $y_p'(x)$, y por conveniencia y practicidad usaremos la notación u en lugar de $u(x)$, entonces

$$y_p'(x) = u'x^2 + 2xu.$$

Remplazando y'_p en y' en (1.95) se tiene

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2y}{x} &= x^2 \\
u'x^2 + 2xu - \frac{2(ux^2)}{x} &= x^2 \\
u'x^2 + 2xu - 2xu &= x^2 \\
u'x^2 &= x^2 \\
u' = \frac{x^2}{x^2} & \\
u' &= 1 \quad \text{Con u' = du/dx} \\
\Rightarrow \int du &= \int 1dx \\
u &= x.
\end{aligned}$$

De esta forma remplazamos el $u(x)$ obtenido y tenemos la $y_p(x)$,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= u(x)x^2 \\
y_p(x) &= x.x^2 \\
y_p(x) &= x^3.
\end{aligned}$$

Así, tenemos la solución general de (1.95) y es

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
y &= cx^2 + x^3.
\end{aligned}$$

2

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (SED)

En el capítulo anterior se estudió a las ecuaciones diferenciales de forma individual, en este nuevo capítulo hablaremos de dos o más ecuaciones diferenciales relacionadas, es a lo que llamamos **sistemas de ecuaciones diferenciales (SED)**, haciendo énfasis en aquellos de primer orden.

Definición 2.1. Un **sistema de ecuaciones diferenciales (SED) de primer orden** es aquel que está formado por n ecuaciones diferenciales de primer orden que involucran las derivadas de dos o más funciones no conocidas con respecto de una sola variable independiente y expresado en forma implícita se tiene

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1(t), ..., x_n(t).x_1'(t), ..., x_n'(t)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_n'(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

o bien de forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ejemplos. Veamos dos (SED)

El primer (SED) es

$$\begin{cases} x - \dfrac{dy}{dt} = y \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = x. \end{cases}$$

Notas:

- Donde las variables dependientes x e y son funciones de t, es decir, que la única variable independiente en este sistema de ecuaciones diferenciales es t.

- Este (SED) es un sistema 2×2 y su *orden* corresponde al orden de la mayor (ED) que conforme el (SED), en este caso es de segundo orden.

El segundo (SED) es

$$\begin{cases} w' = z + t \\ z' = 2w - 5t. \end{cases}$$

Notas:

- En este (SED) las variables dependientes son w, z las cuales son funciones de t, siendo esta variable la única independiente.

- Este (SED), al igual que el anterior es de 2×2,

- Observemos la notación empleada para este (SED), donde los apóstrofes sobre la variable indican su derivada.

- Es común denotar a los (SED) usando un corchete que agrupe las (ED) del sistema, esto es simplemente notación.

Definición 2.2. Se denomina **solución del (SED)** a cualquier familia de funciones $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ diferenciales en $I \subset \mathbb{R}$, tal que cada x_i con $i = 1, ..., n$ satisfaga simultáneamente las (ED) del sistema (2.2).

Ejemplo 39. Por ejemplo, si tenemos que las variables, x_1 y x_2 son variables dependientes y t representa la variable independiente, entonces se podría armar un sistema de dos ecuaciones diferenciales definido como

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g(t, x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si buscásemos una solución para este (SED), sería encontrar un par de funciones $x_1 = \phi_1(t)$ y $x_2 = \phi_2(t)$, ambas funciones definidas en I, con la condición de que tanto ϕ_1 como ϕ_2 satisfagan simultáneamente al sistema de (ED) (2.3).

Es usual, y de notable practicidad, usar la siguiente notación vectorial.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X(t)} &= (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\\
\mathbf{X'(t)} &= (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t)),\\
\mathbf{F(t, x(t))} &= f_1(t, x(t)), ..., f_n(t, x(t))).
\end{aligned}
$$

O de la forma

$$
\mathbf{X(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X'(t)} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F(t, x(t))} = \begin{pmatrix} f_1(t, x(t) \\ f_2(t, x(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x(t)). \end{pmatrix}.
$$

Y al sistema de ecuaciones diferenciales, de forma compacta, se denota como

$$
X'(t) = F(t, x(t))
$$

Ejemplo 40. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$
\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 5y(t), \end{cases} \quad \text{o de forma equivalente,} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}
$$

Este sistema expresado en forma matricial es

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

2.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (SEDL)

En esta sectión se hará énfasis en el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, con orden n y las representaremos de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

Si las funciones f_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ son lineales en las variables independientes x_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

se le llama *sistema (ED) lineales* expresado de *forma lineal normal* o *canónica*
Aceptamos que a_{ij} y las funciones f_i con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ son continuos en un intervalo I.

Notas:

- Expresamos a la variable independiente con t y las variables dependientes son funciones de t que se indican como $x_1, x_2, ..., x_n$.
- Cuando se habla de la linealidad significa que los coeficientes y las funciones $f_i(t)$ son solo funciones con respecto a la variable independiente y que las funciones desconocidas $x_i(t)$ conjuntamente con sus primeras derivadas $x_i'(t)$ están expresadas a una potencia de 1.
- Cuando las funciones $f_i(t) = 0$ con $i = 1, ..., n$ decimos que el (SED) lineal es homogéneo.
- Cuando las funciones $f_i(t) \neq 0$ con $i = 1, ..., n$ decimos que el (SED) lineal es no-homogéneo.
- Cuando todos los términos a_{ij} son constantes reales, llamamos al (SEDL) (2.4) sistema con coeficientes constantes.
- En términos coloquiales podemos decir que un (SED) lineal es aquel que está formado por (ED) lineales.

Definición 2.3. Dado el (SEDL) (2.4) decimos que es un **(SEDL) homogéneo** cuando las funciones $f_i = 0$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y si $f_i \neq 0$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en (2.4) entonces decimos que se trata de un **(SEDL) no homogéneo**.

Ejemplo 41. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

Considerando a x, y variables dependientes y funciones de la variable independiente t.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

Este (SED) es **homogéneo** pues notamos que cada (ED) del sistema es homogénea, además de que en ninguna de estas (ED) existe el parámetro de la variable independiente.

De forma matricial tendríamos este mismo sistema como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 42. Consideremos el siguiente sistema 3×3

$$\begin{cases} x_1' = -2x_2 + 3t, \\ x_2' = 2x_3 - 2t, \\ x_3' = x_1. \end{cases}$$

Notamos que este (SEDL) es **no homogéneo**, pues en las (ED) que lo conforman vemos la presencia de la variable independiente t.

Y expresado en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

2.1.1 Notación matricial para (SEDL)

La forma matricial para representar un sistema diferencial lineal es

$$\mathbf{X'} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

y si el sistema es homogéneo se representa de la forma

$$\mathbf{X'} = \mathbf{AX}$$

donde **X, A(t), X′, F(t)** son matrices que se denotan de la siguiente manera

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Se define un vector solución a la matriz columna en un intervalo I, tal que

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cada uno de sus componentes son funciones diferenciales que satisfacen al sistema diferencial lineal **X′ = AX + F**.

Definición 2.4. El vector solución que se obtiene de **X′ = AX + F** se puede interpretar de manera geometrica con $x_i = h_i(t)$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ecuaciones escalares los cuales representa una familia de curvas.

Teorema 2.1 (Principio de superposición)**.** *Sea el conjunto de vectores $X = X_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ solución del sistema homogéneo **X′ = AX** en el intervalo I. Por tanto, la combinación lineal*

$$\boldsymbol{X} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_k X_k$$

*donde c_i con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ constantes arbitrarias, es una solución en **I**.*

Definición 2.5 (Dependendia e independencia lineal)**.** Sea el conjunto de vectores $\mathbf{X} = X_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ solución del sistema homogéneo **X′ = AX** en el intervalo I. Se dice **linealmente dependiente** cuando existen las constantes c_i con $i \in 1, 2, \dots, k$ diferentes de cero de la combinación lineal

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_k X_k = 0,$$

para todo x en I. Por otro lado, decimos que el conjunto de vectores es **linealmente independiente** en un intervalo **I** si las únicas constantes para las que

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_k X_k = 0$$

para toda x en el intervalo **I** son $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Analizando la **Definición 2.6**, se encuentran dos casos de dependencia, cuando $k = 2$, se tienen dos vectores solución X_1 y X_2 se dice que son linealmente dependientes si son múltiplos, en cambio, para $k > 2$ se dice que el conjunto de vectores solución es linealmente dependiente si al menos un vector solución se puede expresar como combinación lineal de los vectores restantes.

Definición 2.6. Se considera el determinante de la matriz construida por los vectores solución, formando así una matriz cuadrada que también se la conoce como matriz **fundamental**.

Definición 2.7 (Wronskiano)**.** Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ posee al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & fn \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas (apóstrofes) denotan las derivadas de las funciones, se denomina **wronskiano** de las funciones

Teorema 2.2 (Criterio para soluciones linealmente independientes)**.** *Sean n vetores solución del sistema homogéneo* $\mathbf{X'} = \mathbf{AX}$ *en un intervalo I, donde*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Implica que es linealmente independiente el sistema de vectores solución en I si, y solo si el wronskiano

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

para todo $t \in I$.

Ejemplo 43. Dado el siguiente (SED)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X},$$

cuyas soluciones son

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Veamos

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix} = (e^{-2t})(5e^{6t}) - (3e^{6t})(-e^{-2t}) = 5e^{4t} + 3e^{4t} = 8e^{4t} \neq 0.$$

Se comprueba que el conjunto solución de vectores es linealmente independiente.

Definición 2.8. Todo conjunto **X** de n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo **X′= AX** en un intervalo I se lo llama **conjunto fundamental de soluciones** en I.

Teorema 2.3 (Existencia de un conjunto fundamental)**.** *Para el sistema homogéneo **X′ = AX** existe un conjunto de fundamental de funciones en I, siendo I un intervalo.*

Teorema 2.4 (Solución general: Sistemas homogéneos)**.** *Sea X en I, un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo **X′ = AX**. Entonces,*

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_k X_k$$

donde c_i con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ constantes arbitrarias, es la solución general del sistema en I.

Tomando en cuenta que para los sistemas no homogéneos, notamos X_p a la solución particular en un intervalo I, donde X_p está libre de páramtros arbitrarios y las funciones satisfacen dicho sistema, a continuación tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5 (Solución general: Sistemas no homogéneos)**.** *Sea X_p en I, una solución del sistema no homogéneo **X′= AX + F**, tal que*

$$X_c = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

es la solución del sistema homogéneo asociado.

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}.$$

Ahora, la solución general del sistema no homogéneo en I, es

$$X = X_c + X_p$$

donde X_p es la solución particular del (SEDL) no homogéneo.

2.2 Métodos para resolver (SEDL)

En esta sección se estudiarán algunos métodos de resolución para (SEDL), se consideró pertinente tomar en cuenta lo siguientes:

- Método por eliminación
- Método por operadores diferenciales
- Método por la transformada de Laplace
- Métodos matriciales
- Método por variación de parámetros

2.2.1 Método por eliminación

El método de eliminación de ecuaciones diferenciales es muy similar al método algebraico de una incógnita. Hacemos referencia a la forma normal de un (SEDL)

$$\begin{aligned}
x_1' &= P_{11}(D)x_1(t) + P_{12}(D)x_2(t) + \cdots + P_{1n}(D)x_n(t) + f_1(t) \\
x_2' &= P_{21}(D)x_1(t) + P_{22}(D)x_2(t) + \cdots + P_{2n}(D)x_n(t) + f_2(t) \\
&\vdots \\
x_n' &= P_{n1}(D)x_1(t) + P_{n2}(D)(t)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n(t) + f_n(t)
\end{aligned}$$

donde escribiremos el sistema de dos ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde a_{ij} con $i, j \in \{1, 2\}$ son constantes arbitrarias y f_1, f_2 son dos funciones dadas.

En primera instancia, se puede resolver el sistema de la manera que las ecuaciones sean igualadas a una misma variable, para lograr obtener una solución del sistema que satisfaga a todas las ecuaciones de este.

Pasos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales por el método de eliminación

1. Primero, despejamos la variable x_2 de la primera ecuacion del sistema, obteniendo

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(x_1' - a_{11}x_1 - f_1(t)) \tag{2.6}$$

encontramos su derivada

$$x_2' = \frac{1}{a_{12}}(x_1'' - a_{11}x_1' - f_1'(t)) \tag{2.7}$$

2. Luego, se sustituye las ecuaciones (2.6) y (2.7) para la incógnita x_2 y su derivada en la segunda (ED) del sistema (2.5), donde

$$\frac{1}{a_{12}}(x_1'' - a_{11}x_1'' - f_1'(t)) = a_{21}x_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}}(x_1' - a_{11}x_1 - f_1'(t)) + f_2(t)$$

la cual obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden no-homogénea con coeficientes constantes respecto a la variable dependiente

$$x_1'' - (a_{11} + a_{22})x_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{12}f_2(t) - a_{22}f_1(t) + f_1'(t).$$

3. Encontramos la solución general de la ecuación anterior con respecto a la función $x_1(t)$, es decir, el primer componente de la solución general de sistema

$$x_1 = x_1(t, c_1, c_2) \tag{2.8}$$

tal que c_i con $i \in \{1, 2\}$ constantes arbitrarias.

4. Se sustituye el componente $x_1(t)$ y su derivada para obtener en la ecuación de 1) para su variable dependiente x_2. Así obtenemos la solución general de el componente x_2, tal que

$$x_2 = x_2(t, c_1, c_2)$$

tal que c_i con $i \in \{1, 2\}$ constantes arbitrarias.

Así se tiene las soluciones al (SEDL) (2.5).

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, c_1, c_2) \\ x_2 &= x_2(t, c_1, c_2) \end{aligned}$$

Notaremos que las constantes arbitrarias de las componentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las mismas.

Ejemplo 44. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, empleando el *método por eliminación.*

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$

Despejando "y" de la primera (ED) del sistema se tiene

$$y = x' - x,$$

hallemos y', esto es

$$y' = x'' - x'.$$

Luego, sustituimos y y su derivada y' en la segunda (ED) del (SEDL), así se tiene

$$\begin{aligned} x'' - x' &= 3x - (x' - x) \\ x'' - x' &= 3x - x' + x \\ x'' - 4 &= 0, \end{aligned}$$

teniendo así la (ED) de segundo orden, ahora se escribe la ecuación característica

$$\begin{aligned} x'' - 4x &= 0 \\ r^2 - 4 &= 0 \\ r_1 = 2 \quad &\text{y} \quad r_2 = -2. \end{aligned}$$

Para estudiar a mayor detalle los métodos de resolución de (ED) de orden superior a 1, se recomienda revisar (Zill, D. & Cullen, M., p. 104 - 190)

Así la solución es $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$.
Una vez obtenida x calculemos x', esto es

$$x' = 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t}$$

Ahora sustituimos x y x' en la (ED)

$$\begin{aligned} y &= x' - x \\ y &= 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - c_1e^{2t} + c_{-2t} \\ y &= c_1e^{2t} - 3c_2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que la solución al (SEDL) es

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ y = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t}. \end{cases}$$

Dicha solución, en forma matricial es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} c_2 e^{-2t}$$

2.2.2 Método por operadores diferenciales

Definición 2.9. En cálculo, a menudo la derivada se respresenta como

$$\frac{dy}{dx} = Dy.$$

Donde, llamamos a D *operador diferencial*.

$$D = \frac{d}{dx}.$$

En resumen, el operador diferencial D transforma una función diferencial en otra función que es la derivada de la función original.

