ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

LISBETH GABRIELA RUIZ GALEANO

Trabajo de Titulación modalidad: Proyectos de Investigación y Desarrollo, presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de:

MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN Y DOCENCIA

Riobamba-Ecuador

Septiembre de 2022

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El Trabajo de Titulación modalidad **Proyectos de Investigación y Desarrollo**, titulado: Implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco, de responsabilidad de la señorita Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Dr. Juan Mario Vargas Guambo, Mgs. ______________________

PRESIDENTE

Dra. Jenny Margoth Villamarín Padilla, Mg. ______________________

DIRECTORA

Ing. Deysi Margoth Guanga Chunata, Mg. ______________________

MIEMBRO

Ing. Mercedes Leticia Lara Freire, Mg. ______________________

MIEMBRO

Riobamba, septiembre del 2022

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el **Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo**, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano

1003598511

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

Yo, Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, declaro que el **presente Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo**, es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otra fuente están debidamente citados y referenciados.

Como autora, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este proyecto de investigación de maestría.

Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano

1003598511

DEDICATORIA

A mis padres, por su cariño, por motivarme diariamente para continuar con mis estudios y con cada una de mis metas, siendo una buena persona y una excelente profesional.

A mi hermano y mi familia, quienes me han acompañado y apoyado de manera incondicional.

A quienes ya no están presentes, por enseñarme que la vida es un ratito y que se debe disfrutar hasta el último momento de ella sin resentimiento en el corazón y sobre todo cumpliendo cada una de las metas propuestas sin dejarlas para un mañana.

A todas las personas que de una u otra manera participaron en esta etapa de mi vida.

Con todo cariño mi proyecto de investigación está dedicado a ustedes.

Lisbeth Gabriela.

AGRADECIMIENTO

A Dios y a la Virgen María, por darme la fortaleza y sabiduría para culminar una nueva etapa en mi vida, así como bendecirme cada día.

A mis maestros, quienes me guiaron en mi formación profesional y a quienes debo gran parte de mis conocimientos.

De manera especial agradezco a la Dra. Jenny Villamarín, Ing. Deysi Guanga y la Ing. Leticia Lara, quienes supieron guiarme pacientemente y aportaron con sus ideas en el desarrollo del presente proyecto investigación.

De la misma manera expreso un agradecimiento a todos quienes me acompañaron tanto en mi formación personal y profesional, encaminando mi vida hacia un excelente desempeño.

Lisbeth Gabriela.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El objetivo fue implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco, desarrollándose bajo un enfoque cuantitativo con un diseño cuasi experimental con una muestra de 110 estudiantes pertenecientes a tercero de bachillerato separados en dos grupos: 38 grupo de control y 72 como grupo de experimentación. Durante la fase de diagnóstico se aplicó una encuesta a los estudiantes quienes estimaron que es importante implementar herramientas tecnológicas en el estudio de la integral definida para motivar, mejorar el proceso de enseñanza, desarrollar destrezas y mejorar su rendimiento académico, estimando de esta manera como software a GeoGebra, también se desarrolló el pre test mismo que determinó la homogeneidad de los grupos; continuando con el proceso de investigación durante la fase de fundamentación se investigó el funcionamiento del software así como la distribución de los contenidos de la integral definida para diseñar las planificaciones en la fase 3 y aplicarlas durante la fase de implementación siendo la segunda parcial del segundo quimestre; al final de la implementación para la validación respectiva se realizó un post test, obteniendo como promedio para el grupo de control de 6,32 y de experimentación 7,18, mediante el análisis T Student se obtuvo una t calculada de 2,09 y una t crítica de 1,98, rechazando de esta manera la hipótesis nula aceptando la alternativa. Se concluye que la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Palabras claves: <MATEMÁTICAS>, <GEOGEBRA> <INTEGRAL DEFINIDA> <RENDIMIENTO ACADÉMICO> <DIGITALIZACIÓN> <METODOLOGÍAS ACTIVAS>.

ABSTRACT

The objective was to implement GeoGebra software in the study of the definite integral to determine the impact on the academic performance of high school students of the San Francisco Educational Institution, developed under a quantitative approach with a quasi-experimental design with a sample of 110 students belonging to the third year of high school separated into two groups: 38 control group and 72 as experimental group. During the diagnostic phase, a survey was applied to the students who considered that it is important to implement technological tools in the study of the definite integral to motivate, improve the teaching process, develop skills and enhance their academic performance, thus estimating GeoGebra as software, a pre-test was also developed, which determined the homogeneity of the groups; Continuing with the research process during the foundation phase, the operation of the software was investigated as well as the distribution of the contents of the definite integral to design the plans in phase 3 and apply them during the implementation phase being the second partial phase of the second quarter; At the end of the implementation for the respective validation, a post-test was performed, obtaining an average for the control group of 6.32 and for the experimental group of 7.18; by means of the T Student analysis, a calculated t of 2.09 and a critical t of 1.98 were obtained, thus rejecting the null hypothesis and accepting the alternative. It is concluded that the implementation of GeoGebra software in the study of the definite integral has a significant impact on the academic performance of high school students of the San Francisco Educational Center.

Keywords: <MATHEMATICS>, <GEOGEBRA> <DEFINITE INTEGRAL>, <ACADEMIC PERFORMANCE> <DIGITALIZATION> <ACTIVE METHODOLOGIES>.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Situación problemática

La enseñanza de la matemática se ha convertido en un desafío para los docentes de secundaria quienes, en busca de alcanzar el aprendizaje esperado por sus estudiantes, han empleado diferentes metodologías y recursos que el medio les ofrece (Rivera, 2014), sin embargo, a pesar de que la tecnología es un aliado en la educación del siglo XXI aún se utiliza la metodología tradicional con herramientas como: TPL (tiza, pizarrón y lengua).

De esta manera, por la forma en como el docente presenta a la matemática se evidencia a nivel mundial un alto índice de bajo rendimiento por el rechazo y desapego que tiene el estudiante hacia ésta (López-Quijano, 2014), siendo necesario reflexionar sobre los recursos didácticos que se puede emplear de acuerdo con el entorno sociocultural del estudiante para mantener una interacción entre docentes, estudiantes y medio, más aún en la etapa virtual.

De acuerdo a los resultados de las pruebas PISA-D 2018 evidencia que en Ecuador no se alcanza de manera significativa el aprendizaje en Matemática, mostrando dificultades para desenvolverse en situaciones que requieren la capacidad de resolver problemas matemáticos, teniendo como resultados 377 sobre 1000 quedando dentro del nivel 2 de desempeño. Jorge Vielma, Ph.D en Matemáticas, director del departamento de Matemáticas de la ESPOL manifiesta que Ecuador se encuentra en cuidados intensivos en Matemáticas según los resultados, por lo que es importante buscar estrategias, recursos, herramientas, para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática en todos los niveles educativos. (EL UNIVERSO, 2019).

Investigaciones anteriores manifiestan que una de las formas más modernas de acercar a los estudiantes a la realidad es la utilización de la tecnología, los conceptos matemáticos no son objetos reales por lo que incorporar un software educativo para la enseñanza y aprendizaje de la matemática es una necesidad en el contexto actual en los diferentes niveles (Mamani, 2020). El software de geometría dinámica GeoGebra ha ido promoviendo nuevas formas de interacción dentro y fuera del aula, es por eso que actualmente se encuentra varias investigaciones que apuntan a su utilización para mejorar el rendimiento académico de los alumnos.

De acuerdo al análisis del FODA establecido por los estudiantes de Tercero B.G.U. de la Unidad Educativa “San Francisco” se considera como problema de la investigación el escaso manejo de software matemáticos que vinculen los contenidos de Matemática con aplicaciones cotidianas, volviéndose de esta manera un tema de estudio repetitivo lleno de fórmulas por utilizar y cientos de ejercicios por resolver. De igual forma los docentes de Matemática y Física manifiestan que el rendimiento académico de los estudiantes es bajo en Matemática más aún cuando se trabaja la unidad de cálculo integral, la cual debe ser trabajada de forma rápida sin alcanzar completamente las destrezas con criterio de desempeño tanto básicas como imprescindibles.

Dentro de este contexto, el problema de investigación en la Unidad Educativa “San Francisco” tiene diferentes causas como la desactualización tecnológica docente, metodología didáctica no adecuada, ausencia de planificaciones de actividades, tiempo, limitada utilización de recursos tecnológicos didácticos, escasa relación de problemas de aplicación con los contenidos; teniendo como efectos el desinterés de los estudiantes por manejar herramientas tecnológicas, entendimiento insatisfactorio, improvisación, trabajo de aula monótono, carente desarrollo de destrezas con criterio de desempeño y por ende bajo rendimiento.

1.2. Formulación del problema

¿De qué manera contribuye la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco?

1.3. Preguntas directrices

a) ¿Cuál es el nivel de manejo del software GeoGebra que mantienen los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco?
b) ¿Cuáles son los fundamentos teóricos y científicos en la utilización del software GeoGebra en el estudio de la integral definida?
c) ¿Qué se puede diseñar en el software GeoGebra para el estudio de la integral definida?
d) ¿Cómo se puede mejorar el rendimiento académico del grupo de experimentación en el estudio de la integral definida?

e) ¿Cómo validar la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida?

1.4. Justificación de la investigación

La presente investigación se justifica teóricamente en vista de que actualmente las TIC se manifiestan en diversos ámbitos como el contexto social, educativo, cultural, entre otros y la integración del software GeoGebra en el proceso educativo de acuerdo a investigaciones anteriores determinan grandes beneficios en los estudiantes y docentes, de esta manera será posible alcanzar lo que el Bachillerato General Unificado espera desarrollar destrezas en sus estudiantes que les permita estar preparados para la vida y la participación en una sociedad democrática, para el mundo laboral y para continuar con sus estudios universitarios.

El Ministerio de Educación propone en su currículo varias unidades de estudio dentro de la Matemática, siendo una de ellas el estudio de la Integral definida en tercer año de bachillerato general unificado, sin embargo, es el docente quien vinculará este contenido con el método heurístico y la utilización del software educativo GeoGebra.

Se justifica metodológicamente porque propuso la utilización de herramientas tecnológicas didácticas que proyectará a que el estudiante de tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa "San Francisco" conociendo la potencialidad de este recurso sea capaz de demostrar muchas de las experiencias que lleven a la comprensión de la unidad de estudio, construir sus propias experiencias y obtener una visión más crítica del mundo que le rodea para de esta manera alcanzar una aprendizaje significativo.

De la misma manera se justifica de forma práctica porque ayudó a vincular los contenidos teóricos de la integral definida con las aplicaciones de Física diseñadas en GeoGebra, para lo cual se requiere de un manejo adecuado de herramientas didácticas más ahora que la tecnología es un pilar fundamental en el sistema educativo y las habilidades no se consiguen con la simple explicación magistral del tema o la exposición de las fórmulas y la resolución continua de ejercicios volviendo a los estudiantes mecanizados, siendo aplicable para diferentes grupos de trabajo.

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. *Objetivo general*

Implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

1.5.2. *Objetivos específicos*

a) Diagnosticar el nivel de manejo del software GeoGebra en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.
b) Fundamentar la información de manera científica y teórica sobre el software GeoGebra como herramienta tecnológica didáctica y la integral definida como contenido de estudio.
c) Diseñar prácticas experimentales en el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.
d) Proponer las prácticas experimentales diseñadas en el software GeoGebra al grupo de experimentación para mejorar el rendimiento académico durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021.
e) Validar la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida mediante un análisis estadístico de datos del rendimiento académico del grupo de control y de experimentación.

1.6. Hipótesis

La implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del problema

Desde años anteriores a nivel internacional y nacional se ha realizado varios estudios sobre la utilización de GeoGebra para el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática, Marcos Manuel Ibarra hace referencia al desarrollo científico y tecnológico que ha dado nuevas modalidades de educación incluyendo metodologías y estrategias tecno pedagógicas que permiten integrar la tecnología con la enseñanza, poniendo como móvil a GeoGebra cuyo objetivo es dinamizar las clases y convertir las aulas de clase en laboratorios matemáticos, por lo que permite a los estudiantes y docentes ampliar el abanico de posibilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, siempre y cuando se plantee un modelo de uso adecuado que permita integrar la tecnología de manera efectiva en los procesos educativos, (Núñez, págs. 41-47).

Armando López Zamudio del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Analiza la Propuesta para la enseñanza del concepto de integral, un acercamiento visual con GeoGebra, siendo su objetivo visualizar el concepto de integral con GeoGebra. Durante el proceso de investigación se observó el equilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, puesto que la gran mayoría de estudiantes pudo interiorizar el concepto de integral. (Zamudio, págs. 1351-1358)

El objetivo planteado en el estudio “Arribando a la integral definida con el GeoGebra” en el año 2013 de los autores Francisco López Hernández, Natividad Nieto Saldaña, Antonio Antolín Fonseca, Pedro López Hernández es diseñar estrategias de aprendizaje apoyadas en el software libre GeoGebra para el estudio de la integral definida; en donde las experiencias con la puesta en escena de estos materiales finalmente es satisfactoria ya que después de vencer las resistencias se tiene la recompensa del arribo a los objetos matemáticos, en este caso al de integral definida, con un significado en la realidad de los estudiantes.

En el estudio “Empleo del software educativo y su eficiencia en el rendimiento académico del cálculo integral en la Universidad Peruana Unión, filial Tarapoto” realizado por Jéssica Pérez Rivera de la Universidad Peruana Unión en el año 2014, se plantea como objetivo determinar el grado de efectividad del empleo de software educativo en la enseñanza del cálculo integral; en donde el empleo de software educativos resultó beneficioso, ya que los estudiantes se sintieron más motivados a estudiar, dinamizándose así el aula de clase y, por ende, mejorando la relación docente – alumno. (Rivera, 2014, págs. 43-56)

En el estudio GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil; los autores Fredy Barahona Avecilla, Olga Barrera Cárdenas, Byron Vaca Barahona y Blanca Hidalgo Ponce de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo en el año 2015, plantean como objetivo de su investigación experimentar y determinar los beneficios de desarrollar el proceso de aprendizaje de matemáticas con el apoyo de la herramienta GeoGebra; estudiando de esta manera el rendimiento académico cuando se desarrolla su proceso de aprendizaje sin el apoyo de la herramienta GeoGebra y se compara con el rendimiento académico cuando apoyan su proceso de aprendizaje con la herramienta GeoGebra. De esta manera, a través de la prueba de "t-student" se evidencia que el uso de la herramienta GeoGebra incide positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes. (Fredy Barahona Avecilla, 2015, págs. 121-132)

Los autores Clavijo Gañan Egidio Esteban, Bedoya Sanchez Juan Pablo y Ramírez Machado Elmer en su estudio desarrollado en la Universidad Pontificia Bolivariana en el 2020, "Visualización gráfica con GeoGebra en el aprendizaje de Cálculo", proponen como objetivo utilizar GeoGebra como un mediador didáctico en la enseñanza-aprendizaje de conceptos de Cálculo; pudiendo observar que los estudiantes tenían un mejor desempeño académico cuando se trabaja con medios tecnológicos para la modelización y dinamización de las actividades propuestas en las clases, lo cual lleva a contribuir de manera significativa al mejoramiento de la enseñanza matemática particularmente del cálculo integral. (Clavijo Gañan, 2017)

El Mg. Nilo Teodorico Colquepiso Paucar de la Universdad César Vallejo Lima-Perú en el año 2019 desarrolla el estudio de "Software GeoGebra en el aprendizaje de las derivadas e integrales en estudiantes universitarios de Cañete", siendo su objetivo demostrar la influencia del software GeoGebra en mejorar el aprendizaje de las derivadas e integrales en los estudiantes del II ciclo de la Escuela profesional de ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Cañete; donde se comprobó que la aplicación del software GeoGebra influye en el aprendizaje de las derivadas (Z=-3,500 y Sig.=0,000) y el aprendizaje de las integrales (Z=-4,162 y Sig.=0,000) en los estudiantes del II ciclo de la escuela profesional de ingeniería de Sistemas de la Universidad nacional de Cañete. (Paucar, 2019)

En el estudio realizado en el 2020 “El GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la Escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno”, Miguel Ángel Rivas Mamani plantea como objetivo determinar el efecto del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno; donde la implementación del GeoGebra desde un enfoque dinámico rompe el esquema tradicional posibilitando mantener una relación directa con estos objetos matemáticos que fueron manipulados, de esta manera se demostró la efectividad del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno. (Mamani, 2020)

2.2. Fundamentos teóricos

2.2.1. *Fundamentación epistemológica y pedagógica.*

Para la construcción del currículo 2016 el Ministerio de Educación del Ecuador considera como base la perspectiva epistemológica de Matemática denominada pragmático-constructivista, en vista de que se considera que el estudiante alcanza un aprendizaje significativo cuando resuelve problemas o situaciones reales de acuerdo a ciertos grados de complejidad, mismos que son interpretados a través del lenguaje, planteamiento de acciones en función a conceptos, utiliza propiedades con argumentaciones, resuelve, juzga e interpreta la validez de su resultado.

No obstante, también se plantea la visión pedagógica en donde el estudiante al ser el protagonista del proceso educativo se debe considerar la organización de enseñanza favoreciendo la meta cognición, la Pedagogía crítica es una opción que permite desarrollar un pensamiento lógico, crítico o creativo, de esta manera el estudiante resuelve problemas, representa, comunica, justifica, conecta e institucionaliza. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2016)

2.2.2. *Fundamentación psicológica*

Al tener la Matemática como propósito de enseñanza desarrollar la capacidad para pensar, razonar, comunicar, aplicar y valorar las relaciones entre las ideas y los fenómenos reales (Ministerio de Educación del Ecuador., 2016), así como el conocimiento permite al estudiante tomar decisiones pertinentes, la fundamentación psicológica desde un enfoque constructivista busca relacionar los nuevos saberes fundados con lo anteriormente establecido para de esta manera alcanzar un aprendizaje significativo que se ajusta a las condiciones del contexto contemporáneo, basado en tres condiciones: buena actitud y predisposición para aprender, presentación del material e ideas de anclaje en el sujeto que aprende y permita una buena interacción con el material (Pico, 2018)

2.2.3. *Fundamentación legal*

La presente investigación se basa legalmente en los artículos presentados tanto en la Constitución de la República del Ecuador 2008, Ley orgánica de Educación Intercultural y su reglamento, así como también acuerdos ministeriales que han ido estableciéndose con el paso del tiempo.

2.2.4. *Fundamentación educativa*

Para el respectivo desarrollo la fundamentación educativa hace referencia a lo que el Ministerio de Educación del Ecuador plantea para el sistema educativo, basándose la investigación en el respectivo Currículo 2016, currículo priorizado e instructivos de evaluación; es importante mencionar que el currículo priorizado fue creado debido a la pandemia para su aplicación de acuerdo al contexto de cada institución en vista de que se procedió a una educación virtual.

2.2.5. *Fundamentación didáctica*

El presente estudio al encontrarse en la línea de investigación didáctica, siendo su modalidad Proyectos de investigación y desarrollo, hace referencia a esta fundamentación, en vista de que la didáctica al ser una rama de la Pedagogía, tiene como objetivo mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje dotando al educador de estrategias aprovechando los avances científicos y tecnológicos, haciendo el proceso más eficiente, eficaz y de calidad.

2.3. Bases teóricas

El presente capítulo abarca los contenidos conceptuales y analíticos de la importancia de emplear el software GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de materias relacionadas a las matemáticas y su contribución al rendimiento académico de los estudiantes. Para ello se ha sustentado en investigaciones anteriores que reposan en revistas académicas científicas, libros y documentos digitales.

2.3.1. *Software GeoGebra*

El software GeoGebra es una herramienta tecnológica que contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje, permitiendo que las clases sean interactivas, diferentes y no tradicionales, incidiendo en la atracción de los estudiantes por aprender las materias que comúnmente no son atractivas para la mayor parte de los alumnos.

> GeoGebra es un software gratuito y muy sencillo de operar, el cual puede presentar el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, pero es responsabilidad de cada docente hacer sus clases más interactivas, atractivas y entretenidas, tiene que recordar que está enseñando a una generación tecnológica, una generación de redes sociales, una generación innovada, es decir, el alumnado actual ha nacido y está creciendo con la tecnología; entonces el papel de docente también tiene que ser innovado hacia el uso de todos los recursos tecnológicos para lograr el proceso enseñanza-aprendizaje (Jiménez & Jiménez, 2017, pág. 11).

Además, GeoGebra, "combina la facilidad de uso de otro software de geometría dinámica con las versátiles posibilidades del software algebraico. La idea básica de GeoGebra es unir geometría, álgebra y cálculo, que otros paquetes abordan por separado" (Diaz, Rodríguez, & Lingán, 2018, pág. 221).

> Este método debe utilizarse en los cursos de matemáticas, ya que crea un entorno divertido e interesante con elementos de aprendizaje dinámicos, proporciona visualización y oportunidades para aprender matemáticas a través de la práctica y los ejercicios, permite una comprensión y una explicación exhaustivas de las habilidades y da paso a aprender en lugar de memorizar (Tatar & Zengin, 2016, pág. 120)

Es una herramienta colaborativa que permite razonar y aprender, dejando de lado la educación memorística tradicional, por cuanto llama la atención de los estudiantes y permite un proceso de enseñanza y aprendizaje más dinámico y atractivo. En este sentido emplear GeoGebra genera beneficios tanto para el docente como para el estudiante.

> El empleo de GeoGebra para el proceso de enseñanza aprendizaje es factible y positivo en su aplicación puesto que genera beneficios tanto para el docente como para los estudiantes y "una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas de la mayoría de los

> estudiantes, gracias al trabajo con Geogebra. Además de generar resultados bastante satisfactorios, que muestran un desarrollo notable de determinadas competencias matemáticas" (Álvarez, Cordero, González, & Sepúlveda, 2019, pág. 390).

El uso de GeoGebra no es difícil, puesto que viene dirigido para niveles básico, medio y avanzado, los estudiantes que cursan el bachillerato, están en la capacidad de trabajar en esta herramienta y generar conocimiento de manera interactiva. Los contenidos y colores del software también llaman la atención del estudiante.

2.3.1.1. Características de software GeoGebra

GeoGebra es un software libre, gratuito que puede ser instalado en todo tipo de computador de forma rápida y segura, se encuentra dividido en varias secciones, mismas que abarcan "álgebra, geometría, gráficos 3D, probabilidad y una parte de preprogramación que permite tratar con ecuaciones y hojas de cálculo. Toda la ejecución puede realizarse en la página web sin necesidad de instalar ningún software especial" (Espeso, 2021, pág. 1).

"GeoGebra mucho más que geometría dinámica, es un programa de matemática dinámica de gran ayuda para la enseñanza de las matemáticas, de libre acceso y multiplataforma que combina de forma dinámica e interactiva: geometría, álgebra, aritmética, análisis, estadística y probabilidades" (Loyola, 2019, pág. 5).

> Las actividades matemáticas organizadas en secuencias didácticas, a través de la construcción de los conceptos con el soporte de ordenadores o la aplicación de GeoGebra móvil, permite dinamizar la clase, además de evidenciar el desarrollo de demostraciones matemáticas a través de tareas construidas en GeoGebra para replicar demostraciones formales que aseguran la asimilación del conocimiento en los estudiantes (Loyola, 2019, pág. 5).

En esto "GeoGebra tiene la capacidad de operar con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite calcular derivadas e integrales de funciones y ofrece un amplio repertorio de comandos propios del cálculo, para identificar puntos singulares, raíces o extremos de una función" (Áviles, Morales, Cuevas, & Alonso, 2015, pág. 3).

De acuerdo a Áviles, Morales, Cuevas, & Alonso (2015), Geogebra tiene las siguinetes caracteristicas a la hora de manejar:

a) Sus gráficas son de alta calidad y pueden manipularse de forma simple para aumentar el rendimiento visual. En relación a las ecuaciones y el sistema de coordenadas, se cuenta con una gran cantidad de funcionalidades.

b) Los deslizadores son elementos con un gran potencial, ya que permiten controlar animaciones con una cierta facilidad., ya sea la rotación de un triángulo, traslación de un punto, homotecia de un segmento, por animación se pueden ilustrar varias propiedades.

c) Posee una ventana de Álgebra.

d) Un lugar donde se muestran los valores de todos los objetos de una construcción. Estos se clasifican en tres grupos: objetos libres, son los que han sido construidos sin depender de otros. Objetos dependientes, son aquellos que dependen parcialmente de otros.

e) Finalmente, los objetos auxiliares, son aquellos que el usuario define como talesme. (Áviles, Morales, Cuevas, & Alonso, 2015, pág. 4).

2.3.1.2. Áreas de aplicación

El software GeoGebra es útil para las materias académicas de cálculo, es por ello que es factible aplicarlo en las matemáticas y sus diferentes áreas, como la aritmética, geometría, trigonometría, cálculo, probabilidad, álgebra, funciones, y estadística, en el siguiente gráfico se observa su aplicación:

En este sentido se puede decir que GeoGebra es útil, funcional, y manejable por parte de los docentes y estudiantes que están trabajando en el área de las matemáticas.

> Es una una interfaz fácil de usar con botones, funcionalidades y ayuda en línea y problemas ejemplares permite el uso inmediato de las simulaciones. El objetivo de las simulaciones es mejorar la percepción del estudiante, en el espíritu de aprendizaje mediante la experimentación, analizando las representaciones dinámicas proporcionadas por las simulaciones y arrastrando objetos y cambiando los parámetros involucrados (Ponce, Roberts, Wegener, & McIntyre, 2019, pág. 934).

2.3.1.3. Instalación de GeoGebra

Las aplicaciones de GeoGebra independientemente de su versión son de fácil acceso y gratuitas, así "todas las aplicaciones son de uso libre y pueden descargarse gratuitamente de Internet e instalarse en cualquier computadora. De esta manera, se promueve la igualdad de oportunidades y posibilidades para que todos puedan acceder a herramientas que desarrollen la creatividad" (Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2021, pág. 2).

En este sentido los creadores de este software han apoyado al desarrollo de los estudiantes con el objeto de que puedan trabajar de manera interactiva las materias relacionadas con las matemáticas, siendo un aporte social para el área educativa del mundo.

Los pasos para la descarga del software son sencillos y de rápida ejecución,tomando en cuenta que GeoGebra es un software libre, de código abierto, de acuerdo al tutorial de GeoGebra Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires:

a) Funciona correctamente en Windows, Mac y Linux.
b) No requiere de registro para ser instalado ni descargado.
c) Para descargar el programa, ingresar a: http://www.geogebra. org/cms/es/download y hacer clic en Webstart.
d) En algunas computadoras, el programa puede requerir que se instale también el software Java. Éste se descarga desde el siguiente link: http://www. java.com/es/download/.

También pueden utilizarse los instaladores offline –fuera de línea para computadoras que no posean conexión a Internet. Se trata de archivos que deben ejecutarse en dichas computadoras, y se descargan desde el siguiente vínculo: http://www.geogebra.org/cms/ es/installers (Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2021, pág. 5)

2.3.2. *Empleo de la tecnología en los procesos educativos*

La educación requiere de procesos y herramientas no tradicionales para revolucionar la manera de aprender y enseñar, en este sentido el uso y acceso a la tecnología es un paso agigantado que la educación puedo haber tenido en los últimos años, puesto que existe una variedad de software gratuitos y de fácil instalación para las diferentes áreas.

Es por esto que los establecimientos educativos deben capacitar a los docentes en el manejo de plataformas, software y demás herramientas tecnologías para trabajar en las horas de clase, tomando en cuenta que la pandemia ha cambiado drásticamente la manera de enseñar y aprender por las dificultades de acceder físicamente a un aula de clase.

Es por esto que "la educación debe innovar para enseñar al humano a desenvolverse en la vida cotidiana, innovar la educación es introducir en sus técnicas de enseñanza el uso de la tecnología para el aprendizaje de los diversos conceptos y aplicaciones, los cuales son necesarios para el desarrollo del conocimiento" (Jiménez & Jiménez, 2017, pág. 4).

"El empleo de tecnologías como pizarras interactivas, tabletas, teléfonos inteligentes o software, que facilitan los aprendizajes en campos específicos, tiene una presencia creciente en la enseñanza escolar" (Diaz, Rodríguez, & Lingán, 2018, pág. 220).

Además, es necesario tomar en cuenta que "para integrar tecnologías digitales al trabajo del aula de clase, es necesario que los estudiantes desarrollen competencias relacionadas con el manejo de las TIC, para que su integración contribuya al logro de los aprendizajes propuestos" (Grisales, 2018, pág. 206)

Es por ello la importancia y el aporte que el software GeoGebra brinda a docentes y estudiantes, contribuyendo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de manera divertida, interesante. Cabe mencionar que los jóvenes y niños en la actualidad tienen mayor acceso a la tecnología y se facilita el manejo de plataformas y herramientas informáticas al encontrarse familiarizados.

Es por esto que cuando se hace uso adecuado de la tecnología, contribuye a mejorar la asimilación de la información de las diferentes materias recibidas en la malla curricular, en especial de aquellas que contemplan una mayor dificultad de aprendizaje para los estudiantes. "Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad" (Godino, 2011, pág. 13).

> A nivel de formación matemática esto también se puede ver como una oportunidad, puesto que los estudiantes pueden acceder a una gran variedad de recursos en línea como calculadoras

> paso a paso, graficadores online y simuladores de software matemático, permitiendo que la asimilación de muchos temas de diversas áreas de las matemáticas sea mucho más dinámica y práctica (Grisales, 2018, pág. 208).

Las matemáticas han sido una de las materias poco atractivas para gran parte de la población estudiantil, puesto que tiene una mayor complejidad de entendimiento y razonamiento, pero con el uso y aplicación de herramientas informáticas, se contribuye a mejorar el aprendizaje y el rendimiento académico de los estudiantes.

> La formación en matemáticas requiere de un cambio sustancial en la forma como se orienta y en los resultados que se esperan de los estudiantes. Si bien el uso de recursos TIC no soluciona de manera definitiva los vacíos pedagógicos y las deficiencias conceptuales que se le presentan a un estudiante cuando cambia de nivel, sí pueden verse como una opción importante para empezar a generar estas transformaciones, dentro de las cuales una de las más importantes es aprender a ver los conceptos matemáticos de manera tangible con la posibilidad de explorarlos y manipularlos en aras de una comprensión mucho más funcional (Grisales, 2018, pág. 209)

2.3.3. *Beneficio de las TIC*

El uso de las TIC es beneficioso cuando los estudiantes están conscientes de sacar el mejor provecho a la tecnología, de emplear ciertas herramientas informáticas para retroalimentar, profundizar e incursionar en el conocimiento. En la web se puede encontrar una variedad de información, programas, software, entre otros que contribuyen a los procesos educativos de forma colectiva y de manera individual.

También el uso de las TIC "puede resultar beneficioso tanto para el alumno como para el docente, ya que ambos desarrollaran competencias, por un lado, el alumno desarrolla su pensamiento matemático, mientras el docente, desarrolla las habilidades y destrezas para manejar las tecnologías e innovar el proceso enseñanza-aprendizaje" (Jiménez & Jiménez, 2017, pág. 8).

El uso de las TICS en la enseñanza de las matemáticas puede lograr el desarrollo de competencias para la comprensión de conceptos útiles par1a el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas de la vida cotidiana (Jiménez & Jiménez, 2017, pág. 8).

El empleo de GeoGebra para la enseñanza en el área de matemáticas es positivo puesto que aporta una nueva forma de aprender esta asignatura que no es tan acogida por los estudiantes puesto que incurre en razonar y calcular diferentes problemas, entre ellos el aprendizaje de la integral definida que resulta dificultoso para los grupos de estudiantes, en este sentido el empleo de GeoGebra permite que el alumno pueda asumir un papel activo en el proceso de enseñanza – aprendizaje y desarrollar destrezas interactivas así lo sostiene (Açıkgül, 2021), “papel cambiante del maestro en el aula, ventajas sobre el desarrollo cognitivo y afectivo de los estudiantes, la calidad de la enseñanza”.

2.3.4. *Rendimiento académico*

En una investigación realizada por (Osman & Acar, 2020), tuvo como objetivo general “determinar el efecto del aprendizaje colaborativo asistido por computadora, empleando GeoGebra, la metodología fue cuali-cuantitativa, el grupo de estudio estuvo conformado por 35 estudiantes, siendo 18 experimentales y 17 como grupo de control, como resultados se obtuvo que “usando el software GeoGebra tuvo efectos significativos en el rendimiento de los estudiantes en funciones exponenciales y logarítmicas”, por el contrario en aquellos que fue la enseñanza con un método tradicional los resultados denotaron bajas calificaciones; esto demuestra que el uso de GeoGebra incide positivamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje y con ello en el rendimiento académico.

Así mismo (Tatar & Zengin, 2016), en su estudio denominado “comprensión conceptual de la integral definida con GeoGebra”, trabajó sobre el objetivo de determinar la incidencia del uso de GeoGebra en el rendimiento académico de 35 futuros profesores en el área de matemática. Se determinó que el uso de la TIC, contribuye positivamente en el rendimiento académico, siendo positivo al ser una enseñanza interactiva, que permite comprender y resolver los problemas, con ello evidenciar en las pruebas de conocimiento una excelente calificación.

También (Zengin, 2018), en su estudio sobre “Incorporación del software de matemáticas dinámicas GeoGebra en un curso de historia de las matemáticas” planteo un enfoque metodológico mixto, considerando a 23 porfesores del área como población experimental, se llegó a determinar que el empleo de software GeoGebra es eficaz en el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas, así se demuestra que la TIC, contribuye positivamente al proceso de enseñanza - aprendizaje.

En una investigación sobre el vínculo entre la gráfica de una curva paramétrica y el uso de las TIC, aplicó una metodología mixta, experimental, con 19 participantes, enfocados a descubrir si el método de enseñanza adoptado, que incluía el uso de GeoGebra, contribuye a mejorar el rendimiento académico y el conocimiento, por lo que después de los ensayos se demostró la eficacia del uso y aplicación. (Çekmez, 2020)

En este mismo sentido y continuando el análisis de (Zengin, 2017), realizó una investigación con el fin de determinar los efectos del software GeoGebra en el área de matemáticas, fue dirigido a profesores en formación quienes fueron estudiados durante 9 meses puesto que la metodología fue experimental, se comprobó que la utilización de del software GeoGebra incide positivamente en la enseñanza de matemática, esto contribuye a mejorar el rendimiento académico, siendo necesario la capacitación a docentes para que estos puedan compartir clases no tradicionales que atraigan el interés del estudiante y a su vez mejorar las calificaciones en las pruebas y exámenes que demuestran el nivel de conocimiento.

Estos estudios demuestran la eficacia del uso de GeoGebra para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de las matemáticas, evidenciando que si existe un aporte significativo al rendimiento académico y asimilación de la información pro parte de los estudiantes.

> Con las nuevas tendencias tecnológicas, se puede aprovechar al máximo el uso de la computadora para que los alumnos mejoren su rendimiento académico; GeoGebra siendo una herramienta libre en la cual se puede modelar cálculos algebraicos y geométricos, permite que los alumnos piensen matemáticamente y aumenten su nivel de comprensión y sean capaces de resolver problemas de la vida cotidiana (Jiménez & Jiménez, 2017, pág. 10).

"La intervención con el empleo del software GeoGebra demostró que produce cambios más significativos que la enseñanza tradicional" (Diaz, Rodríguez, & Lingán, 2018, pág. 230). Además, "el software GeoGebra permite "aprendizajes desde situaciones comunes, que resultan relevantes y fáciles de ser abordados" (Diaz, Rodríguez, & Lingán, 2018, pág. 232).

Para evidenciar que una herramienta o los métodos de enseñanza aplicados en el proceso educativo y de formación de los estudiantes es factible, existen verificadores de idoneidad, los mimos que develan los resultados de las evaluaciones a los mecanismos adoptados.

Los componentes de indicadores de calidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje engloban seis componentes: contenido, que es la faceta epistémica; interacciones, faceta interaccional; medios, faceta mediacional; contexto, faceta ecológica; aprendizaje, faceta cognitiva; afectos, faceta afectiva. En estos indicadores “se ponen unas expectativas ambiciosas para que todo englobe; siendo así la tecnología es un aspecto esencial en el entorno, y permite que los estudiantes de manera confiada se comprometan con las tareas” (Godino, 2011)

Con respecto a la idoneidad mediacional Godino (2011), “entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje” (p.13), en este sentido la aplicación de la tecnología en los procesos de enseñanza es fundamental donde el docente maneja nuevas estrategias para llagar al conocimiento y mejoramiento del rendimiento académico del alumnado.

2.3.5. *Sistema educativo del Ecuador*

2.3.5.1. Currículo Nacional 2016.

La Constitución de la República del Ecuador establece en los artículos 26 y 27 que el mejoramiento de la calidad educativa en el Ecuador inicia como un deber del gobierno y como un derecho de los ciudadanos de esta manera el Ministerio de Educación debe garantizar el cumplimiento del mandato constitucional siendo éste el derecho a una educación pertinente, adecuada, contextualizada, actualizada y articulada en todo el proceso educativo; por lo que se elabora el currículo nacional con el fin de promover el desarrollo y socialización de las nuevas generaciones y todos sus miembros, plasmándose las intenciones educativas del país.

Las funciones del currículo son, por una parte, informar a los docentes sobre qué se quiere conseguir y proporcionarles pautas de acción y orientaciones sobre cómo conseguirlo y, por otra, constituir un referente para la rendición de cuentas del sistema educativo y para las evaluaciones de la calidad del sistema, entendidas como su capacidad para alcanzar efectivamente las intenciones educativas fijadas (Ministerio de Educación del Ecuador., 2016)

De esta manera se organiza en bloques curriculares los aprendizajes de diferentes asignaturas tanto de subniveles, y niveles educativos, permitiendo mayor grado de flexibilidad de acuerdo a los intereses y necesidades de los estudiantes según su ritmo de aprendizaje, por lo que es importante diferenciar entre aprendizajes imprescindibles y aprendizajes deseables.

Este currículo nacional entró en vigencia en el régimen sierra-amazonía en el 2016 y en el régimen costa-Galápagos en el 2017, mediante el acuerdo ministerial 00020-A con su respectiva reforma en el 2018 en el acuerdo 00089-A.

2.3.5.2. Currículo priorizado.

En el año 2020 al encontrarse el Ecuador ante la emergencia sanitaria por la pandemia coronavirus, el Ministerio de Educación considerando los fundamentos legales presentados tanto en la constitución de la República como en la LOEI y su reglamento, crea el plan educativo Aprendamos juntos en casa, permitiendo afrontar la educación en tiempo de emergencia; adicional considera un currículo prioriado que promueve un proceso de enseñanza y aprendizaje autónomo desarrollado tanto de manera presencial, semipresencial o remota; priorizando la capacidad de desarrollar las habilidades para la vida.

El currículo priorizado permite que el proceso de aprendizaje se cumpla en todas las áreas de conocimiento, tanto de manera disciplinaria como de manera interdisciplinaria. La visión interdisciplinar y multidisciplinar del conocimiento resalta las conexiones entre diferentes áreas y el aporte, de cada una de ellas, en la comprensión global de los fenómenos estudiados (Ministerio de Educación, 2020).

Al mantener la misma estructura del currículo nacional del 2016, este currículo permite delimitar los aprendizajes básicos mediante el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño imprescindibles manteniendo la flexibilidad de acuerdo a cada institución educativa.

Para el desarrollo del currículo priorizado se ha considerado los aprendizajes básicos imprescindibles, enfoque de áreas de estudio y complejidad, que garantizan el alcance del nivel de logro 1 de los estándares de aprendizaje nacional.

2.3.5.3. Competencias digitales en la educación del Ecuador

El pensamiento computacional y la construcción de la ciudadanía digital ha sido el enfoque del Ecuador sobre la educación en competencias digitales, mismo que será adoptado por toda la comunidad educativa, por lo que adicional al desarrollo de capacidades especificadas en el currículo priorizado también se encuentran el manejo de tecnologías; de esta manera al incorporarlas al currículo nacional contribuirá a que el estudiante sea capaz de aplicar nuevas habilidades y soluciones creativas para los problemas del mundo real.

2.4. Variables de estudio

2.4.1. *Identificación de variables*

Variable independiente: Software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

Variable dependiente: Rendimiento académico.

2.4.2. *Operacionalización conceptual de las variables*

Tabla 1-2: Operacionalización de variables-variable independiente.

VARIABLE INDEPENDIENTE	CONCEPTUALIZACIÓN	DIMENSIONES	INDICADORES	DEFINICIÓN DE LOS INDICADORES	CRITERIO DE MEDICIÓN	TÉCNICA	INSTRUMENTO	ESCALA
Software GeoGebra para el estudio de la integral definida.	El software GeoGebra es una herramienta tecnológica que contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje, permitiendo que las clases sean interactivas, diferentes y no tradicionales.	Manejo de TIC.	Nivel de conocimiento.	Se deriva del avance en la producción del saber y representan un incremento en la complejidad con que se explica o comprende la realidad.	Cualitativo.	Encuesta.	Cuestionario.	Nominal
			Vista Gráfica.	Vista que ocupa la parte central, donde aparecen los objetos gráficos.				
			Vista algebraica.	Vista donde aparecen los valores de lso objetos.				
			Hoja de cálculo.	Permite crear e interactuar de manera tabular con los objetos gráficos o pegar y copiar tablas.				
			Cálculo simbólico.	Permite introducir expresiones y comandos específicos.				
		Interactividad.	Competitividad.	Capacidad para desarrollar actividades mediante estrategias.				
			Tiempo de ejecución.	Tiempo que un programa de computadora se ejecuta en un sistema operativo.				
			Niveles de dificultad.	Las dificultades, por lo tanto, son inconvenientes o				

				barreras que hay que superar para conseguir un determinado objetivo.				
		Didáctica.	Método heurístico.	Método utilizados para la instrucción impartida y lograr el aprendizaje deseado por los estudiantes permitiendo descubrir y crear.				

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Tabla 2-2: Operacionalización de variables-variable dependiente.

VARIABLE DEPENDIENTE	CONCEPTUALIZACIÓN	DIMENSIONES	INDICADORES	DEFINICIÓN DE LOS INDICADORES	CRITERIO DE MEDICIÓN	TÉCNICA	INSTRUMENTO	ESCALA
Rendimiento académico	Hace referencia a la evaluación del conocimiento adquirido en el ámbito escolar, terciario o universitario.	Aprovechamiento escolar.	Conocimiento.	Hechos o información adquirida ya sea por la experiencia o por la educación.	Cuantitativo.	Test.	Cuestionario de evaluación.	Ordinal.
			Aprovechamiento académico.	Obtención de buenas calificaciones durante un ciclo escolar.				
			Destrezas.	Habilidad y experiencia en la realización de una actividad determinada, generalmente automática o inconsciente.				

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2.4.3. *Matriz de consistencia*

Tabla 3-2: Matriz de consistencia.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVO GENERAL	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
¿De qué manera contribuye la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco?	Implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.	La implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.	Software GeoGebra para el estudio de la integral definida.	Nivel de conocimiento.	Encuesta.	Cuestionario.
				Vista gráfica. Vista algebraica. Hoja de cálculo. Cálculo simbólico. Competitividad. Tiempo de ejecución. Niveles de dificultad. Método heurístico.	Test.	
			Rendimiento Académico.	Conocimiento. Aprovechamiento académico. Destrezas.	Test.	Prueba objetiva..

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Diseño de la investigación

3.1.1. *Alcance y tipo de investigación*

El presente trabajo de titulación tuvo como finalidad implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida mediante prácticas experimentales y resolución de ejercicios, para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco en la ciudad de Ibarra, durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021; basada en un enfoque cuantitativo porque se encuentra orientado a estudios experimentales, manteniendo un diseño cuasi-experimental en donde se trabajará con dos grupos, el de control y el de experimentación, dirigidos a los estudiantes de tercero de bachillerato.

También se consideró a la investigación de tipo explicativo, en vista de que estableció de qué manera contribuye la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en el rendimiento académico de los estudiantes.

Con los dos grupos se trabajó los mismos contenidos de integral definida durante un periodo de 2 sesiones por semana, siendo un tiempo aproximado de 14 sesiones para cada grupo de acuerdo al horario de clases. Para su respectivo tratamiento se analizó sus calificaciones obtenidas en el pre test así como en el post test y mediante un análisis estadístico se conoció como influye la implementación del software GeoGebra en el rendimiento académico de los estudiantes.

3.1.2. *Métodos de la investigación*

Los métodos empleados para la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral en los estudiantes de bachillerato fueron:

Inductivo: se partió del análisis de las particularidades de los estudiantes de tercero de bachillerato, identificando las dificultades de aprendizaje en la integral definida, conociendo que el método empleado por el docente es tradicional por lo que no logra profundizar los contenidos, reflejándose en un bajo rendimiento académico.

Deductivo: permitió identificar el problema general de la investigación, mediante la deducción de que no se aplica un software GeoGebra para la enseñanza de la integral definida.

Estadístico: fue necesario para el procesamiento de la información obtenida de los test aplicados a los estudiantes objeto de experimentación y la comparación con el grupo de referencia. Se utilizó la prueba T-Student para la comprobación de hipótesis por ser una distribución normal.

Analítico - sintético: el primero se aplicó para analizar los test aplicados a los estudiantes y realizar las comparaciones respectivas con el grupo de referencia, así como para la prueba de hipótesis; el método sintético permitió sintetizar la información a manera de resultados y formulación de las conclusiones y recomendaciones.

Comparativo: permitió comparar los resultados del rendimiento académico por parte del grupo experimental con los de referencia, demostrando las diferencias en las calificaciones de aquellos que se empleó el software GeoGebra con aquellos que la enseñanza fue mediante una metodología tradicional.

Bibliográfico: se empleó para fundamentar teóricamente las variables motivo de estudio, referidas al software GeoGebra y rendimiento académico, recurriendo a libros, revistas, bases de datos y artículos científicos.

Heurístico: permitió resolver los problemas y ejercicios matemáticos mediante la creación y descubrimiento, utilizando diferentes reglas tales como identificar, definir y presentar el problema (entender), explorar y avanzar en estrategias (trazar y ejecutar el plan), para así obtener el resultado (revisar).

3.1.3. *Enfoque de la investigación*

La presente investigación tuvo enfoque cuantitativo, porque según Hernández Sampieri (2014) representa un conjunto de procesos siendo secuencial, probatoria que analiza la realidad objetiva, es decir, se recolectó datos para de esta manera validar la hipótesis de acuerdo a la medición numérica y a un análisis estadístico de los registros de rendimiento académico obtenidos tanto en el grupo de control como en el grupo de experimentación en los terceros de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa "San Francisco" durante la segunda parcial del segundo quimestre durante el año lectivo 2020-2021.

3.1.4. *Diseño de estudio*

El presente estudio consideró el diseño cuasi experimental, en vista de que se pudo manipular deliberadamente la variable independiente para observar su efecto sobre a variable dependiente, no obstante, difiere del diseño experimental puro porque los grupos ya se encontraban conformados antes del experimento.

Para este diseño cuasi-experimental se tiene pre y post test, debido a que se estableció dos grupos de trabajo, el grupo experimental a quienes se implementó GeoGebra en el estudio de la integral definida y el grupo de control con quienes se trabajó con la metodología tradicional: TPL. (Tiza, pizarrón y lengua).

El Pre test permitió evaluar y verificar que no exista diferencias en los conocimientos previos de los grupos, en caso de haber existido se procedía a reforzar a los grupos a fin de que la investigación no se viese afectada en cuanto a las diferencias en contenidos.

Una vez aplicado el pre test se procedió al desarrollo de los contenidos establecidos para el estudio de la integral definida a cada uno de los grupos, no obstante, al grupo de control no se implementó GeoGebra mientras que al experimental sí.

Para evidenciar los resultados finales de la investigación en los dos grupos de trabajo se procedió a aplicar el post test, de esta manera se puede apreciar las variaciones en cada uno de ellos.

Tabla 1-3: Resumen del diseño del estudio.

Grupo	Pre-Test	Tratamiento	Post-Test
Control	x	0	x
Experimentación	x	x	x

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Dónde:

x-se aplica.

0-no se aplica.

3.2. Población y muestra

3.2.1. *Población*

En la investigación se trabajó como población de estudio los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco pertenecientes al año lectivo 2020-2021, siendo un total de 377 estudiantes.

3.2.2. *Unidad de análisis*

La unidad de análisis es el que se estudió; en este caso, el presente trabajo de titulación estudia la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en estudiantes de bachillerato; se manejó a los estudiantes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco de la ciudad de Ibarra durante la segunda parcial del Segundo quimestre del año lectivo 2020-2021.

3.2.3. *Muestra*

Se consideró a los estudiantes de tercero de bachillerato matriculados en los paralelos “A”, “B” y “C”, en vista de que mantienen conectividad durante dos sesiones de 60 minutos a la semana, siendo un total de 110 estudiantes.

3.2.4. *Organización de grupos*

Para la presente investigación se organizó los grupos de la siguiente manera.

Tabla 2-3: Organización de grupos.

ORD.	GRUPOS DE ESTUDIANTES	NÚMERO DE ESTUDIANTES.
1	De control.	38
2	De experimentación.	72
	TOTAL	**110**

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.3.1. *Técnicas*

Las técnicas de recolección de información primaria fueron:

Observación: Al ser un método de recolección de datos que consisten en el registro sistemático, válido y confiable de comportamiento y situaciones observables, se aplicó al momento de desarrollar las clases virtuales utilizando el software GeoGebra, en donde se evidenció que a los estudiantes les llama mucho la atención trabajar con este tipo de herramientas al ser interactivas, dinámicas que permiten atraer la atención y concentración, puesto que dicho software combina una serie de animaciones, colores y dibujos que vinculan el contenido con la motivación por aprender.

Encuesta: fue dirigida a los estudiantes de tercero de bachillerato en un primer momento como herramienta de diagnóstico para identificar el nivel de conocimiento y manejo de herramientas tecnológicas como el software GeoGebra.

Test: fue aplicado en dos momentos, el primero un pre test antes de utilizar el software GeoGebra a los dos grupos de trabajo; el segundo fue aplicado después de 8 semanas al grupo experimental y de referencia para evidenciar los resultados.

3.4. Recolección y procesamiento de datos

Se utilizó los siguientes instrumentos para la recolección de datos:

Registro observacional-ficha de observación: permitió evidenciar aspectos referentes al motivo de la investigación.

Cuestionario: Este instrumento consiste en un conjunto de preguntas que permite recolectar datos respecto de una o más variables a medir y se utiliza en encuestas de todo tipo. Para la investigación se aplicó una encuesta de 13 preguntas cerradas mismas que analizan la situación a la población de estudio en función a las dos variables, software GeoGebra para el estudio de la integral definida y rendimiento académico.

Prueba objetiva: Este instrumento de recolección de datos al construirse a partir de un conjunto de preguntas claras y precisas, se aplicó durante dos fases, en la fase 1 de diagnóstico lo cual permitió analizar si los grupos tanto de control como experimental necesitan una nivelación previa de contenidos antes de implementar la propuesta y en la fase 5 de evaluación después de la aplicación de la propuesta para determinar el rendimiento académico a cada grupo de estudio.

Para el procesamiento de datos se utilizó Excel y SPSS.

3.5. Validez y confiabilidad de los instrumentos de recolección de datos

La confiabilidad y validez son los requisitos que debe cubrir un instrumento de medición, siendo la confiabilidad el grado en que su aplicación repetida al mismo objeto produce resultados iguales, es decir, genera resultados consistentes y coherentes, pudiéndose determinar mediante diversas técnicas, mientras que la validez mide realmente la variable que se pretende medir.

Tabla 3-3: Valores de niveles de confiabilidad.

RANGOS	MAGNITUD
0.81 - 1.00	Muy Alta
0.61 - 0.80	Alta
0.41 - 0.60	Moderada
0.21 – 0.40	Baja
0.01 – 0.20	Muy Baja

Fuente: (Helingeniero, 2021).

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

3.6. Desarrollo de la metodología didáctica

Para el presente estudio de investigación se desarrolló la siguiente metodología determinada por fases y actividades.

Tabla 4-3*:* Desarrollo de la metodología didáctica.

FASE	OBJETIVO	ACTIVIDADES
Fase 1 **Diagnóstico**	Diagnosticar el nivel de manejo del software GeoGebra en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.	• Aplicación de encuesta. • Aplicación del pre test.
Fase 2 **Fundamentación**	Fundamentar la información de manera científica y teórica sobre el software GeoGebra como herramienta tecnológica didáctica y la integral definida como contenido de estudio.	• Aplicación método bibliográfico
Fase 3 **Diseño**	Diseñar prácticas experimentales en el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.	• Diseño de plan de clase. • Empleo del método heurístico.
Fase 4 **Implementación**	Proponer las prácticas experimentales diseñadas en el software GeoGebra al grupo de experimentación para mejorar el rendimiento académico durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021.	Aplicación de software GeoGebra mediante planes de clase.
Fase 5 **Evaluación**	Validar la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida mediante un análisis estadístico de datos del rendimiento académico del grupo de control y de experimentación.	• Aplicación de post test al grupo experimental y de referencia. • Demostración de hipótesis.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la presente investigación se debió considerar que exista equivalencia entre los dos grupos, evitando de esta manera el desvío de los resultados, por lo que para el grupo de control se mantuvo la metodología tradicional, mientras que para el grupo de experimentación se implementó el software GeoGebra como método heurístico para el estudio de la integral definida, por lo tanto, para mantener la equivalencia entre los grupos se consideró lo siguiente.

- Mismo docente.
- Igual contenido de estudio.
- Mismo número de sesiones.
- Desarrollo virtual de las clases.
- Mismas actividades autónomas, talleres y lecciones.

Es importante mencionar que la Unidad Educativa "San Francisco" durante la etapa virtual se encuentra impartiendo clases virtuales todos los días mediante la plataforma Zoom de 8h00 a 12h30 en un horario establecido, mientras que para el proceso de evaluación manejó su instrumento de evaluación basado en los siguientes aspectos.

- **Número de quimestres**: 2.
- **Duración de cada quimestre**: 20 semanas.
- **Número de parciales**: 4.
- **Duración de cada parcial:** 10 semanas.
- **Número de insumos de cada parcial**: 3
- **Detalle de cada insumo**:
    - **Actividades autónomas:** Trabajos desarrollados fuera del horario de clase.
    - **Talleres:** Trabajos desarrollados dentro del horario de clase.
    - **Lecciones:** Cuestionarios on-line.

De esta manera, la presente investigación basada en el instrumento de evaluación de la Unidad Educativa "San Francisco" se desarrolla durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021, con fecha de inicio 5 de abril y fecha de finalización 28 de mayo, cumpliéndose de esta manera las 8 semanas de acuerdo al cronograma establecido para terceros años de bachillerato general unificado.

4.1. Encuesta

4.1.1. *Validez*

De acuerdo a la técnica juicio de expertos se analizó la validez de la encuesta aplicada a los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado, para lo cual se contó con 3 expertos mismos que fueron seleccionados en función a aspectos relevantes como experiencia dentro del área de estudio y de investigación, de esta manera se contó con dos docentes de Matemática y una docente del área de Lengua y Literatura. La ficha de validación por experto se encuentra como anexo, no obstante, se presenta el resumen de los expertos.

Tabla 1-4: Validación del cuestionario-encuesta por expertos.

ÍTEM	INDICADOR	PUNTUACIÓN POR EXPERTOS			PUNTUACIÓN POR PREGUNTA		
		EXPERTO 1	EXPERTO 2	EXPERTO 3	SUMA	PROMEDIO	PORCENTAJE
1	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	4	5	5	14	4,67	93,33
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
2	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
3	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
4	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	4	5	5	14	4,67	93,33
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100

5	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	4	14	4,67	93,33
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
6	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	4	14	4,67	93,33
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
7	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
8	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
9	Claridad	5	4	5	14	4,67	93,33
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
10	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
11	Claridad	4	5	4	13	4,33	86,67
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
12	Claridad	5	4	5	14	4,67	93,33
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
13	Claridad	5	5	5	15	5	100

	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
TOTAL	**Claridad**					**191**	**97,95 %**
	Coherencia					**194**	**99,49 %**
	Suficiencia					**194**	**99,49 %**
	Metodología					**193**	**98,97 %**
	Pertinencia					**195**	**100,00 %**

Fuente: Resultados de validación por ítem, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la validación por expertos se obtiene la valoración general del cuestionario para la aplicación a los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado.

Tabla 2-4: Valoración del cuestionario-encuesta.

CRITERIO	VALORACIÓN
Validez de claridad	97,95 %
Validez de coherencia	99, 49 %
Validez de suficiencia	99,49 %
Validez de metodología	98,97 %
Validez de pertinencia	100,00 %
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario.	100,00 %
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial.	100,00 %
El número de ítems es suficiente para recoger la información.	100,00 %

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.1.2. *Confiabilidad*

Para determinar la consistencia interna de la encuesta, es decir, el grado que produce resultados consistentes y coherentes se analizó mediante el coeficiente alfa Cronbach en vista de que sus medidas no son dicotómicas, los resultados se presentan como anexo.

Para calcular el coeficiente Alfa de Cronbach se analizó la fórmula mediante la varianza de los ítems

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2}\right)$$

Dónde

α: Coeficiente Alfa de Cronbach.

k: Número de ítems.

$\sum S_i^2$: Sumatoria de varianza de los ítems.

S_t^2: Varianza de la suma de los ítems.

$$\alpha = \frac{13}{13-1}\left(1 - \frac{2{,}969808173}{9{,}572793995}\right)$$

$$\alpha = 0{,}753$$

Tabla 3-4: Análisis de fiabilidad en SPSS cuestionario-encuesta.

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
,753	,729	13

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo al análisis desarrollado tanto de manera manual (utilización de fórmula) como en el software SPSS se tiene que el coeficiente Alfa de Cronbach es $\alpha = 0{,}753$, lo que establece que el nivel de confiabilidad de la encuesta se encuentra en el rango de 0,61 a 0,80 siendo confiabilidad alta.

Decisión: Después de haber analizado la validez y confiabilidad del instrumento, se acepta su formato.

4.1.3. *Análisis e interpretación de resultados de la encuesta aplicada en la fase 1 de diagnóstico.*

Con el propósito de diagnosticar el nivel de manejo del software GeoGebra en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco se desarrolló como instrumento de recolección de datos un cuestionario de 13 preguntas, mismo que se aplicó en la fase 1 de diagnóstico a los 110 de estudiantes de tercero de bachillerato del año lectivo 2020-2021, estos resultados sirvieron para desarrollar la propuesta de implementación del software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

A continuación, se procede a realizar el análisis respectivo de la encuesta aplicada, en donde se detalla de manera específica cada pregunta con su respectiva tabla y gráfica de datos.

Pregunta No. 01: ¿Con qué frecuencia su docente de Matemática utiliza recursos didácticos o herramientas tecnológicas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje?

Tabla 4-4: Utilización de recursos didácticos o herramientas tecnológicas.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Nunca	49	44,545
Casi nunca	61	55,455
Ocasionalmente	0	0,000
Cada mes	0	0,000
Una vez a la semana	0	0,000
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

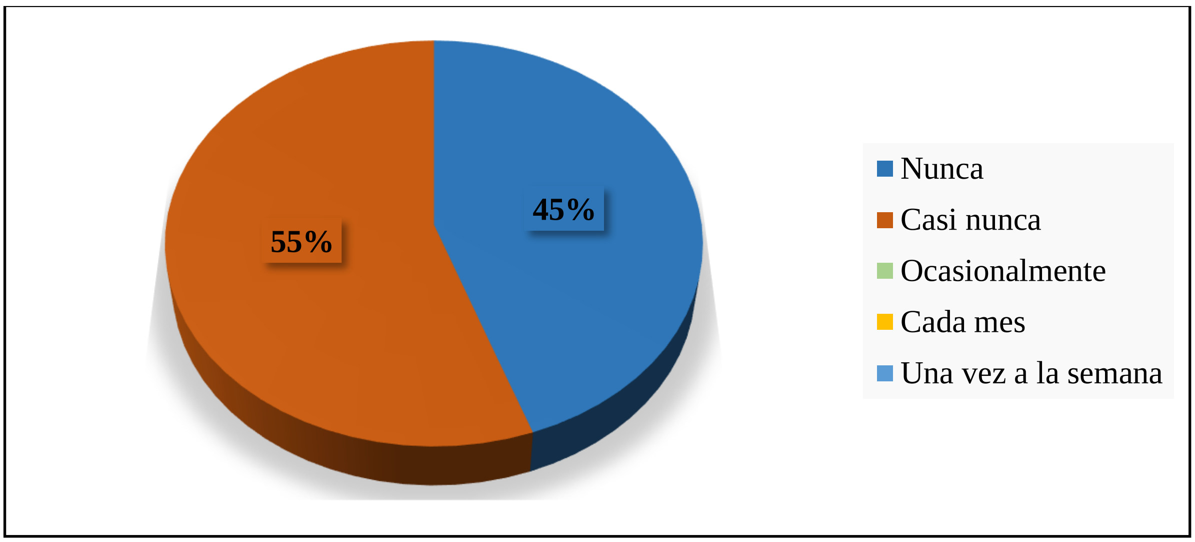


Gráfico 1-4: Utilización de recursos didácticos o herramientas tecnológicas.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

Se puede evidenciar que la mayoría de estudiantes siendo el 55% indican que casi nunca su docente de Matemática utiliza recursos didácticos o herramientas tecnológicas, mientras que el 45% manifiesta que nunca lo hace; lo que indica que es necesario utilizar algún recurso didáctico o herramienta que mejore el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Pregunta No. 02: ¿Cómo le resulta a usted el estudio de cálculo integral?

Tabla 5-4: Estudio de cálculo integral.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Muy difícil	30	27,273
Difícil	54	49,091
Regular	26	23,636
Fácil	0	0,000
Muy fácil	0	0,000
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

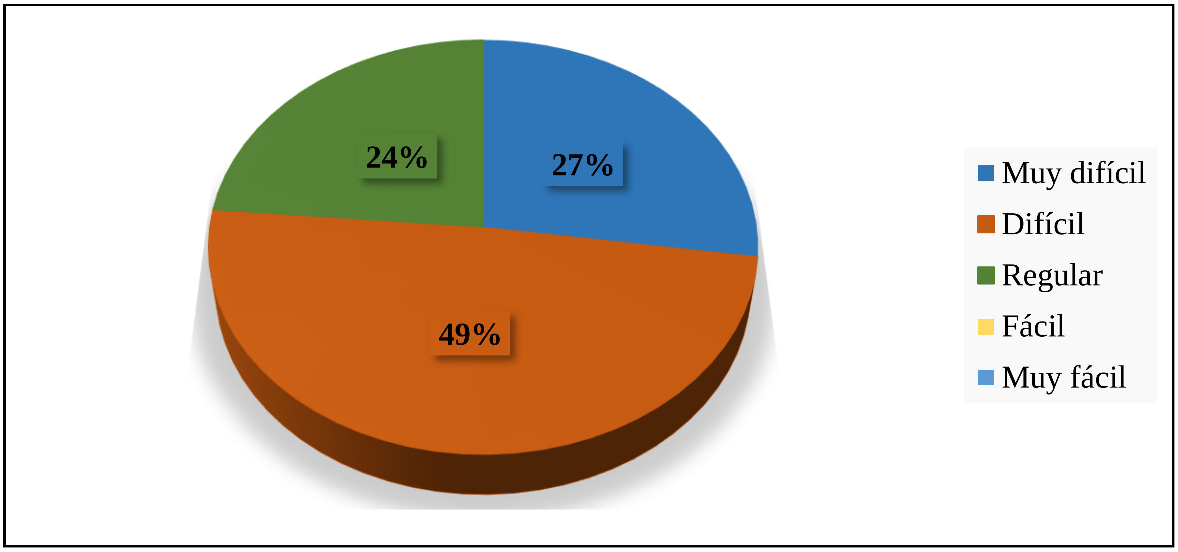


Gráfico 2-4: Estudio de cálculo integral.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

De acuerdo a los resultados obtenidos se puede evidenciar que en la mayoría de estudiantes existe cierto grado de dificultad en el estudio de cálculo integral, es decir, el 27 % le resulta muy difícil, el 49% difícil, mientras que el 24% de manera regular; por lo que es necesario plantear estrategias didácticas para su proceso de enseñanza y aprendizaje que permita reducir o eliminar la dificultar en su estudio.