Ejemplos. Veamos algunos casos donde se usa este operador diferncial

$$D[4e^{2x}] = \frac{d}{dx} 4e^{2x} = 8e^{2x}$$

$$D[2t^3 - 5t] = \frac{d}{dt}[2t^3 - 5t] = 6t - 5$$

$$D[cos(3x)] = -3sen(3x).$$

Ahora bien, este método por eliminación es similar al sistema de ecuaciones algebraicas por eliminación (reducción), en donde buscamos eliminar una de las variables del sistema para enfocarnos en la resolución de la otra.

Se realizará los pasos para un sistema de ecuaciones diferenciales no-homogéneos, puesto que para el sistema homogéneo se particulariza.

Pasos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales por el método de eliminación

1. Sea el (SEDL) expresado en forma Prima o y' (Para el caso de la variable y)

$$\begin{cases} b_{11}y_1' + b_{12}y_2' + \cdots + b_{1n}y_n' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ b_{21}y_1' + b_{22}y_2' + \cdots + b_{2n}y_n' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \vdots \\ b_{n1}y_1' + b_{n2}y_2' + \cdots + b_{nn}y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

   Expresamos el (SEDL) usando la notación del operador diferencial D,

$$\begin{cases} b_{11}Dy_1 + b_{12}Dy_2 + \cdots + b_{1n}Dy_n = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ b_{21}Dy_1 + b_{22}Dy_2 + \cdots + b_{2n}Dy_n = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \vdots \\ b_{n1}Dy_1 + b_{n2}Dy_2 + \cdots + b_{nn}Dy_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

   Asociando términos semejantes tenemos

$$\begin{cases} (a_{11} - Db_{11})y_1 + (a_{12} - Db_{12})y_2 + \cdots + (a_{1n} - Db_{1n})y_n = 0, \\ (a_{21} - Db_{21})y_1 + (a_{22} - Db_{22})y_2 + \cdots + (a_{2n} - Db_{2n})y_n = 0, \\ \vdots \\ (a_{n1} - Db_{n1})y_1 + (a_{n2} - Db_{n2})y_2 + \cdots + (a_{nn} - Db_{nn})y_n = 0, \end{cases}$$

2. Elegimos la variable que vamos a eliminar y escogemos el operador que acompaña a la variable tomada y la multiplicamos de forma inversa con el signo contrario para poder eliminarlos realizando la suma.

3. Realizamos las operaciones respectivas y eliminamos la variable elegida.

4. Obteniendo una ecuación no-homogénea, donde la solución de la misma puede ser obtenida resolviendo su (ED) homogénea asociada y su ecuación característica.

5. Luego, debemos analizar con que método se puede resolver dependiendo si la estructura es exponencial, seno o coseno, etc. Y encontramos una solución particular.

Por ejemplo, veamos este proceso aplicado a un (SEDL) 2×2.

Dado el (SEDL)

$$\begin{cases} (a_{11} - Db_{11})x + (a_{12} - Db_{12})y = f_1(t), \\ (a_{21} - Db_{21})x + (a_{22} - Db_{22})y = f_2(t). \end{cases}$$

1. Comprobar que el (SEDL) esté expresado en notación del operador diferencial D.

2. Elegir una variable a eliminar del sistema y se escoge el operador diferencial que acompañe a la variable seleccionada, y la multiplicamos de forma inversa con el signo contrario para poder eliminarlos realizando una suma, en este caso eliminemos la variable y, elegimos el factor que acompaña a dicha variable con signo cambiado, este es $-(a_{12}-Db_{12})$ para la segunda (ED) y $(a_{22}-Db_{22})$ para la primera (ED) del sistema,

$$\begin{cases} [(a_{11}-Db_{11})x+(a_{12}-Db_{12})y=f_1(t)]\times[(a_{22}-Db_{22})], \\ (a_{21}-Db_{21})x+(a_{22}-Db_{22})y=f_2(t)\times[-(a_{12}-Db_{12})]. \end{cases}$$

   Y tendríamos

$$\begin{cases} (a_{22}-Db_{22})(a_{11}-Db_{11})x+(a_{22}-Db_{22})(a_{12}-Db_{12})y=f_1(t)(a_{22}-Db_{22}), \\ -(a_{12}-Db_{12})(a_{21}-Db_{21})x-(a_{12}-Db_{12})(a_{22}-Db_{22})y=-f_2(t)(a_{12}-Db_{12}). \end{cases}$$

   Así eliminamos la variable y del (SEDL) y tendríamos

$$[(a_{22}-Db_{22})(a_{11}-Db_{11})-(a_{12}-Db_{12})(a_{21}-Db_{21})]\,x=f_1(t)(a_{22}-Db_{22})-f_2(t)(a_{12}-Db_{12}).$$

   Esta nueva (ED) suele ser de segundo orden, la cual al resolverla obtenemos la solución $x(t)$.

3. Luego, para obtener $y(t)$ se debería seguir el procedimiento, o de acuerdo a la naturaleza de las (ED) del sistema se podría obtener $y(t)$ a partir de $x(t)$, pero estos son casos particulares.

4. Elimine las constantes adicionales sustituyendo las expresiones para $x(t)$ o $y(t)$ en una o en ambas (ED) del (SEDL). Escriba las expresiones para $x(t)$ e $y(t)$ en términos de las demás constantes.

Ejemplo 45. Considere el siguiente (SEDL) homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=2x \\ \dfrac{dx}{dt}=4y. \end{cases}$$

Reescribamos el (SEDL) usando la notación del diferencial D, esto es

$$\begin{cases} Dy=2x \\ Dx=4y. \end{cases} = \begin{cases} Dy-2x=0 \\ Dx-4y=0. \end{cases}$$

Ahora nos damos cuenta que tenemos un sistema lineal algebraico de dos variables, resolviendo por eliminación se tiene

$$\begin{aligned} -2x + Dy &= 0 \\ Dx - 4y &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por (4) la primera (ED) y por D la segunda (ED) del último sistema, se tiene

$$\begin{array}{c} -8x + \cancel{4Dy} = 0 \\ D^2x \cancel{-4Dy} = 0 \\ \hline D^2x - 8x = 0 \end{array}$$

Esta nueva (ED)

$$\begin{aligned} D^2x - 8x &= 0 \\ (D^2 - 8)x &= 0. \end{aligned}$$

es una (ED) homogénea de segundo orden, la cual lleva asociada la ecuación característica

$$\begin{aligned} m^2 - 8 &= 0 \\ m_1 = 2\sqrt{2} \quad &\text{y} \quad m_2 = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Acorde a los procedimientos para resolver (ED) de segundo orden vistos en **?**, la solución a esta (ED) es

$$x(t) = c_1e^{2\sqrt{2}t} + c_2e^{-2\sqrt{2}t}$$

Con

$$x'(t) = 2\sqrt{2}c_1e^{2\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}c_2e^{-2\sqrt{2}t}$$

Ahora, procedamos a eliminar la variable x y obtener la función solución $y(t)$.

Tomando el (SEDL) original, se proce a multiplicar por $(-D)$ la primera (ED) y por la constante 2 la segunda (ED), esto es

$$\begin{array}{c} \cancel{-2Dx} + D^2y = 0 \\ \cancel{-2Dy} - 8y = 0 \\ \hline D^2y - 8y = 0 \end{array}$$

Teniendo la nueva (ED)

$$\begin{aligned} (D^2 - 8)y &= 0 \\ D^2 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Con la ecuación característica

$$\begin{aligned} m^2 - 8 &= 0 \\ m_1 = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad m_2 &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Una vez más haciendo alusión al procedimiento para resolver (ED) de orden superior vistos en **?** se tiene que la solución es

$$y(t) = c_3 e^{2\sqrt{2}t} + c_4 e^{-2\sqrt{2}t}$$

Vemos que tenemos 4 constantes arbitrarias c_1, c_2, c_3, c_4 pero calculando el determinante del (SEDL) original se tiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -D \\ D & -4 \end{vmatrix} = -8 + D^2.$$

Observamos que el orden del determinante es 2, por lo que solamente admite dos constantes arbitrarias, por ello se debe limitar el número de constantes, entonces sustituimos $y(t)$ y $x'(t)$ en la primer (ED) del (SEDL) original, así

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4y \\ 2\sqrt{2}c_1 e^{2\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}c_2 e^{-2\sqrt{2}t} &= 4\left(c_3 e^{2\sqrt{2}t} + c_4 e^{-2\sqrt{2}t}\right) \\ 2\sqrt{2}c_1 e^{2\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}c_2 e^{-2\sqrt{2}t} &= 4c_3 e^{2\sqrt{2}t} + 4c_4 e^{-2\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

Ahora, tal y como vemos para que la igualdad se mantenga, debe haber una relación entre las constantes c_i con $i = 1, ..., 4$, esto es

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}c_1 e^{2\sqrt{2}t} &= 4c_3 e^{2\sqrt{2}} & \text{y} \qquad -2\sqrt{2}c_2 e^{-2\sqrt{2}t} &= 4c_4 e^{-2\sqrt{2}t} \\ c_1 &= \frac{4c_3 e^{2\sqrt{2}t}}{2\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}t}} & c_2 &= \frac{4c_4 e^{-2\sqrt{2}t}}{-2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}t}} \\ c_1 &= \frac{2c_3}{\sqrt{2}} & c_2 &= -\frac{2c_4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ahora, tendríamos que la solución para el (SEDL) son las funciones

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2c_3}{\sqrt{2}} e^{3\sqrt{2}t} - \dfrac{2c_4}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}t} \\ y(t) = c_3 e^{2\sqrt{2}t} + c_4 e^{-2\sqrt{2}t}. \end{cases}$$

Ejemplo 46. Ahora veamos la aplicación de este *método por operadores diferenciales* a un (SEDL) no homogéneo, considere el siguiente (SEDL)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \\ -x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Pasando a la notación con el operador diferencial D, se tiene

$$\begin{cases} Dx + y = t^2 \\ -x + Dy = 1 \end{cases}$$

En este caso eliminaremos la variable x, entonces multiplicamos por el diferencial D a la segunda ecuación, y obtenemos

$$\begin{aligned} Dx + y &= t^2 \\ -Dx + D^2y &= D[1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{Dx} + y &= t^2 \\ \cancel{-Dx} + D^2y &= 0, \end{aligned}$$

y obtenemos una nueva (ED)

$$D^2y + y = t^2.$$

$$y'' + y = t^2.$$

Y al resolverla, obtenemos la solución

$$y(t) = c_1cos(t) + c_2sen(t) + t^2 - 2.$$

Ahora, para encontrar la solución $x(t)$ podemos seguir el mismo procedimiento, pero en este caso particular, si observamos la segunda (ED) del (SEDL), vemos que podemos despejar la solución $x(t)$ teniendo en cuenta la derivada de $y(t)$, por ello la calculamos y es

$$y'(t) = -c_1sent(t) + c_2cos(t) + 2t.$$

Entonces, despejando en la segunda (ED) del (SEDL) se tiene

$$x = \frac{dy}{dt} - 1$$

$$x(t) = -c_1sent(t) + c_2cos(t) + 2t - 1.$$

Así el sistema solución del (SEDL) es

$$\begin{cases} x(t) = -c_1sent(t) + c_2cos(t) + 2t - 1, \\ y(t) = c_1cos(t) + c_2sen(t) + t^2 - 2 \end{cases}.$$

2.2.3 Métodos matriciales

Mostraremos la forma matricial del sistema, en donde incluimos la matriz columna $\mathbf{X} = x_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de las variables dependientes, tal que

$$\mathbf{X} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Insertamos la matriz cuadrada de orden n $(n \times n - matriz)$ y $p(t) = (p_{ij}(t))$ con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que

$$p(t) = (p_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

que son los elementos de la matriz cuadrada. en donde el índice i denota las filas de la matriz y j dennota el número de columna de esta. Luego, introducimos la matriz columna $f(t) = (f_i(t))$ de las funciones $f_i(t)$,

$$f(t) = (f_i(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se representa de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Hacemos referencia a la regla de multiplicación de matrices que se puede escribir de la siguiente manera:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + f_i(t)$$

con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así obtenemos todos las ecuaciones del sistema diferencial. Además, puede representarse de una manera matricial simbólica

$$X' = p(t)x + f(t)$$

De la misma manera, introducimos el vector solución $x(t) = (x_i(t))$ por lo cual sus componentes son funciones que satisfacen cada una de las ecuaciones de este, tal que

$$x(t) = (x_i(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

donde, cada componente del vector solución es cada componente de la solución del sistema. Aplicando las condiciones iniciales para el problema del valor inicial o de Cauchy, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad x(t_0) = x^0$$

Por lo visto anteriormente, se tiene que las condiciones iniciales se representan como la igualdad de dos vectores, en donde para las funciones incógnitas de un punto $t = t_0$ debe ser igual a x^0 de valor inicial, respectivamente.

La dimencionalidad de los vectores es el número de componentes de los vectores, y el orden de las matrices cuadradas son iguales al orden del sistema original.

Ahora se estudiarán algunos métodos matriciales para resolver sistemas lineales de primer orden con n (ED).

1. Método de Euler para resolver (SEDL) homogéneos

Recordando el caso de las (ED) homogéneas con coeficientes constantes, para las cuales se daba una solución en forma de una función exponencial e^{rx}, haciendo alusión a una función desconocida que se debía obtener. Para el caso de (SEDL) homogéneos, conservaremos esta noción de la función exponencial, añadiendo además el vector solución $x(t)$, el cual contiene las n funciones de t, denominadas $x_i(t)$ con $i = 1, ..., n$

Entonces consideremos el vector solución, el cual conservará la forma con la función exponencial $e^{\lambda t}$, esto es

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}, \\ x_2(t) = v_2 e^{\lambda t}, \\ \quad\vdots \\ x_n(t) = v_n e^{\lambda t}, \end{cases} \tag{2.9}$$

Es evidente ver que la derivada del vector (2.9) es

$$\mathbf{X'}(t) = \lambda\mathbf{V}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda v_1 e^{\lambda t}, \\ x_2'(t) = \lambda v_2 e^{\lambda t}, \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = \lambda v_n e^{\lambda t}, \end{cases} \tag{2.10}$$

Se sustituye los vectores (2.9) y (2.10) en la forma normal o canónica del (SEDL) (2.4), esto es

$$\begin{aligned} \lambda v_1 e^{\lambda t} &= a_{11}v_1e^{\lambda t} + a_{12}v_2e^{\lambda t} + ... + a_{1n}v_ne^{\lambda t}, \\ \lambda v_2 e^{\lambda t} &= a_{21}v_1e^{\lambda t} + a_{22}v_2e^{\lambda t} + ... + a_{2n}v_ne^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ \lambda v_n e^{\lambda t} &= a_{n1}v_1e^{\lambda t} + a_{n2}v_2e^{\lambda t} + ... + a_{nn}v_ne^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Cancelando el factor común $e^{\lambda t}$ se tiene de manera explícita

$$\begin{matrix} \lambda v_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1n}v_n, \\ \lambda v_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{2n}v_n, \\ \vdots \\ \lambda v_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + ... + a_{nn}v_n. \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} a_{11}v_1 - \lambda v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1n}v_n = 0, \\ a_{21}v_1 - \lambda v_2 + a_{22}v_2 + ... + a_{2n}v_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 - \lambda v_n + a_{n2}v_2 + ... + a_{nn}v_n = 0. \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1n}v_n = 0, \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + ... + a_{2n}v_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0. \end{matrix} \tag{2.11}$$

Como este sistema es de (ED) homogéneas, tiene solución diferente de cero, solo si

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a21 & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Esta condición (2.12) corresponde a la ecuación algebraica de n-ésimo orden para calcular el valor de λ, por eso denominamos a la ecuación (2.12) como **ecuación característica de la matriz A**

Al (SEDL) homogéneas (2.11) lo podemos expresar de forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a21 & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Y de forma simbólica se tiene

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0, \tag{2.14}$$

donde **I** es la matriz identidad de orden $n \times n$, por lo tanto, a la ecuación (2.11) de la matriz **A** se denota como

$$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{2.15}$$

En este punto es fácil ver que el problema de encontrar el autovector **V** y el parámetro λ es precisamente el *problema de autovectores y autovalores* de la matriz **A**.