Pregunta No. 03: Su docente de Matemática utiliza algún software matemático específico para el estudio de cálculo integral.

Tabla 6-4: Utilización de software Matemático.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Nunca	84	76,364
Casi nunca	26	23,636
Ocasionalmente	0	0,000
Cada mes	0	0,000
Una vez a la semana	0	0,000
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

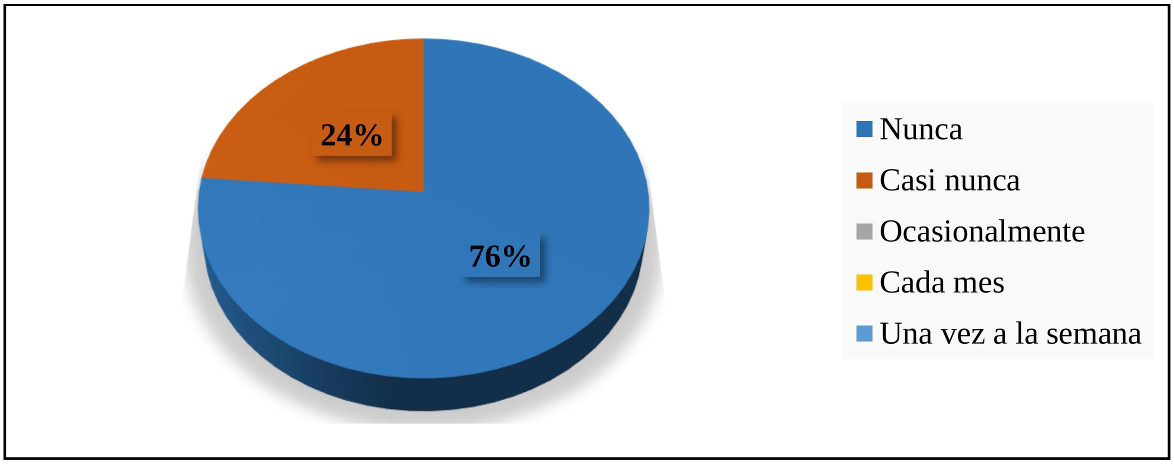


Gráfico 3-4: Utilización de software Matemático.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

La mayor parte de estudiantes indican que nunca su docente de Matemática utiliza algún software Matemático específico para el estudio de cálculo integral, por lo que es necesario plantear un software que permita la mejor comprensión y entendimiento en los estudiantes, así como un mejor rendimiento académico.

Pregunta No. 04: Considera que su rendimiento académico en el estudio de la Integral definida mejoraría con la aplicación de los software matemáticos.

Tabla 7-4: Rendimiento académico.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	33	30,000
Totalmente de acuerdo	77	70,000
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

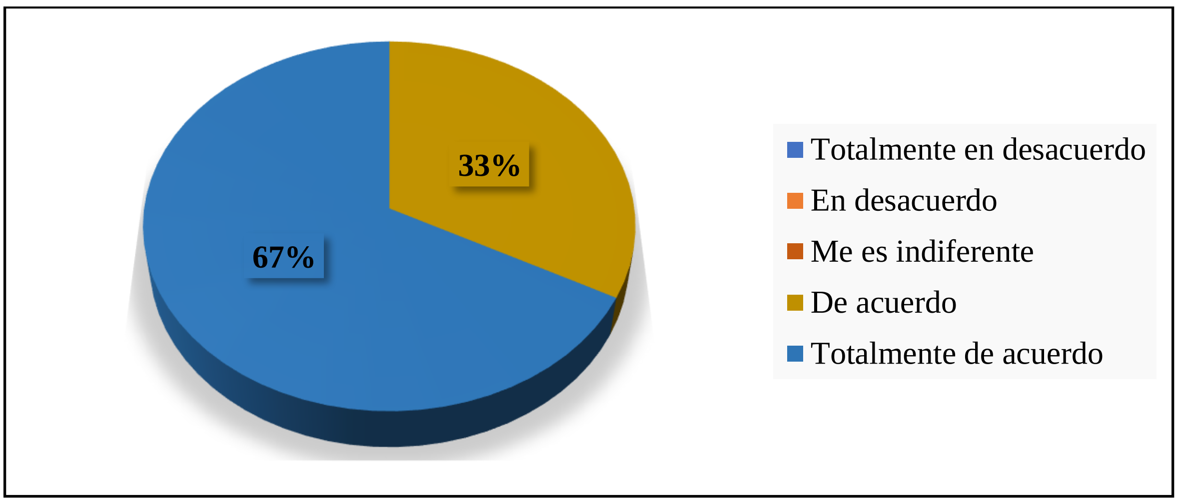


Gráfico 4-4: Rendimiento académico.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

La mayor parte de estudiantes se encuentra totalmente de acuerdo al considerar que su rendimiento académico en el estudio de la Integral definida mejoraría con la aplicación de los software matemáticos, por lo que al contar con resultados positivos los estudiantes tienen la predisposición de utilizar un software matemático para su estudio.

Pregunta No. 05: Considera importante la utilización de software matemáticos para el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño de la Integral Definida.

Tabla 8-4: Importancia de utilización de software matemático.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
No es importante	0	0,000
Poco importante	0	0,000
Algo importante	0	0,000
Importante	39	35,455
Muy importante	71	64,545
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

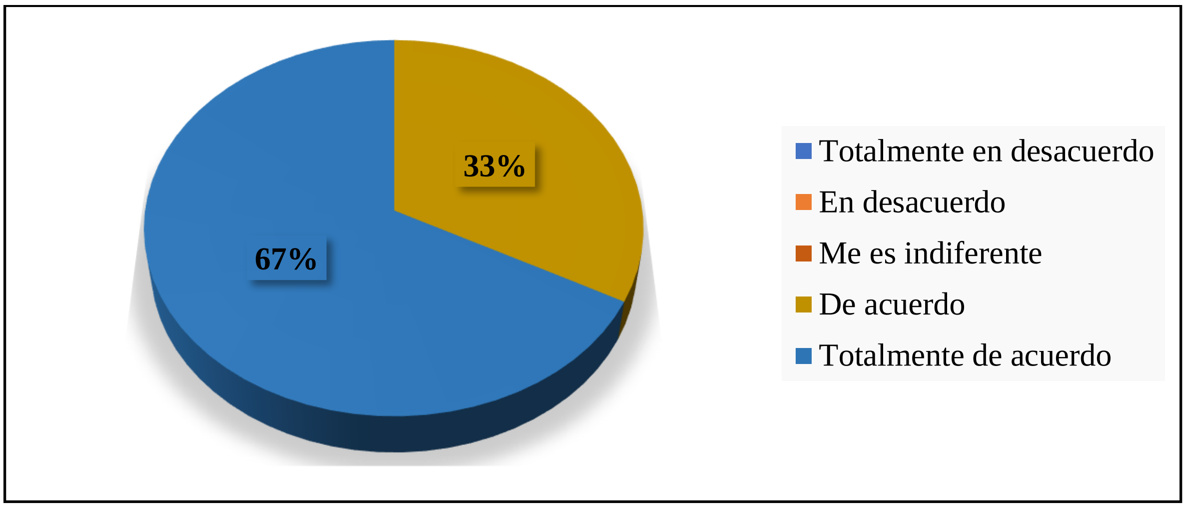


Gráfico 5-4: Importancia de utilización de software matemático.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

El 67 % de estudiantes considerándose la mayoría se encuentra totalmente de acuerdo que al utilizar el software matemático desarrollarían las destrezas con criterio de desempeño en el estudio de la integral definida, por lo que se considera la utilización como estrategia didáctica.

Pregunta No. 06: Con la utilización de un software matemático en el estudio de la integral definida mejorará su interés y motivación por aprender.

Tabla 9-4: Motivación e interés.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	36	32,727
Totalmente de acuerdo	74	67,273
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

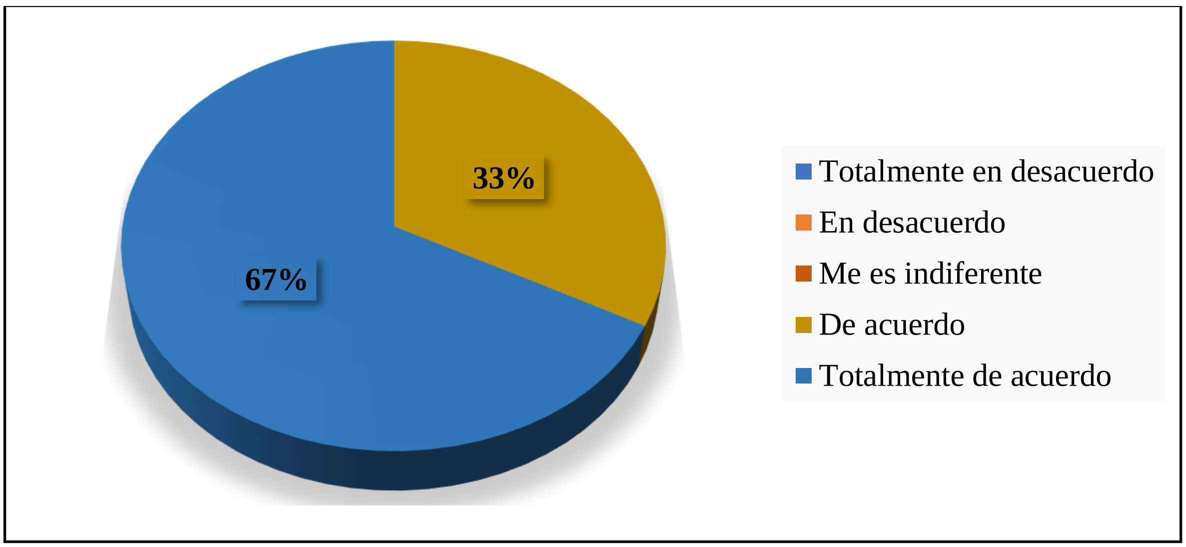


Gráfico 6-4: Motivación e interés.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

Los resultados obtenidos indican que la mayor parte de estudiantes se encuentra totalmente de acuerdo que al utilizar un software matemático en el estudio de la integral definida mejorará su interés y motivación por aprender, por lo que existe la factibilidad de implementar el software como estrategia didáctica.

Pregunta No. 07: ¿Cómo considera su nivel en el manejo de software matemáticos?

Tabla 10-4: Nivel de manejo de software matemáticos.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Pésimo	15	13,636
Malo	48	43,636
Regular	36	32,727
Bueno	8	7,273
Excelente	3	2,727
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

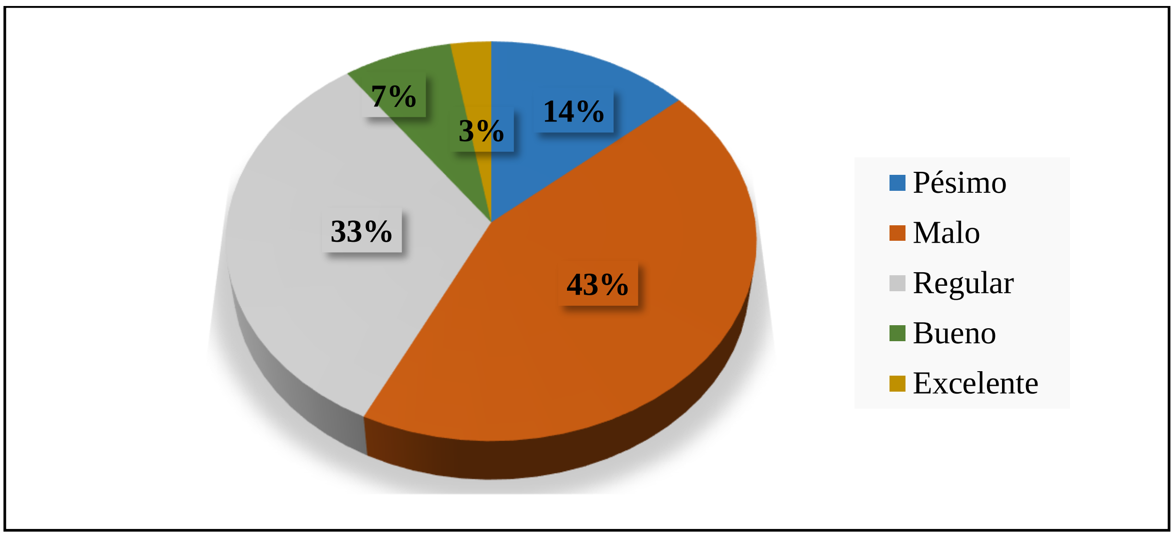


Gráfico 7-4: Nivel de manejo de software matemáticos.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

De acuerdo a los resultados obtenidos a pesar de que existe una diferencia en el nivel de manejo de software matemáticos en los estudiantes de tercero de bachillerato, al existir la predisposición de utilizar un software se considera la posibilidad de implementarlo en el estudio de la integral definida.

Pregunta No. 08: Le gustaría que en su estudio de la integral definida se implemente un software matemático.

Tabla 11-4: Implementación de software Matemático.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	2	1,818
De acuerdo	33	30,000
Totalmente de acuerdo	75	68,182
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

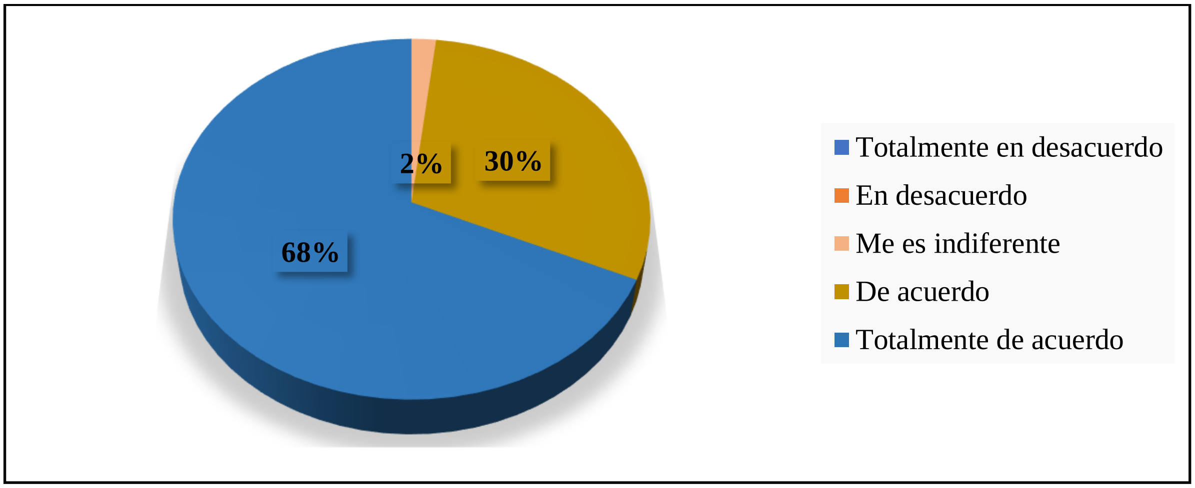


Gráfico 8-4: Implementación de software Matemático.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

La mayor parte de estudiantes de tercero de bachillerato siendo el 68% de ellos, indican que les gustaría implementar un software Matemático en el estudio de la integral definida, mismo que podría mejorar su proceso de enseñanza y aprendizaje, así como su rendimiento académico.

Pregunta No. 09: Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe ser libre.

Tabla 12-4: Software matemático libre.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	2	1,818
Totalmente de acuerdo	108	98,182
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

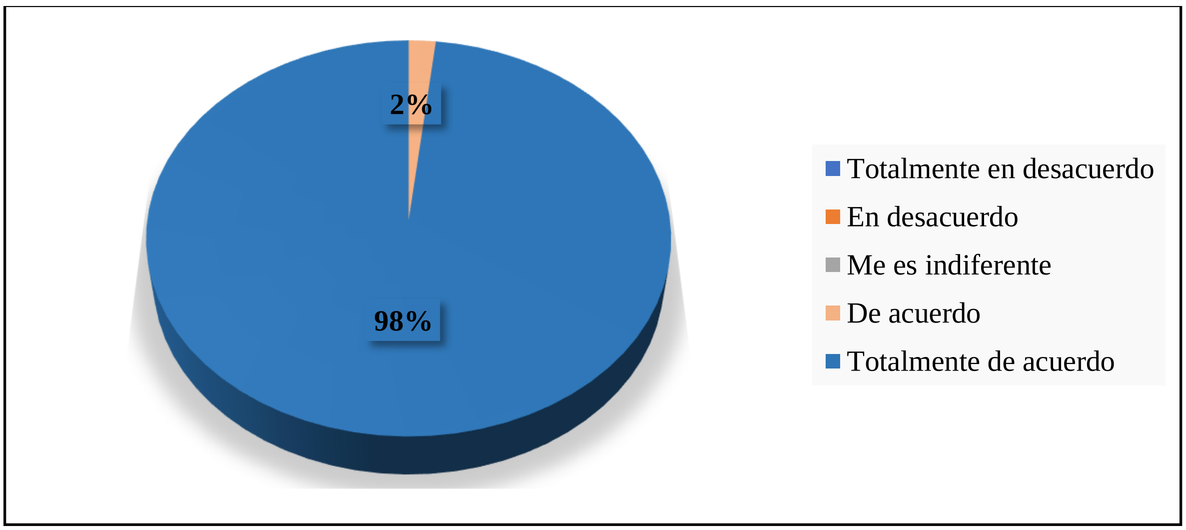


Gráfico 9-4: Software matemático libre.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

De acuerdo a los resultados obtenidos, la mayor parte de los estudiantes siendo el 98% se encuentra totalmente de acuerdo y consideran que el software matemático a utilizar durante el estudio de la integral definida debe ser libre para su fácil acceso.

Pregunta No. 10: Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe ser de fácil manejo.

Tabla 13-4: Software matemático manejo.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	3	2,727
Totalmente de acuerdo	107	97,273
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

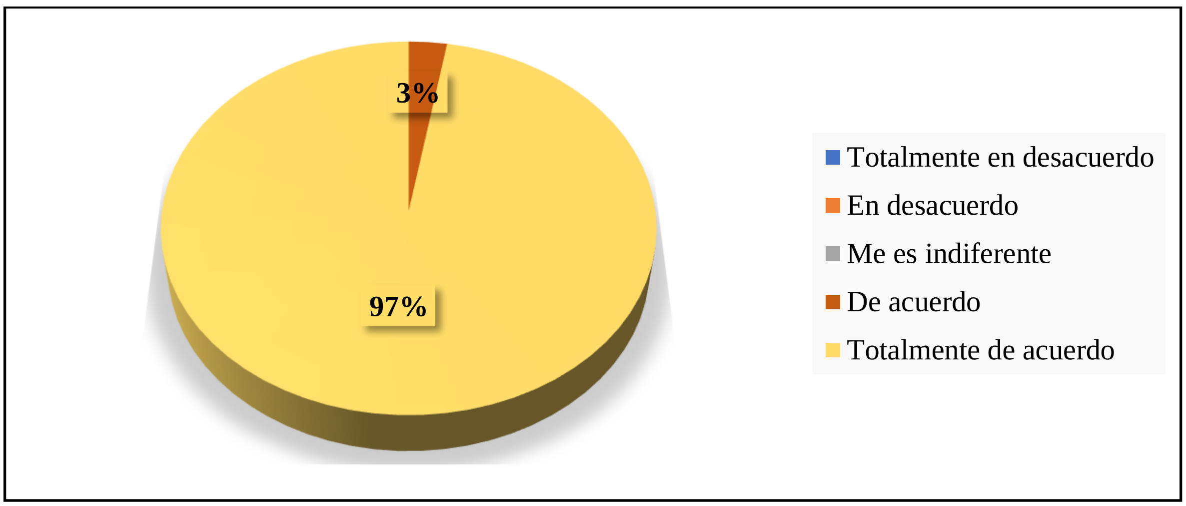


Gráfico 10-4: Software matemático manejo.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

La mayor parte de los estudiantes de tercero de bachillerato siendo el 97% de ellos, se encuentra totalmente de acuerdo al considerar que el software matemático a utilizar debe ser de fácil manejo.

Pregunta No. 11: Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe contener vista gráfica, algebraica, hoja de cálculo para comprender de mejor manera.

Tabla 14-4: Elementos del software matemático.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	15	13,636
Totalmente de acuerdo	95	86,364
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

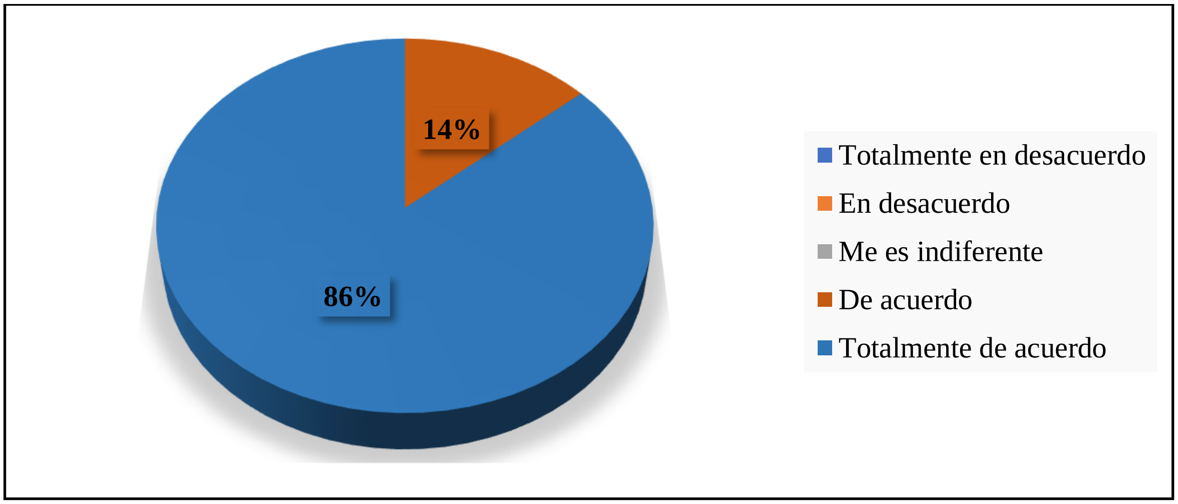


Gráfico 11-4: Elementos del software matemático.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

De acuerdo a los resultados obtenidos, el 86% está totalmente de acuerdo y considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe contener vista gráfica, algebraica, hoja de cálculo para comprender de mejor manera.

Pregunta No. 12: Considera usted que el software matemático que implemente en su estudio de la integral definida debe permitir la interacción de la práctica con el conocimiento.

Tabla 15-4: Software matemático interacción.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	3	2,727
Totalmente de acuerdo	107	97,273
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

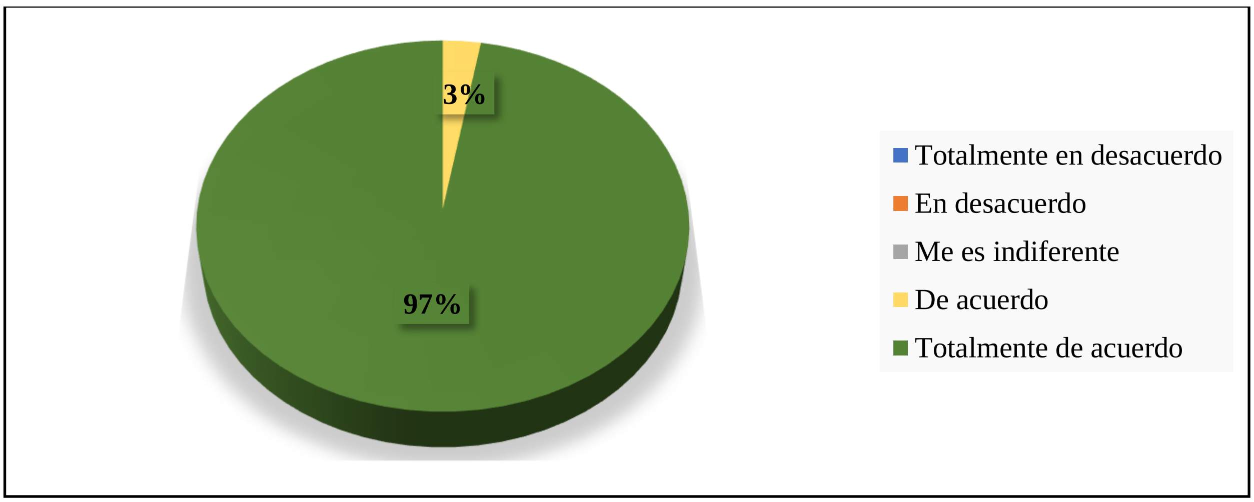


Gráfico 12-4: Software matemático interacción.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

Con el resultado obtenido, el 97% de estudiantes se encuentra totalmente de acuerdo al considerar que el software matemático implementado en el estudio de la integral definida debe permitir la interacción de la práctica con el conocimiento.

Pregunta No. 13: Le gustaría trabajar con el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

Tabla 16-4: Software GeoGebra.

INDICADOR	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Totalmente en desacuerdo	0	0,000
En desacuerdo	0	0,000
Me es indiferente	0	0,000
De acuerdo	9	8,182
Totalmente de acuerdo	101	91,818
TOTAL	**110**	**100,000**

Fuente: Resultados encuesta aplicada, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

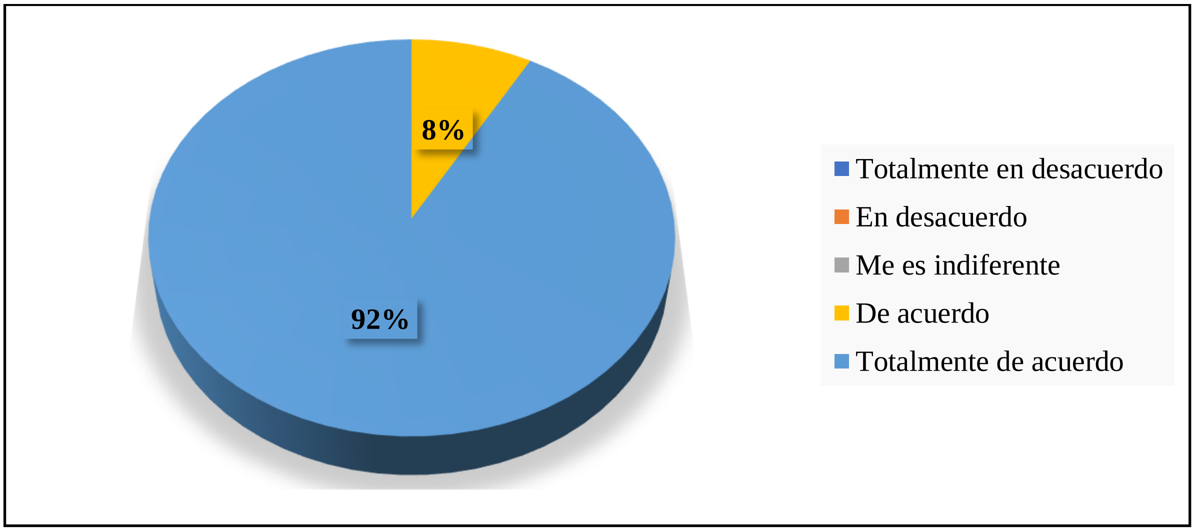


Gráfico 13-4: Software GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis e interpretación:

De acuerdo a los resultados obtenidos, la mayor parte de estudiantes siendo el 92% de ellos están totalmente de acuerdo y consideran al software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

4.2. Diagnóstico de conocimientos previos del grupo de control y de experimentación, previa al desarrollo de la investigación

4.2.1. *Validez.*

De la misma manera que se validó el cuestionario para la aplicación de la encuesta, de acuerdo a la técnica juicio de expertos, también se analizó la validez de la prueba objetiva aplicada a los grupos de control y experimentación establecidos con los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado, para lo cual se contó con 3 expertos mismos que fueron seleccionados en función a aspectos relevantes como experiencia dentro del área de estudio y de investigación. La ficha de validación por experto se encuentra como anexo, no obstante, se presenta el resumen de los expertos.

Tabla 17-4: Validación del cuestionario-prueba objetiva por expertos.

ÍTEM	INDICADOR	PUNTUACIÓN POR EXPERTOS			PUNTUACIÓN POR PREGUNTA		
		EXPERTO 1	EXPERTO 2	EXPERTO 3	SUMA	PROMEDIO	PORCENTAJE
1	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
2	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
3	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
4	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
5	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100

	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
6	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
7	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
8	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
9	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
10	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
TOTAL		**Claridad**				**195**	**100,000 %**
		Coherencia				**195**	**100,000 %**
		Suficiencia				**195**	**100,000 %**
		Metodología				**195**	**100,000 %**
		Pertinencia				**195**	**100,000 %**

Fuente: Resultados de validación por ítem, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la validación por expertos se obtiene la valoración general del cuestionario para la aplicación a los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado.

Tabla 18-4: Valoración del cuestionario-prueba objetiva.

CRITERIO	VALORACIÓN
Validez de claridad	100,00 %
Validez de coherencia	100,00 %
Validez de suficiencia	100,00 %
Validez de metodología	100,00 %
Validez de pertinencia	100,00 %
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario.	100,00 %
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial.	100,00 %
El número de ítems es suficiente para recoger la información.	100,00 %

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.2.2. *Confiabilidad*

Para determinar la confiabilidad de la prueba objetiva que sirvió como instrumento aplicado en el diagnóstico (pre test) se utilizó el coeficiente Kuder Richarson o KR-20, en vista de que se desarrolló un test de 10 ítems con preguntas de acierto y error, siendo valorado con 1 punto para la respuesta correcta y 0 puntos para la respuesta incorrecta, este coeficiente permite estimar la confiabilidad de consistencia interna de una prueba, representado de la siguiente manera.

$$r_{KR20} = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2}\right)$$

Dónde:

- K: Número de ítems.
- p: Porcentaje o proporción de sujetos que pasaron un ítem sobre el total de sujetos.
- q: Porcentaje o proporción de sujetos que no pasaron un ítem sobre el total de sujetos. (1-p).
- $\sum pq$: Sumatoria de la varianza individual de los ítems.
- σ^2: Varianza total.
- r_{KR20}: Coeficiente de confiabilidad.

$$r_{KR20} = \frac{10}{10-1}\left(1 - \frac{1,160}{4,577}\right)$$

$$r_{KR20} = 0,72$$

De acuerdo al análisis desarrollado en Excel de manera manual (utilización de fórmula) se tiene que el coeficiente Kuder Richarson o KR20 es $r_{KR20} = 0,72$, lo que establece que el nivel de confiabilidad de la prueba objetiva (Pre test) se encuentra en el rango de 0,61 a 0,80 siendo de confiabilidad alta.

Decisión: Después de haber analizado la validez y confiabilidad del instrumento, se acepta su formato**.**

4.2.3. *Análisis de resultados*

Con el propósito de determinar la homogeneidad de los grupos se analiza los resultados obtenidos en el pre test durante la fase 1 de la investigación, siendo los resultados los siguientes

Tabla 19-4: Resultados prueba objetiva (Pre test).

CONTROL				EXPERIMENTACIÓN							
Cód.	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**
1	3	**20**	7	**1**	1	**20**	5	**39**	7	**58**	9
2	3	**21**	7	**2**	2	**21**	5	**40**	7	**59**	9
3	3	**22**	7	**3**	2	**22**	5	**41**	7	**60**	9
4	4	**23**	7	**4**	2	**23**	5	**42**	7	**61**	10
5	4	**24**	7	**5**	3	**24**	6	**43**	7	**62**	10
6	4	**25**	7	**6**	3	**25**	6	**44**	7	**63**	10
7	5	**26**	7	**7**	3	**26**	6	**45**	7	**64**	10
8	5	**27**	7	**8**	4	**27**	6	**46**	7	**65**	10
9	5	**28**	8	**9**	4	**28**	6	**47**	7	**66**	10
10	5	**29**	8	**10**	4	**29**	6	**48**	7	**67**	10
11	6	**30**	8	**11**	4	**30**	6	**49**	8	**68**	10
12	6	**31**	8	**12**	5	**31**	6	**50**	8	**69**	10
13	6	**32**	8	**13**	5	**32**	6	**51**	8	**70**	10
14	6	**33**	8	**14**	5	**33**	6	**52**	8	**71**	10
15	6	**34**	8	**15**	5	**34**	6	**53**	8	**72**	10
16	6	**35**	9	**16**	5	**35**	6	**54**	8		
17	7	**36**	9	**17**	5	**36**	6	**55**	9		
18	7	**37**	9	**18**	5	**37**	7	**56**	9		

19	7	**38**	10	**19**	5	**38**	7	**57**	9		

Fuente: Resultados prueba objetiva (Pre test), 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.2.4. *Estadísticos descriptivos de resultados en el grupo de control y experimentación*

Para el cálculo de los estadísticos descriptivos de los dos grupos se utilizó el software SPSS, obteniéndose los siguientes:

Tabla 20-4: Estadístico descriptivo grupo de control.

			Estadístico	Error típ.
CONTROL	Media		6,50	,287
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	5,92	
		Límite superior	7,08	
	Media recortada al 5%		6,53	
	Mediana		7,00	
	Varianza		3,122	
	Desv. típ.		1,767	
	Mínimo		3	
	Máximo		10	
	Rango		7	
	Amplitud intercuartil		3	
	Asimetría		-,388	,383
	Curtosis		-,352	,750

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Tabla 21-4: Estadístico descriptivo grupo experimental.

			Estadístico	Error típ.
EXPERIMENTAL	Media		6,61	,274
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	6,07	
		Límite superior	7,16	
	Media recortada al 5%		6,69	
	Mediana		6,50	
	Varianza		5,396	
	Desv. típ.		2,323	
	Mínimo		1	
	Máximo		10	
	Rango		9	
	Amplitud intercuartil		4	
	Asimetría		-,197	,283
	Curtosis		-,537	,559

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.2.5. *Análisis de distribución normal grupo de control*

Para el análisis de distribución normal de los resultados obtenidos en la prueba objetiva aplicada en la fase 1 (Pre test) del grupo de control se utilizó la prueba de Shapiro-Wilks en vista de que se tiene 38 estudiantes, siendo un valor menor a 50.

Se plantea las hipótesis nula H_0 y alternativa H_1.

H_0: $X_i = N$, Los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal.

H_i: $X_i \neq N$, Los datos aproximadamente no se ajustan a una distribución normal.

Se aplica la prueba de normalidad Shapiro-Wilks en el software SPSS donde se obtiene:

Tabla 22-4: Prueba de normalidad grupo de control.

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
CONTROL	,946	38	,064

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Al obtener un nivel de significancia mayor a 0,05 siendo 0,064 se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa, por lo tanto, los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal, es decir, el resultado obtenido por el grupo de control en la prueba objetiva aplicada en la fase 1 (Pre test), son normales.

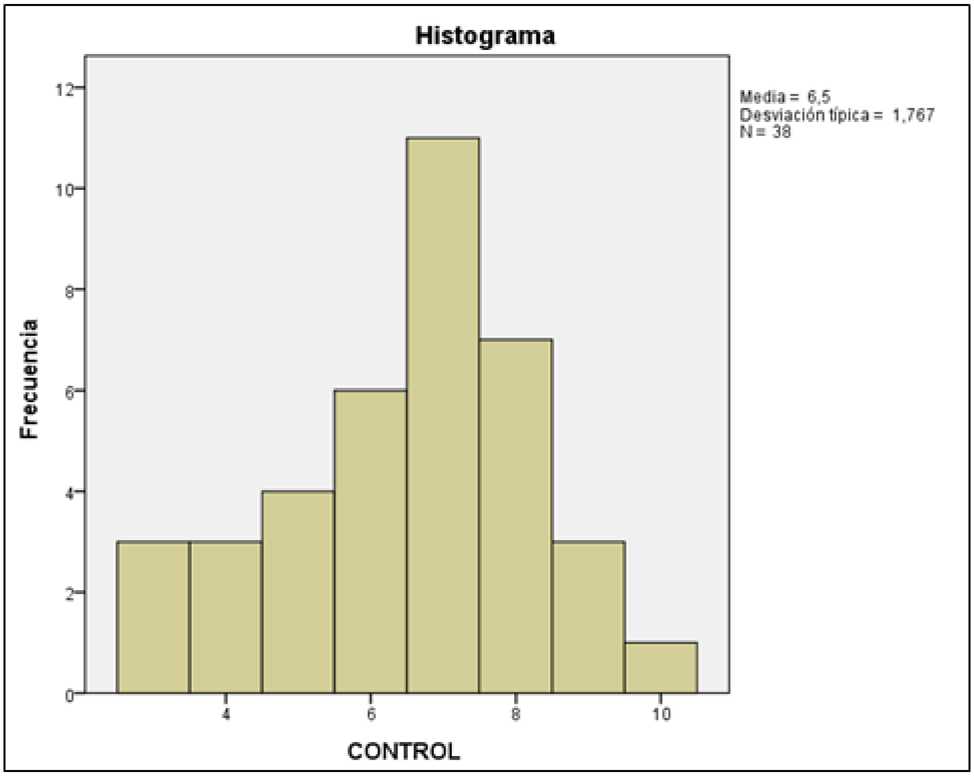


Gráfico 14-4: Histograma de calificaciones de la prueba objetiva grupo de control.

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.2.6. *Análisis de distribución normal grupo de experimentación*

Para el análisis de distribución normal de los resultados obtenidos en la prueba objetiva aplicada en la fase 1 (Pre test) del grupo de control se utilizó la prueba de Kolmogorov Smirnov en vista de que se tiene 72 estudiantes, siendo un valor mayor a 50.

Se plantea las hipótesis nula H_0 y alternativa H_1.

H_0: $X_i = N$, Los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal.

H_i: $X_i \neq N$, Los datos aproximadamente no se ajustan a una distribución normal.

Se aplica la prueba de normalidad Kolmogorov Smirnov en el software SPSS donde se obtiene:

Tabla 23-4: Prueba de normalidad grupo experimental.

	Kolmogorov-Smirnov[a]		
	Estadístico	gl	Sig.
EXPERIMENTAL	,104	72	,053

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Al obtener un nivel de significancia mayor a 0,05 siendo 0,053 se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa, por lo tanto, los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal, es decir, el resultado obtenido por el grupo experimental en la prueba objetiva aplicada en la fase 1 (Pre test), son normales.

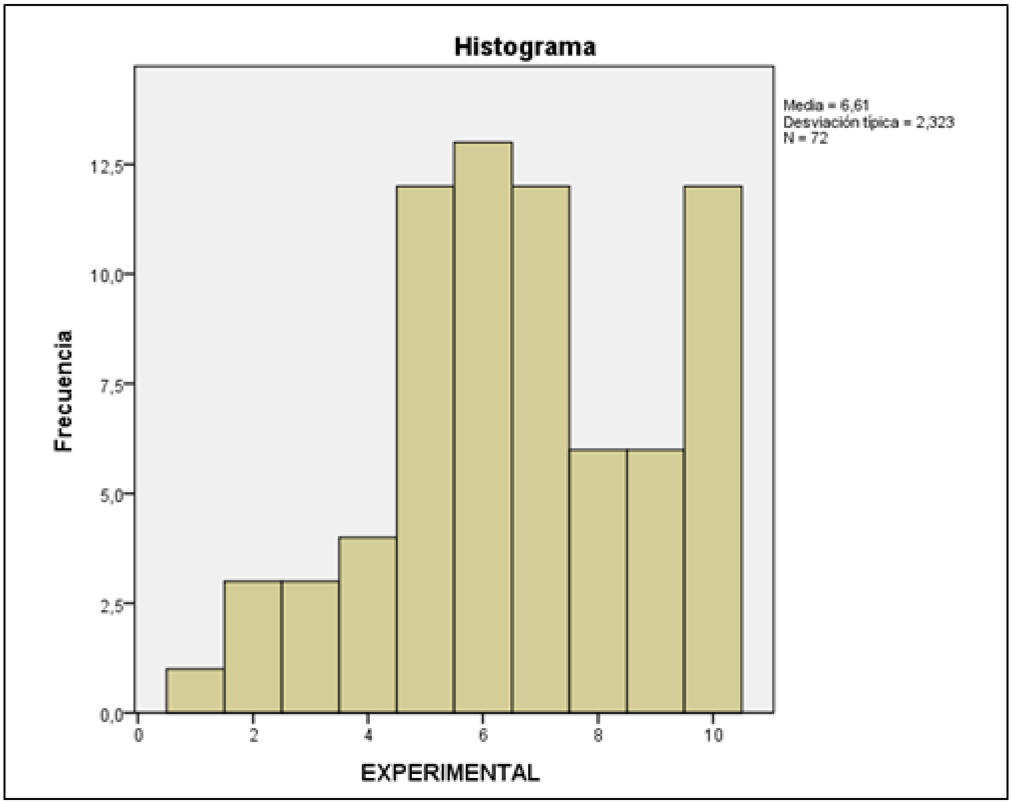


Gráfico 15-4: Histograma de calificaciones de la prueba objetiva grupo experimental.

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano.

4.2.7. *Comprobación de homogeneidad*

Para la comprobación de homogeneidad entre los grupos de control y experimental se utilizó la prueba F para varianzas de dos muestras, en donde con la distribución F se pone a prueba la hipótesis de que la variación de una población normal es igual a la variación de otra población, utilizando los resultados obtenidos en el pre test.

Planteamiento de hipótesis
H_0: el grupo de control y experimental son homogéneos, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
H_1: el grupo de control y experimental no son homogéneos, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Aplicación de la prueba F: Con los resultados obtenidos se aplica la prueba F para varianza de dos muestras en el software Excel.

Tabla 24-4: Resultados prueba F para varianza de dos muestras.

	CONTROL	EXPERIMENTAL
Media	6,50	6,61
Varianza	3,12	5,40
Observaciones	38,00	72,00
Grados de libertad	37,00	71,00
F	0,58	
P(F<=f) una cola	0,04	
Valor crítico para F (una cola)	0,61	

Fuente: Software Excel, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis de resultados y toma de decisión: De acuerdo al software Excel se obtiene como resultados $\mathrm{F} = 0{,}58$ y $\mathrm{F}_{\text{crítica}} = 0{,}61$; siendo $\mathrm{F} < \mathrm{F}_{\text{crítica}}$ por lo que se acepta la hipótesis nula, es decir, el grupo de control y de experimentación son homogéneos.

4.3. Prueba objetiva del grupo de control y de experimentación, después del desarrollo de la investigación

4.3.1. *Validez*

De la misma manera que se validó el cuestionario para la aplicación de la encuesta, así como la prueba objetiva aplicada en la fase 1 de diagnóstico, de acuerdo a la técnica juicio de expertos, también se analizó la validez de la prueba objetiva (post test) de 10 ítems aplicada a los grupos de control y experimentación establecidos con los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado, para lo cual se contó con 3 expertos mismos que fueron seleccionados en función a aspectos relevantes como experiencia dentro del área de estudio y de investigación. La ficha de validación por experto se encuentra como anexo, no obstante, se presenta el resumen de los expertos.

Tabla 25-4: Validación del cuestionario-prueba objetiva por expertos.

ÍTEM	INDICADOR	PUNTUACIÓN POR EXPERTOS			PUNTUACIÓN POR PREGUNTA		
		EXPERTO 1	EXPERTO 2	EXPERTO 3	SUMA	PROMEDIO	PORCENTAJE
1	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
2	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
3	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
4	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
5	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100

6	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
7	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
8	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
9	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
10	Claridad	5	5	5	15	5	100
	Coherencia	5	5	5	15	5	100
	Suficiencia	5	5	5	15	5	100
	Metodología	5	5	5	15	5	100
	Pertinencia	5	5	5	15	5	100
TOTAL			**Claridad**			**195**	**100,000 %**
			Coherencia			**195**	**100,000 %**
			Suficiencia			**195**	**100,000 %**
			Metodología			**195**	**100,000 %**
			Pertinencia			**195**	**100,000 %**

Fuente: Resultados de validación por ítem, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la validación por expertos se obtiene la valoración general del cuestionario para la aplicación a los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado.

Tabla 26-4: Valoración del cuestionario-prueba objetiva.

CRITERIO	VALORACIÓN
Validez de claridad	100,00 %

Validez de coherencia	100,00 %
Validez de suficiencia	100,00 %
Validez de metodología	100,00 %
Validez de pertinencia	100,00 %
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario.	100,00 %
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial.	100,00 %
El número de ítems es suficiente para recoger la información.	100,00 %

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.3.2. *Confiabilidad*

Para determinar la confiabilidad de la prueba objetiva que sirvió como instrumento aplicado en la fase de evaluación (post test) se utilizó el coeficiente Kuder Richarson o KR-20, en vista de que se desarrolló un test de 10 ítems con preguntas de acierto y error, siendo valorado con 1 punto para la respuesta correcta y 0 puntos para la respuesta incorrecta, este coeficiente permite estimar la confiabilidad de consistencia interna de una prueba, representado de la siguiente manera.

$$r_{KR20} = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2}\right)$$

Dónde:

- K: Número de ítems.
- p: Porcentaje o proporción de sujetos que pasaron un ítem sobre el total de sujetos.
- q: Porcentaje o proporción de sujetos que no pasaron un ítem sobre el total de sujetos. (1-p).
- $\sum pq$: Sumatoria de la varianza individual de los ítems.
- σ^2: Varianza total.
- r_{KR20}: Coeficiente de confiabilidad.

$$r_{KR20} = \frac{10}{10-1}\left(1 - \frac{1{,}394}{4{,}398}\right)$$

$$r_{KR20} = 0{,}758$$

De acuerdo al análisis desarrollado en Excel de manera manual (utilización de fórmula) se tiene que el coeficiente Kuder Richarson o KR20 es $r_{KR20} = 0{,}758$, lo que establece que el nivel de confiabilidad de la prueba objetiva (Pre test) se encuentra en el rango de 0,61 a 0,80 siendo de confiabilidad alta.

Decisión: Después de haber analizado la validez y confiabilidad del instrumento, se acepta su formato**.**

4.3.3. *Análisis de resultados*

Con el propósito de validar la propuesta didáctica, comprobar la hipótesis se aplicó la prueba objetiva durante la fase 5 de la investigación, obteniendo los resultados de los grupos tanto de control como de experimentación.

Tabla 27-4: Resultados prueba objetiva (Post test).

CONTROL				EXPERIMENTACIÓN							
Cód.	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**	**Cód.**	**Calif.**
1	1	**20**	7	**1**	2	**20**	6	**39**	7	**58**	9
2	2	**21**	7	**2**	3	**21**	6	**40**	7	**59**	9
3	3	**22**	7	**3**	3	**22**	6	**41**	8	**60**	10
4	3	**23**	7	**4**	4	**23**	6	**42**	8	**61**	10
5	3	**24**	7	**5**	4	**24**	6	**43**	8	**62**	10
6	4	**25**	7	**6**	4	**25**	6	**44**	8	**63**	10
7	4	**26**	7	**7**	4	**26**	6	**45**	8	**64**	10
8	5	**27**	7	**8**	5	**27**	6	**46**	8	**65**	10
9	5	**28**	7	**9**	5	**28**	7	**47**	8	**66**	10
10	5	**29**	8	**10**	5	**29**	7	**48**	8	**67**	10
11	5	**30**	8	**11**	5	**30**	7	**49**	8	**68**	10
12	5	**31**	8	**12**	5	**31**	7	**50**	8	**69**	10
13	6	**32**	8	**13**	5	**32**	7	**51**	8	**70**	10
14	6	**33**	9	**14**	6	**33**	7	**52**	8	**71**	10
15	6	**34**	9	**15**	6	**34**	7	**53**	8	**72**	10
16	6	**35**	9	**16**	6	**35**	7	**54**	9		
17	6	**36**	10	**17**	6	**36**	7	**55**	9		
18	6	**37**	10	**18**	6	**37**	7	**56**	9		
19	7	**38**	10	**19**	6	**38**	7	**57**	9		

Fuente: Resultados prueba objetiva (Post test), 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.3.4. *Estadísticos descriptivos de resultados en el grupo de control y experimentación*

Para el cálculo de los estadísticos descriptivos de los dos grupos se utilizó el software SPSS, obteniéndose los siguientes:

Tabla 28-4: Estadístico descriptivo grupo de control.

			Estadístico	Error típ.
CONTROL	Media		6,32	,356
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	5,59	
		Límite superior	7,04	
	Media recortada al 5%		6,38	
	Mediana		7,00	
	Varianza		4,817	
	Desv. típ.		2,195	
	Mínimo		1	
	Máximo		10	
	Rango		9	
	Amplitud intercuartil		3	
	Asimetría		-,394	,383
	Curtosis		-,076	,750

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Tabla 29-4: Estadístico descriptivo grupo experimental**.**

			Estadístico	Error típ.
EXPERIMENTAL	Media		7,18	,235
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	6,71	
		Límite superior	7,65	
	Media recortada al 5%		7,26	
	Mediana		7,00	
	Varianza		3,981	
	Desv. típ.		1,995	
	Mínimo		2	
	Máximo		10	
	Rango		8	
	Amplitud intercuartil		3	
	Asimetría		-,300	,283
	Curtosis		-,427	,559

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.3.5. *Análisis de distribución normal grupo de control*

Para el análisis de distribución normal de los resultados obtenidos en la prueba objetiva aplicada en la fase 1 (Post test) del grupo de control se utilizó la prueba de Shapiro-Wilks en vista de que se tiene 38 estudiantes, siendo un valor menor a 50.

Se plantea las hipótesis nula $\mathrm{H_0}$ y alternativa $\mathrm{H_1}$.

$\mathrm{H_0}: \mathrm{X_i} = \mathrm{N}$, Los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal.
$\mathrm{H_i}: \mathrm{X_i} \neq \mathrm{N}$, Los datos aproximadamente no se ajustan a una distribución normal.

Se aplica la prueba de normalidad Shapiro-Wilks en el software SPSS donde se obtiene:

Tabla 30-4: Prueba de normalidad grupo de control.

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
CONTROL	,960	38	,197

Fuente: Software SPPS, 2022.
Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Al obtener un nivel de significancia mayor a 0,05 siendo 0,197 se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa, por lo tanto, los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal, es decir, el resultado obtenido por el grupo de control en la prueba objetiva aplicada en la fase 5 (Post test), son normales.

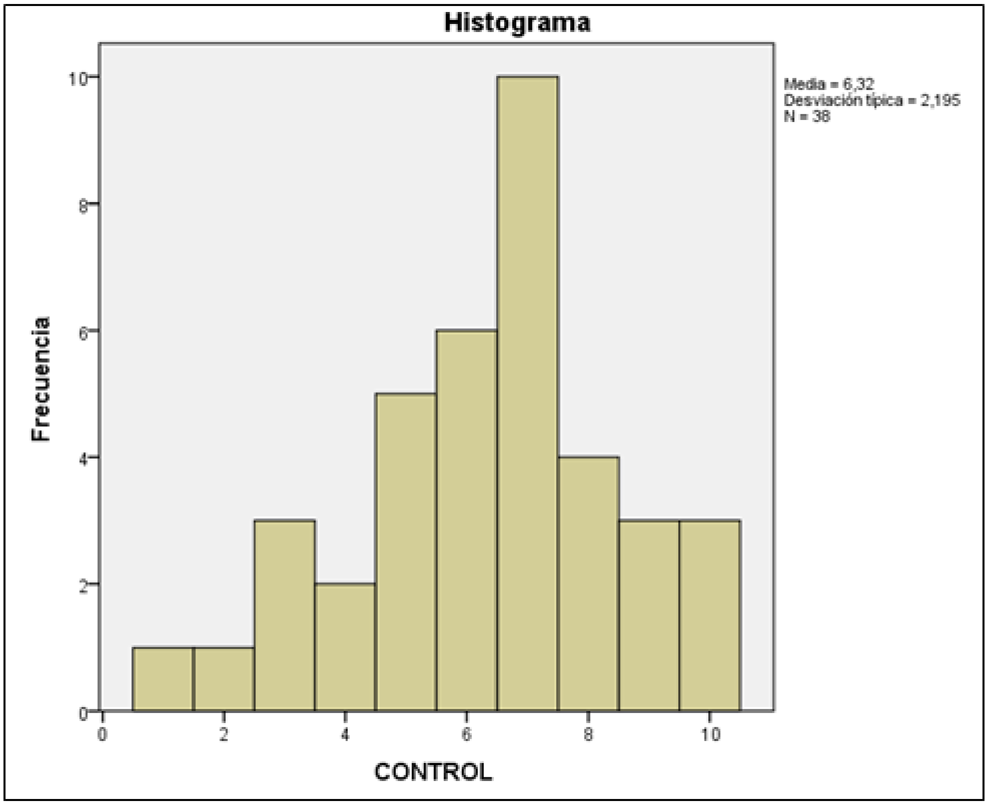


Gráfico 16-4: Histograma de calificaciones de la prueba objetiva grupo de control.

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.3.6. *Análisis de distribución normal grupo de experimentación*

Para el análisis de distribución normal de los resultados obtenidos en la prueba objetiva aplicada en la fase 5 (Post test) del grupo de control se utilizó la prueba de Kolmogorov Smirnov en vista de que se tiene 72 estudiantes, siendo un valor mayor a 50.

Se plantea las hipótesis nula H_0 y alternativa H_1.

H_0: $X_i = N$, Los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal.
H_i: $X_i \neq N$, Los datos aproximadamente no se ajustan a una distribución normal.

Se aplica la prueba de normalidad Kolmogorov Smirnov en el software SPSS donde se obtiene:

Tabla 31-4: Prueba de normalidad grupo experimental.

	Kolmogorov-Smirnov[a]		
	Estadístico	gl	Sig.
EXPERIMENTAL	,104	72	,053

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Al obtener un nivel de significancia mayor a 0,05 siendo 0,053 se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa, por lo tanto, los datos aproximadamente se ajustan a una distribución normal, es decir, el resultado obtenido por el grupo experimental en la prueba objetiva aplicada en la fase 5 (Post test), son normales.

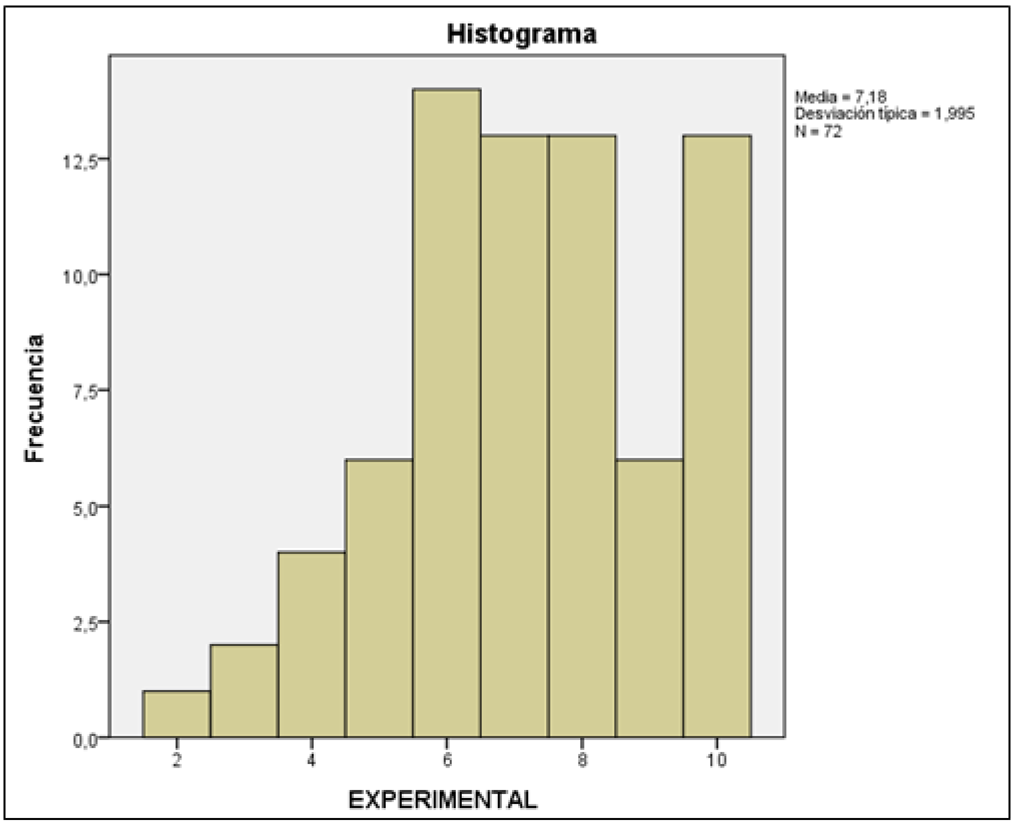


Gráfico 17-4: Histograma de calificaciones de la prueba objetiva grupo experimental.

Fuente: Software SPPS, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

4.3.7. *Contrastación de hipótesis*

Para contrastar la hipótesis se utilizó la prueba T-Student para muestras independientes al tener distribuciones normales, utilizando los resultados obtenidos en el post test.

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, La implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida no incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$, La implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Determinación de nivel significancia: Al analizar rendimiento académico a través de la implementación de una estrategia didáctica, la investigación utiliza un nivel de significancia de 0,05 y confiabilidad del 95%.

Tabla 32-4: Cálculo de medidas para cada grupo.

EXPERIMENTACIÓN	CONTROL
$\overline{X_1} = 7{,}18$	$\overline{X_2} = 6{,}32$
$\sigma_1^2 = 3{,}98$	$\sigma_2^2 = 4{,}82$
$n_1 = 72$	$n_2 = 38$

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Grados de libertad

$$n_1 + n_2 - 2 = 72 + 38 - 2$$
$$n_1 + n_2 - 2 = 108$$

Varianza común

$$\sigma_c^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_1 - 2}$$
$$\sigma_c^2 = \frac{(72 - 1)(3{,}98) + (38 - 1)(4{,}82)}{108}$$
$$\sigma_c^2 = 4{,}27$$

Aplicación de la prueba T-Student

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{n_1} + \frac{\sigma_c^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{7{,}18 - 6{,}32}{\sqrt{\frac{4{,}27}{72} + \frac{4{,}27}{38}}}$$

$$t = 2{,}08$$

Cálculo de $t_{crítico}$

$$t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(n_1+n_2-2)} = 1{,}98$$

Cálculo del p-valor

$$p - valor = 0{,}04$$

Aplicación del software Excel para el análisis de la prueba T-Student.

Tabla 33-4: Prueba T-Student prueba objetiva post test.

	GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN	***GRUPO DE CONTROL***
Media	7,18	6,32
Varianza	3,98	4,82
Observaciones	72,00	38,00
Varianza agrupada	4,27	
Diferencia hipotética de las medias	0,00	
Grados de libertad	108,00	
Estadístico t	2,09	
P(T<=t) una cola	0,02	
Valor crítico de t (una cola)	1,66	
P(T<=t) dos colas	0,04	
Valor crítico de t (dos colas)	1,98	

Fuente: Software Excel, 2022.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Análisis de resultados y toma de decisión

De acuerdo al software Excel se obtiene como resultados $t = 2{,}09$ y $t_{crítico} = 1{,}98$, por lo que antes de aceptar o rechazar la hipótesis nula se procede a analizar las regiones de aceptación o rechazo en la siguiente figura:

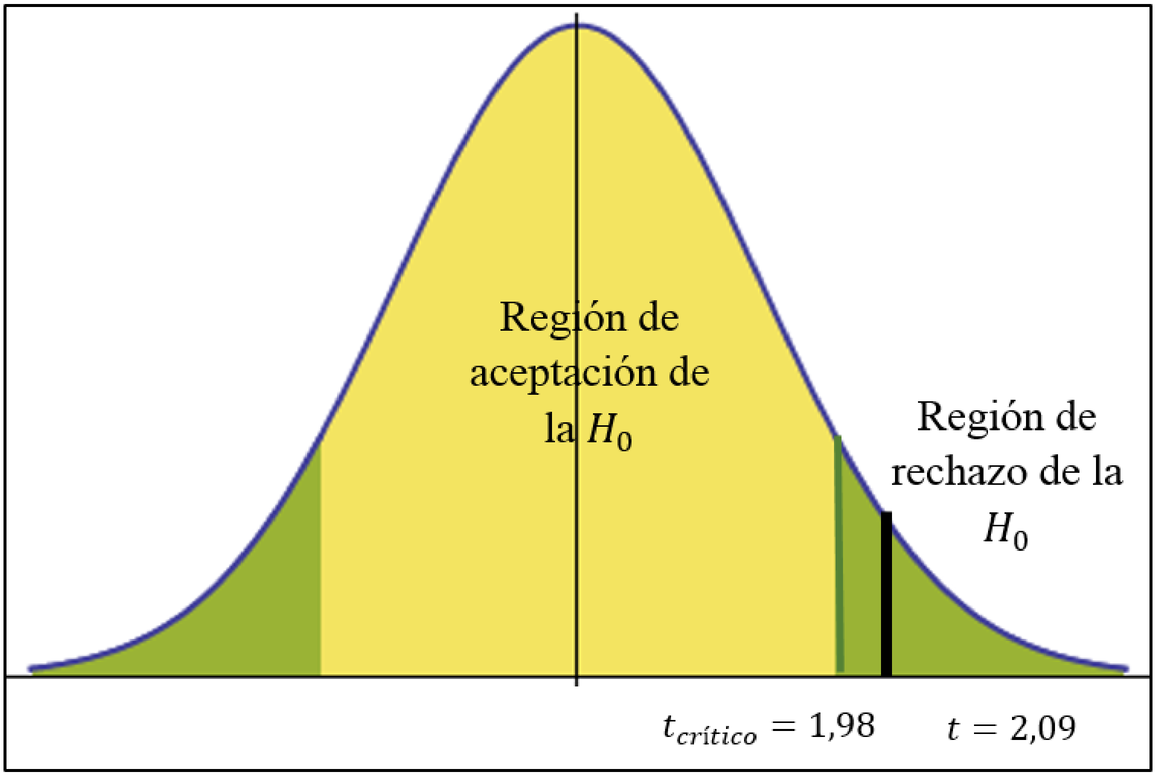


Gráfico 18-4: Identificación de zonas de aceptación y rechazo.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Como $t > t_{crítico}$, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, de esta manera se concluye que, a implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco, en donde las medias entre los grupos de experimentación y de control en la prueba objetiva (post test) son significativamente diferentes, siendo mayor el valor de la media en el grupo experimental.