En resumen, el problema de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas se reduce al problema de buscar los autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes de este sistema.

Cuando se habla de *autovalores* de la matriz de coeficientes, se refiere a las raíces de la ecuación característica (2.12). Es así que se deduce la ecuación tendrá n soluciones que pueden reales diferentes, reales repetidas o complejas, las cuales vienen en pares conjugados, por ello la necesidad de estudiar cada caso por separado.

2. Autovalores reales y diferentes

Sean todas las n raíces de la ecuación característica (2.12) reales y diferentes entre sí, estos son los autovalores de la matriz de coeficientes **A** es decir

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n,$$

Este conjunto de autovectores se obtiene siguiendo los siguientes pasos,

1. Teniendo el primer autovalor $\lambda = \lambda_1$, lo sustituimos en (2.13) y se resuelve el sistema obteniendo el primer autovector $\mathbf{V}^{(1)}$ que le corresponde al primer autovalor λ_1

2. Después se sustituye en el sistema (2.12) el segundo autovalor $\lambda = \lambda_2$ se resuelve ese sistema y se obtiene n componentes del segundo autovector $\mathbf{V}^{(2)}$, que corresponde al autovalor λ_2.

3. Este proceso se debe realizar n veces, cada vez sustituyendo los diferentes autovalores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, teniendo como resultado el llamado conjunto completo de n autovectores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$:
$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \vdots \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{V}^{(n)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

Luego, sustituyendo estos autovalores y autovectores en (2.10), logramos encontrar el conjunto fundamental de n vectores solución del (SEDL) (2.4).
$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{V}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \vdots \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t},$$
$$..., \mathbf{X}^{(n)}(t) = \mathbf{V}^{(n)}e^{\lambda_n t} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t},$$

Una vez determinado el **conjunto fundamental de vectores solución**, se puede proceder a escribir la solución general del (SEDL) (2.4), como una combinación lineal de los vectores fundamentales.
$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c(t) &= c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t) + ... + c_n\mathbf{X}^{(n)}(t) \\ &= c_1\mathbf{V}^{(1)}(t)e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{V}^{(2)}(t)e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{V}^{(n)}(t)e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \vdots \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + ... + c_n \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}.$$

Finalmente, y si se lo requiere, se puede escribir esta solución general para el (SEDL) de forma explícita, esto es

$$\begin{cases} x_{c_1} = c_1 v_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n v_1^{(n)} e^{\lambda_n t}, \\ x_{c_2} = c_1 v_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n v_2^{(n)} e^{\lambda_n t}, \\ \qquad \vdots \\ x_{c_n} = c_1 v_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v_n^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n v_n^{(n)} e^{\lambda_n t}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Ejemplo 47. Considere el siguiente (SEDL), expresado en forma matricial

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Empezamos escribiendo el sistema de ecuaciones algebraicas para dos componenetes de autovectores V de la matriz de coeficientes,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, escribimos la ecuación característica (o auxiliar) para los autovalores λ de la matriz de coeficientes, es decir

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante tendríamos

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0.$$

Resolviendo,

$$-3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

se tiene los autovalores diferentes,

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

Ahora, empezamos a estudiar ambos casos.

1. Cuando $\lambda_1 = 3$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O de manera equivalente, tenemos su forma explícita

$$\begin{cases} -2v_1^{(1)} + v_2^{(1)} = 0 \\ 4v_1^{(1)} - 2v_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Notamos que las ecuaciones son linealmente dependientes, pues la segunda de ellas se puede obtener, si se multiplica a la primera ecuación por la constante -2, así que para conseguir las componentes $v_1^{(1)}$ y $v_2^{(1)}$ para nuestro primer autovector $\mathbf{V}^{(1)}$ hacemos lo siguiente, tomando la segunda ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 4v_1^{(1)} - 2v_2^{(1)} &= 0 \\ 4v_1^{(1)} &= 2v_2^{(1)} \\ v_1^{(1)} &= \frac{1}{2}v_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Ahora, para hallar valores numéricos, hacemos $v_2^{(1)} = 2$, entonces se obtiene el valor $v_1^{(1)} = 1$, así el primer autovector sería

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Cuando $\lambda_1 = -1$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O de manera equivalente, tenemos su forma explícita

$$\begin{cases} 2v_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 0 \\ 4v_1^{(2)} + 2v_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Nuevamente notamos la dependencia lineal entree stas dos ecuaciones, en especial que la segunda ecuación se obtiene a partir de la primera, multiplicando esta por una constante 2, así que para conseguir las componentes $v_1^{(1)}$ y $v_2^{(1)}$ para nuestro segundo autovector $\mathbf{V}^{(2)}$ hacemos lo siguiente, tomando la primera ecuación se tiene

$$2v_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 0 \quad \text{donde vemos que} \quad v_2^{(2)} = -2v_1^{(2)}$$

Esta vez, damos el valor de $v_1^{(2)} = 1$ entonces obtenemos $v_2^{(2)} = -2$, así formando el vector

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, recordemos el conjunto fundamental de vectores, para este caso serán de dos vectores solución del (SEDL) original, estos son

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{V}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

Por ende, el vector solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c &= c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t), \\ &= c_1\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{V}^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Y la misma solución general del (SEDL) pero expresado de forma explícita es

$$\begin{cases} x_{c1}(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}, \\ x_{c2}(t) = 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t}. \end{cases}$$

Ejemplo 48. Considere el siguiente (SEDL)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X},$$

y encuentre la solución general del sistema dado.

Empezamos escribiendo el sistema de ecuaciones algebraicas para 3 componentes de autovectores v de la matriz de coeficientes, es decir

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, fijamos la matriz característica (o auxiliar),

$$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(2-\lambda)+0+0-(3(-1-\lambda)+(-1-\lambda)) = \lambda^3 -$$

Obteniendo como autovalores $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$. Ahora, estudiamos el caso para cada autovalor de λ.

1. Cuando $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   O de manera explícita

$$\begin{cases} v_1^{(1)} + v_2^{(1)} = 0 \\ v_1^{(1)} + 4v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = 0 \\ 3v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

   Ahora, tomando la primera ecuación se tiene

$$v_1^{(1)} + v_2^{(1)} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)} = -v_2^{(1)}.$$

   y tomando la tercera ecuación,

$$3v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = 0 \Rightarrow v_3^{(1)} = -3v_2^{(1)}.$$

   Con lo cual, si hacemos $v_2^{(1)} = 1$ entonces $v_1^{(1)} = -1$ y $v_3^{(1)} = -3$ y así se obtiene el primer autovector $\mathbf{V}$, esto es

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Cuando $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   De manera explícita se tiene

$$\begin{cases} v_2^{(2)} = 0 \\ v_1^{(2)} + 3v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = 0 \\ 3v_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

   Tomando la primera ecuación se concluye que $v_2^{(2)} = 0$, así tomando la segunda ecuación

$$v_1^{(2)} = -v_3^{(2)}.$$

   Ahora, si hacemos $v_3^{(2)} = 1$, entonces $v_1^{(2)} = -1$ y se tiene

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Cuando $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que de manera explícita se tiene

$$\begin{cases} -4v_1^{(3)} + v_2^{(3)} = 0 \\ v_1^{(3)} - v_2^{(3)} + v_3^{(3)} = 0 \\ 3v_2^{(3)} - 4v_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

Tomando la primera ecuación se tiene

$$v_2^{(3)} = 4v_1^{(3)}$$

y tomando la segunda ecuación se tiene

$$v_1^{(3)} - 4v_1^{(3)} + v_3^{(3)} = 0 \Rightarrow v_3^{(3)} = 3v_1^{(3)}$$

Así, si hacemos $v_1^{(2)} = 1$, entonces $v_2^{(3)} = 4$ y $v_3^{(3)} = 3$, así tenemos el tercer autovector

$$\mathbf{V}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, recordando el conjunto fundamental de vectores para este caso serán tres vectores solución del (SEDL) original, estos son

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{V}^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{V}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(t) = \mathbf{V}^{(3)} e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Por tanto, el vector solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c &= c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t) + c_3\mathbf{X}^{(3)}(t), \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}. \end{aligned}$$

O de manera explícita se tendría

$$\begin{cases} x_{c1} = -c_1e^{-2t} - c_2e^{-t} + c_3e3t \\ x_{c2} = c_1e^{-2t} + 4c_3e^{3t} \\ x_{c3} = -3c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + 3c_3e^{3t} \end{cases}$$

3. Autovalores complejos y diferentes

Como en el caso anterior, consideraremos que

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n.$$

Es decir, los n autovalores de la matriz de coeficientes **A**, serán distintos entre sí.

Esta vez, consideraremos el caso en el que algunos autovalores serán complejos, pero, dado que todos los elementos de la matriz de coeficientes **A** son reales, por ende todos los coeficientes de la ecuación característica (2.12) también son números reales, lo cual significa que los números complejos solamente ocurren en pares conjugados, es decir que dado un autovalor λ_1, debe haber otro autovalor λ_2 el cual es el conjugado del primero.

Para ver este hecho, consideremos la representación simbólica (2.15), así si tenemos que λ_1 es raíz de la ecuación característica, entonces la ecuación se transforma en la identidad por sustitución de λ por λ_1, esto es

$$det(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \equiv 0$$

Eseguida notamos que la matriz **A** y **I** son de valores reales, por lo que sus conjugadas serán $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, y $\mathbf{I}^* = \mathbf{I}$, así se obtiene

$$det(\mathbf{A} - \lambda_1^*\mathbf{I}) \equiv 0.$$

Con lo que notamos que el conjugado complejo $\lambda_1^* = \lambda_2$ también satisface la ecuación característica (2.12).

Ahora, veamos los autovectores asociados a $\lambda_1^* = \lambda_2$, estos son $\mathbf{V}^1$ y $\mathbf{V}^{(2)}$, también son conjugados complejos, es decir

$$\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)*}$$

Para estudiar este hecho, consideremos la representación simbólica de (2.14), ya que el autovector $\mathbf{V}^{(1)}$ satisface el sistema, entonces este se transforma en una identidad al sustituir λ_1 por λ y $\mathbf{V}^{(1)}$ por **V**

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{V}^{(1)} \equiv 0.$$

Esta es una identidad y al tomar su conjugado, se obtiene otra identidad, esta es

$$(\mathbf{A} - \lambda_1^* \mathbf{I})\mathbf{V}^{(1)*} \equiv 0.$$

De esta identidad, así como $\mathbf{V}^{(1)}$ satisface la ecuación (2.13), su conjugado $\mathbf{V}^{(1)*}$ también satisface al sistema de ecuaciones algebraicas para los vectores $\mathbf{V}$ cuando el parámetro λ es igual al autovalor $\lambda_2 = \lambda_1^*$.

En otras palabras, si $\mathbf{V}^{(1)}$ es un autovector con autovalor λ_1, entonces su conjugado complejo $\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)*}$ también es considerado un autovector asociado a un autovalor λ_2 el cual es un conjugado del anterior, $\lambda_2 = \lambda_1^*$.

Para estudiar el proceso para encontrar y obtener un **conjunto fundamental de** n **vectores solución** $\mathbf{X}^{(1)}(t), \mathbf{X}^{(2)}(t), ..., \mathbf{X}^{(n)}(t)$ y construir un vector que sea la solución general de un (SEDL), cuando algunos de los autovalores son complejos y diferentes, para ello consideraremos la idea de solamente obtener un par de autovalores complejos diferentes, los cuales tendrán de forma

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - i\beta.$$

Los demás autovalores λ_i con $i = 3, ..., n$ serán reales y diferentes.

Para obtener el conjunto fundamental de los vectores y la solución general, se deberá seguir los siguientes pasos.

1. Primero empezamos haciendo lo mismo que en el caso anterior de valores reales y diferentes, esto es resolver la ecuación característica (2.12) y obtenemos todos los n autovalores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\quad \lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - i\beta$. El resto de autovalores $\lambda_3, ..., \lambda_n$ son reales y diferentes.

2. Luego, en el sistema de ecuaciones algebraicas (2.13) se sustituye cada autovalor y en cada ocasión se resuelve el sistema, lo cual nos genera un conjunto de n autovectores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)*} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)*} \\ v_2^{(1)*} \\ \vdots \\ v_n^{(1)*} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(3)} = \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ \vdots \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix}, ..., \mathbf{V}^{(n)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

3. Como tercero se tiene que sustituir los n autovectores y los n autovalores, en la ecuación (2.10) y se tiene

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t},\ \mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{V}(2)e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)*} \\ v_2^{(1)*} \\ \vdots \\ v_n^{(1)*} \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t},$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(t) = \mathbf{V}^{(3)}e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ \vdots \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix}, ..., \mathbf{X}^{(n)}(t) = \mathbf{V}^{(n)}e^{\lambda_n t} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$$

4. Como cuarto punto se tiene que determinar el conjunto solución general del (SEDL), para ello remplazamos los vectores solución en el sistema (2.4) como una combinación lineal de los vectores.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c(t) &= c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t) + c_3\mathbf{X}^{(3)}(t) + ... + c_n\mathbf{X}^{(n)}(t). \\ &= c_1\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{V}^{(1)*}e^{\lambda_1 t}(t) + c_3\mathbf{V}^{(3)}e^{\lambda_3 t} + ... + c_n\mathbf{V}^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ &= c_1\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2\begin{pmatrix} v_1^{(1)*} \\ v_2^{(1)*} \\ \vdots \\ v_n^{(1)*} \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} + c_3\begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ \vdots \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix} + ... + c_n\begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ahora reescribiendo la solución general del sistema en forma explícita, se tiene

$$\begin{cases} x_{c1}(t) = c_1v_1^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2v_1^{(1)*}e^{(\alpha-i\beta)} + c_3v_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + ... + c_nv_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ x_{c2}(t) = c_1v_2^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2v_2^{(1)*}e^{(\alpha-i\beta)} + c_3v_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + ... + c_nv_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \\ x_{cn}(t) = c_1v_n^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2v_n^{(1)*}e^{(\alpha-i\beta)} + c_3v_n^{(3)}e^{\lambda_3 t} + ... + c_nv_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{cases} \tag{2.18}$$

5. Ahora, de acuerdo a la representación los dos primeros vectores, $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ son dos valores complejos ya que corresponden a los autovalores complejos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - i\beta$. De tal manera que tanto (2.17) como (2.18) también se escribe en valores complejos, sin embargo, se puede escribir tanto el conjunto fundamental como la **solución general del (SEDL) en forma de valores reales**, es por eso que en lugar de vectores complejos y conjugados se debe tomar otros dos vectores que representan

la parte real ($\Re$) y la parte imaginaria ($\Im$) de cualquier vector , así es que se obtiene la forma siguiente

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \Re\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \Re\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t}, \ \mathbf{X}^{(2)}(t) = \Im\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \Im\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t},$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(t) = \mathbf{V}^{(3)}e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ \vdots \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix} e^{\lambda_3 t}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}(t) = \mathbf{V}^{n}e^{\lambda_n t} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \tag{2.19}$$

Como una aclaratoria se sigue que la notación $\Re z$ y $\Im z$ representan la parte real e imaginaria del número z respectivamente hablando, es decir, si tenemos $z = \alpha + i\beta$, entonces $\Re[z] = \alpha$ y $\Im[z] = \beta$

De acuerdo con (2.19) se puede expresar el vector solución general como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c(t) &= c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t) + c_3\mathbf{X}^{(3)}(t) + \ldots + c_n\mathbf{X}^{(n)}(t) \\ &= c_1\Re\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\Im\mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_3\mathbf{V}^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \ldots + c_n\mathbf{V}^{(n)}e^{\lambda_n t} \qquad (2.20) \\ &= c_1\Re\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2\Im\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} + c_3\begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ \vdots \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix} e^{\lambda_3 t} + \qquad (2.21) \\ &\quad + \ldots + c_n\begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Ahora, escribimos la solución general del (SEDL) (2.4) de manera explícita, esto es

$$\begin{cases} x_{c1}(t) = c_1\Re v_1^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2\Im v_1^{(1)}e^{(\alpha-i\beta)t} + c_3v_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \ldots + c_nv_1^{(n)}e^{\lambda_n t}, \\ x_{c1}(t) = c_1\Re v_2^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2\Im v_2^{(1)}e^{(\alpha-i\beta)t} + c_3v_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \ldots + c_nv_2^{(n)}e^{\lambda_n t}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_{c1}(t) = c_1\Re v_n^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)} + c_2\Im v_n^{(1)}e^{(\alpha-i\beta)t} + c_3v_n^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \ldots + c_nv_n^{(n)}e^{\lambda_n t}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Es conveniente y de sencilla facilidad, escribir (2.22) en términos de funciones reales, y para ello emplearemos primero la fórmula de *Euler*, es decir

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(cos\beta + isen\beta)$$

Lo cual corresponde al siguiente teorema

Teorema 2.6 (Soluciones reales correspondientes a un valor propio complejo)**.** *Sea* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *un valor propio complejo de la matriz de coeficientes* $\boldsymbol{A}$ *en el (SEDL) (referencia), y* $\boldsymbol{V}^{(1)}$ *y* $\boldsymbol{V}^{(2)}$ *denotan lo vectores columna definidos en (referencia2). Entonces*

$$\boldsymbol{X}_1^{(1)} = \left[\boldsymbol{X}^{(1)}cos\beta t - \boldsymbol{X}^{(2)}sen\beta t\right] e^{\alpha t}$$

$$\boldsymbol{X}_2^{(2)} = \left[\boldsymbol{X}^{(2)}cos\beta t + \boldsymbol{X}^{(1)}sen\beta t\right] e^{\alpha t}.$$

son soluciones linealmente independientes del (SEDL) en $(-\infty, +\infty)$.

Donde las matrices $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ generalmente se expresan como

$$\mathbf{X}^{(1)} = \Re(\mathbf{V}^{(1)}) \quad \text{y} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \Im(\mathbf{V}^{(2)}).$$

Ejemplo 49. Considere el siguiente (SEDL) homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Ahora escribimos el sistema de ecuaciones algebraicas para dos componentes de autovectores $\mathbf{v}$.

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se escribe la ecuación característica para los autovalores λ de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(2-\lambda) - (-5) = 0.$$

$$\Rightarrow -4 \cancel{+2\lambda} \cancel{-2\lambda} + \lambda^2 + 5 = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i$$

Así

$$\lambda_1 = 0 + i \ \text{ y } \ \lambda_2 = 0 - i.$$

Los cuales son autovalores complejos y conjugados.

Ahora, se sustituye el primer autovalor $\lambda_1 = 0 + i$ en el sistema de ecuaciones algebraicas para los autovectorres $\mathbf{V}$ de la matriz de coeficientes, esto es

$$\begin{pmatrix} -2-i & -5 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene su forma explícita

$$\begin{cases} (-2-i)v_1 - 5v_2 = 0 \\ v_1 + (2-i)v_2 = 0 \end{cases}$$

Considerando la segunda ecuación del sistema hacemos

$$\begin{aligned} v_1 + (2-i)v_2 &= 0 \quad \text{con} \quad v_2 = 1 \\ \Rightarrow v_1 = -(2-i). \end{aligned}$$

Así formamos el primer autovector $\mathbf{V}^{(1)}$

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} -(2-i) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este punto deberíamos realizar el mismo procedimiento para hallar $\mathbf{V}^{(2)}$ tomando en cuenta el λ_2, pero, dado que este es el complejo conjugado de λ_1, por definición el $\mathbf{V}^{(2)}$ debería ser el complejo conjugado de $\mathbf{V}^{(1)}$, entonces podemos decir que

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el conjunto fundamental de los dos vectores solución en valores reales del sistema original es

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \Re \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(it)} = \begin{pmatrix} \Re(-2+i)e^{(it)} \\ \Re e^{(it)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(t) = \Im \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(it)} = \begin{pmatrix} \Im(-2+i)e^{(it)} \\ \Im e^{(it)} \end{pmatrix},$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula de *Euler* es decir

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + iseny) = e^x cosy + ie^x seny.$$

Entonces desarrollando las expresiones obtenidas, para la primera componente se tiene

$$\begin{aligned}
(-2+i)e^{it} &= (-2+i)(e^{0}(cost+isent)) \\
&= -2cost-2isent+icost-sent \\
&= -2cost-sent+i(cost-2sent) \\
\Rightarrow \Re\left((-2+i)e^{it}\right) &= -(2cost+sent) \\
\Im\left((-2+i)e^{it}\right) &= cost-2sent.
\end{aligned}$$

Ahora para la segunda componente se tiene

$$\begin{aligned}
e^{it} &= e^{0}(cost+isent) \\
\Rightarrow \Re(e^{it}) &= cost \\
\Im(e^{it}) &= sent.
\end{aligned}$$

Ahora formando los vectores en valores reales se tiene

$$\mathbf{X}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} -(2cost+sent) \\ cost \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} cost-2sent \\ sent \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el vector solución general en valores reales está expresado como

$$\mathbf{X}_c=c_1\begin{pmatrix} -(2cost+sent) \\ cost \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} cost-2sent \\ sent \end{pmatrix}.$$

Y en su forma explícita

$$\begin{cases} x_{c1}=-c_1(2cost+sent)+c_2(cost-2sent) \\ x_{c2}=c_1cost+c_2sent. \end{cases}$$

4. Autovalores repetidos

Ahora consideremos el caso en el que algunos n autovalores $\lambda_1=\lambda_2,...,\lambda_n$ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, es decir algunas de las n raíces de la ecuación característica, se repiten.

Supongamos que existe un autovalor, por ejemplo $\lambda=\lambda_1$ se repite m veces, es decir que su multiplicidad es m y todos los demás $n-m$ autovalores son diferentes, esto es

$$\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m, \quad \lambda_{m+1}\neq\lambda_{m+2}\neq...\neq\lambda_n.$$

Para obtener el **vector solución general** considerando la existencia de autovalores repetidos y como en los casos de autovalores reales o complejos distintos, se puede escribir a la solución general de (SEDL) como una combinación lineal de los vectores fundamentales, esto es

$$\mathbf{X}_c(t) = c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + ... + c_m\mathbf{X}^m(t) + c_{m+1}\mathbf{X}^{(m+1)}(t) + ... + c_n\mathbf{X}^{(n)}(t). \tag{2.23}$$

Ahora consideremos el caso en el que tenemos **vectores solución fundamentales de autovalores no repetidos**, esto es que los $n-m$ vectores solución que corresponden a los $n-m$ autovalores diferentes se encuentran en la misma forma que en los casos anteriores, es decir

$$\mathbf{X}^{(m+1)} = \mathbf{V}^{(m+1)}e^{\lambda_{m+1}t}, ..., \mathbf{X}^{(n)}(t) = \mathbf{V}^{(n)}e^{\lambda_n t}.$$

Para obtener los $n-m$ autovectores $\mathbf{V}^{(m+1)}, ..., \mathbf{V}^{(n)}$ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ que corresponden a los autovalores $\lambda_{m+1}, ..., \lambda_n$ respectivamente hablando, se calculan tal cual hablamos en los casos anteriores, es decir, del sistema de n ecuaciones algebraicas al sustituir sucesivamente cada autovalor y luego resolver cada vez dicho sistema.

Ahora para determinar los **vectores solución fundamentales de autovalores repetidos** y para obtener los m vectores solución que corresponden a un único autovalor λ_1, para ellos se deben considerar dos situaciones:

a. Para algunas matrices de coeficientes $\mathbf{A}$ existe la posibilidad de encontrar los m vectores solución linealmente independientes cuya correspondencia es a un solo autovalor λ_1, en otras palabras, lo que pasa es que luego de sustituir este autovalor repetido en el sistema de n ecuaciones algebraicas, se obtiene como resultado un sistema de ecuaciones, el cual nos da m autovectores diferentes y linealmente independientes $\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, ..., \mathbf{V}^{(m)}$, y por correspondencia a los m vectores solución de la forma

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{V}^{(2)}e^{\lambda_1 t}, ..., \mathbf{X}^{(m)} = \mathbf{V}^{(m)}e^{\lambda_1 t}$$

b. Ahora supongamos que únicamente existe un autovector $\mathbf{V}^{(1)}$ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ asociado a un autovalor repetido λ_1 con m de multiplicidad, en tal caso se procede a construir los m vectores solución siguiendo el proceso descrito a continuación

   i. El primer vector solución encontrado tiene la forma que habíamos visto anteriormente

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda_1 t},$$

este autovector, con λ_1 su autovalor asociado, es la solución del sistema de n ecuaciones algebraicas tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 0.$$

ii. Luego escribimos el segundo vector solución como

$$\mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{V}^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{V}^{(2)} e^{\lambda_1 t}$$

Notemos que el vector $\mathbf{V}^{(2)}$ debe obtenerse a partir del sistema no homogéneo que contiene su parte derecha el primer vector conocido $\mathbf{V}^{(1)}$, es decir

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)}.$$

iii. Ahora, para el caso del tercer vector $\mathbf{V}^{(3)}(t)$, escribimos

$$\mathbf{X}^{(3)}(t) = \mathbf{V}^{(1)} \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{V}^{(2)} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{V}^{(3)} e^{\lambda_1 t}.$$

Notemos que el tercer vector $\mathbf{V}^{(3)}$ debe obtenerse a partir del sistema no homogéneo que contiene su parte derecha el vector conocido $\mathbf{V}^{(2)}$, esto es

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{V}^{(3)} = \mathbf{V}^{(2)}.$$

De forma similar se presentan los sucesivos vectores solución fundamentales que corresponden al autovalor λ_1 con m de multiplicidad, siguiendo el procedimiento, se procederá a encontrar el nuevo vector $\mathbf{V}^{(p)}$ el cual satisface el sistema no homogeéneo que contiene su parte derecha el vector anterior conocido $\mathbf{V}^{(p-1)}$.

iv. La forma general para el m-ésimo vector solución $\mathbf{V}^{(m)}(t)$ es

$$\mathbf{X}^{(m)}(t) = \mathbf{V}^{(1)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{V}^{(2)} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + ... + \mathbf{V}^{(m)} e^{\lambda_1 t}.$$

De esta forma se obtienen los $m-1$ vectores, de tal forma que el último vector $\mathbf{V}^{(m)}$ satisface el sistema no homogéneo ubicado en la parte derecha del anterior vector conocido, en este caso de $\mathbf{V}^{(m-1)}$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{V}^{(m)} = \mathbf{V}^{(m-1).}$$

Este es el procedimiento que se debe seguir para encontrar el conjunto de todos los n vectores solución del (SEDL), luego sustituyéndolos en la expresión (2.23) se llega a la solución general del (SEDL) cuando un autovalor de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es repetido.

Ejemplo 50. Consideremos el sistema 3×3,

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Escribimos el sistema respectivo de ecuaciones algebraicas para tres componentes del autovector $\mathbf{V}$ de la matriz de coeficientes siguiente

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, escribimos la ecuación característica para encontrar los valores de λ de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando el valor de λ obtenemos que

$$\begin{aligned} (3-\lambda)^3 &= 0 \\ 3-\lambda &= 0 \\ \lambda_{1,2,3} &= 3. \end{aligned}$$

Sustituimos este triple autovalor λ y se tiene

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos lo sieguiente

$$\begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones, entonces tenemos $v_2 = v_3 = 0$, pero no tenemos una ecuación para v_1, así hacemos $v_1 = 1$ y tenemos el primer autovector correspondiente al autovalor triple repetido $\lambda = 3$ de la forma

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, nos resta construir dos vectores más para tener el conjunto completo de vectores solución fundamentales, es decir, buscamos $\mathbf{V}^{(2)}$ y $\mathbf{V}^{(3)}$, empecemos por obtener el vector $\mathbf{V}^{(2)}$, este se determina a partir de

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{V}^{(2)} &= \mathbf{V}^{(1)}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De forma explícita se tiene

$$\begin{cases} v_2+v_3=1\\ v_3=0\end{cases}$$

De esto, obtenemos las ecuaciones $v_3=0$ y $v_2=1$, y por simplicidad tomamos $v_1=1$, entonces tenemos el segundo autovector, esto es

$$\mathbf{V}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Ahora, nuevamente hacemos el proceso anterior pero para obtener el vector $\mathbf{V}^{(3)}$, esto es

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{V}^{(3)} &= \mathbf{V}^{(2)}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De lo anterior, se obtiene las ecuaciones $v_2+v_3=1$ y $v_3=1$ por tanto $v_2=0$, y por simplicidad nuevamente tomamos $v_1=1$ así construimos el último autovector necesario

$$\mathbf{V}^{(3)}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ahora, una vez contamos con los tres vectores solución, podemos construir el conjunto fundamental de tres vectores soluición del (SEDL), entonces tenemos

$$\mathbf{X}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{3t},\quad \mathbf{X}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}te^{3t}+\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{3t},$$

$$\mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^{(3-1)}}{(3-1)!} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^{3-2}}{(3-2)!} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Es así que el vector solución general es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_c(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} \right] + \\ + c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \right], \end{aligned}$$

y de forma explícita tenemos la solución

$$\begin{cases} x_{c1}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + c_2 e^{3t} + \frac{t^2}{2} c_3 e^{3t} + c_3 te^{3t} + c_3 e^{3t} \\ x_{c2}(t) = 0 + 0 + c_2 e^{3t} + 0 + c_3 te^{3t} + 0 \\ x_{c3}(t) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + c_3 e^{3t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{c1}(t) = e^{3t} \left(c_1 + c_2 t + c_2 + \frac{t^2}{2} c_3 + 2c_3 \right) \\ x_{c2}(t) = e^{3t} \left(c_2 + tc_3 \right) \\ x_{c3}(t) = c_3 e^{3t} \end{cases}$$

2.2.4 Método por variación de parámetros

El sistema de variación de parámetros no solo se utiliza para coeficientes constantes, también funciona para las funciones que involucren la variable independiente t.

Primeramente, cabe mencionar que este método de resolución está fuertemente diseñado para la resolución de (SEDL) no homogéneos y para la aplicación de este sistema es necesario resolver el sistema homogéneo correspondiente. Asumimos un conjunto fundamental de n vectores solución $\mathbf{X}^{(i)}(t)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ conocido y la solución general $\mathbf{X}_h(t)$, del sistema homogéneo correspondiente.