4.4. Análisis e interpretación de ficha de observación

De acuerdo a lo evidenciado durante la investigación, se analiza los datos recolectados en la ficha de observación y se interpreta los siguientes aspectos:

Tabla 34-4: Ficha de observación.

ASPECTO	OBSERVACIÓN
Manejo del software GeoGebra	Al implementar el software GeoGebra en el grupo de experimentación se evidenció que los estudiantes manejaron con facilidad el mismo para el desarrollo de actividades tanto en la hora de clase como en las actividades autónomas.
Motivación e interés	Los estudiantes del grupo experimental mostraron interés y motivación por aprender la integral definida, mientras que los estudiantes del grupo de control se distraían con facilidad al ver las clases repetitivas.
Destrezas con criterio de desempeño	Con el grupo experimental se centró más el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño que en el contenido, puesto que se promovieron actividades que permitieron la participación activa de los estudiantes.
Metodología	La metodología utilizada en el grupo de control no proyectó un hacia un aprendizaje significativo trabajando únicamente con TPL (tiza, pizarrón y lengua), mientras que en el grupo experimental su enfoque constructivista conjuntamente con el método heurístico permitió que el estudiante sea el protagonista de su aprendizaje.
Rendimiento académico	Se evidenció un mejor rendimiento académico en el grupo experimental a diferencia del grupo de control.
Planificación	Al implementar el software GeoGebra se evitó la improvisación de las actividades.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

CAPÍTULO V

5. PROPUESTA METODOLÓGICA Y TECNOLÓGICA AVANZADA

5.1. Título de la propuesta

Implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida.

5.2. Introducción

La presente propuesta metodológica y tecnológica avanzada ***IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL ESTUDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA***, es un recurso didáctico de apoyo para los docentes de Matemática y Física, como una herramienta de trabajo que permite alcanzar el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño en los estudiantes, más ahora que se encuentran en un proceso educativo virtual.

Conforme pasa el tiempo existe una gran cantidad de propuestas metodológicas para el estudio de integral definida, no obstante, cada recurso se diseña acorde a los lineamientos que maneja el Ministerio de Educación y la presente guía mantiene la reforma curricular vigente de acuerdo al contexto en el que se aplica, por lo que las propuestas metodológicas activas deben atender las necesidades de la comunidad educativa para de esa manera alcanzar y desarrollar las destrezas con criterio de desempeño; actualmente se trabaja con el Currículo Priorizado 2020-2021 mismo que promueve un proceso de enseñanza aprendizaje autónomo, priorizando la capacidad de desarrollar habilidades para la vida, por lo que contiene los aprendizajes básicos imprescindibles.

En la guía se puede encontrar lineamientos curriculares de Bachillerato General Unificado establecidos por el Ministerio de Educación de acuerdo al currículo Priorizado 2020-2021, es decir los elementos del currículo y su respectiva planificación micro curricular; más adelante las lecciones de estudio en donde cada una contiene objetivos específicos, destrezas con criterio de desempeño, proceso metodológico, recursos, indicadores de evaluación, instrumento de evaluación, información complementaria, TIC-ejercicios resueltos, actividad autónoma; mientras que en anexos se tiene tabla de fórmulas para aplicación de derivadas-integrales e instrumento de evaluación-rúbrica manejada en la institución educativa donde se aplica la guía respectiva.

5.3. Lineamientos curriculares

5.3.1. *Objetivos generales del área a evaluar*

OG.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

OG.M.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

OG.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5.3.2. *Orientación metodológica*

Según el currículo Priorizado 2020-2021 (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020), se pretende desarrollar las destrezas necesarias para el cálculo de la integral definida de una función y aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función, relacionando la derivación y la integración como procesos inversos, por lo que es fundamental fortalecer la interdisciplinariedad.

5.3.3. *Criterio de evaluación*

CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5.3.4. *Elementos de perfil de salida*

I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e independiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5.3.5. *Indicadores para la evaluación*

Halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (Ref.I.M.5.5.1.).

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5.3.6. *Destrezas con criterio de desempeño*

M.5.1.62. Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X.
M.5.1.64. Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración.
M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.
M.5.1.66. Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.
M.5.1.67. Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.
M.5.1.68. Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva).

M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5.3.7. *Bloque curricular*

De acuerdo al Currículo de Matemática de Bachillerato General Unificado (Ministerio de Educación., 2016), al ser un bloque curricular una agrupación de aprendizajes básicos que responde a criterios epistemológicos, didácticos y pedagógicos; la integral definida se encuentra dentro del bloque curricular de álgebra y funciones en donde se analizará modelos matemáticos, resolución de problemas, uso de las TIC, construcciones geométricas, aplicaciones y sistema internacional.

5.3.8. *Evaluación*

La evaluación de acuerdo al Currículo Priorizado 2020-2021 (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020) en referencia al uso de estrategias metodológicas activas se plantea para dos actores y aspectos, mejora del aprendizaje del estudiante y mejora de la enseñanza del docente, por lo que la Unidad Educativa San Francisco en su Instructivo para la aplicación del proyecto de evaluación institucional 2020-2021 considera que los trabajo o tareas podrán ser evaluados por medio de rúbrica institucional y según el horario de clases se puede determinar al menos 1 actividad evaluada por semana, danto un total de 10 actividades, siendo la evaluación continua, formativa y sumativa. De la misma manera el número de insumos por parcial se subirá al sistema de notas de la institución correspondientes a las siguientes acciones:

1. Insumo 1: Trabajos autónomos (Tareas).
2. Insumo 2: Talleres, actividades en clase o proyectos de asignatura.
3. Insumo 3: Lecciones.

5.4. Planificación microcurricular

Tabla 1-5: Planificación microcurricular.

<table>
<tr><td colspan="9">Unidad Educativa “San Francisco”
“EDUCACIÓN CON ESFUERZO Y BUEN TRATO COMO FRANCISCO”
2020 – 2021</td></tr>
<tr><td colspan="9">PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR</td></tr>
<tr><td>Nombre del Docente</td><td colspan="4">Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano.</td><td>Fecha</td><td colspan="3">05 de abril al 28 de mayo.</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>Matemática.</td><td>Materia</td><td colspan="2">Matemática.</td><td>Grado</td><td colspan="3">Tercero B.G.U. “A”, “B”, “C”.</td></tr>
<tr><td>Asignatura</td><td colspan="4">Matemática.</td><td>Tiempo</td><td colspan="3">8 semanas.</td></tr>
<tr><td>Unidad didáctica</td><td colspan="8">Derivadas e Integrales.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de la unidad</td><td colspan="8">OG.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
OG.M.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
OG.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td colspan="9">Criterios de Evaluación
CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO</td><td colspan="2" rowspan="2">ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</td><td colspan="2" rowspan="2">RECURSOS</td><td colspan="4">EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD</td><td colspan="2">TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td>M.5.1.62. Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X.
M.5.1.64. Calcular la integral definida de una</td><td colspan="2">Experiencia Concreta:
Analizar las diferentes estrategias de resolución:</td><td colspan="2">TALENTO HUMANO
Estudiantes.
Padres de familia.
Docente.

MATERIALES
Textos Guías</td><td colspan="2">Halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de</td><td colspan="2">Técnica: Prueba objetiva de diagnóstico.
Instrumento: Guía de preguntas o cuestionarios.

Técnica: Prueba objetiva final.</td></tr>
</table>

función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración. M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x. M.5.1.66. Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas. M.5.1.67. Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos. **M.5.1.68.** Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva). M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e	***Comprensión:*** Lectura, interrogación. ***Concepción de un plan:*** Análisis, síntesis. ***Ejecución del plan***: Operaciones. ***Verificación***: Evaluación. ***Generalización:*** Modelización. **Reflexión:** - Formulación de preguntas para verificar conocimientos previos. **Conceptualización:** - Presentación de los elementos mediante conceptos. - Exposición del tema mediante ejemplos ilustrativos de cuyo análisis e interpretación, se encontrará una solución a problemas de la vida cotidiana y se contribuirá al desarrollo de la Matemática. - Utilización de las TIC en la presentación y el	TIC: Geogebra. Recursos del medio. Pizarra digital. Zoom. Plataforma institucional.	optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (Ref.I.M.5.5.1.).	Instrumento: Guía de preguntas o cuestionarios. **Técnica:** Simulación. Instrumento: GeoGebra.

interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.	procesamiento de los temas. **Aplicación:** F ormulación de ejercicios y problemas. R ealización de síntesis y extracción de conclusiones del tema. Promoción de la investigación y uso de diferentes métodos para la construcción y resolución de problemas.			

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA		
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e independiente aprovechando todos los recursos e información posibles.		
ELABORADO POR	**REVISADO POR**	**APROBADO POR**
Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano.	Director de Área.	Vicerrector.
Fecha: 29 de marzo del 2021.	**Fecha**: 29 de marzo del 2021.	**Fecha**: 29 de marzo del 2021.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

5.5. Desarrollo de la propuesta

Para el respectivo desarrollo de la propuesta se consideró el tiempo estimado para cada clase durante la segunda parcial del segundo quimestre en los terceros de bachillerato general unificado y los imprevistos que se pueden generar.

ÁREA DE UNA REGIÓN POR ÁREAS DE RECTÁNGULOS

1

OBJETIVO ESPECÍFICO

Comprender la definición de área para su aplicación.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas. (Ref. M.5.1.69.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 2-5: Proceso metodológico 1.

ETAPA	ESTRATEGIA METODOLÓGICA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	***Comprensión:*** Presentación de diferentes figuras geométricas planas conocidas sobre una superficie cuadriculada. ***Concepción de un plan*:** Análisis del cálculo de su área sin necesidad de utilizar sus expresiones matemáticas conocidas. ***Ejecución del plan**:* Utilización de valores numéricos para el cálculo de las áreas. ***Verificación:*** Comprobación del área calculada entre todos los estudiantes. ***Generalización:*** Presentación de las expresiones de acuerdo a la figura geométrica dada.
REFLEXIÓN	Formulación de preguntas para verificar los conocimientos previos: ¿Qué noción se tiene de área? ¿Cómo calcular el área de figuras geométricas planas? ¿Cómo calcular el área bajo una curva?

CONCEPTUALIZACIÓN	Análisis de la definición del área. Demostración de la expresión del área de un rectángulo a partir del área de un cuadrado. Exposición del cálculo del área bajo una gráfica mediante ejemplos ilustrativos utilizando GeoGebra para su procesamiento, cuyo análisis e interpretación permitirá la construcción del conocimiento.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado de 15min. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 1 ejercicio, utilizando método analítico y GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 3-5: Recursos 1.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

ÁREA

El área de una figura es una medida que indica el tamaño de la región delimitada por la misma, por lo que en geometría euclidiana el rectángulo se considera el tipo más simple de región plana y a partir de esta definición de área se pueden deducir otras expresiones para áreas de otras regiones planas, tal es el caso del área de un polígono que puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en los que se descompone.

Demostración del área de un rectángulo, a partir de un cuadrado:

Sea ABCD un cuadrado, cuyos lados son iguales, se tiene:

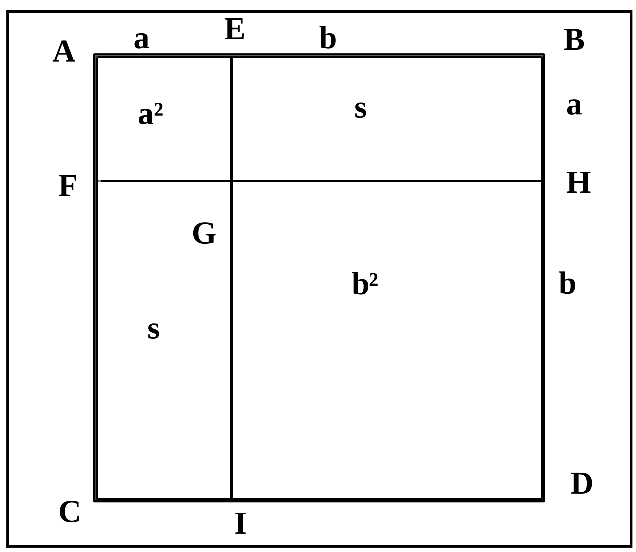


Figura 1-5: Demostración del área de un rectángulo.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Hipótesis:

ABCD = cuadrado. Área de un cuadrado: l^2

Tesis:

Área de un rectángulo = $base\ x\ altura$.

Demostración:

$A_{ABCD} = A_{AEFG} + A_{EBGH} + A_{FGCI} + A_{GHID}$

$(a+b)^2 = a^2 + s + s + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2s + b^2$

$2ab = 2s$

$s = ab$

$$\boxed{\therefore \text{Área de un rectángulo} = ab}$$

ÁREA BAJO UNA GRÁFICA

Se analizó y se calculó el área de las figuras planas con bordes rectos, no obstante, ¿cómo se evalúa el área de una región limitada por el eje x, es decir bajo una curva?, uno de los procesos se lo llamó cuadratura puesto que permitía hallar el área de regiones planas limitadas por curvas. Por ejemplo, Seki Kowa midió el área de un círculo usando rectángulos, llamando a este procedimiento yenri, en donde el círculo se divide en cierto número de rectángulos de igual anchura y luego sumar el área de todos los rectángulos resultantes, dando una aproximación del área buscada.

CÁLCULO APROXIMADO DEL ÁREA UTILIZANDO RECTÁNGULOS

La dificultad surge al momento de calcular áreas bajo curvas, por lo que desde Eudoxio y más tarde Arquímedes quien calculó el área por debajo de un segmento de parábola, utilizando el método exhaustivo que consiste en aproximar de manera sucesiva la superficie para calcular mediante rectángulos, de esta manera se sabe cómo obtener un área como el límite de una suma de áreas rectangulares, llamándose al proceso integración.

Aunque no existe una fórmula simple se puede estimar sumando áreas de rectángulos, suponiendo que se tiene una función $f(x) \geq 0$ continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que R es la región acotada por la curva $y = f(x)$, eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

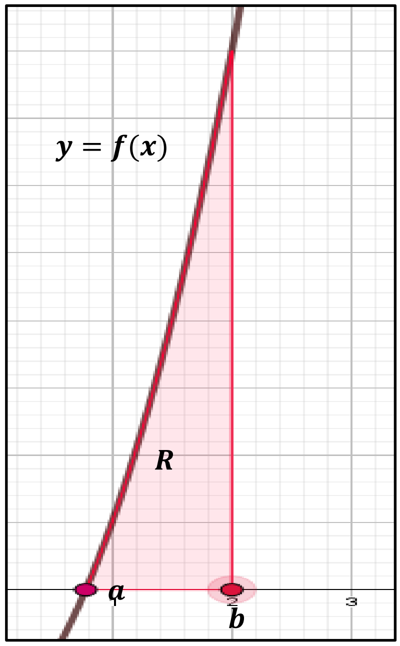


Figura 2-5: Área bajo una curva.

Realizado por: Gabriela Ruiz, 2022.

Proceso:

1. Sea n un entero positivo, se divide el intervalo en n partes iguales o sub intervalos de amplitud o longitud Δx.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

2. Se obtiene los puntos extremos de los sub intervalos.

$x_0 = a$

$x_1 = a + \Delta x$,

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$

Así sucesivamente, hasta alcanzar

$x_n = a + n\Delta x$

$x_n = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$x_n = a + b - a$

$x_n = b$

3. Al denotar el i-ésimo sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, considerando que la función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y también es continua en cada sub intervalo cerrado, de acuerdo al teorema del valor extremo se sabe que existe un número en cada sub intervalo para el cual la función tiene un valor mínimo y un valor máximo absoluto. De esta manera si c_i se considera un número del intervalo i-ésimo y $f(c_i)$ el valor mínimo absoluto de la función en el sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Se puede calcular el área de cada rectángulo como el producto de la base Δx por la altura $f(c_i)$unidades, siendo:

$A_i = f(c_i)\Delta x$

4. Al considerarse n rectángulos, el área total S_n unidades cuadradas resulta de la suma de las áreas de los n rectángulos.

$S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$

$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x}$$

Esta expresión corresponde a la suma de las medidas de las áreas de n rectángulos inscritos o conocida como las sumas inferiores de f, siendo una aproximación por defecto del área.

$A \geq S_n$

No obstante, se puede considerar el valor máximo absoluto de la función en el sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, siendo $f(d_i)$, donde los rectángulos son circunscritos o conocida como sumas superiores de f, siendo una aproximación por exceso del área.

$A \leq S_n$

La aproximación es más precisa cuando el valor de *n* sea más grande, es decir, si *n* crece sin límite, el valor de S_n se aproxima a un límite y este límite se toma como la definición de la medida del área de la región R.

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$$

Ya que $\Delta x \to 0$ cuando $n \to +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ A = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x \end{array}}$$

Combinando los resultados obtenidos para rectángulos inscritos y circunscritos, para cualquier n, se concluye que el área buscada es:

$S_n \leq A \leq S_n$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la curva $y = x^3 + 2x + 2$, el eje x y las verticales $x = -1, x = 3$.

Proceso:

Dividir el intervalo cerrado $[-1; 3]$ *en n sub intervalos.*

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{3 - (-1)}{n}$$

$$\Delta x = \frac{4}{n}$$

Obtener cada sub intervalo con longitud Δx.

$x_0 = -1$

$x_1 = -1 + \Delta x$,

$x_2 = -1 + 2\Delta x$

$x_i = -1 + i\Delta x$

$x_{n-1} = -1 + (n - 1)\Delta x$

Así sucesivamente, hasta alcanzar

$x_n = n\Delta x$

$$x_n = -1 + n\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$x_n = 3$$

Al ser la función creciente se tiene

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde en el i-ésimo sub intervalo $[x_{i-1}; x_i]$ *la función es* $f(x_i)$

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Siendo

$$x_i = -1 + i\Delta x$$

$$x_i = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

Se tiene

$$f(x_i) = (-1 + i\Delta x)^3 + 2(-1 + i\Delta x) + 2$$

Por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} [(-1 + i\Delta x)^3 + 2(-1 + i\Delta x) + 2]\Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{4}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left[(-1 + \frac{4}{n} i)^3 + 2\left(-1 + \frac{4}{n} i\right) + 2\right]\frac{4}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left[-1 + \frac{12}{n} i - \frac{48}{n^2} i^2 + \frac{64}{n^3} i^3 + \frac{8}{n} i\right]\frac{4}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[-1 + \frac{20}{n} i - \frac{48}{n^2} i^2 + \frac{64}{n^3} i^3\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = -\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{20}{n} i - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{48}{n^2} i^2 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{64}{n^3} i^3$$

Aplicando propiedades de sumatorias se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\left[-n + \frac{20n(n+1)}{2n} - \frac{48n(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{64n^2(n+1)^2}{4n^3}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\left[-n + 10(n+1) - \frac{8(2n^2+3n+1)}{n} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\left[\frac{-n^2 + 10n(n+1) - (16n^2+24n+8) + 16(n^2+2n+1)}{n}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\left(\frac{-n^2 + 10n^2 + 10n - 16n^2 - 24n - 8 + 16n^2 + 32n + 16}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = 4\left(\frac{9n^2 + 18n + 8}{n^2}\right)$$

Reemplazando

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[4\left(\frac{9n^2+18n+8}{n^2}\right)\right]$$

$$A = 4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9n^2+18n+8}{n^2}\right)$$

$$A = 4\lim_{n\to+\infty}\left(9 + \frac{18}{n} + \frac{8}{n^2}\right)$$

$$A = 4(9 - 0 + 0)$$

$$A = 36u^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Calcular el área de la región acotada por la curva $y = 3x^2$, el eje x y la recta $x = 5$, tomando en cuenta los rectángulos inscritos.

Proceso:

Dividir el intervalo cerrado $[0; 5]$ *en n sub intervalos.*

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5-0}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5}{n}$$

Obtener cada sub intervalo con longitud Δx.

$x_0 = 0$

$x_1 = \Delta x$,

$x_2 = 2\Delta x$

$x_i = i\Delta x$

$x_{n-1} = (n-1)\Delta x$

Así sucesivamente, hasta alcanzar

$x_n = n\Delta x$

$x_n = n\left(\frac{5}{n}\right)$

$x_n = 5$

Al ser la función creciente se tiene

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde en el i-ésimo sub intervalo $[x_{i-1}; x_i]$ *la función es* $f(x_{i-1})$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Siendo

$x_{i-1} = (i-1)\Delta x$

Se tiene

$f(x_{i-1}) = 3[(i-1)\Delta x]^2$

Por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\{3[(i-1)\Delta x]^2\}\Delta x$$

Donde

$\Delta x = \frac{5}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left\{3\left[(i-1)\frac{5}{n}\right]^2\right\}\frac{5}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 3\left[(i-1)^2\frac{125}{n^3}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2 - i + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

Aplicando propiedades de sumatorias se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{n(2n^2+3n+1) - 6n(n+1) + 6n}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{125}{n^3}\left(\frac{2n^2-3n+1}{2}\right)n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{125}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)$$

Reemplazando

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{125}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)\right]$$

$$A = \frac{125}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{125}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{125}{2}(2-0+0)$$

$$A = \frac{125}{2}(2)$$

$$A = 125u^2$$

Proceso GeoGebra

1. En la entrada, ingrese el valor de la curva.

$f(x) = 3x^2$

2. Ingrese en la entrada el valor de las rectas.

$y = 0$

$x = 5$

3. Escriba el comando ***IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*** o ***IntegralBewteen(<Function>, <Function>, <Start x-Value>, <End x-Value>).***

$IntegralBewteen(3x^2, 0,0,5)$

4. Ingrese un ***deslizador (slider)***

$n = 30$

5. Ingrese los puntos (point) utilice el comando ***Punto(<Objeto>)*** o ***Point(<Object>).***

$A = Point(g)$

$B = Point(g)$

6. Ingrese el comando ***Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*** o ***Integral(<Function>, <Function>, <Start x-Value>, End x-Value>).***

$Integral(f, 0,5)$

7. Al considerar los rectángulos inscritos se considera la suma inferior el comando ***SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)*** o ***LowerSum(<Function>, <Start x-Value>, <End x Value>, <Number of Rectangles>)***

$LowerSum(f, x(A), x(B), n)$

8. De esta manera se obtiene para 30 rectángulos inscritos una respuesta de $118.82u^2$.

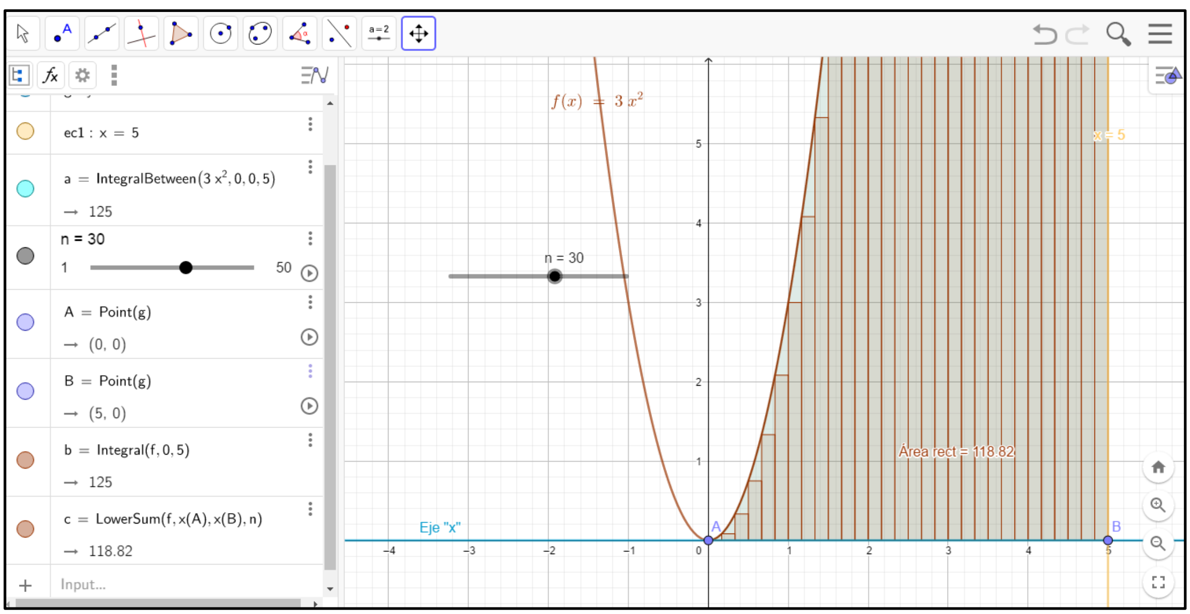


Figura 3-5: Solución gráfica y analítica en GeoGebra, rectángulos inscritos.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2. Calcular el área de la región acotada por la curva $y = 3x^2$, el eje x y la recta $x = 5$, tomando en cuenta los rectángulos circunscritos.

Proceso:

Dividir el intervalo cerrado $[0;5]$ *en n sub intervalos.*

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5-0}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5}{n}$$

Obtener cada sub intervalo con longitud Δx.

$x_0 = 0$

$x_1 = \Delta x$,

$x_2 = 2\Delta x$

$x_i = i\Delta x$

$x_{n-1} = (n-1)\Delta x$

Así sucesivamente, hasta alcanzar

$x_n = n\Delta x$

$x_n = n\left(\frac{5}{n}\right)$

$x_n = 5$

Al ser la función creciente se tiene

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde en el i-ésimo sub intervalo $[x_{i-1}; x_i]$ *la función es* $f(x_i)$

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Siendo

$x_i = i\Delta x$

Se tiene

$f(x_i) = 3(i\Delta x)^2$

Por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} [3(i\Delta x)^2]\Delta x$$

Dónde

$$\Delta x = \frac{5}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[3\left(i\frac{5}{n}\right)^2\right]\frac{5}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 3\frac{125}{n^3}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{375}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Aplicando propiedades de sumatorias se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{375}{n^3}\left[\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{125}{n^3}\left(\frac{2n^2-3n+1}{2}\right)n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{125}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)$$

Reemplazando

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{125}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)\right]$$

$$A = \frac{125}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{125}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{125}{2}(2-0+0)$$

$$A = \frac{125}{2}(2)$$

$$A = 125u^2$$

Proceso GeoGebra

1. En la entrada, ingrese el valor de la curva.

$f(x) = 3x^2$

2. Ingrese en la entrada el valor de las rectas.

$y = 0$

$x = 5$

3. Escriba el comando ***IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*** o ***IntegralBewteen(<Function>, <Function>, <Start x-Value>, <End x-Value>).***

$IntegralBewteen(3x^2, 0,0,5)$

4. Ingrese un ***deslizador (slider)***

$n = 50$

5. Ingrese los puntos (point) utilice el comando ***Punto(<Objeto>)*** o ***Point(<Object>).***

$A = Point(g)$

$B = Point(g)$

6. Ingrese el comando ***Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*** o ***Integral(<Function>, <Function>, <Start x-Value>, End x-Value>).***

$Integral(f, 0,5)$

7. Al considerar los rectángulos circunscritos se considera la suma superior el comando ***SumaSuperior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)*** o ***UpperSum(<Function>, <Start x-Value>, <End x Value>, <Number of Rectangles>)***

$UpperSum(f, x(A), x(B), n)$

8. De esta manera se obtiene para *n* rectángulos inscritos una respuesta en u^2.

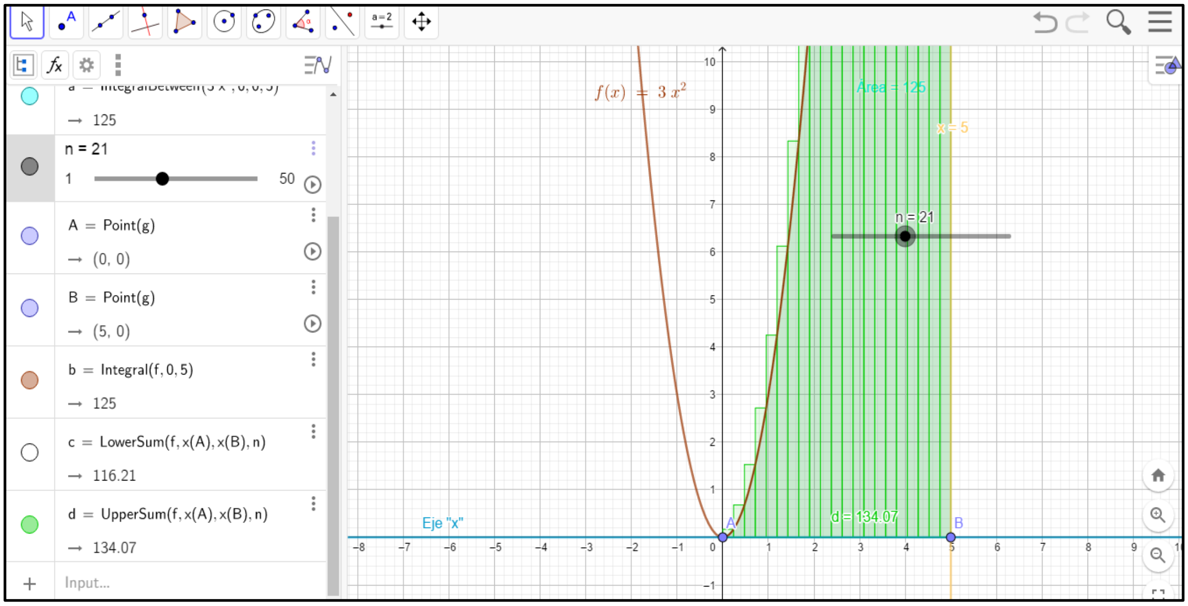


Figura 4-5: Solución gráfica y analítica en GeoGebra, rectángulos circunscritos.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

Determine la región acotada por $y = x^3 + x$, el eje x y las rectas $x = -2, x = 1$; rectángulos circunscritos e inscritos.

INTEGRAL DEFINIDA

2

OBJETIVO ESPECÍFICO

Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.63. Realizar operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales.

Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función como la superficie limitada por la curva y el eje x. (Ref. M.5.1.65.)

M.5.1.66. Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla4-5: Proceso metodológico 2.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	***Comprensión:*** Presentación de diferentes operaciones con integrales indefinidas. ***Concepción de un plan*:** Análisis del cálculo de acuerdo a lo anteriormente estudiado, ***Ejecución del plan**:* Utilización de las propiedades. ***Verificación:*** Comprobación mediante la utilización de la derivada. ***Generalización:*** Presentación de valores para determinar la constante de integración.

REFLEXIÓN	Formulación de preguntas para verificar los conocimientos previos: ¿Qué es una integral definida? ¿Qué diferencia tiene la integral definida de la indefinida? ¿Habrá tanta diferencia al calcular la integral definida con propiedades que con sumas inferiores o superiores de áreas?
CONCEPTUALIZACIÓN	Recordar el proceso anteriormente estudiado, área de una región. Definición de integral definida. Presentación de elementos. Explicación y demostración de las propiedades. Resolución de ejercicios de manera analítica y mediante la utilización de GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado de 15min. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 3 ejercicios, utilizando método analítico y GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 5-5: Recursos 2.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Tableta digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Anteriormente para aproximar el área bajo la curva continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ siendo $f(x) \geq 0$ se consideraba el siguiente proceso

1. Determinación de las particiones del intervalo en n sub intervalos de igual longitud.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

2. Cálculo del valor de f en el extremo sea derecho o izquierdo del sub intervalo i-ésimo.
3. La suma S_n de las áreas de los n rectángulos que aproximan el área.
4. La aproximación mejora cuando Δx disminuye y así se define el área bajo la curva por encima del eje x y limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$ como el límite de la suma cuando el número de los rectángulos es muy grande.