Entonces su solución general en el intervalo es la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}^{(1)} + \ldots + c_n \mathbf{X}^{(n)},$$

o bien de forma matricial

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + ... + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + ... + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + ... + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + ... + c_nx_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Ahora, la matriz (2.24) se puede escribir como

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es el vector columna $n \times 1$ de constantes arbitrarias $c_1, c_2, ..., c_n$ y la matriz $\Phi(t)$ la cual se denomina **matriz fundamental** y que consiste en los elementos de los vectores solución del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ asociado al sistema no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$. De forma más detallada tendríamos que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para posteriores estudios que involucren a la matriz fundamental, se debe considerar

- La matriz fundamental $\Phi(t)$ es no singular, es decir $det(\Phi(t)) \neq 0$.

- Dado el (SEDL) $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, con $\Phi(t)$ su matriz fundamental, entonces

$$\Phi'(t) = \mathbf{A}\Phi(t). \quad (2.25)$$

  Siendo $\Phi'(t)$ la inversa de la matriz fundamental $\Phi(t)$.

- Las columnas de $\Phi'(t)$ son linealmente independientes, pues cada vector, es solución del (SEDL) $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

- La independencia lineal de las columnas de $\Phi'(t)$ en un intervalo $\mathbf{I}$ garantizan que $\Phi'(t) \neq 0$, para toda t en el intervalo.

- Dado que la matriz $\Phi(t)$ es no singular, entonces $\Phi'(t)$ existe para toda t incluida en el intervalo.

Ahora, con respecto al *método de variación de parámetros*, consideremos

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t), \tag{2.26}$$

es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(t). \tag{2.27}$$

De acuerdo a la regla del producto, si calculamos la derivada

$$\mathbf{X}_p' = \Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \Phi'(t)\mathbf{U}(t). \tag{2.28}$$

Ahora, al sustituir, (2.26) y (2.28) en (2.27) se tiene

$$\Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \Phi'(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{2.29}$$

Teniendo en cuenta (2.25) para sustituir $\Phi'(t)$, entonces (2.29) ahora es

$$\Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t).$$

o bien, de la forma

$$\Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t). \tag{2.30}$$

Ahora, cuando ambos lados de la ecuación (2.30) se multiplican por la matriz inversa $\Phi'(t)$ se tiene

$$\mathbf{U}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{F}(t),$$

y por tanto

$$\mathbf{U}(t) = \int \Phi'(t)\mathbf{F}(t)dt.$$

Y recordando que $\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$, se concluye que una solución particular de (2.27) es

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t) \int \Phi'(t)\mathbf{F}(t)dt. \tag{2.31}$$

Cabe mencionar lo siguiente:

- Para calcular la integral indefinida de la matriz columna $\Phi'(t)\mathbf{F}(t)$, se integra cada elemento de dicha matriz.

- La solución general del (SEDL) (2.27) es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$.

- El item anterior se puede expresar como

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi'(t)\mathbf{F}(t)dt.$$

Ejemplo 51. Considere el siguiente (SEDL) no homogéneo

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2},$$

y resuelva empleando el *método de variación de parámetros*.

Dado que es un (SEDL) no homogéneo, primero se empieza resolviendo su (SEDL) homogéneo asociado, este es

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ \frac{3}{4} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + \frac{15}{4}.$$

Y se tiene la ecuación de segundo grado

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}.$$

Luego, resolviendo tenemos que los autovalores son $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Calculemos ahora los autovectores asociados.

- Cuando $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -5 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O de manera explícita

$$\begin{cases} \frac{3}{2}v_1^{(1)} - 5v_2^{(1)} = 0 \\ \frac{3}{4}v_1^{(1)} - \frac{5}{2}v_2^{(1)} = 0 \end{cases},$$

de donde se ve que la segunda ecuación es múltiplo de la primera, por lo tanto si tomamos la primera ecuación, tenemos

$$\frac{3}{2}v_1^{(1)} = 5v_2^{(1)} \Rightarrow v_1^{(1)} = \frac{10}{3}v_2^{(1)}.$$

Entonces, si hacemos $v_2^{(1)} = 3$, entonces $v_1^{(1)} = 10$, así

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Cuando $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -5 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}..$$

O de manera explícita

$$\begin{cases} \frac{5}{2}v_1^{(1)} - 5v_2^{(1)} = 0 \\ \frac{3}{4}v_1^{(1)} - \frac{3}{2}v_2^{(1)} = 0 \end{cases}.$$

De igual forma la segunda ecuación es múltiplo de la segunda, luego si tomamos la primera ecuación

$$\frac{5}{2}v_1^{(1)} = 5v_2^{(1)} \Rightarrow v_1^{(1)} = 2v_2^{(1)}.$$

Ahora, si hacemos $v_2^{(1)} = 1$, entonces $v_1^{(1)} = 2$ y así

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, armando el vector solución se tiene

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t/2}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{V}^{(2)}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2}$$

y

$$\mathbf{X}_c = c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2}.$$

El vector $\mathbf{X}_c$ corresponde a la solución asociada al (SEDL) homogéneo.

Ahora, se procede a calcular la solución particular $\mathbf{X}_p$.

Así, considerando los vectores solucón del (SEDL) homogéneo, se tiene

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t/2} = \begin{pmatrix} 10e^{3t/2} \\ 3e^{3t/2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2} = \begin{pmatrix} 2e^{t/2} \\ e^{t/2} \end{pmatrix}.$$

Luego, para armar la matriz fundamental $\Phi(t)$, para la primera columna, se toman los elementos del vector $\mathbf{X}^{(1)}$ y para la segunda columna, se toman los elementos del vector $\mathbf{V}^{(2)}$, así

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 10e^{3t/2} & 2e^{t/2} \\ 3e^{3t/2} & e^{t/2} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que para calcular la solución particular $\mathbf{X}_p$ hace falta tener la matriz fundamental, su determinante y su inversa, por ello ahora, para matrices 2×2, se tiene

$$\Phi'(t) = \frac{1}{det(\Phi(t))} \begin{pmatrix} e^{t/2} & -2e^{t/2} \\ -3e^{3t/2} & 10e^{3t/2} \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$det(\Phi(t)) = 10e^{3t/2}e^{t/2} - 3e^{3t/2}(2e^{t/2}) = 4e^{2t}.$$

Luego, se calcula la inversa

$$\Phi'(t) = \frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{t/2} & -2e^{t/2} \\ -3e^{3t/2} & 10e^{3t/2} \end{pmatrix}.$$

$$\Phi'(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3t/2} & -2e^{-3t/2} \\ -3e^{-t/2} & 10e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

A partir de la expresión (2.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_p = \Phi(t) \int \Phi'(t)\mathbf{F}(t)dt &= \begin{pmatrix} 10e^{3t/2} & 2e^{t/2} \\ 3e^{3t/2} & e^{t/2} \end{pmatrix} \int \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3t/2} & -2e^{-3t/2} \\ -3e^{-t/2} & 10e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} \\ -e^{t/2} \end{pmatrix} dt. \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10e^{3t/2} & 2e^{t/2} \\ 3e^{3t/2} & e^{t/2} \end{pmatrix} \int \left[\begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ -13 \end{pmatrix} \right] dt, \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10e^{3t/2} & 2e^{t/2} \\ 3e^{3t/2} & e^{t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ -13t \end{pmatrix}. \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -30e^{t/2} - 26te^{t/2} \\ -9e^{t/2} - 13te^{t/2} \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} - \frac{13t}{2} \\ -\frac{9}{4} - \frac{13t}{4} \end{pmatrix} e^{t/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, la solución del (SEDL) es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} - \frac{13t}{2} \\ -\frac{9}{4} - \frac{13t}{4} \end{pmatrix} e^{t/2}.$$

2.2.5 La transformada de Laplace

Es un método util para la resolución de sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, bajo ciertas condiciones iniciales, en otras palabras, el problema se convierte en un sistema de ecuaciones algebrácias lineales para aplicar su transformadas de las funciones incógnitas.

Definición 2.10 (Transformada de Laplace)**.** Sea f una función continua por tramos, para $t \geq 0$, tenemos $f(t)$, donde

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-st} f(t)\, dt$$

Teorema 2.7 (Unicidad de la transformada de Laplace)**.** *Sea f, g funciones admisibles y $F(s) = G(s)$, para todo s, tenemos $f(t) = g(t)$, donde son continuas. En otras palabras, si f y g son continuas para $t \geq 0$, implica $f = g$.*

Propiedades

- **Linealidad:** Sea $\mathscr{L}$ se denomina operador lineal, si f, g funciones, implica $\alpha f(t) + \beta g(t)$ es admisible, entonces

$$\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathscr{L}(f(t)) + \beta \mathscr{L}(g(t)).$$

- **Derivación:** Sea f una función derivable tal que f' es admisible, implica que

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0) \equiv sF(s) - f(0)$$

  En general, para la derivada de orden n y $f^{(n)}(t)$ es admisible, entonces

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathscr{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Transformada de Laplace de funciones elementales.

1. $f(t) = 1$

$$\mathscr{L}(1) := \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} = \frac{1}{s}$$

2. $f(t) = t^n$. Para $n = 1$

$$\mathscr{L}(t) := \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \frac{1}{s^2}$$

Para $n = 2$, tenemos

$$\mathscr{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

Por inducción, se concluye

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. $f(t) = t^n e^{at}$, donde

$$\mathscr{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n-1}}$$

4. $f(t) = e^{at}$, tal que

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

5. $f(t) = \operatorname{sen} bt$, tal que

$$\mathscr{L}(\operatorname{sen} bt) = \frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{con} \quad s > 0$$

6. $f(t) = \cos bt$, donde

$$\mathscr{L}(\cos bt) = \frac{s}{s^2+b^2} \quad \text{con} \quad s > 0$$

7. $f(t) = \cos bt$, $g(t) = \operatorname{sen} bt$, donde

$$\mathscr{L}(\cos\ bt) + i\mathscr{L}(\operatorname{sen}\ bt) = \frac{s+ib}{s^2+b^2}$$

8. $f(t) = e^{at}\cos\ bt, g(t) = e^{at}\operatorname{sen}\ bt$

$$\mathscr{L}(e^{at}\cos\ bt) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$
$$\mathscr{L}(e^{at}\operatorname{sen}\ bt) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

9. $f(t) = t\cos\ bt, g(t) = t\operatorname{sen}\ bt$

$$\mathscr{L}(t\cos\ bt) = \frac{s^2-b^2}{(s+b)^2}$$
$$\mathscr{L}(t\operatorname{sen}\ bt) = \frac{2bs}{(s+b)^2}$$

Transformada inversa de Laplace

Sea la función racional $F(s) = \dfrac{P(S)}{Q(s)}$, donde las funciones P, Q son polinomios con coeficientes reales . Podemos encontrar los siguientes casos

1. Si $\alpha \in \mathbf{R}$ es una raíz del polinomio Q tal que su descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{A_1}{s-\alpha}, \quad \frac{A_2}{(s-\alpha)^2}, \quad \ldots \quad , \quad \frac{A_n}{(s-\alpha)^n}$$

   En general para cada A_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene el resultado

$$\frac{A_n}{(s-\alpha)^n} = \mathscr{L}\left(\frac{A_n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\alpha t}\right)$$

2. Si $\alpha + i\beta$ es una raíz de Q su conjugada también lo es, ambas se pueden expresar con la misma multiplicidad n: Pueden englobarse estos factores a dos raíces en un sólo sumando.

Transformada inversa de Laplace de funciones elementales

1. $F(s) = \dfrac{1}{s}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

2. $F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ con $n = 1, 2, 3, ...$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = t^n$$

3. $F(s) = \dfrac{1}{s-b}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right) = e^{bt}$$

4. $F(s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \operatorname{sen} bt$$

5. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+b^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right) = \cos bt$$

6. $F(s) = \dfrac{b}{s^2 - b^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{b}{s^2 - b^2}\right) = \operatorname{senh} bt$$

7. $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - b^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - b^2}\right) = \cosh bt$$

Pasos para encontrar la solución por la trasformada de Laplace en (SEDL)

1. Aplicamos la transformada de Laplace a cada termino de las ecuaciones del sistema.

$$\mathscr{L}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = a_{11}\mathscr{L}(x_1) + a_{12}\mathscr{L}(x_2) + \cdots + a_{1n}\mathscr{L}(x_n) + \mathscr{L}(f_1(t))$$

$$\mathscr{L}\left(\frac{dx_2}{dt}\right) = a_{21}\mathscr{L}(x_1) + a_{22}\mathscr{L}(x_2) + \cdots + a_{2n}\mathscr{L}(x_n) + \mathscr{L}(f_2(t))$$
$$\vdots$$
$$\mathscr{L}\left(\frac{dx_n}{dt}\right) = a_{n1}\mathscr{L}(x_1) + a_{n2}\mathscr{L}(x_2) + \cdots + a_{nn}\mathscr{L}(x_n) + \mathscr{L}(f_n(t))$$

2. Aplicamos las fórmulas de las derivadas de la transformada y reemplazamos en las ecuaciones del sistema. Aplicamos las propiedades de las transformada de constantes, exponentes, derivada, etc.

3. Realizamos las operaciones algébraicas con las ecuaciones del sistema.

4. Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer. Dependiendo de cada resultado aplicamos los productos notables.

5. Calculamos la inversa de transformada de Laplace y encontramos la solución de cada función incógnita, así encontramos la solución de todo el sistema.

Ejemplo 52. Resolver el siguiente (SEDL) no homogéneo utilizando el *método por la transformada de Laplace.*

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 1 \\ \\ y' = -4x - y + 3e^{2t} \end{cases},$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$.

Siguiendo el proceso descrito anteriormente, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[x'] &= 3\mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y] - \mathscr{L}[1] \\ \mathscr{L}[y'] &= -4\mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[y] + 3\mathscr{L}[e^{2t}] \end{aligned}$$

Recordando la transformada de la derivada se tiene

$$\mathscr{L}[x'] = s\mathbf{X}(s) - x(0) \quad \text{y} \quad \mathscr{L}[y'] = s\mathbf{Y}(s) - y(0).$$

Y llamaremos $\mathscr{L}[x] = X(s)$ y $\mathscr{L}[y] = Y(s)$

Reescribiendo el sistema tendremos

$$\begin{cases} sX(s) - 0 = 3X(s) + Y(s) - \dfrac{1}{s} \\ sY(S) - 1 = -4X(s) - Y(s) + \dfrac{3}{s-2} \end{cases}.$$

Ordenando los términos de las ecuaciones algebraicas tenemos

$$\begin{cases} (s-3)X(s) - Y(s) = -\dfrac{1}{s} \\ 4X(s) + (s+1)Y(s) = \dfrac{s+1}{s-2} \end{cases}.$$

Ahora resolvemos este sistema de ecuaciones algebraico, cabe recalcar que se puede usar cualquier método para resolver este sistema, teniendo como funciones variables a $X(s)$ y a $Y(s)$, mientras que a s como la variable de dichas funciones, entonces empleemos el *método de Cramer* para resolver este sistema, así se tiene que

$$\Delta = \begin{vmatrix} (s-3) & -1 \\ 4 & (s+1) \end{vmatrix} = (s-3)(s+1) + 4 = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2.$$

Ahora nos resta calcular Δ_x y Δ_y, entonces

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{s} & -1 \\ \dfrac{s+1}{s-2} & (s+1) \end{vmatrix} = -\frac{1}{s}(s+1) - (-1)\frac{s+1}{s-2} = \frac{2s+2}{s(s-2)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (s-3) & -\dfrac{1}{s} \\ 4 & \dfrac{s+1}{s-2} \end{vmatrix} = \frac{(s-3)(s+1)}{(s-2)} + \frac{4}{s} = \frac{s^3 - 2s^2 + s - 8}{s(s-2)}$$

Una vez calculados Δ_x y Δ_y, se procede a calcular $X(s)$ y $Y(s)$, utilizando las fórmulas

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{y} \quad Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Empecemos calculando

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\dfrac{2s+2}{s(s-2)}}{(s-1)^2} = \frac{2s+2}{s(s-2)(s-1)^2}.$$

Para poder continuar con este proceso, primero separemos en fracciones parciales, esto es

$$\frac{2s+2}{s(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}$$
$$2s+2 = A(s-2)(s-1) + Bs(s-1)^2 + Cs(s-2)(s-1) + Ds(s-2)$$

Para determinar los valores de A, B, C, D.