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Sin embargo, para aplicar esta técnica a problemas distintos del área, es necesario considerar una forma más general de las sumas que aproximan el área y definir claramente lo que se entiende por el límite de esas sumas.

INTEGRAL DEFINIDA

Si f es una función continua sobre el intervalo $[a,b]$ y x_i pertenece a una partición (conjunto de puntos tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$), la integral definida se denota de manera similar a la de integrales indefinidas, se lee "integral de $f(x)$ de $x = a$ hasta$x = b$", o también "integral de $f(x)$sobre el intervalo $[a, b]$" y se calcula mediante la expresión

$$\int_a^b f(x)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Siendo sus elementos:

Límite superior de la integral

Función es el integrando

Signo de integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

variable de integración

Límite inferior de la integral

Una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$.

Interpretación geométrica

La integral definida interpretada geométricamente representa la suma algebraica de los valores numéricos de las áreas de las figuras que forman, en el que las áreas de las partes situadas sobre el eje OX se toma como signo positivo, mientras que las áreas que se encuentren por debajo del eje OX se toman con signo negativo.

PROPIEDADES

De acuerdo a la definición de integral definida donde a < b también es conveniente extender esa definición para cuando $a = b$ o $a > b$, para lo cual se tiene las siguientes propiedades.

DEFINICIÓN DE DOS INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

Propiedad 1: ***Integral definida entre dos límites de integración iguales.***

Si f está definida en $x = a$, se define.

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Demostración:

Si $\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$

Aplicando la definición de límites, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = 0$$

$$\therefore \int_a^a f(x)dx = 0$$

Propiedad 2: ***Cambio de límites de integración.***

Si f es integrable en $[a,b]$, se define.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Demostración:

Aplicando la definición de límites, se tiene

Si $\Delta x = \frac{b-a}{n} = -\left(\frac{a-b}{n}\right)$, donde $\Delta x_1 = -\left(\frac{a-b}{n}\right)$

$\Delta x = -\Delta x_1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(-\Delta x_1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_1$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Propiedad 3: *Integral definida entre puntos del interior del intervalo.*

Si f es integrable con los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Demostración:

Si $a \le c \le b$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-c}{n} + \frac{c-a}{n}$, donde $\Delta x_1 = \frac{b-c}{n}$, $\Delta x_2 = \frac{c-a}{n}$

Aplicando la definición de límites, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_2$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Propiedad 4: ***La integral definida de la multiplicación de un número por una función.***

Si f y g son integrables en $[a,b]$ y k es una constante, entonces

$$\boxed{k\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kf(x)dx}$$

Demostración:

Aplicando la definición de límites y sumatoria, se tiene

$$k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\Delta x$$

$$\therefore k\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kf(x)dx$$

Propiedad 5: Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces $f \pm g$ son integrables en $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$$

Demostración:

Aplicando la definición de límites y sumatoria, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) \pm g(x_i)\big)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x$$

$$\therefore \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

Propiedad 6: Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\boxed{0 \leq \int_a^b f(x)dx}$$

Propiedad 7: ***Integrales definidas de dos funciones.***

Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Si $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 4$, calcular $\int_{3}^{-3} f(x)dx$**

Aplicando la propiedad 2 se tiene

$$\int_3^{-3} f(x)dx = -\int_{-3}^{3} f(x)dx$$

$$\therefore \int_3^{-3} f(x)dx = -\,4$$

2. **Si $\int_{-7}^{-2} f(x)dx = 8$, $\int_2^7 g(x)dx = 18$ y $\int_{-7}^{7} f(x)dx = 20$, calcular $\int_{-2}^{2} f(x)dx$**

Aplicando la propiedad 3 se tiene

$$\int_{-7}^{7} f(x)dx = \int_{-7}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{7} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-7}^{7} f(x)dx - \int_{-7}^{-2} f(x)dx - \int_{2}^{7} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 20 - 8 - 18$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} f(x)dx = -6$$

3. **Si $\int_{-3}^{2} f(x)dx = 3$ y $\int_{-3}^{8} f(x)dx = -5$, calcular $\int_{2}^{8} f(x)dx$**

Aplicando la propiedad 3 se tiene

$$\int_{-3}^{8} f(x)dx = \int_{-3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{8} f(x)dx$$

Donde

$$\int_{2}^{8} f(x)dx = \int_{-3}^{8} f(x)dx - \int_{-3}^{2} f(x)dx$$

$$\int_{2}^{8} f(x)dx = -5 - 3$$

$$\therefore \int_{2}^{8} f(x)dx = -8$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Si $\int_2^6 f(x)dx = 18$, calcular $\int_2^6 [f(x) + 3]dx$

Aplicando la propiedad 5 se tiene

$$\int_{2}^{6} [f(x) + 3]dx = \int_{2}^{6} f(x)dx + \int_{2}^{6} 3dx$$

Aplicando la propiedad 4 se tiene

$$\int_{2}^{6} [f(x) + 3]dx = \int_{2}^{6} f(x)dx + 3\int_{2}^{6} dx$$

Para calcular 4 $\int_2^6 dx$, se analiza $y = 3$ y se calcula el área bajo la curva entre los puntos $x = 2$ y $x = 6$

Al ser un rectángulo se tiene

$$Área = Base\ x\ altura$$

$$Área = (6 - 2)(3)$$

$$Área = 12u^2$$

Reemplazando

$$\int_{2}^{6} [f(x) + 3]dx = \int_{2}^{6} f(x)dx + 3\int_{2}^{6} dx$$

$$\int_{2}^{6} [f(x) + 3]dx = 18 + 12$$

$$\therefore \int_{2}^{6} [f(x) + 3]dx = 30u^2$$

Proceso GeoGebra.

1. Se establece en GeoGebra una función $f(x)$, en este caso se estableció $\boldsymbol{f(x) = 1.25x - 0.5}$ bajo la condición que el área bajo la curva desde los puntos 2 a 6 sea 18.

2. Se aplica el comando ***Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral (f, 2, 6)

3. Se establece en GeoGebra una función constante $g(x)$, en este caso se estableció $\boldsymbol{y = 3}$ de acuerdo al ejercicio planteado, bajo la condición que el área bajo la recta desde los puntos 2 a 6 sea 12.

4. Se aplica el comando ***Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral (g, 2, 6)

5. De acuerdo al ejercicio planteado $\int_2^6 [f(x) + 3]dx$ aplicando las propiedades la respuesta es 30, en GeoGebra se suma los dos valores anteriormente establecidos.

Integral (f, 2, 6) + Integral (g, 2, 6)

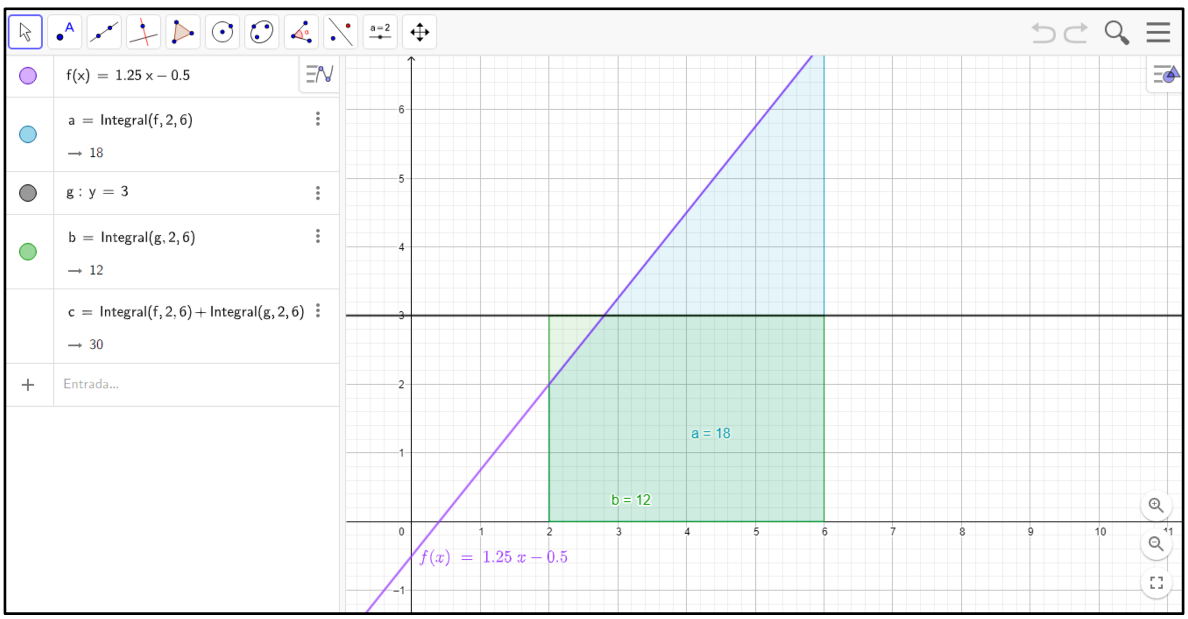


Figura 5-5: Propiedades ejercicio 1.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2. **Si $\int_{-1}^{4} f(x)dx = -3$ y $\int_{-1}^{4} g(x)dx = 8$, calcular $\int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx$**

Aplicando la propiedad 5 se tiene

$$\int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx = \int_{-1}^{4} 4f(x)dx - \int_{-1}^{4} 5g(x)dx$$

Aplicando la propiedad 4 se tiene

$$\int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx = 4\int_{-1}^{4} f(x)dx - 5\int_{-1}^{4} g(x)dx$$

$\int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx = 4(-3) - 5(8)$

$$\therefore \int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx = -52$$

Proceso GeoGebra

1. Se establece en GeoGebra una función $f(x)$, en este caso se estableció $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{16}x^2 - 0.87}$ bajo la condición que el área bajo la curva desde los puntos -1 a 4 sea -3.

2. Se aplica el comando ***Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral (f, -1, 4)

3. Se establece en GeoGebra una función $g(x)$, en este caso se estableció $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2.73}$, bajo la condición que el área bajo la curva desde los puntos -1 a 4 sea 8.

4. Se aplica el comando ***Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral (g, -1, 4)

5. De acuerdo al ejercicio planteado $\int_{-1}^{4}[4f(x) - 5g(x)]dx$ aplicando las propiedades la respuesta es -52, en GeoGebra se suma los dos valores multiplicando por la constante.

4Integral (f, -1, 4) -5 Integral (g, -1, 4)

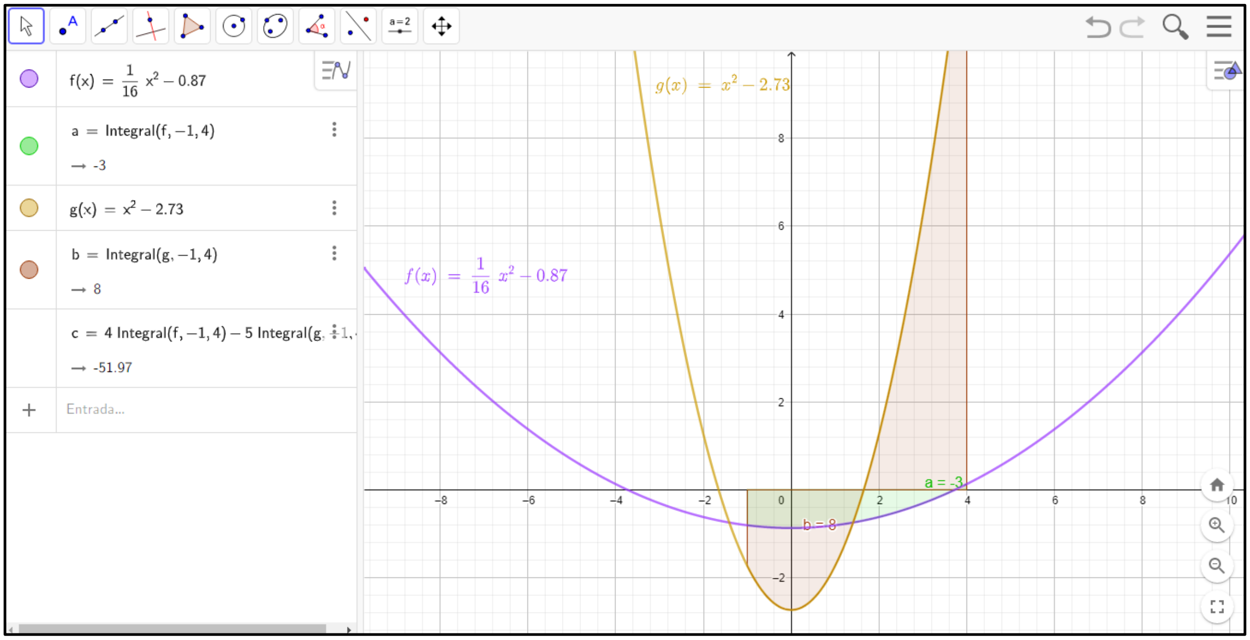


Figura 6-5: Propiedades ejercicio 2.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. **Si** $\int_0^9 f(x)dx = 5$ **, calcular** $\int_0^9 [f(x) + x]dx$**.**

2. ***Si*** $\int_{-4}^{0} f(x)dx = 4$ ***y*** $\int_{-4}^{0} g(x)dx = 3$**, calcular** $\int_{-4}^{0} [f(x) + g(x)]dx$

3. **Si** $\int_{-3}^{0} f(x)dx = 3$ **,** $\int_4^6 g(x)dx = 7$ ***y*** $\int_{-3}^{6} f(x)dx = 16$**, calcular** $\int_0^4 f(x)dx$

PRIMERO Y SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

3

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.

Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.67. Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.

M.5.1.68. Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva).

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 6-5: Proceso metodológico 3.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
INICIAL	***Motivación:*** Importancia de la integral definida. ***Diagnóstico:*** Recordatorio de la integral definida y sus propiedades. ***Planteamiento de los temas:*** Teoremas fundamentales del cálculo.
DESARROLLO	Explicación de cada teorema y demostración de las mismas. Resolución de ejercicios de manera analítica y mediante la utilización de GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado de 15min. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.

DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 5 ejercicios, utilizando método analítico y GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 7-5: Recursos 3.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Tableta digital. Plataforma institucional.	GeoGebra

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

El trabajo realizado de manera independiente por Newton y Leibniz en el siglo XVII quienes demostraron cómo se podía usar el Cálculo para determinar el área de una región acotada por una curva o un conjunto de curvas, permite evidenciar la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, evaluando mediante anti diferenciación una integral definida, conociendo a este procedimiento como los teoremas fundamentales del Cálculo.

Por ejemplo, Sea $f(x) = 3$, una función constante. Determine el área entre dicha función, el eje x y los puntos de abscisa 0 y x, siendo A(1), A(3), A(6). Compare con f(x).

Modelo matemático:

Para el cálculo del área, se aplica la definición del área de un rectángulo siendo la base x y la altura f(x).

$A(x) = base\ x\ altura$

$A(x) = f(x)x$

$A(x) = 3x$

Resolución del problema:

De acuerdo a los solicitado por el ejercicio se tiene:

$A(x) = 3x$

$A(1) = 3(1) = 3$

$A(3) = 3(3) = 9$

$A(6) = 3(6) = 18$

Análisis:

Al analizar A(x) y f(x) se puede observar que A(x) es una primitiva (cuya función inversa es la función derivada).

$f(x) = A'(x)$

$3 = 3$

Es decir, si se tiene una función constante $f(x) = m$, definida en un intervalo cerrado $[0, x]$, entonces el área del rectángulo que se forma entre el eje x, f(x) y el intervalo esta dada por:

$A(x) = f(x)x$

$A(x) = mx$

$3x = 3x$

Ahora considérese la función $f(x) = x^2 + 2$, sobre el intervalo cerrado $[0, x]$. :

$f(x) = A'(x) = x^2 + 2$

Dicha función A(x) estaría dada por:

$$A(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$$

De esta manera A(x) representa el área por debajo de la parábola, esto nos lleva a establecer que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas y nacen de este análisis los teoremas fundamentales del cálculo.

Para entender el primero y segundo teorema fundamental del cálculo es necesario recordar:

Definición de integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(\dot{x_\iota})\Delta x_i)$$

Propiedad de la integral definida

Sea $a < c < b$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema del valor medio

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a; b]$, entonces existe c en $(a; b)$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Sea f continua, una función integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$ para todo $a \le x \le b$, y $F(x)$ su función integral, dicha función es diferenciable en todo el intervalo.

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a; b]}$$

Entonces se tiene que satisface

$$F'(x) = f(x)$$

$$D_x F(x) = D_x \int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \forall x \in [a; b]$$

Es decir, se puede derivar una integral y obtener una función a partir de ello.

También se puede denotar de la siguiente manera

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right] = f(u)\frac{du}{dx} - f(v)\frac{dv}{dx}$$

Demostración:

Se tiene la definición de derivada

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Si se considera

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Reemplazando

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

Aplicando la propiedad integral definida entre puntos del interior del intervalo se tiene

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

Resultando

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Aplicando el teorema del valor medio

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Siendo $a = x$, $b = x + \Delta x$, longitud del intervalo $b - a = \Delta x$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

En donde $x \leq c \leq x + \Delta x$, al $\Delta x \to 0$, resulta $x = c$, entonces

$f(c) \rightarrow f(x)$

$$\boxed{\therefore F'(x) = f(x)}$$

De esta manera se ha demostrado el primer teorema fundamental del Cálculo.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y *F(x)* una primitiva de *f*, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - f(a)}$$

Demostración:

Al ser f continua en todos los números de $[a, b]$, por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene

$F'(x) = f(x)$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$

Donde C es una constante.

Siendo $x = a$ se obtiene

$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$

Aplicando la propiedad Integral definida entre dos límites de integración iguales.

$\int_a^a f(t)dt = 0$

$F(a) = C$

Si $x = b$ se obtiene

$F(b) = \int_a^b f(x)dx + C$

Como $F(a) = C$, entonces

$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a)$

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Conocida también como regla de Barrow, que permite calcular integrales definidas sin necesidad de calcular sumas superiores e inferiores.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo determine la derivada de la función.

$$\boldsymbol{F(x) = \int_0^x \sqrt{3+t^5}dt}$$

De acuerdo al teorema fundamental se tiene

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{3+t^5}dt\right]$$

$$F'(x) = \sqrt{3+x^5}(1) - \sqrt{3+0^5}(0)$$

$$F'(x) = \sqrt{3+x^5}$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo determine la derivada de la función.

$$\boldsymbol{G(x) = \int_x^{x^2+2} \frac{t+2}{t-1}dt}$$

De acuerdo al teorema fundamental se tiene

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_x^{x^2+2} \frac{t+2}{t-1}dt\right]$$

$$G'(x) = \frac{x^2+2+2}{x^2+2-2}\ (2x) - \frac{x+2}{x-1}(1)$$

$$G'(x) = \frac{2x(x^2+4)}{x^2}\ - \frac{x+2}{x-1}$$

$$G'(x) = \frac{2(x^2+4)}{x} - \frac{x+2}{x-1}$$

$$G'(x) = \frac{2(x^2+4)(x-1) - x(x+2)}{x(x-1)}$$

$$G'(x) = \frac{(x^2+4)(2x-2) - x(x+2)}{x(x-1)}$$

$$G'(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 - x^2 - 2x}{x(x-1)}$$

$$G'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x - 8}{x(x-1)}$$

Proceso GeoGebra

1. Ingrese en la entrada la función y grafique.

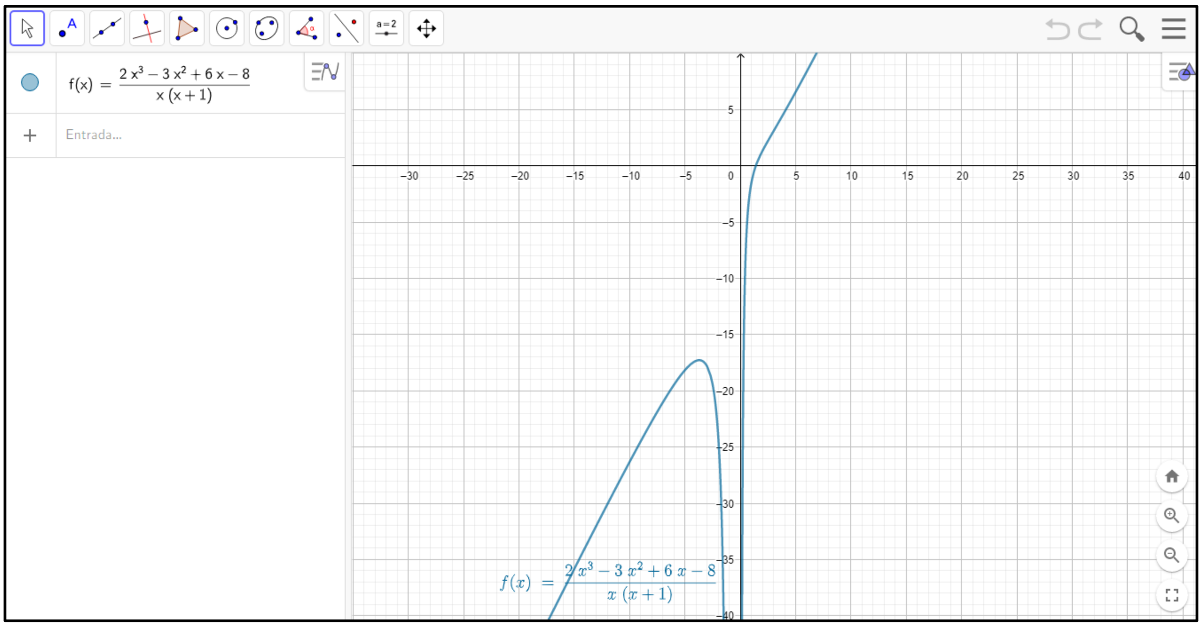


Figura 7-5: Gráfica función 1.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2. Determine la función $f(x)$, sabiendo que f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_0^{x^2+2} f(t)dt = x^6 + x^4 + 3x^2$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$F(x) = \int_0^{x^2+2} f(t)dt$$

$$x^6 + x^4 + 12x^2 = \int_0^{x^2+2} f(t)dt$$

$$\frac{d}{dx}(x^6 + x^4 + 12x^2) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2+2} f(t)dt\right]$$

$6x^5 + 4x^3 + 24x = 2x\, f(x^2 + 2) - 0\, f(0)$

$6x^5 + 4x^3 + 24x = 2x\, f(x^2 + 2)$

Dividiendo la expresión para *2x*, se tiene

$3x^4 + 2x^2 + 12 = f(x^2 + 2)$

$f(x^2 + 2) = 3x^4 + 2x^2 + 12$

Se empieza a construir la función con procesos algebraicos.

$2x^2 = 12x^2 - 10x^2$

$f(x^2 + 2) = 3x^4 + 12x^2 + 12 - 10x^2$

$f(x^2 + 2) = 3(x^4 + 4x^2 + 4) - 10x^2$

$f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2)^2 - 10x^2$

Si restamos y sumamos 20 a la expresión se tiene

$f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2)^2 - 10x^2 - 20 + 20$

$f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2)^2 - 10(x^2 + 2) + 20$

Resultando la función *f(x)*

$f(x) = 3x^2 - 10x + 20$

Proceso GeoGebra

1. Ingrese en la entrada la función y grafique.

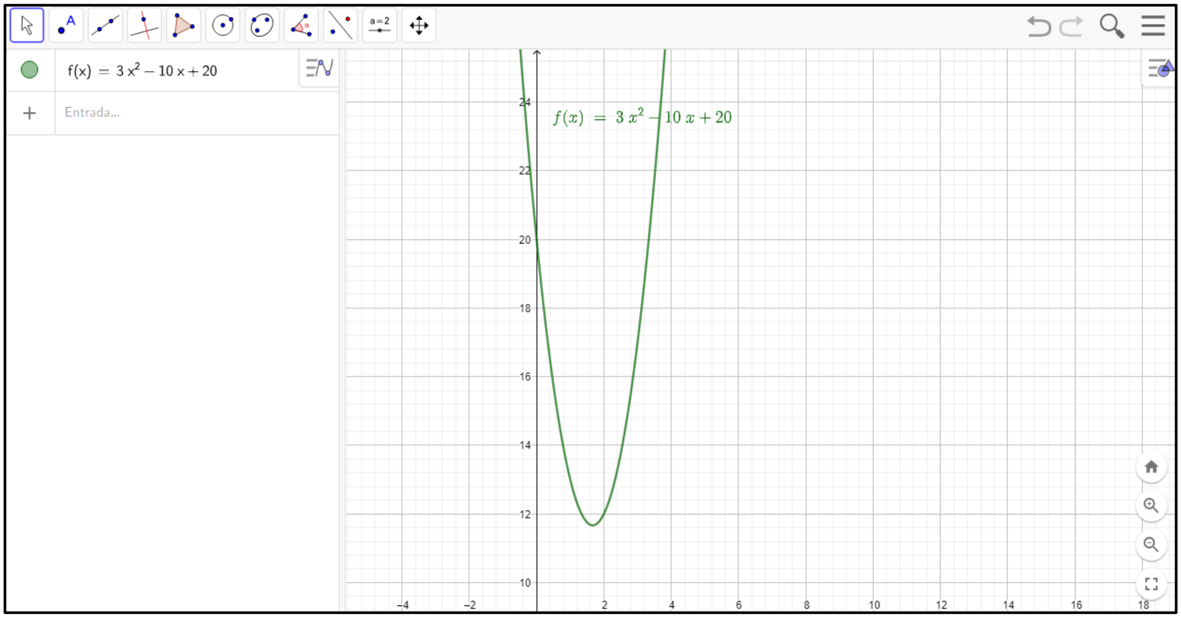


Figura 8-5: Gráfica de función 2.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. Calcule la derivada de $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^3+3}dt$

2. Calcule la derivada de $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1+t^3}dt$

3. Calcule la derivada de $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{1+t^4}dt$

4. Evaluar $\int_1^4 (x^4 - 3x^3 + 8x)dx$

5. Utilice la regla de Barrow para calcular $\int_0^1 \frac{5}{6+6x^2}dx$

MÉTODO NUMÉRICO DE INTEGRACIÓN 4

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

Calcular la integral definida mediante la utilización de la regla de los trapecios. (Ref. **M.5.1.66**.)
Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 8-5*:* Proceso metodológico 4.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	Recordar sobre la integral definida y su cálculo mediante la suma de áreas de rectángulos bajo la curva. Análisis de las propiedades y teoremas.
REFLEXIÓN	¿Qué proceso se puede seguir en caso de que no se pueda integrar directamente aplicando los teoremas fundamentales del cálculo?
CONCEPTUALIZACIÓN	Plantear el proceso conocido como el método de regla del trapecio o regla trapecial. Presentación de elementos. Resolución de ejercicios de manera analítica y mediante la utilización de GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado de 15min. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	

ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 1 ejercicio, de manera analítica y por medio de GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 9-5: Recursos 4.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)
Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Ante la dificultad de aplicar los teoremas del cálculo, puesto que algunas funciones elementales no tienen antiderivadas o primitivas que sean funciones elementales, es necesario aproximar una integral definida utilizando el método de regla del trapecio o regla trapecial.

Este método consiste en aproximar el área comprendida entre el eje de las abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función *f*, utilizando *n* trapecios.
Proceso:

1. Divida el intervalo $[a, b]$, en n sub intervalos de la misma amplitud.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Siendo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Donde los sub intervalos resultan

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

2. Forme los trapecios, uno para cada sub intervalo.
3. Calcule el área del i-ésimo trapecio.

$$A_i = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

4. Sumando todas las áreas de los trapecios resulta

$$A = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right]$$

$$A = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Como todos los términos se suman dos veces excepto el primero y último, se tiene

$$A \approx \Delta x\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

De esta manera se resume, sea f continua en $[a, b]$, la regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ esta dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]}$$

Como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)dx$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dada la integral, resuelva utilizando el método del trapecio.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 5x - 6}; n = 15$$

Proceso

Calcular Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5-2}{15}$$

$$\Delta x = 0.20$$

En una tabla de datos se hará el proceso respectivo

Tabla 10-5*:* Método del trapecio ejercicio 1.

	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{x^2-5x-6}$	$\boldsymbol{y=\frac{1}{x^2-5x-6}}$
$\boldsymbol{x_0}$	2.00	-12.00	-0.08333333
$\boldsymbol{x_1}$	2.20	-12.16	-0.08223684
$\boldsymbol{x_2}$	2.40	-12.24	-0.08169935
$\boldsymbol{x_3}$	2.60	-12.24	-0.08169935
$\boldsymbol{x_4}$	2.80	-12.16	-0.08223684
$\boldsymbol{x_5}$	3.00	-12.00	-0.08333333
$\boldsymbol{x_6}$	3.20	-11.76	-0.08503401
$\boldsymbol{x_7}$	3.40	-11.44	-0.08741259
$\boldsymbol{x_8}$	3.60	-11.04	-0.09057971
$\boldsymbol{x_9}$	3.80	-10.56	-0.09469697
$\boldsymbol{x_{10}}$	4.00	-10.00	-0.100
$\boldsymbol{x_{11}}$	4.20	-9.36	-0.10683761
$\boldsymbol{x_{12}}$	4.40	-8.64	-0.11574074
$\boldsymbol{x_{13}}$	4.60	-7.84	-0.12755102
$\boldsymbol{x_{14}}$	4.80	-6.96	-0.14367816
$\boldsymbol{x_{15}}$	5.00	-6.00	-0.16666667

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Aplicando el método del trapecio se tiene

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2-5x-6} \approx 0.20\left[\frac{-0.08333}{2} - 0,08223684 - 0,08169935 - 0,08169935 - 0,08223684 - 0,08333333 - 0,08503401 - 0,08741259 - 0,09057971 - 0,09469697 - 0,1 - 0,10683761 - 0,11574074 - 0,12755102 - 0,14367816 + \frac{-0.01666}{2}\right]$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2-5x-6} \approx 0,2975473$$

2. Dada la integral, resuelva utilizando el método del trapecio.

$$\int_{2}^{20} \frac{(x+4)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}; \;\; n = 18$$

Proceso

Calcular Δx

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$\Delta x = \dfrac{20-2}{18}$

$\Delta x = 1$

En una tabla de datos se hará el proceso respectivo

Tabla 11-5: Método del trapecio ejercicio 2.

	x	$(x+4)^{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$	$y = \frac{(x+4)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$
x_0	2	88.181	0.3779	33.329
x_1	3	129.64	0.2773	35.956
x_2	4	181.01	0.2182	39.501
x_3	5	243.00	0.1796	43.644
x_4	6	316.22	0.1524	48.224
x_5	7	401.31	0.1324	53.155
x_6	8	498.83	0.117	58.383
x_7	9	609.33	0.1048	63.875
x_8	10	733.36	0.0949	69.607
x_9	11	871.42	0.0867	75.561
x_{10}	12	1024.00	0.0798	81.724
x_{11}	13	1191.5	0.0739	88.083
x_{12}	14	1374.6	0.0688	94.632
x_{13}	15	1573.5	0.0644	101.36
x_{14}	16	1788.8	0.0605	108.26
x_{15}	17	2020.9	0.057	115.33

x_{16}	18	2270.1	0.0539	122.57
x_{17}	19	2536.9	0.0512	129.97
x_{18}	20	2821.8	0.0487	137.52

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Aplicando el método del trapecio se tiene

$$\int_{2}^{20} \frac{(x+4)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^2+x+1}} \approx 1\left[\frac{33.329}{2} + 35.956 + 39.501 + 43.644 + 48.224 + 53.155 + 58.383 + 63.875 + 69.607 + 75.561 + 81.724 + 88.083 + 94.632 + 101.36 + 108.26 + 115.33 + 122.57 + 129.97 + \frac{137.52}{2}\right]$$

$$\int_{2}^{20} \frac{(x+4)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^2+x+1}} \approx 1415.2595$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA.

1. Dada la integral, resuelva utilizando método del trapecio.

$$\int_{-1}^{1} e^{x^4}dx\,; n = 8$$

Proceso

Calcular Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{8}$$

$$\Delta x = 0.25$$

En una tabla de datos se hará el proceso respectivo

Tabla 12-5: Método del trapecio ejercicio 3.

	x	x^4	$y = e^{x^4}$

x_0	-1.00	1.00	2.718281
x_1	-0.75	0.31640625	1.372187594
x_2	-0.50	0.0625	1.064494459
x_3	-0.25	0.00390625	1.003913889
x_4	0.00	0.00	1.00
x_5	0.25	0.00390625	1.003913889
x_6	0.50	0.0625	1.064494459
x_7	0.75	0.31640625	1.372187594
x_8	1.00	1.00	2.718281

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Aplicando el método del trapecio se tiene

$$\int_{-1}^{1} e^{x^4} dx \approx 0.25 \left[\frac{2.718281}{2} + 1.372187594 + 1.064494459 + 1.003913889 + 1 \right.$$
$$\left. + 1.003913889 + 1.064494459 + 1.372187594 + \frac{2.718281}{2} \right]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{x^4} dx \approx 2.649868$$

Proceso GeoGebra.

1. Ingrese la función $\boldsymbol{f(x) = e^{x^4}}$ en la entrada.

2. Ingrese el punto a sobre el eje x, en la entrada escriba $\boldsymbol{A = (-1, 0)}$ o seleccione la opción punto y ubique en la vista gráfica.

3. Ingrese el punto b sobre el eje x, en la entrada escriba $\boldsymbol{B = (1, 0)}$ o seleccione la opción punto y ubique en la vista gráfica.

4. Determine la integral mediante el comando ***Integral(<función>, <extremo inferior del intervalo>, <extremo superior del intervalo>)***

Integral (f, -1, 1)

5. Ingrese un deslizador, ***n*** de 1 a 50.

6. Determine la suma inferior mediante el comando ***SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)***

SumaInferior(f, x(A), x(B), n)

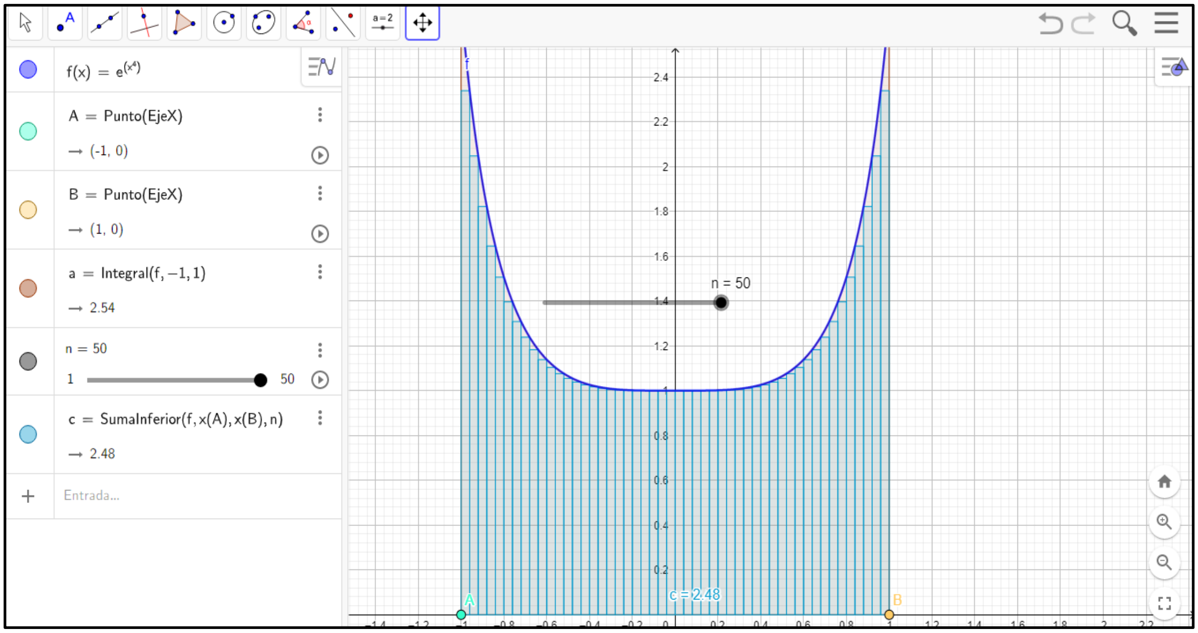


Figura 9-5: Gráfica método del trapecio ejercicio 3.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2. Dada la integral, resuelva utilizando método del trapecio.

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x^3}; n = 8$$

Proceso

Calcular Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{8}$$

$$\Delta x = 0.25$$

En una tabla de datos se hará el proceso respectivo

Tabla 13-5: Método del trapecio ejercicio 4.

	x	$1+x^3$	$y = \frac{1}{1+x^3}$
x_0	0.00	1.00	1.00
x_1	0.25	1.0156	0.9846
x_2	0.50	1.125	0.8888
x_3	0.75	1.4218	0.7032

x_4	1.00	2.00	0.50
x_5	1.25	2.9531	0.3386
x_6	1.50	4.375	0.2285
x_7	1.75	6.3593	0.1572
x_8	2.00	9.00	0.1111

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Aplicando el método del trapecio se tiene

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx \approx 0.25\left[\frac{1}{2} + 0.9846 + 0.8888 + 0.7032 + 0.5 + 0.3386 + 0.2285 + 0.1572 + \frac{0.1111}{2}\right]$$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx \approx 1.0891$$

Proceso GeoGebra

1. Ingrese la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{1+x^3}}$ en la entrada.

2. Ingrese el punto a sobre el eje x, en la entrada escriba $\boldsymbol{A=(0,0)}$ o seleccione la opción punto y ubique en la vista gráfica.

3. Ingrese el punto b sobre el eje x, en la entrada escriba $\boldsymbol{B=(2,0)}$ o seleccione la opción punto y ubique en la vista gráfica.

4. Determine la integral mediante el comando ***Integral(<función>, <extremo inferior del intervalo>, <extremo superior del intervalo>)***

Integral (f, x(A), x(B))

5. Ingrese un deslizador***, n*** de 1 a 50.

6. Determine la suma inferior mediante el comando ***SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)***

SumaInferior(f, x(A), x(B), n)

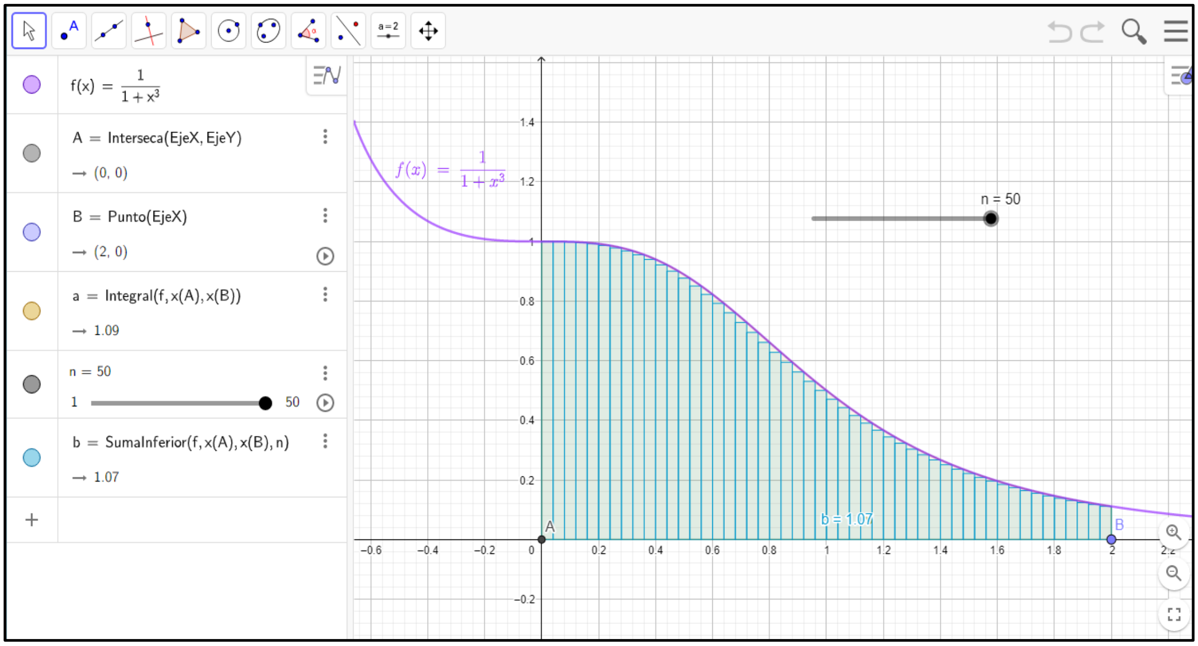


Figura 10-5: Gráfica de la función ejercicio 4.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

Dada la integral, resuelva utilizando el método del trapecio.

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{25}{2}} \sqrt{x^2 + 3x - 5}\,;\ \ n = 10$$

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

5

OBJETIVO ESPECÍFICO

Encontrar el área de una región entre dos curvas usando integración.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 14-5*:* Proceso metodológico 5.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	Recordar la integral definida, sus propiedades y teoremas.
REFLEXIÓN	Plantear la siguiente interrogante. ¿Cómo utilizar una integral definida para encontrar el área de figuras planas?.
CONCEPTUALIZACIÓN	Explicar el proceso a seguir en caso de que la función mantenga su signo constante o cambie el signo entre el intervalo. Resolución de ejercicios de manera analítica y en GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado de 15min. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolver 4 ejercicios de manera analítica y mediante GeoGebra**.**

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 15-5: Recursos 5.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Para determinar el área limitada por la gráfica de una función continua, el eje de las abscisas y las rectas $x = a, x = b$ se tiene.

Proceso:

1. Hallar los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje OX.
2. Determinar si existen ceros de f en el intervalo $]a, b[$

- Si no existen ceros de la función en el intervalo, el área coincide con el valor absoluto de la integral definida entre a y b.

$$A_T = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

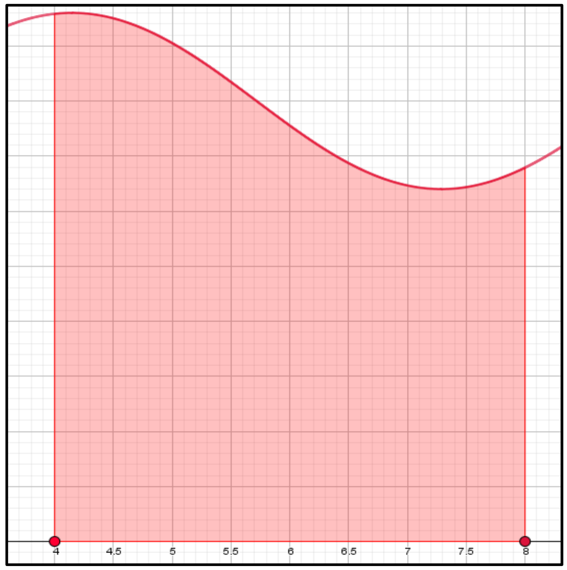


Figura 11-5: Gráfica de una función f sin ceros.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

- Si existen ceros de la función en el intervalo, el área será la suma de los valores absolutos de las integrales definidas en cada uno de los sub intervalos determinados.

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

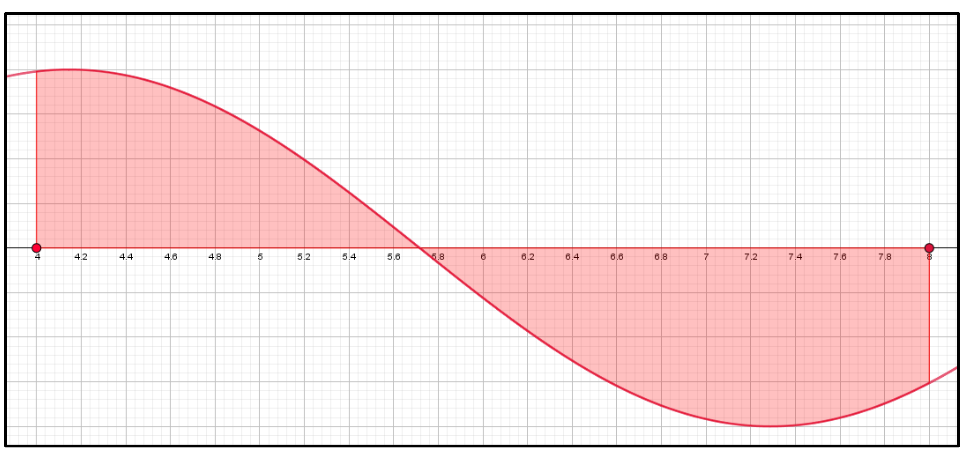


Figura 12-5: Gráfica de una función f con ceros.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 - 4x$, el eje *x* y las ordenadas $x = -1$ y $x = 2$

Proceso:

Determinar las intersecciones con el eje *x*

Si $y = 0$, entonces

$0 = x^3 - 2x^2 - 4x$

$0 = x(x^2 - 2x - 4)$

$x = 0$

$x^2 - 2x - 4 = 0$

$x = 1 + \sqrt{5} = 3.236$

$x = 1 - \sqrt{5} = -1.236$

Se tiene que las intersecciones en *x* son $x = 1 - \sqrt{5}, x = 0\ y\ x = 1 + \sqrt{5}$

De esta manera se observa que la función cambia de signo en $x = 0$, es decir el área buscada consiste en dos secciones y se deberá cada una de ellas.

$A = A_1 + A_2$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - 2x^2 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3 - 2x^2 - 4x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 - \frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{2}{3}(-1)^3 + 2(-1)^2\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{2}{3}(2)^3 - 2(2)^2 - \frac{1}{4}(0)^4 + \frac{2}{3}(0)^3 + 2(0)^2\right|$$

$$A = \frac{13}{12} + \frac{28}{3}$$

$$A = \frac{125}{12}u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva $y = 2x^3 - 4x$, el eje *x* y las ordenadas $x = -1$ y $x = 2$.

Proceso

Determinar las intersecciones con el eje *x*

Si $y = 0$, entonces

$0 = 2x^3 - 4x$

$0 = 2x(x^2 - 2)$

$x = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x = \pm\sqrt{2}$

Se tiene que las intersecciones en *x* son $x = -\sqrt{2}, x = 0\ y\ x = \sqrt{2}$

De esta manera se observa que la función cambia de signo en $x = 0$ y en $x = \sqrt{2}$, es decir el área buscada consiste en tres secciones y se deberá cada una de ellas.

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(2x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{2}}(2x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{\sqrt{2}}^{2}(2x^3 - 4x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right| + \left|\left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2\right]_{\sqrt{2}}^{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(0)^4 - 2(0)^2 - \frac{1}{2}(-1)^4 + 2(-1)^2\right| + \left|\frac{1}{2}(\sqrt{2})^4 - 2\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(0)^4 + 2(0)^2\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{2}(2)^4 - 2(2)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^4 + 2(\sqrt{2})^2\right|$$

$$A = \frac{3}{2} + 2 + 2$$

$$A = \frac{11}{2}u^2$$

3. **Hallar el área comprendida entre la curva $\boldsymbol{y^2 = 3x}$ y las rectas $\boldsymbol{y = 0, y = 6, x = 0}$.**

Proceso

Despejando *x*

$$x = \frac{y^2}{3}$$

Determinar las intersecciones con el eje *y*

Si $x = 0$, entonces

$$0 = \frac{y^2}{3}$$

$y = 0$

Se tiene que las intersecciones en *y* es $y = 0$, cuando $x \geq 0$

Por lo tanto al tener la función un signo constante en el intervalo $[0;6]$, el área resulta

$$A=\left|\int_0^6\left(\frac{y^2}{3}\right)dy\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{1}{9}y^3\right]_0^6\right|$$

$$A=\left|\frac{1}{9}(6)^3-\frac{1}{9}(0)^3\right|$$

$$A=24u^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Determinar el área limitada por la parábola $y=4-3x-x^2$ y el eje *x*.

Proceso:

Determinar las intersecciones con el eje *x*

Si $y=0$, entonces

$$0=4-3x-x^2$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0$$

$$x=-4$$

$$x=1$$

Se tiene que las intersecciones en *x* son $x=-4, x=1$ cuando $y\geq 0$

Por lo tanto al tener la función un signo constante en el intervalo $[-4;1]$, el área resulta

$$A=\left|\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[4x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{1}\right|$$

$$A=\left|\left[4(1)-\frac{3}{2}(1)^2-\frac{1}{3}(1)^3\right]-\left[4(-4)-\frac{3}{2}(-4)^2-\frac{1}{3}(-4)^3\right]\right|$$

$$A=\frac{125}{6}u^2$$

Proceso GeoGebra

1. Ingrese en la entrada la función.

$$f(x)=4-3x-x^2$$

2. Ingrese la recta $y=0$.

3. Determine los puntos que interseca con el eje x con el comando ***Raíz(<polinomio>)***

Raíz(f)

4. Determine el vértice mediante el comando ***Extremo(<polinomio>)***

Extremo(f)

5. Determine la intersección de la gráfica con el eje y, mediante el comando ***Interseca(<Objeto>, <Objeto>)***

Interseca(f, EjeY)

6. Determine la integral mediante el comando ***Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral(f, -4, 1)

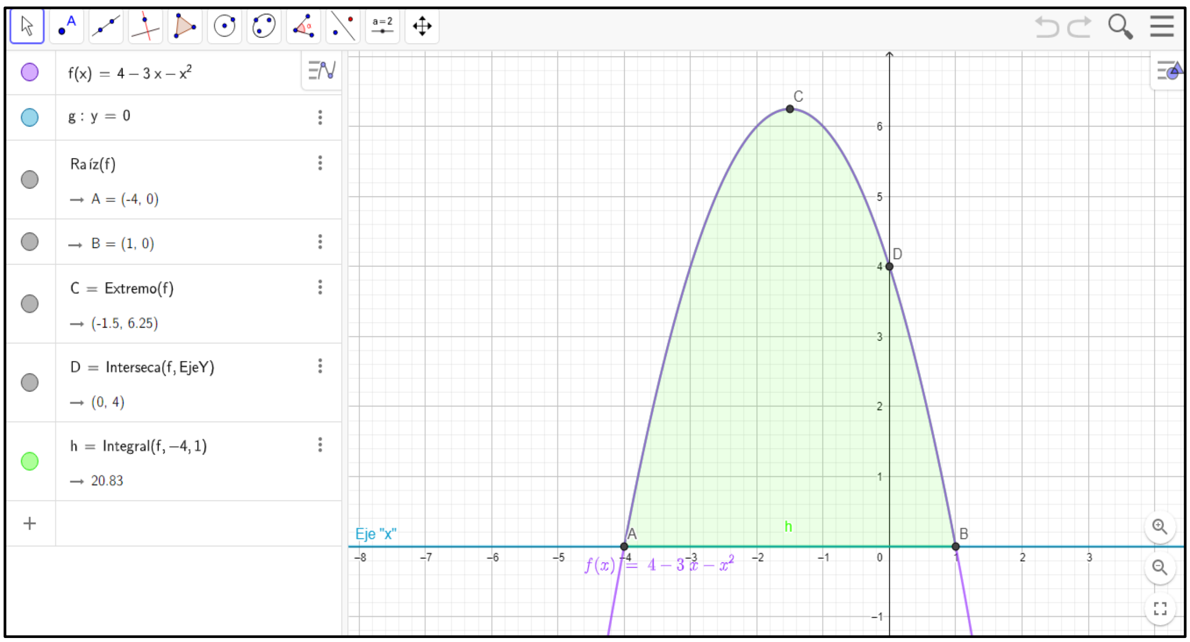


Figura 13-5: Área de figuras planas ejercicio 1.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

2. Determinar el área limitada por la curva $y = x^2 - 7x$, el eje x y las rectas $x = 2$, $x = 6$

Proceso

Determinar las intersecciones con el eje x

Si $y = 0$, entonces

$0 = x^2 - 7x$

$0 = x(x - 7)$

$x = 0$

$x - 7 = 0$

$x = 7$

$$A = \left|\int_2^6 (x^2 - 7x)\, dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right]_2^6\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{3}(6)^3 - \frac{7}{2}(6)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{7}{2}(2)^2\right]\right|$$

$$A = \frac{128}{3}u^2$$

Se tiene que las intersecciones en x son $x = 0, x = 7$

De esta manera se observa que la función no cambia de signo en $x = 0$ y en $x = 7$, es decir el área buscada consiste en una sola sección por debajo del eje x.

Proceso GeoGebra

1. Ingrese en la entrada la función.

$f(x) = x^2 - 7x$

2. Ingrese la recta $y = 0$.
3. Ingrese las rectas $x = 2, x = 6$.
4. Determine los puntos que interseca con el eje x con el comando ***Raíz(<polinomio>)***

Raíz(f)

5. Determine el vértice mediante el comando ***Extremo(<polinomio>)***

Extremo(f)

6. Determine la intersección de la gráfica con el eje y, mediante el comando ***Interseca(<Objeto>, <Objeto>)***

Interseca(f, EjeY)

7. Determine la integral mediante el comando ***Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral(f, 2, 6)

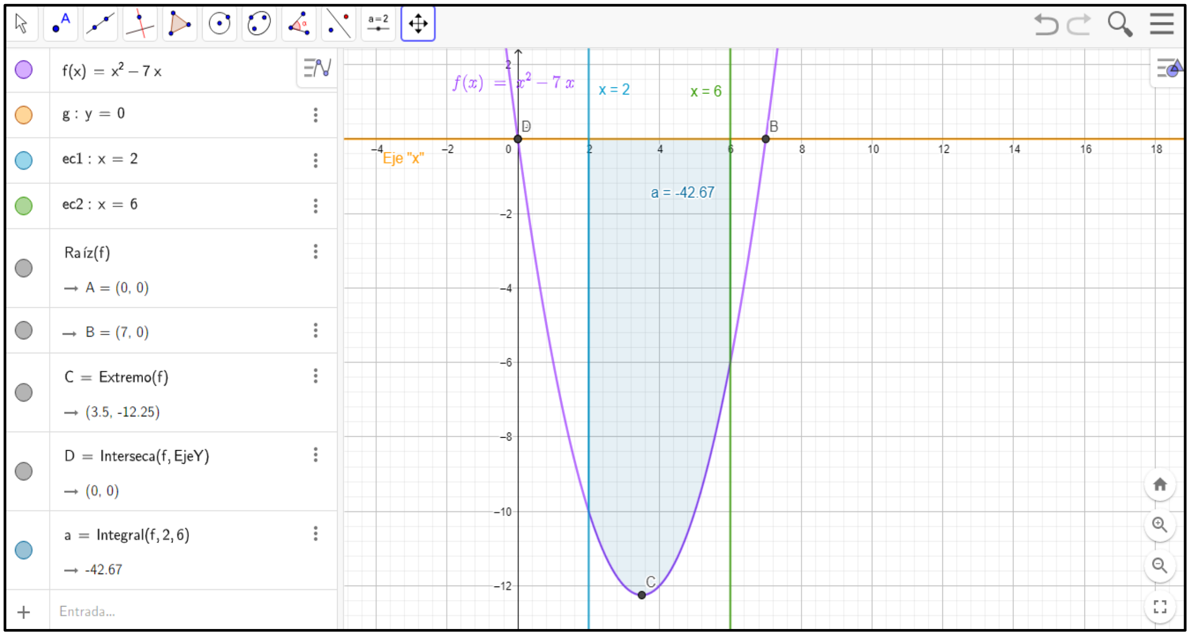


Figura 14-5: Área de figuras planas ejercicio 2.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. Determinar el área limitada por la curva $y = x^2 - 3$, el eje x y las ordenadas $x = -1$ y $x = 1$.

2. Hallar el área limitada por la curva $y = -x^2 + 6x + 5$, el eje x y las ordenadas $x = 2$ y $x = 6$.

3. Hallar el área limitada por la curva $y = 4x^3 + 5x^2 - 8x$, el eje x y las ordenadas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

4. Hallar el área limitada por la curva $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x$, el eje x y las ordenadas $x = -1$ y $x = 2$.

ÁREA ENTRE CURVAS

6

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Determinar el área de una región entre dos curvas usando integración.

Determinar el área de una región entre curvas que se intersecan usando integración.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 16-5: Proceso metodológico 6.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	Analizar el proceso utilizado en la determinación del área en figuras planas.
REFLEXIÓN	Plantear la interrogante a los estudiantes: ¿Cómo usar una integral definida para encontrar el área de una región acotada por dos curvas?
CONCEPTUALIZACIÓN	Explicar el proceso para determinar el área entre curvas. Resolución de ejercicios de manera analítica y en GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolver 2 ejercicios de manera analítica y mediante GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 17-5: Recursos 6.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Si se tiene la sección limitada por las gráficas de dos funciones continuas, siendo f y g, donde se cumple $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, y las rectas $x = a, x = b$, se tiene

$$A = A_f - A_g$$

Siendo

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

No obstante, cuando las funciones $f(x) \geq g(x)$, no son necesariamente positivas en el intervalo, se cumple:

- Se tiene una constante k bastante grande para que $g + k$ sea positiva en el intervalo.
- El área limitada por las gráficas de f y g entre a y b, es la misma que el área B, limitada por las gráficas $f + k$ y $g + k$ entre las mismas abscisas.

De esto se tiene

$$f + k \geq g + k \geq 0$$

Donde

$$A = \int_a^b [(f(x) + k) - (g(x) + k)]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el área comprendida entre las parábolas $\boldsymbol{y = 7x - x^2, y = x^2 - 3x}$

Proceso

Graficar las funciones

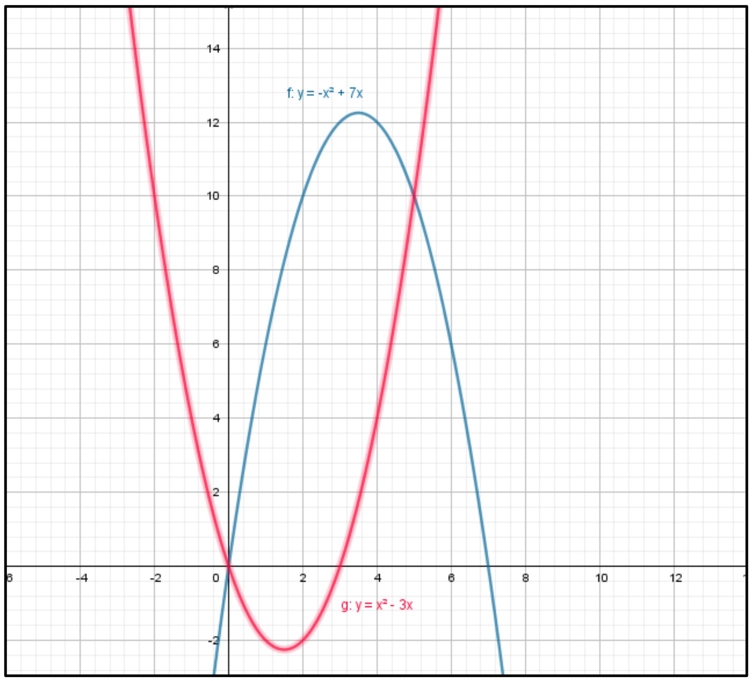


Figura 15-5: Gráfica de funciones f-g.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a las gráficas se analiza que *f(x)* está por encima de *g(x)*, por lo tanto

$f(x) \geq g(x)$

Se busca los puntos de intersección entre las funciones

$$\begin{cases} y = 7x - x^2 \\ y = x^2 - 3x \end{cases}$$

Aplicando método de igualación

$\boldsymbol{7x - x^2 = x^2 - 3x}$

$2x^2 - 10x = 0$

$x = 0$

$x = 5$

De esta manera se tiene

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_0^5 [(7x - x^2) - (x^2 - 3x)]dx$$

$$A = \int_0^5 (-2x^2 + 10x)dx$$

$$A = \left|\left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{2}x^2\right]_0^5\right|$$

$$A = \left|-\frac{2}{3}(5)^3 + 5(5)^2 + \frac{2}{3}(0)3 - 5(0)^2\right|$$

$$A = \frac{125}{3}u^2$$

2. Determine el área de la región entre las curvas $y = 8 - x^2$ y $y = x^2 + 2$ entre $x = 0$ y $x = \frac{5}{2}$

Proceso

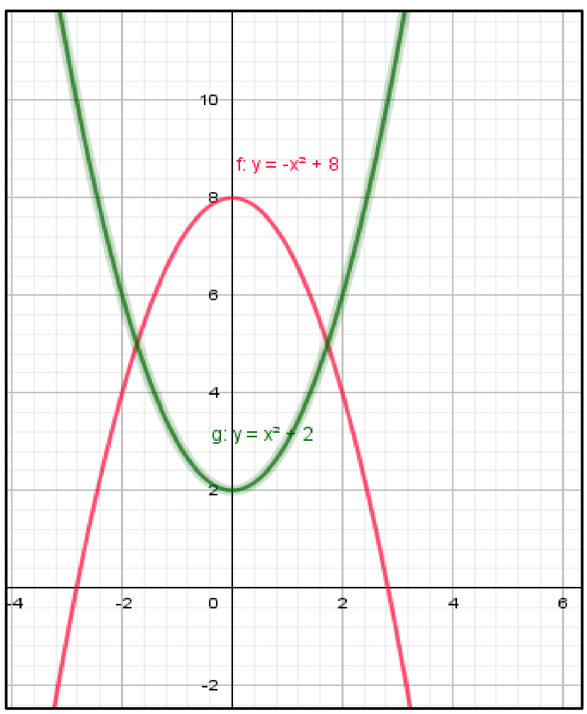


Figura 16-5: Gráfica de funciones f-g, ejercicio 2.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

.

De acuerdo a las gráficas se analiza que *f(x)* está por encima de *g(x)* en un intervalo y en otro intervalo $g(x)$ está por encima de *f(x)* por lo tanto se busca el punto de intersección para analizar los sub intervalos.