- Hacemos $s = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 &= A(0-2)(0-1)^2 + B(0) + C(0) + D(0) \\ A &= -1. \end{aligned}$$

- Hacemos $s = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2+2 &= A(0) + B(0) + C(0) + D(1)(1-2) \\ D &= -4. \end{aligned}$$

- Hacemos $s = 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4+2 &= A(0) + B(2)(2-a)^2 + C(0) + D(0) \\ 6 &= 2B \\ B &= 3. \end{aligned}$$

- Para hallar C, damos un valor arbitrario a s, así hacemos $s = -1$

$$\begin{aligned} 2(-1)+2 &= A(-1-2)(-1-1)^2 + B(-1)(-1-1)^2 + C(-1)(-1-2)(-1-1) + \\ &\quad +D(-1)(-1-2) \\ 0 &= (-1)(-3)(1) + (3)(-1)(1) + C(-1)(-3)(-2) + (-4)(-1)(-3) \\ 6C &= -12 \\ C &= -2. \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-1} - \frac{4}{(s-1)^2}.$$

Ahora, calculamos la inversa, esto es

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}(X(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-1} - \frac{4}{(s-1)^2}\right]$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace, se tiene

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)^2}\right],$$

$$x(t) = -\frac{1}{s} + 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - 4\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right].$$

$$x(t) = -1 + 3e^{2t} - 2e^t - 4te^t.$$

Ahora, para determinar $y(t)$ deberíamos seguir el mismo proceso que seguimos para obtener $x(t)$, sin embargo, en este caso, cabe notar la primera ecuación diferencial del sistema original, la cual es $x' = 3x + y - 1$, vemos que a partir de esta podemos obtener la función $y(t)$, entonces

$$y = x' - 3x + 1.$$

Primero, calculemos $x'(t)$, esto es

$$x'(t) = 6e^{2t} - 2e^t - 4e^t - 4te^t.$$

Luego,

$$y = 6e^{2t} - 2e^t - 4e^t - 4te^t - 3\left[-1 + 3e^{2t} - 2e^t - 4te^t.\right] + 1$$

$$y = 6e^{2t} - 2e^t - 4e^t - 4te4 + 3 - 9e^{2t} + 6e^t + 12te^t + 1$$

$$y(t) = -3e^{2t} + 8te^t + 4.$$

Así el conjunto solución del (SEDL) es

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 3e^{2t} - 2e^t - 4te^t, \\ y(t) = -3e^{2t} + 8te^t + 4. \end{cases}$$

3

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales constituyen un amplio campo de estudio, y su instrucción no solo se centra en carreras como la de matemática pura o similares, sino que esta se extiende a diferentes áreas como ingeniería, química, biología, medicina, contabilidad, economía, etc., lo cual nos da una idea de la vasta aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales, pero es justamente aquí donde se quiere hacer hincapié, pues, ¿le interesa a un químico saber sobre un teorema de existencia y unicidad de una solución de una (ED), o a un economista saber qué sucede con la tesis de un teorema al debilitar una hipotésis? La respuesta puede variar, pero en general sería que no, por lo tanto el interés que se tiene por estudiar estos tópicos surge más bien de ejemplos y aplicaciones de la vida real en el campo de estudio al que pertenezca cada profesional, por ello es que se ha creído conveniente destinar este capítulo al estudio, descripción y análisis de algunas aplicaciones que tienen los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (SEDL), en concreto, hablaremos de tanques interconectados y de circuitos eléctricos, los cuales serían ejemplos de aplicación en las áreas de química y electricidad respectivamente hablando.
Estos ejemplos de aplicación han sido tomados de

- Matemáticas avanzadas para la ingeniería. Zill D. & Cullen, M. (2008)
- Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000)

3.1 Tanques interconectados

En esta sección hablaremos sobre la aplicación de sistemas de ecuaciones diferenciales dentro del estudio de tanques interconectados, donde varía el flujo de contenido de un tanque a otro, conservando el volumen de ambos tanques de manera constante.
Para el estudio de este tópico se cree conveniente introducir algunas definiciones para mayor comprensión.

Definición 3.1 (Tanque interconectado)**.** Un **tanque** es una cuerpo volumétrico que está diseñado para contener algún elemento o alguna sustancia, y los **tanques interconectados** son un sistema de dos o más tanques, conectados entre sí mediante tubos, donde existe un intercambio entre las soluciones líquidas que contienen ambos tanques en un tiempo determinado.

Definición 3.2 (Mezcla)**.** Se llama **mezcla** a la combinación o unión de dos o más elementos o componentes que pueden encontrarse en igual o distinto estado de la materia.

- Una **mezcla fśica** es aquella en la cual no existe unión de los elementos, pero sí proximidad entre ellos, también las mezclas físicas no crean sustancias nuevas.
- Una **mezcla química** son aquellas en las que los componentes reaccionan quiímicamente entre sí, por lo general al mezclarse crean nuevas sustancias.

Definición 3.3 (Solución)**.** Una **solución**, definición en química, es una mezcla de dos sustancias puras que no reaccionan entre sí, también se la define como una mezcla de un soluto en un solvente.

Dentro de esta sección de tanques interconectados, se estudiará el intercambio de soluciones puras o mezcladas, así como su flujo en este sistema de tanques interconectados, para ello, tenemos que considerar algunas nociones básica a tener en cuenta,

$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t),$$

La variación $\frac{dx}{dt}$ corresponde a la **tasa de variación** , de donde $E(t)$ es tasa de entrada y la expresión $S(t)$ como tasa de salida.

A la **tasa de entrada** se la puede calcular como el producto entre la concentración de sal en el tanque y la velocidad de entrada del líquido.

A la **tasa de salida** se la puede calcular como el producto entre la concentración de sal en el tanque y la velocidad de salida del líquido.

3.1.1 Problema de aplicación

Dos grandes tanques, cada uno con 100 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido fluye del tanque A al tanque B a razón de 3 litros/minuto y de B al A a razón de 1 litro/minuto (véase el *Gráfico 3.1.*). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Una solución salina con una concentración de 0.2 kg/litro de sal fluye hacia el tanque A a razón de 6 litros/minuto. La solución (diluida) sale del sistema del tanque A a 4 litros/minuto y del tanque B a 2 litros/minuto. Si en un principio, el tanque A contiene agua pura y el tanque B contiene 20 kg de sal, determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$.

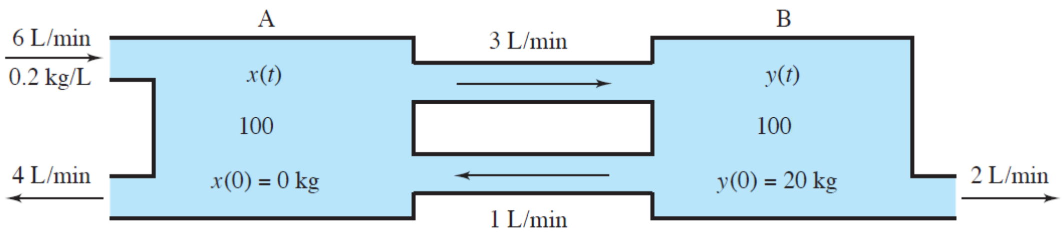


Gráfico 3.1: Tanques interconectados.
FUENTE: Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000)

3.1.2 Planteamiento del problema

Para plantear el problema, primero analizemos las variables a tener en cuenta, estas son:
$x(t)$: La masa de sal (en kg) en el tanque A.
$y(t)$: La masa de sal (en kg) en el tanque B.
t : El tiempo
También, el problema de aplicación dice *"Si en un principio... "* lo cual nos hace alusión a condiciones iniciales en ambos tanques, entonces

$$x(0) = 0kg \quad \text{y} \quad y(0) = 20kg.$$

V : El volumen en L (litros) de los tanques, en este caso, el volumen de ambos es de $100L$.
c : Concentración de sal en la solución, está determinada por

$$\frac{\textit{masa de sal}}{V},$$

en este ejemplo, la *masa de sal* puede ser $x(t)$ o $y(t)$ y $V = 100L$.

Además, recordemos que

$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t),$$

La variación $\frac{dx}{dt}$ corresponde a la tasa de variación , de donde $E(t)$ es tasa de entrada y la expresión $S(t)$ como tasa de salida.

Ahora, consideremos lo siguiente para el caso del **tanque A.**

- Ingresan $6L/min$ de solución, con una concentración de $\frac{0,2kg}{100L}$.
- Salen $4L/min$ de solución con una concentración de $\frac{x(t)kg}{100L}$.
- Salen $3L/min$ de solución desde el tanque A hacia el tanque B, con una concentración de $\frac{x(t)kg}{100L}$.
- Ingresan $1L/min$ de solución desde el tanque B hacia el tanque A, con una concentración de $\frac{y(t)kg}{100L}$, donde $y(t)$ corresponde a la masa de sal en el tanque B.

Ahora, para el caso del **tanque B.**

- Desde el tanque A ingresan $3L/min$ de solución con una concentración de $\frac{x(t)kg}{100L}$.
- Salen $1L/min$ de solución desde B hacia A, con una concentración de $\frac{y(t)kg}{100L}$.
- Salen $2L/min$ de solución con una concentración de $\frac{y(t)kg}{100L}$.

Una vez que consideramos todas las variaciones de solución en ambos tanques, armamos las (ED) para cada tanque, entonces

- **Para el tanque A**

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= E(t) - S(t), \\
&= \left[6\frac{L}{min}\left(0,2\frac{kg}{L}\right) + 1\frac{L}{min}\left(\frac{y(t)kg}{100L}\right)\right] - \left[4\frac{L}{min}\left(\frac{x(t)kg}{100L}\right) + 3\frac{L}{min}\left(\frac{x(t)kg}{100L}\right)\right], \\
&= \left[1,2\frac{kg}{min} + \frac{y(t)kg}{100min}\right] - \left[7\frac{x(t)kg}{100min}\right].
\end{aligned}$$

Para una mejor apreciación de la (ED), obviaremos las unidades de medida, entonces tenemos la siguiente (ED),

$$\frac{dx}{dt} = 1,2 + \frac{y}{100} - \frac{7x}{100}. \tag{3.1}$$

- **Para el tanque B**

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= E(t) - S(t), \\
&= \left[3\frac{L}{min}\left(\frac{x(t)kg}{100L}\right)\right] - \left[1\frac{L}{min}\left(\frac{y(t)kg}{100L}\right) + 2\frac{L}{min}\left(\frac{y(t)kg}{100L}\right)\right] \\
&= \left[3\frac{x(t)kg}{100min}\right] - \left[\frac{y(t)kg}{100min} + 2\frac{y(t)kg}{100min}\right], \\
&= \left[3\frac{x(t)kg}{100min}\right] - \left[3\frac{y(t)kg}{100min}\right].
\end{aligned}$$

Nuevamente, para apreciar mejor la (ED), obviaremos las unidades de medida, entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3x}{100} - \frac{3y}{100}. \tag{3.2}$$

Entonces, tomando las (ED) (3.1) y (3.2), armamos el (SEDL)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1,2 + \dfrac{y}{100} - \dfrac{7x}{100} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x}{100} - \dfrac{3y}{100} \end{cases}. \tag{3.3}$$

3.1.3 Cálculo matemático

En este apartado, se procederá a resolver el (SEDL) (3.3),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1,2 + \dfrac{y}{100} - \dfrac{7x}{100} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x}{100} - \dfrac{3y}{100} \end{cases}.$$

Para ello utilizaremos el *método por operadores diferenciales*, estudiado en el Capítulo 2.

Expresemos entonces el (SEDL) (3.3) con notación del operador diferencial D.

$$\begin{cases} Dx = 1,2 + \dfrac{y}{100} - \dfrac{7x}{100} \\ \\ Dy = \dfrac{3x}{100} - \dfrac{3y}{100} \end{cases} = \begin{cases} Dx + \dfrac{7x}{100} - \dfrac{y}{100} = 1,2 \\ \\ Dy + \dfrac{3y}{100} - \dfrac{3x}{100} = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(D + \dfrac{7}{100}\right) x - \dfrac{y}{100} = 1,2 \\ \\ -\dfrac{3x}{100} + \left(D + \dfrac{3}{100}\right) y = 0 \end{cases}.$$

Para hacer más sencillo los cálculos posteriores, eliminemos las fracciones, esto se consigue si multiplicamos por la constante 100 los dos miembros de las dos (ED) del (SEDL),

$$\Rightarrow \begin{cases} 100\left(D + \dfrac{7}{100}\right) x - (100)\dfrac{y}{100} = 1,2(100) \\ \\ -(100)\dfrac{3x}{100} + 100\left(D + \dfrac{3}{100}\right) y = 0(100) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (100D+7)x - y = 120 \\ \\ -3x + (100D+3)y = 0 \end{cases}.$$

Ahora, nos proponemos a eliminar la variable x del (SEDL), para ello, multiplicamos la primera (ED) del sistema por la constante 3 y a la segunda (ED) del sistema por el término $(100D+7)$, así tenemos

$$\begin{aligned} &3(100D+7)x - 3y = 360 \\ &-3(100D+7)x + (100D+3)(100D+7)y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{3(100D+7)x} - 3y = 360 \\ &\cancel{-3(100D+7)x} + (100D+3)(100D+7)y = 0 \end{aligned}$$

Eliminando la expresión que tiene la variable x, obtenemos la siguiente expresión

$$-3y + (100D+3)(100D+7)y = 360 \Rightarrow [(100D+3)(100D+7)]\, y - 3y = 360.$$

$$10000D^2y + 1000Dy + 21y - 3y = 360 \Rightarrow 10000y'' + 1000y' + 18y = 360$$

Resolviendo la (ED) se obtiene por solución

$$y(t) = c_1 e^{\frac{(-5+\sqrt{7})\,t}{100}} + c_2 e^{\frac{(-5-\sqrt{7})\,t}{100}} + 20.$$

Ahora, calculemos su derivada,

$$y'(t) = \frac{(\sqrt{7}-5)}{100} c_1 e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{100} c_2 e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}}.$$

Ahora, si nos fijamos en la segunda (ED) del (SEDL) (3.3), vemos que a partir de esta y remplazando $y(t)$ y su derivada $y'(t)$, podemos obtener $x(t)$, entonces dada la segunda (ED) del (SEDL)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3x}{100} - \frac{3y}{100},$$

$$100y' = 3x - 3y,$$

Remplazando tenemos,

$$\begin{aligned}
3x &= 100\left[\frac{(\sqrt{7}-5)}{100}c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{100}c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}}\right] + 3\left[c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20\right]\\
3x &= (\sqrt{7}-5)c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + (-\sqrt{7}-5)c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 3c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + 3c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 60,\\
x(t) &= \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20.
\end{aligned}$$

Así el conjunto solución general del (SEDL) (3.3) es

$$\begin{cases}
x(t) = \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20\\
y(t) = c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20
\end{cases}.$$

Ahora, considerando las condiciones iniciales que nos presentó el problema de aplicación, procedamos a calcular la solución particular del sistema, entonces

- Cuando $t = 0$, se tiene $x(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})0}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})0}{100}} + c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})0}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})0}{100}} + 20,\\
-20 &= \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}c_1 + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}c_2 + c_1 + c_2, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

- Cuando $t = 0$, se tiene $y(0) = 20$, entonces

$$\begin{aligned}
20 &= c_1e^{\frac{(-5+\sqrt{7})0}{100}} + c_2e^{\frac{(-5-\sqrt{7})0}{100}} + 20,\\
0 &= c_1 + c_2,\\
\Rightarrow c_1 &= -c_2.
\end{aligned}$$

Ahora, remplazando $c_1 = -c_2$ en (3.4) se tiene

$$\begin{aligned}
-20 &= \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}(-c_2) + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}c_2 + (-c_2) + c_2,\\
-20 &= \frac{-(\sqrt{7}-5)c_2 + (-\sqrt{7}-5)c_2}{3},\\
-60 &= -\sqrt{7}c_2 + 5c_2 - \sqrt{7}c_2 - 5c_2,\\
-60 &= -2\sqrt{7}c_2\\
c_2 &= \frac{30}{\sqrt{7}}\\
\Rightarrow c_1 &= -\frac{30}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

Entonces, remplazando las constantes c_1 y c_2 en $x(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{(\sqrt{7}-5)}{3}\left(-\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{(-\sqrt{7}-5)}{3}\left(\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + \left(-\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} +\\
&+ \left(\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20,\\
x(t) &= -\frac{10\sqrt{7}-50}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{-10\sqrt{7}-50}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} - \frac{30}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{30}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20,\\
x(t) &= -\left(\frac{10\sqrt{7}-50+30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \left(\frac{-50-10\sqrt{7}+30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20,\\
x(t) &= -\left(10-\frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} - \left(10+\frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20.
\end{aligned}$$

Y de igual manera, remplazando las constantes c_1 y c_2 en $y(t)$, se tiene

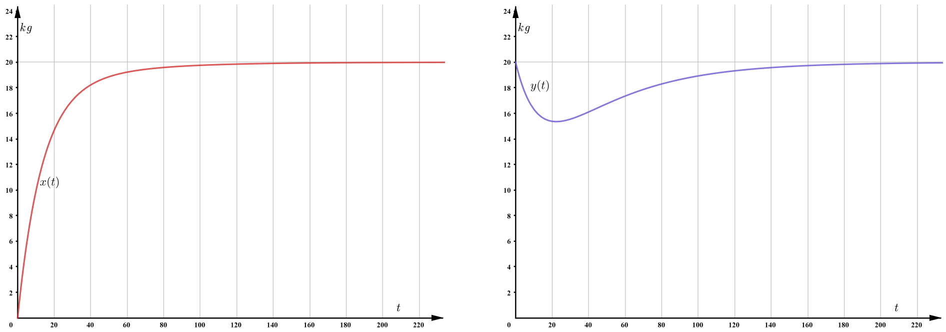
$$y(t) = \left(-\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \left(\frac{30}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20$$

Así, la solución particular del (SEDL) (3.3) es

$$\begin{cases}
x(t) = -\left(10-\frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} - \left(10+\frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20\\
y(t) = -\frac{30}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5+\sqrt{7})t}{100}} + \frac{30}{\sqrt{7}}e^{\frac{(-5-\sqrt{7})t}{100}} + 20
\end{cases}.$$

3.1.4 Interpretación de resultados

En esta sección hablaremos de los resultados obtenidos, es decir, del par de ecuaciones $x(t)$ e $y(t)$, empezamos primero graficando ambas funciones, estamos son



(a) Función $x(t)$.

(b) Función $y(t)$.

Gráfico 3.2: Funciones solución del (SEDL) (3.3).

FUENTE: Elaboración propia.

Para el caso de la *Gráfica 3.2 (a)*, vemos que la concentración de sal en kg, parte desde $0kg$ y conforme avanza el tiempo $t \to \infty$, dicha concentración aumenta, y en contraste con la *Gráfica 3.2 (b)*, podemos notar dos cosas, lo primero es que cuando t aumenta en un primer tramo, la concentración de sal en kg disminuye drásticamente, para luego volver a incrementar dicha concentración. El segundo punto es que se puede concluir que conforme $t \to \infty$ la solución se vuelve homogénea, es decir, la concentración de sal en ambos tanques será la misma.

3.2 Circuitos eléctricos

En esta sección se considerará la aplicación de los sitemas de ecuaciones diferenciales lineales (SEDL) a circuitos eléctricos, empecemos por ver algunas notas introductorias con respecto a circuitos sencillos RL y RC, para luego estudiar los más generales RLC.

Para empezar, introduzcamos la notación necesaria para comprender la terminología que se usará en esta sección.

Cantidad	**Representación literal**	**Unidades**
Fuente de voltaje	E	voltio (V)
Resistencia	R	ohm (Ω)
Inductancia	L	henrio (H)
Capacitancia	C	faradio (F)
Carga	q	coulomb (C)
Corriente	I	amperio (A)

Cuadro 3.1: Notación de circuitos eléctricos.
FUENTE: Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000)

Ahora bien, cuando se habla de circuitos eléctricos, se habla de los principios físicos que aquí se hallan, los cuales fueron establecidos por *Gustav R. Kirchhoff* en 1859, estos son

1. **Ley de la corriente de Kirchhoff:** La suma algebraica de las corrientes que fluyen en cualquier punto de unión deben anularse.

2. **Ley del voltaje de Kirchhoff:** La suma algebraica de los cambios instant́aneos del potencial (caídas de voltaje) en torno de cualquier lazo cerrado debe anularse.

La ley de la corriente de *Kirchhoff* implica que la misma corriente pasa por cada elemento que constituye el propio circuito eléctrico.

Para aplicar la ley del voltaje de *Kirchhoff*, primero se debe conocer la caída de voltaje a través de cada elemento que compone un circuito. Estas fórmulas para el voltaje aparecen a continuación (Para un estudio exhaustivo, usted puede revisar un texto de introducción a la física para profundizar en los detalles que siguen).

a. Acorde con la *ley de Ohm*, la caída del voltaje dada por E_R a través de una resistencia R, es proporcional a la corriente $i(t)$ que pasa por la resistencia R en un tiempo determinado t.

$$E_R = i(t)R.$$

La resistencia R es llamada también como constante de proporcionalidad.

b. Dadas las leyes de *Faraday y Lenz*, se puede ver que la caída de voltaje E_L a través de un inductor, es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I.

$$E_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}.$$

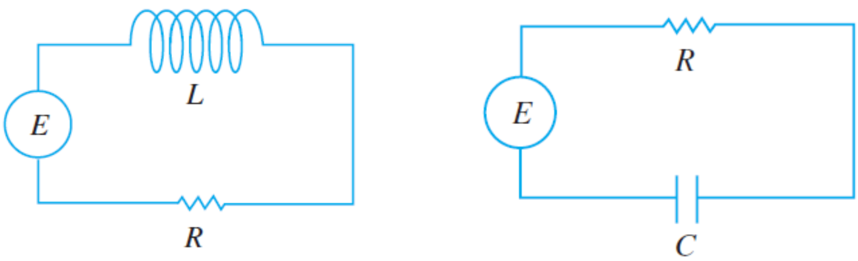
Llamamos inductancia L a la constante de proporcionalidad.

c. La caída de voltaje dado por E_C a través de un condensador, es proporcional a la carga eléctrica q sobre el condensador.

$$E_C = \frac{1}{C}q.$$

Llamamos capacitancia a la constante C.

Consideremos el siguiente gráfico,



(a) Circuito en serie RL. (b) Circuito en serie RC.

Gráfico 3.3: Representación esquemática de circuitos en serie.
FUENTE: Zill, D. & Cullen, M. (2000)

Para un circuito en serie compuesto por sólo un resistor y un inductor, la segunda ley de *Kirchhoff* señala que la suma de la caída de voltaje a través del inductor $(L(di/dt))$ a través del resistor (iR) es igual a la cantidad de voltaje suministrado $(E(T))$ al circuito. Vea el (*Gráfico 3.3 (a)*).

Sabiendo que R y L son la resistencia e inductancia respectivamente, por lo tanto, obtenemos la ecuación diferencial lineal para la corriente $i(t)$.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t).$$

La corriente $i(t)$ se denomina como **respuesta** del sistema ***RL***.

Por otro lado, la caída de voltaje a través de un capacitor con capacitancia C está dada por $q(t)/C$, donde q es la carga sobre el capacitor. Por lo tanto, para el circuito en serie mostrado en el *Gráfico 3.3 (b)*, la segunda ley de *Kirchhoff* nos señala que

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Un punto importante a notar es que la corriente i y la carga q están relacionadas por $i = dq/dt$, tal que la ecuación anterior la podemos reescribir como

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Veamos ahora el esquema general para circuitos en serie RCL.

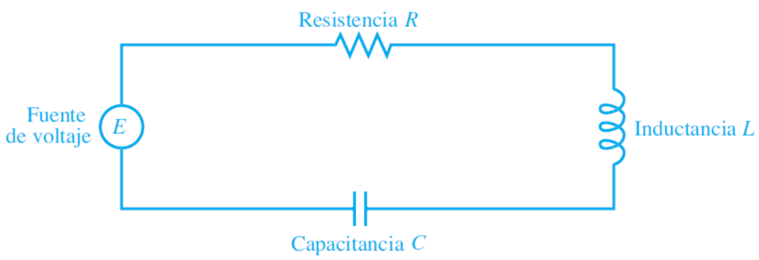


Gráfico 3.4: Esquema general de los circuitos RCL en serie

FUENTE: Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000)

Se podría notar que la caída de voltaje a través del condensador (E_C), la resistencia (E_R) y el inductor (E_L) se expresan como la suma siguiente

$$E(t) = \frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} + L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q.$$

3.2.1 Problema de aplicación

Determine un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describa las corrientes $I_1(t)$, $I_2(t)$ e $I_3(t)$ en el circuito eléctrico de la figura.
Suponga que todas las corrientes iniciales se anulan.
Determine las corrientes en cada rama de la red.

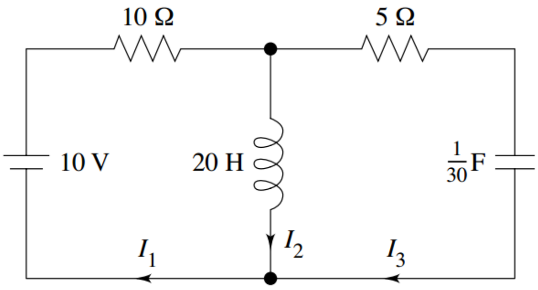


Gráfico 3.5: Circuito eléctrico
FUENTE: Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000)

3.2.2 Planteamiento del problema

En esta subsección veremos las variables empleadas en el problema de aplicación, se estudiará su interacción individual dentro del circuito RCL, con la finalidad de plantear un sistema de ecuaciones diferenciales lineal, el cual será resuelto en la siguiente subsección de este capítulo.

Bien, entonces empecemos planteando las variables que intervienen en el problema de aplicación.
$E(t) = 10V$: Cantidad de voltaje suministrado al circuito RCL.
$I_1 = I_1(t)$: La corriente uno a través del circuito RCL.
$I_2 = I_2(t)$: La corriente dos a través del circuito RCL.
$I_3 = I_3(t)$: La corriente tres a través del circuito RCL.
$R_1 = 10\Omega$: El resistor más próximo a la fuente de carga $E(t)$ del circuito RCL.
$R_2 = 5\Omega$: El segundo resistor del circuito RCL.
$L = 20H$: El inductor del circuito RCL.
$C = \dfrac{1}{30}F$: El condensador del circuito RCL.

En definitiva, en este problema de aplicación se hallan tres variables que debemos determinar, las cuales son las corrientes $I_n(t)$ con $n = \{1, 2, 3\}$, por lo que al momento de plantear el (SEDL), contaremos con tres ecuaciones diferenciales, es así que se espera obtener un sistema 3×3.

Analicemos el circuito por lazos descritos en la siguiente *Gráfica 3.6*.

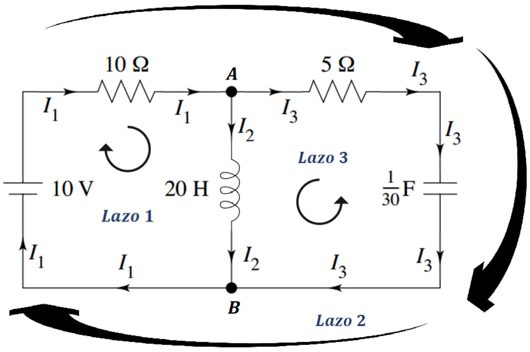


Gráfico 3.6: Lazos descritos en el circuito eléctrico

Entonces veamos,

- **Para el *Lazo 1*.**
  Consideramos la primera malla del circuito, partiendo desde la fuente de voltaje, llegando al punto **A**, luego avanzando hasta el punto **B** llegando nuevamente a la fuente de voltaje, recorriendo el mismo en sentido horario, se toma en cuenta las siguientes variables.

  - La corriente I_1 del circuito pasa por la resistencia $R_1 = 10\Omega$, esto es $R_1 I_1 = 10\Omega I_1$.
  - Ahora vemos que la corriente I_1 llega al punto **A** y se divide en dos corrientes I_2 e I_3.
  - Notamos que la corriente I_2 parte del punto **A**, pasa por el inductor $L = 20H$ hasta llegar al punto **B** lo cual nos da como resultado la expresión

$$L\frac{dI_2}{dt} = 20H\frac{dI_2}{dt}.$$

  - Como en este lazo encontramos la fuente de voltaje, por la *Ley de Kirchhoff* tenemos que la suma de caída de voltaje a través de un resistor y a través de un inductor, es igual a la cantidad de voltaje suministrado en el circuito,

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + L\frac{dI_2}{dt} &= E(t) \\ 10\Omega I_1 + 20H\frac{dI_2}{dt} &= 10V. \end{aligned}$$

Obviando unidades de medida para una mejor comprensión tenemos la (ED)

$$10I_1 + 20I_2' = 10. \tag{3.5}$$

- **Para el *Lazo 2*.**

  - Partiendo desde la fuente de voltaje $E(t) = 10V$, donde la corriente I_1 pasa por la resistencia $R_1 = 10\Omega$, tenemos la expresión $R_1 I_1$.
  - Pasa por el punto **A** y ahora la corriente I_3 avanza a través de la resistencia $R_2 = 5\Omega$, $R_2 I_3$.
  - Llegando hasta el capacitor $C = \frac{1}{1/30}Fq_3 = 30Fq_3$.
  - Nuevamente por la *Ley de Kirchhoff*, se tiene que la suma de caídas de voltaje del circuito, es igual a la cantidad de voltaje suministrado en el circuito

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_3 + \frac{1}{C}q_3 &= E(t) \\ 10\Omega I_1 + 5\Omega I_3 + \frac{1}{1/30}Fq_3 &= 10V. \end{aligned}$$

Obviando las unidades de medida, tenemos la siguiente (ED)

$$10I_1 + 5I_3 + 30q_3 = 10. \tag{3.6}$$

- **Para el *Lazo 3*.**

  - Para este lazo, la corriente I_3 parte del punto **A**, pasa por la resistencia $R_2 = 5\Omega$, y obtenemos $R_2 I_3 = 5\Omega I_3$.
  - La misma corriente I_3 pasa por el capacitor $C = \frac{1}{30}F$, pero en este punto dentro del circuito es importante notar que esta caída de voltaje es proporcional a la carga eléctrica del condensador, esto es $\frac{1}{1/30}Fq_3 = 30F$, tal que q_3 es la carga de la corriente I_3.
  - La corriente I_3 avanza y llega al punto **B**, donde sube en sentido contrario a la corriente I_2, por lo que debemos considerar el signo negativo, esto es

$$-L\frac{dI_2}{dt} = -20H\frac{dI_2}{dt}.$$

- Ahora, ya que es un circuito cerrado, se tiene que la suma de las caídas de voltaje a traves del resistor, a través del capacitor y del inductor, es igual a cero, y obtenemos

$$5\Omega I_3 + 30Fq_3 - 20H\frac{dI_2}{dt} = 0$$

Para mayor comprensión quitamos las unidades de medida y tenemos la (ED)

$$5I_3 + 30q_3 - 20I_2' = 0. \tag{3.7}$$

- **Corrientes** I_n con $n = \{1, 2, 3\}$

Notamos la relación entre las corrientes I_1, I_2 e I_3 del circuito, pues la corriente I_1 entra al mismo, mientras que las corrientes I_2 e I_3 salen del circuito, esto se representa como

$$I_1 = I_2 + I_3. \tag{3.8}$$

Ahora, tomando las (ED) (3.5, 3.6, 3.7) armamos el (SEDL),

$$\begin{cases} 10I_1 + 20I_2' = 10, \\ 10I_1 + 5I_3 + 30q_3 = 10, \\ 5I_3 + 30q_3 - 20I_2' = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Notamos que las (ED) del (SEDL) no son linealmente independientes, pues la primera (ED) se puede obtener si restamos la segunda (ED) con la tercera (ED).
Entonces solamente tomemos las dos primeras (ED) del sistema, ahora, recordando la relación entre la carga y la corriente $\frac{dI}{dt} = q$, podemos expresar a la segunda (ED) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[10I_1 + 5I_3 + 30q_3\right] &= 10 \\ 10I_1' + 5I_3' + 30I_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Entonces, tomando (3.5) y (3.10) el nuevo sistema se expresa como

$$\begin{cases} 10I_1 + 20I_2' = 10, \\ 10I_1' + 5I_3' + 30I_3 = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Notamos que tenemos tres incógnitas en un sistema de dos (ED), entonces se necesita expresar la segunda (ED) del (SEDL) en términos de las corrientes I_1 e I_2, para ello recordemos la relación dada en la ecuación (3.8), y tenemos que

$$I_3 = I_1 - I_2.$$

Entonces la segunda (ED) del (SEDL) (3.11) se expresa como

$$\begin{aligned} 10I_1' + 5I_3' + 30I_3 &= 0 \\ 10I_1' + 5(I_1 - I_2)' + 30(I_1 - I_2) &= 0 \\ 10I_1' + 5I_1' - 5I_2' + 30I_1 - 30I_2 &= 0 \\ 15I_1' - 5I_2' + 30I_1 - 30I_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Con lo cual tomando (3.5) y (3.12) tenemos el (SEDL)

$$\begin{cases} 10I_1 + 20I_2' = 10 \\ 15I_1' - 5I_2' + 30I_1 - 30I_2 = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

3.2.3 Cálculo matemático

Ahora, en esta subsección se procederá a resolver el (SEDL) (3.13).

$$\begin{cases} 10I_1 + 20I_2' = 10 \\ 15I_1' - 5I_2' + 30I_1 - 30I_2 = 0. \end{cases}$$

Para su resolución se puede aplicar cualquier método estudiado en el *Capítulo 2*, ya que el problema de aplicación nos señala que las corrientes iniciales $I_n(0) = 0$ con $n = \{1, 2, 3\}$, las cuales equivalen a las condiciones iniciales del (SEDL), en esta ocasión podemos aplicar el Método por La transformada de *Laplace*.

Entonces, apliquemos la transformada de *Laplace* a cada (ED) del sistema,

$$\begin{cases} 10\mathscr{L}[I_1] + 20\mathscr{L}[I_2'] = 10\mathscr{L}[1], \\ 15\mathscr{L}[I_1'] - 5\mathscr{L}[I_2'] + 30\mathscr{L}[I_1] - 30\mathscr{L}[I_2] = \mathscr{L}[0]. \end{cases}$$

Para una mayor comprensión hagamos un intercambio de variables, y llamemos

$$I_1 = x$$

$$I_2 = y.$$

Entonces tenemos el sistema en términos de x e y

$$\begin{cases} 10\mathscr{L}[x] + 20\mathscr{L}[y'] = 10\mathscr{L}[1], \\ 15\mathscr{L}[x'] - 5\mathscr{L}[y'] + 30\mathscr{L}[x] - 30\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[0]. \end{cases}$$

Llamemos ahora

$$\mathscr{L}[x] = X(s)$$

$$\mathscr{L}[y] = Y(s).$$

Y recordemos que $\mathscr{L}[x'] = s\mathscr{L}[x] - x(0) = s\mathscr{L}[x] - 0 = s\mathscr{L}[x] = sX(s)$, de forma similar para $\mathscr{L}[y'] = s\mathscr{L}[y] - y(0) = s\mathscr{L}[y] - 0 = s\mathscr{L}[y] = sY(s)$.

Entonces tenemos el sistema

$$\begin{cases} 10X(s) + 20sY(s) = 10(1/s) \\ 15sX(s) - 5sY(s) + 30X(s) - 30Y(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10X(s) + (20s)Y(s) = \frac{10}{s} \\ (15s+30)X(s) - (5s+30)Y(s) = 0. \end{cases}$$

Emplemos ahora, el Método de *Cramer*, para encontrar las funciones $X(s)$ e $Y(s)$.

Entonces calculemos Δ, esto es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 20s \\ (15s+30) & -(5s+30) \end{vmatrix} = -(50s+300) - (300s^2+600s) = -50(6s^2+13s+6).$$

Ahora, calculemos Δ_x y Δ_y, por conveniencia empecemos calculando Δ_y.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10 & \frac{10}{s} \\ (15s+30) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{10}{s}(15s+30) = -\left(150 + \frac{300}{s}\right).$$

Para obtener la función $Y(s)$, calculamos $\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, luego operamos y factorizamos obteniendo

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-\left(150 + \frac{300}{s}\right)}{-50(6s^2+13s+6)} = \frac{150(s+2)}{50s(6s^2+13s+6)} = \frac{3s+6}{s(2s+3)(3s+2)}$$

Para poder continuar con el proceso, primero separemos en fracciones parciales, esto es

$$\begin{aligned} \frac{3s+6}{s(2s+3)(3s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(2s+3)} + \frac{C}{(3s+2)} \\ \frac{3s+6}{\cancel{s(2s+3)(3s+2)}} &= \frac{A(2s+3)(3s+2) + Bs(3s+2) + Cs(2s+3)}{\cancel{s(2s+3)(3s+2)}} \\ 3s+6 &= A(2s+3)(3s+2) + Bs(3s+2) + Cs(2s+3). \end{aligned}$$

Ahora, para determinar los valores de A, B y C,

- Para obtener el valor de A, hacemos $s = 0$.

$$\begin{aligned} 3(0)+6 &= A(2(0)+3)(3(0)+2) + B(0)(3(0)+2) + C(0)(2(0)+3) \\ 6 &= A(3)(2) + 0 + 0 \\ \Rightarrow A &= 1. \end{aligned}$$

- Para obtener el valor de B, hacemos $s = -\dfrac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 &= A\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right)\left(3\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right) + B\left(-\frac{3}{2}\right)\left(3\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right) + \\ &\quad + C\left(-\frac{3}{2}\right)\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{2}+6 &= 0-\frac{3B}{2}\left(-\frac{9}{2}+2\right)\\
\frac{3}{2} &= \frac{15B}{4}\\
\Rightarrow B &= \frac{12}{30}=\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

- Para hallar el valor de C, hacemos $s=-\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
3\left(-\frac{2}{3}\right)+6 &= A\left(2\left(-\frac{2}{3}\right)+3\right)\left(3\left(-\frac{2}{3}\right)+2\right)+B\left(-\frac{2}{3}\right)\left(3\left(-\frac{2}{3}\right)+2\right)+\\
&\quad +C\left(-\frac{2}{3}\right)\left(2\left(-\frac{2}{3}\right)+3\right)\\
-2+6 &= 0+0-\frac{2C}{3}\left(-\frac{4}{3}+3\right)\\
4 &= -\frac{2C}{3}\left(\frac{5}{3}\right)\\
4 &= -\frac{10C}{9}\\
\Rightarrow C &= -\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos la expresión en fracciones parciales

$$Y(s)=\frac{3s+6}{s(2s+3)(3s+2)}=\frac{1}{s}+\frac{2}{5(2s+3)}-\frac{18}{5(3s+2)}.$$

Ahora, para obtener la solución $y(t)$, aplicamos la transformada inversa de *Laplace*, es decir

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{2}{5(2s+3)}-\frac{18}{5(3s+2)}\right].$$

Por la linealidad de la transformada inversa de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{5(2s+3)}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{18}{5(3s+2)}\right]\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{2}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(2s+3)}\right]-\frac{18}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(3s+2)}\right]\\
&= 1+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}e^{-3t/2}\right)-\frac{18}{5}\left(\frac{1}{3}e^{-2t/3}\right)\\
y(t) &= 1-\frac{6}{5}e^{-2t/3}+\frac{1}{5}e^{-3t/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, para obtener la solución $x(t)$ se debería seguir el mismo procedimiento, sin embargo, si observamos la primer (ED) del (SEDL) (3.13), notamos que podemos obtener la función $I_1=x(t)$ a partir de la derivada de la solución $I_2=y(t)$

Calculemos entonces $y'(t)$

$$y'(t) = \frac{4}{5}e^{-2t/3} - \frac{3}{10}e^{-3t/2}.$$

Ahora, tomando la primera (ED) del (SEDL)

$$\begin{aligned}
10x + 20y' &= 10 \\
x &= \frac{10 - 20y'}{10} \\
&= \frac{10 - 20\left(\frac{4}{5}e^{-2t/3} - \frac{3}{10}e^{-3t/2}\right)}{10} \\
&= \frac{10 - 16e^{-2t/3} + 6e^{-3t/2}}{10} \\
x(t) &= 1 - \frac{8}{5}e^{-2t/3} + \frac{3}{5}e^{-3t/2}.
\end{aligned}$$

Entonces volviendo a las variables I_1 e I_2 tenemos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= 1 - \frac{8}{5}e^{-2t/3} + \frac{3}{5}e^{-3t/2} \\
I_2(t) &= 1 - \frac{6}{5}e^{-2t/3} + \frac{1}{5}e^{-3t/2}.
\end{aligned}$$

Recordando la relación en la ecuación (3.8), tenemos que

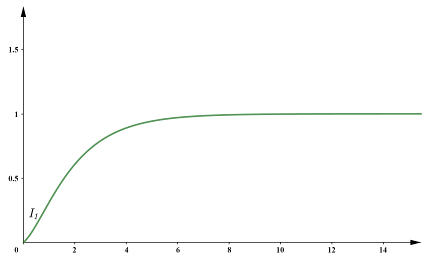
$$\begin{aligned}
I_3 &= I_1 - I_2 \\
&= 1 - \frac{8}{5}e^{-2t/3} + \frac{3}{5}e^{-3t/2} - \left(1 - \frac{6}{5}e^{-2t/3} + \frac{1}{5}e^{-3t/2}\right) \\
&= 1 - \frac{8}{5}e^{-2t/3} + \frac{3}{5}e^{-3t/2} - 1 + \frac{6}{5}e^{-2t/3} - \frac{1}{5}e^{-3t/2} \\
I_3 &= \frac{2}{5}e^{-3t/2} - \frac{2}{5}e^{-2t/3}
\end{aligned}$$

Teniendo como solución a las corrientes

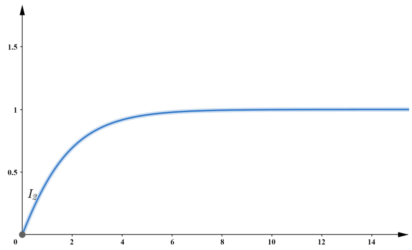
$$\begin{cases}
I_1 = 1 - \frac{8}{5}e^{-2t/3} + \frac{3}{5}e^{-3t/2} \\
I_2 = 1 - \frac{6}{5}e^{-2t/3} + \frac{1}{5}e^{-3t/2} \\
I_3 = \frac{2}{5}e^{-3t/2} - \frac{2}{5}e^{-2t/3}
\end{cases}$$

3.2.4 Interpretación de resultados

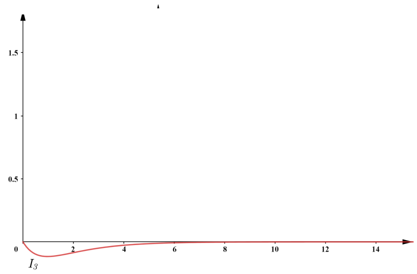
Gráficamente podemos ver el comportamiento de las corrientes I_1, I_2, I_3 en las siguientes gráficas,



(a) Corriente I_1 del circuito



(b) Corriente I_2 del circuito



(c) Corriente I_3 del circuito

Gráfico 3.7: Corrientes I_1, I_2, I_3 del circuito.

Nótese que cuando $t = 0$, las corrientes $I_n(t) = 0$ con $n = \{1, 2, 3\}$, luego podemos apreciar que cuando $t \to \infty$, las corrientes tienen diferente comportamiento:

Para el caso de la corriente I_1, se encuentra circulante en la malla, notamos que esta corriente es la que entra al circuito y luego se divide en dos corrientes, I_2 e I_3, por lo que es importante señalar que la intensidad I_1 es mayor a estas dos intensidades de corriente, a igual a su suma, es decir, $I_2, I_3 < I_1$, y también $I_1 = I_2 + I_3$

Para el caso de la corriente I_2 que se encuentra circulante en la malla, al solamente pasar por el inductor L, la corriente no puede cambiar instantáneamente, es por ello que notamos las gráficas de I_1 e I_2 muy similares.

Para el caso de la corriente I_3 que se encuentra circulante en la malla, notamos que esta corriente pasa por un resistor R_2, el cual se opone al paso de corriente eléctrica, además atraviesa un capacitor C, el cual almacena energía para sustentar al circuito eléctrico.

Bibliografía

Arias, M. y Makárov, N. (2005). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Recuperado de https://www. academia. edu/21747008/Ecuaciones_diferenciales_BUAP.

Costa, V. A. & Vacchino, M. C. (2009). El álgebra lineal y los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias en la facultad de ingeniería, unlp. In *Proceedings of International Conference on Engineering and Computer Education*, volume 6.

Durán, A. J. (2020). *Cálculo infinitesimal: el lenguaje matemático de la naturaleza*. Los libros de la Catarata.

González, L. E. (2008). El cálculo infinitesimal y su historia en la obra de julio rey pastor entre 1921 y 1940. *Actes d'història de la ciència i de la tècnica*, (pp. 367–376).

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.

Porras, P. C., Quintero, P. A. C., & Segura, C. N. (2019). Resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. método matricial. In *9na Edición de la Conferencia Científica Internacional de la Universidad de Holguín*.

Von Leibniz, G. W. F. (1989). *La naissance du calcul différentiel: 26 articles des "Acta eruditorum"*. Vrin.

Zill, D. G. & Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. MC GRAW HILL INTERAMERICANA.