Se busca los puntos de intersección entre las funciones

$$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

Aplicando método de igualación

$$8 - x^2 = x^2 + 2$$

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

De esta manera se tiene que

$$f(x) \geq g(x) \quad en\ [0;\ \sqrt{3}]$$

$$g(x) \geq f(x) \quad en\ \left[\sqrt{3};\ \frac{5}{2}\right]$$

Se calcula el área de cada sección y al final se suma sus áreas

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$$

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} [(8 - x^2) - (x^2 + 2)]dx + \int_{\sqrt{3}}^{\frac{5}{2}} [(x^2 + 2) - (8 - x^2)]dx$$

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} (6 - 2x^2)dx + \int_{\sqrt{3}}^{\frac{5}{2}} (2x^2 - 6)dx$$

$$A = \left|\left[6x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}\right| + \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 6x\right]_{\sqrt{3}}^{\frac{5}{2}}\right|$$

$$A = \left|6(\sqrt{3}) - \frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 - 6(0) + \frac{2}{3}(0)^3\right| + \left|\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6(\sqrt{3})\right|$$

$$A = 4\sqrt{3} + \frac{-55 + 48\sqrt{3}}{12}$$

$$A = 9.27u^2$$

3. **Determine el área limitada por $x = \frac{y^2}{4}, y = x - 2$**

Proceso

Graficar las funciones

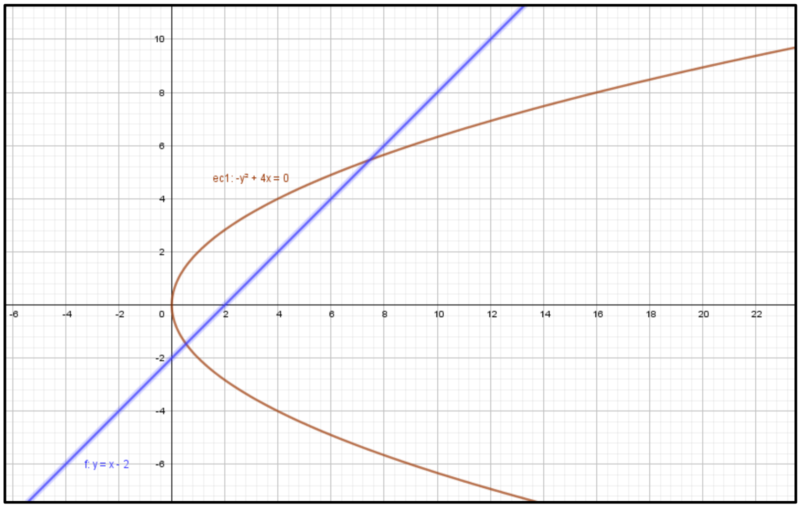


Figura 17-5: Gráfica de la curva y la recta.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a las gráficas se analiza que la recta corta a la curva y está por encima de ella

Se busca los puntos de intersección entre las gráficas

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ x = y + 2 \end{cases}$$

Aplicando método de igualación

$$\frac{y^2}{4} = y + 2$$

$$y^2 - 4y - 8 = 0$$

$$y = 2 - 2\sqrt{3}$$

$$y = 2 + 2\sqrt{3}$$

De esta manera se tiene que la recta corta en los puntos $\left(4 - 2\sqrt{3}; 2 - 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(4 + 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3}\right)$, siendo el recorrido de $y = 2 - 2\sqrt{3}$ hasta $y = 2 + 2\sqrt{3}$

$$A=\int_a^b [x_R - x_C]dy$$

$$A=\left|\int_{2-2\sqrt{3}}^{0}\left[y+2-\frac{y^2}{4}\right]dy\right|+\left|\int_{0}^{2+2\sqrt{3}}\left[y+2-\frac{y^2}{4}\right]dy\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{12}y^3\right]_{2-2\sqrt{3}}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{12}y^3\right]_{0}^{2+2\sqrt{3}}\right|$$

$$A=\left|\frac{1}{2}\left(2-2\sqrt{3}\right)^2+2\left(2-2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{12}\left(2-2\sqrt{3}\right)^3-\frac{1}{2}(0)^2-2(0)+\frac{1}{12}(0)^3\right|$$

$$+\left|\frac{1}{2}(0)^2+2(0)-\frac{1}{12}(0)^3-\frac{1}{2}\left(2+2\sqrt{3}\right)^2-2\left(2+2\sqrt{3}\right)+\frac{1}{12}\left(2+2\sqrt{3}\right)^3\right|$$

$$A=\left|\frac{16-12\sqrt{3}}{3}\right|+\left|-\frac{16+12\sqrt{3}}{3}\right|$$

$$A=8\sqrt{3}u^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Calcular el área limitada por las curvas $f(x)=3x-6$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}$.

Proceso

Graficar las funciones

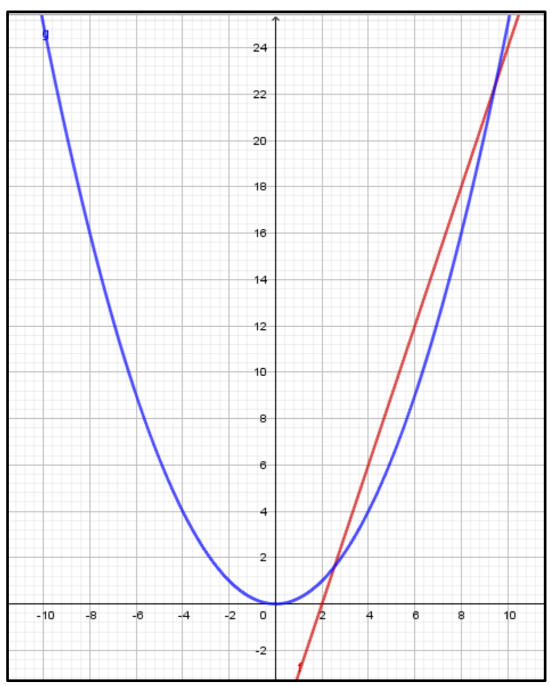


Figura 18-5: Gráfica de funciones, ejercicio 1.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

De acuerdo a las gráficas se analiza que *f(x)* está por encima de *g(x)*, por lo tanto

$f(x) \geq g(x)$

Se busca los puntos de intersección entre las funciones

$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

Aplicando método de igualación

$$3x - 6 = \frac{x^2}{4}$$

$$12x - 24 = x^2$$

$$x^2 - 12x + 24 = 0$$

$$x = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$x = 6 + 2\sqrt{3}$$

De esta manera se tiene

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_{6-2\sqrt{3}}^{6+2\sqrt{3}} \left(3x - 6 - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$A = \left| \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{1}{12}x^3\right]_{6-2\sqrt{3}}^{6+2\sqrt{3}} \right|$$

$$A = \left|\frac{3}{2}\left(6 + 2\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(6 + 2\sqrt{3}\right) - \frac{1}{12}\left(6 + 2\sqrt{3}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(6 - 2\sqrt{3}\right)^2 + 6\left(6 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{1}{12}\left(6 - 2\sqrt{3}\right)^3\right|$$

$$A = 13.85u^2$$

Proceso en GeoGebra

1. Ingrese la función f(x)

$$f(x) = 3x - 6$$

2. Ingrese la función g(x)

$$g(x) = \frac{x^2}{4}$$

3. Determine los puntos de intersección entre las curvas mediante el comando ***Interseca(<Objeto>, <Objeto>)***

Interseca(f, g)

4. Determine la integral mediante el comando ***IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

IntegralEntre(f, g, x(A), x(B))

Figura 19-5: Área entre curvas.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. Determinar el área limitada por las gráficas de las funciones $y = x, y = x^2$.
2. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 7x - 15, g(x) = 2x^3 - 25x^2 + 27x - 3$

APLICACIONES DE FÍSICA

7

OBJETIVO ESPECÍFICO

Aplicar la integral definida para el análisis de las ecuaciones del movimiento en Física.

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas. Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 18-5: Proceso metodológico 7.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	Recordar el movimiento y sus elementos de la cinemática, así como la interpretación física de la derivada.
REFLEXIÓN	¿Es posible vincular la integral definida para analizar las ecuaciones del movimiento?
CONCEPTUALIZACIÓN	Explicar las expresiones del movimiento uniforme y uniformemente variado mediante la aplicación de la integral definida. Resolver ejercicios de manera analítica y mediante GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 2 ejercicios mediante análisis analítico y GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 19-5: Recursos 7.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

MOVIMIENTO UNIFORME

Se tiene un observador que desea predecir la posición de un móvil, sabiendo que su rapidez es constante e instantánea siendo la razón de cambio de la posición en el tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} = Constante$$

Resolviendo

$$vdt = dx$$

De acuerdo a una posición $x_0, x_1 = x$ y $t_0, t_1 = t,$ se procede a integrar

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$[x]_{x_0}^{x} = v[t]_{t_0}^{t}$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

De esta manera se tiene la posición de una partícula sabiendo la posición inicial y rapidez con la que se mueve.

$$x = x_0 + v\Delta t$$

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

El observador analiza al móvil con una aceleración constante, desea saber la posición en un tiempo cualesquiera.

La razón de cambio de la rapidez en x con el tiempo, es igual a la aceleración

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Resolviendo

$$dv = adt$$

En un lenguaje matemático, para un tiempo o la rapidez de la partícula es *vo* y para un tiempo *t* se tiene una rapidez *v*.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt$$

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

La rapidez de la partícula en un tiempo Δt

$$v = v_0 + a\Delta t$$

También se desea conocer la posición

La razón de cambio de la posición en el tiempo, es la rapidez en *x*

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = vdt$$

Reemplazando para un $t_0 = 0$

$$dx = (v_0 + t)dt$$

Para una posición x_0, tiempo t_0 =0 para una posición *x* y un tiempo *t*, se tiene

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

La posición se tendría:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

También se puede establecer sabiendo que

La razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es una constante, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a$$

$$v\frac{dv}{dx} = a$$

Resolviendo

$$vdv = adx$$

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx$$

$$\frac{1}{2}v^2|_{v_0}^{v} = ax|_{x_0}^{x}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2 = a(x - x_0)$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$$

De esta manera se analiza mediante la integral definida a las ecuaciones del movimiento.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una partícula se desplaza en línea recta, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, *v* es la velocidad de la partícula y a la aceleración de la misma. Sabiendo que la $\boldsymbol{a = 4t - t^2}$, $\boldsymbol{s_0 = 1m}$, cuando $\boldsymbol{t_0 = 1s}$, $\boldsymbol{v = 10\frac{m}{s}}$. Exprese la posición y velocidad en función del tiempo.

Proceso

De acuerdo a las ecuaciones del movimiento se tiene

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Reemplazando

$$4t - t^2 = \frac{dv}{dt}$$

Despejando dt

$$\int (4t - t^2)dt = \int dv$$

$$\frac{4}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C = v$$

$$v = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

De la misma manera

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Reemplazando

$$2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{ds}{dt}$$

Despejando dt

$$\int \left(2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1\right)dt = \int ds$$

$$\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + C_1 t + C_2 = s$$

$$s = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + C_1 t + C_2$$

Reemplazando las condiciones iniciales $v = 10\frac{m}{s}\ cuando\ t_0 = 1s$

$$v = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

$$10 = 2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 + C_1$$

$$C_1 = \frac{25}{3}$$

Reemplazando las condiciones iniciales $s = 1m\ cuando\ t_0 = 1s$

$$s = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + C_1 t + C_2$$

$$1 = \frac{2}{3}(1)^3 - \frac{1}{12}(1)^4 + \left(\frac{25}{3}\right)(1) + C_2$$

$C_2 = -\frac{95}{12}$

De esta manera las ecuaciones de la posición y velocidad en función del tiempo es

$s = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{25}{3}t - \frac{95}{12}$

$v = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{25}{3}$

2. Una pelota desciende por una pista con una aceleración constante de $4\frac{m}{s^2}$. La pista tiene una distancia de 48m de largo y para que la pelota llegue a la parte baja de la pista se necesita de 6s. Determine la velocidad inicial de la pelota y la velocidad después de haber recorrido 24m.

Proceso

De acuerdo a las ecuaciones del movimiento se tiene

$a = \frac{dv}{dt}$

$4 = \frac{dv}{dt}$

$4dt = dv$

Con las condiciones se tiene que para un $t_0 = 0s$ se tiene v_0, mientras que para un $t = 6s$ se tiene una velocidad v.

$4\int_0^6 dt = \int_{v_0}^{v} dv$

$[4t]_0^6 = [v]_{v_0}^{v}$

$4(6-0) = v - v_0$

$v - v_0 = 24$

También se tiene

$a = v\frac{dv}{dx}$

$4 = v\frac{dv}{dx}$

$4dx = vdv$

Con las condiciones se tiene que para una posición $x_0 = 0m$ se tiene v_0, mientras que para una posición $x = 48m$ se tiene una velocidad v.

$4\int_0^{48} dx = \int_{v_0}^{v} vdv$

$$[4x]_0^{48} = \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_0}^{v}$$

$$4(48-0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$192 = \frac{1}{2}(v+v_0)(v-v_0)$$

Reemplazando

$$v - v_0 = 24$$

$$v = 24 + v_0$$

$$192 = \frac{1}{2}(24 + v_0 + v_0)(24)$$

$$192 = 12(24 + 2v_0)$$

$$\frac{192}{12} = 24 - 2v_0$$

$$v_0 = 4\frac{m}{s}$$

De esta manera se tiene la velocidad inicial.

Para calcular la velocidad después de haber recorrido 24m de distancia se tiene

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$4\int_0^{24} dx = \int_4^{v} v dv$$

$$[4x]_0^{24} = \left[\frac{1}{2}v^2\right]_4^{v}$$

$$4(24-0) = \frac{1}{2}(v^2 - 4^2)$$

$$96(2) = v^2 - 16$$

$$v = 14.42\frac{m}{s}$$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA

1. Una partícula se desplaza en línea recta, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v es la velocidad de la partícula y a la aceleración de la misma.

Sabiendo que la $v = \sqrt{t+4}$, $s_0 = 0m$, cuando $t_0 = 0s$. Exprese la posición en función del tiempo.

Proceso

De acuerdo a las ecuaciones del movimiento se tiene

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\sqrt{t+4} = \frac{ds}{dt}$$

Despejamos dt

$$\int \sqrt{t+4}\,dt = \int ds$$

Cambiando la variable

$$u = t + 4$$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

$$du = dt$$

Reemplazando

$$\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \int ds$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + C = s$$

Reemplazando

$$s = \frac{2}{3}(t+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

La expresión que se acaba de encontrar es de la posición con respecto al tiempo de manera general, al tener condiciones se procede a reemplazar para determinar el valor de la constante

$s_0 = 0m$, cuando $t_0 = 0s$

$$0 = \frac{2}{3}(0+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$0 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$C = -\frac{16}{3}$$

De esta manera la constante de integración al tener valor de -2, se reemplaza en la función posición y se expresa en función del tiempo.

$$s = \frac{2}{3}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{3}$$

Proceso GeoGebra.

1. Ingrese la función.

$f(x) = \sqrt{x+4}$

2. Ingrese en la entrada el comando de función agregando C de constante de integración.

$g(x) = integral(f(x)) + C$

3. Le pedirá crear un deslizador, en este caso al tener ya calculado el valor de C, se puede colocar directo para obtener la expresión.

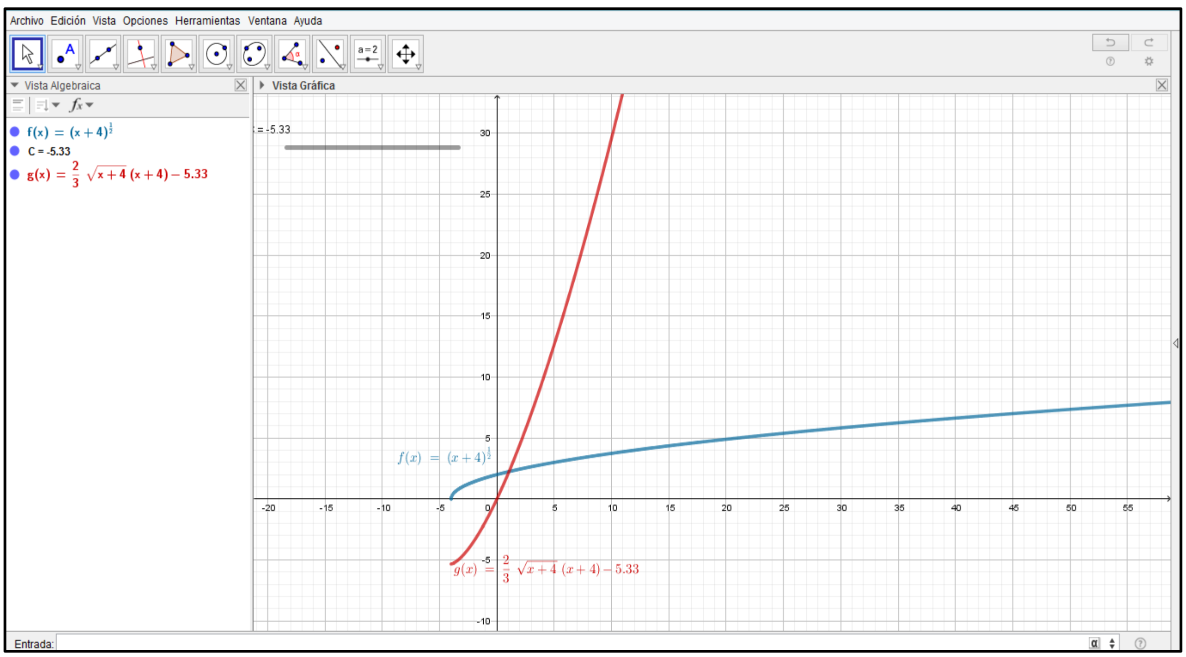


Figura 20-5: Aplicación de física movimiento.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA.

1. Una partícula se mueve en línea recta, x metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, si la velocidad se expresa $v = 3 - t$ y la posición $x = 2m$ cuando el tiempo es 4s. Exprese la posición en términos del tiempo.

2. Una partícula se mueve en línea recta, x metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, si la aceleración se expresa $a = 2t^2 + 6t$, la posición $x = 1m$ cuando el tiempo es 2s y la posición $x = 5m$ cuando el tiempo es 8s. Exprese la posición y velocidad en términos del tiempo.

APLICACIONES DE FÍSICA

8

OBJETIVO ESPECÍFICO

Aplicar la integral definida para el análisis de las ecuaciones del movimiento en Física**.**

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas. Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

PROCESO METODOLÓGICO

Tabla 20-5: Proceso metodológico 8.

ETAPA	METODOLOGÍA
DURANTE LA CLASE	
EXPERIENCIA	Recordar el análisis de las ecuaciones del movimiento mediante la integral definida.
REFLEXIÓN	¿Cómo se puede determinar el trabajo realizado por una fuerza que no es constante?
CONCEPTUALIZACIÓN	Explicar las expresiones de trabajo y energía mediante la integral definida. Resolver ejercicios de manera analítica y mediante GeoGebra.
APLICACIÓN	Proponer un ejercicio y solicitar que lo resuelvan en un tiempo estimado. Verificar el proceso de resolución e ir enfatizando los pasos desarrollados.
DESPUÉS DE LA CLASE	
ACTIVIDAD AUTÓNOMA	Resolución de 2 ejercicios mediante análisis analítico y GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

RECURSOS

Tabla 21-5: Recursos 8.

MATERIALES	TÉCNICOS	TECNOLÓGICOS	SOFTWARE
Cuadernos. Lápices. Borradores. Hojas.	Documentos de lectura. Resumen.	Computador. Zoom. Pizarra digital. Plataforma institucional.	GeoGebra.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

INDICADOR DE EVALUACIÓN

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Rúbrica institucional.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

TRABAJO

Trabajo es la capacidad que tiene una fuerza para desplazar los cuerpos, siendo la fuerza constante, resulta

$W = Fd$

Donde

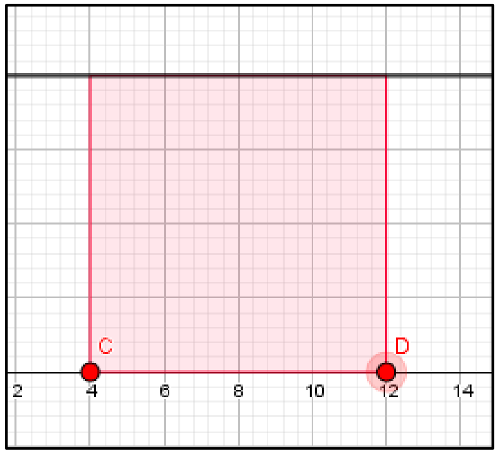


Figura 21-5: Trabajo, fuerza constante.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

El área bajo la recta sería

$W = F(b - a)$

Sin embargo, si la fuerza varía de acuerdo a cada posición, resulta

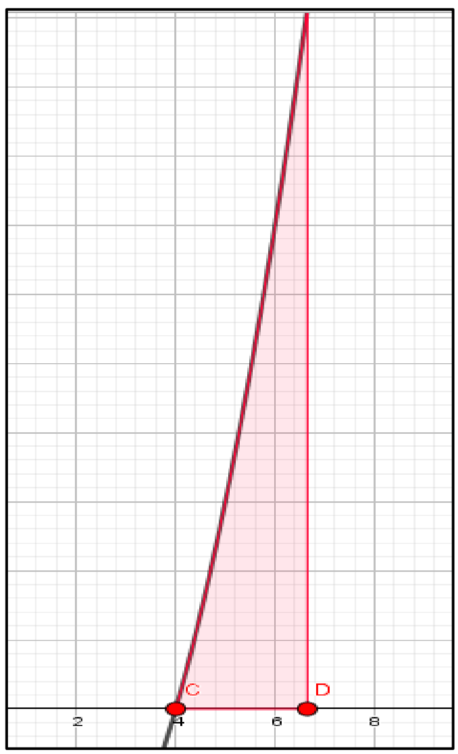


Figura 22-5: Trabajo, fuerza variable.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

Por lo que se tendría que calcular el área bajo la curva

$$W_T \approx \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta x$$

$$W_T = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta x$$

$$W_T = \int_a^b F(x)dx$$

ENERGÍA

Energía se considera la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo, una de las formas de energía que se estudia en Física es la energía Mecánica misma que resulta de la suma de energía cinética y potencial.

ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética se considera como energía del movimiento en donde depende de la velocidad del cuerpo.

A partir de la definición de trabajo se tiene

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

La fuerza que se analiza de acuerdo a la segunda ley de Newton es

$$F = ma$$

Reemplazando

$$W = \int_a^b madx$$

Donde la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Reemplazando

$$W = \int_a^b m\frac{dv}{dt}dx$$

De acuerdo a las ecuaciones del movimiento

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Reemplazando

$$W = m\int_{a}^{b} vdv$$

De acuerdo al teorema Trabajo-Energía se tiene

$$\Delta K = m\int_{a}^{b} vdv$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

A partir de la definición de trabajo se tiene

$$W = \int_{a}^{b} F(x)dx$$

La fuerza que se analiza es el peso del cuerpo

$$w = mg$$

Reemplazando

$$W = \int_{a}^{b} mgdx$$

Donde masa y aceleración de la gravedad don constantes

$$W = mg\int_{a}^{b} dx$$

De acuerdo al teorema Trabajo-Energía se tiene

$$\Delta Epg = mg\int_{a}^{b} dx$$

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

A partir de la definición de trabajo se tiene

$$W = \int_{a}^{b} F(x)dx$$

La fuerza que se analiza es Fuerza elástica

$$F = kx$$

Reemplazando

$$W = \int_{a}^{b} kxdx$$

Donde la constante de elasticidad es constante

$$W = k\int_{a}^{b} xdx$$

De acuerdo al teorema Trabajo-Energía se tiene

$$\Delta Epe = k\int_a^b x dx$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x debido a la aplicación de una fuerza en N (Newtons) cuando la partícula se encuentra a x metros del origen, determine el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{2x+1}}$ desde la posición *x = 3m* hasta el punto donde *x = 7m*.

Se conoce que el trabajo es

$$W = \int_3^7 x\sqrt{2x+1}dx$$

Se aplica la integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$dv = \sqrt{2x+1}dx$$

$$\int dv = \int \sqrt{2x+1}dx$$

$$\int dv = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

Cambiamos de variable

$$w = 2x+1$$

$$\frac{dw}{dx} = 2$$

$$\frac{dw}{2} = dx$$

$$\int dv = \frac{1}{2}\int w^{\frac{1}{2}}dw$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$v = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Reemplazando

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = x\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right] - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

Cambiando la variable

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\int w^{\frac{3}{2}}dw$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)w^{\frac{5}{2}}$$

$$W = \int_3^7 \sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_3^7$$

$$W = \frac{1}{3}(7)(2(7)+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2(7)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(3)(2(3)+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15}(2(3)+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$W = 67.58J$$

2. Un resorte tiene una longitud inicial de 7cm y una fuerza de 0.098N lo alarga 1cm. Determine el trabajo realizado para estirar el resorte 8cm.

Inicialmente se tiene que la fuerza aplicada corresponde a la fuerza elástica que depende de la constante de elasticidad y la deformación

$$F = kx$$

Si la fuerza de 0.098N deforma al resorte 1cm, entonces la constante de elasticidad es

$$0.098 = k(0.01)$$

$$k = \frac{0.098}{0.01}$$

$$k = 9.8\frac{N}{m}$$

De esta manera se encuentra el trabajo realizado para estirar 8cm al resorte

$$W = \int_{0.07}^{0.15} Fdx$$

$$W = \int_{0.07}^{0.15} kxdx$$

$$W = 9.8\int_{0.07}^{0.15} xdx$$

$W = \left[9.8\left(\frac{1}{2}\right)x^2\right]_{0.07}^{0.15}$

$W = 4.9(0.15)^2 - 4.9(0.07)^2$

$W = 0.08624J$

3. Un cuerpo es empujado con una fuerza $F(t) = 4t - 1$ y adquiere una rapidez de $3\,\frac{m}{s}$. Determine el trabajo producido por la fuerza desde un tiempo $t_0 = 0s$ hasta $t = 7s$.

De acuerdo al trabajo se tiene

$W = \int_a^b F dx$

No obstante, también se conoce que

$v = \frac{dx}{dt}$

$dx = vdt$

$W = \int_0^7 Fvdt$

$W = \int_0^7 (4t - 1)(3)dt$

$W = 3\int_0^7 (4t - 1)dt$

$W = 3\left[\frac{4}{2}t^2 - t\right]_0^7$

$W = 3[2(7)^2 - 7 - 2(0)^2 - 0]$

$W = 273J$

EJERCICIOS RESUELTOS-GEOGEBRA.

1. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x debido a la aplicación de una fuerza en N (Newtons) cuando la partícula se encuentra a x metros del origen, determine el trabajo realizado por la fuerza $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ desde la posición *x = 3m* hasta el punto donde *x = 7m*.

Se conoce que el trabajo es

$W = \int_3^7 x\sqrt{2x+1}dx$

Se aplica la integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$dv = \sqrt{2x+1}dx$$

$$\int dv = \int \sqrt{2x+1}dx$$

$$\int dv = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

Cambiamos de variable

$$w = 2x + 1$$

$$\frac{dw}{dx} = 2$$

$$\frac{dw}{2} = dx$$

$$\int dv = \frac{1}{2}\int w^{\frac{1}{2}}dw$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$v = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Reemplazando

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = x\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right] - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

Cambiando la variable

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\int w^{\frac{3}{2}}dw$$

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)w^{\frac{5}{2}}$$

$$W = \int_3^7 \sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_3^7$$

$$W = \frac{1}{3}(7)(2(7)+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2(7)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(3)(2(3)+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15}(2(3)+1)^{\frac{5}{2}}$$

$W = 67.58J$

Proceso GeoGebra.

1. Ingrese la función.

$f(x) = x\sqrt{2x+1}$

2. Mediante el comando ***Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***

Integral(f, 3,7)

3. Se obtiene el valor del trabajo.

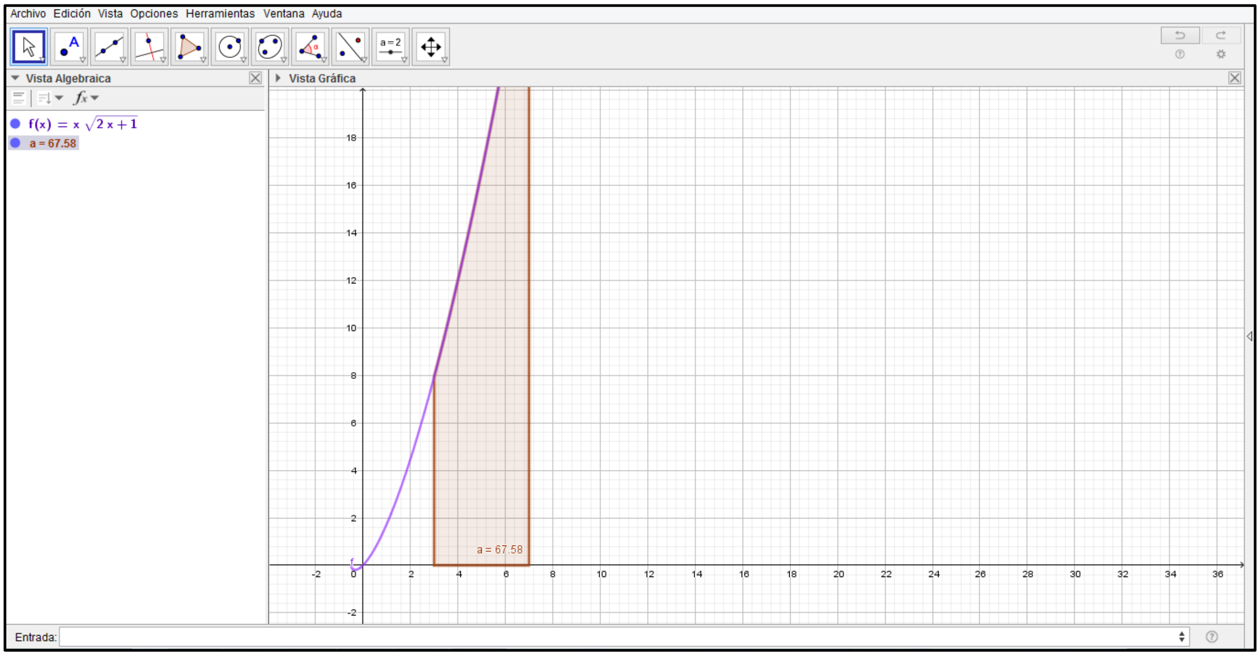


Figura 23-5: Trabajo ejercicio 1.

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje *x* debido a la acción de una fuerza $f(x) = x^2\sqrt{x^3+8}$ medida en N, cuando la partícula se encuentra en *x* del origen. Determine el trabajo realizado conforme la partícula se desplaza desde 2m hasta 8m.
2. Para estirar un resorte de 8cm a 14cm se requiere realizar un trabajo de 8J, mientras que para estirar de 14cm a 17cm se requiere 12J. Determine la longitud del resorte.

PROYECTO 9

PRÁCTICA DE LABORATORIO No. 1

1. TEMA.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.

2. OBJETIVO.

Comprobar las leyes que rigen el movimiento rectilíneo uniforme y vincular con el cálculo integral.

3. DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO.

M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

4. INDICADOR DE EVALUACIÓN.

Emplea el concepto de límites, diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización y realiza conexiones geométricas. (Ref. I.M.5.5.1.)

Fuente: (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5. MATERIALES Y ESQUEMA.

Práctica manual.

- Tubo de lámpara fluorescente o manguera transparente.
- Agua.
- Cuerpo de prueba. (Canica).
- Cinta métrica.
- Cesta. (Canasta)
- Cronómetro.

6. PROCESO PRÁCTICA MANUAL.

Prepare el montaje del equipo siguiendo los siguientes pasos.

a. Defina las distancias a medirse utilizando la cinta métrica, desde la parte superior de la lámpara dejando un espacio libre: 15cm, 30cm, 45cm, 60cm.

b. Mida tres veces el tiempo que se demora en recorrer el cuerpo esas distancias (0 a 15cm, 0 a 30cm, 0 a 45cm, 0 a 60cm.) y obtenga el tiempo promedio.

c. Registre los valores obtenidos en la tabla de datos.

d. Genere la ecuación de la posición con respecto al tiempo.

e. Determine la velocidad constante.

f. Exprese la ecuación de la posición en función de integrales.

g. Calcule el error de acuerdo al modelo lineal y a la expresión de la posición.

7. PROCESO PRÁCTICA VIRTUAL.

De acuerdo al simulador generado en GeoGebra obtenga los datos.

8. TABULACIÓN.

Tabla 22-5*:* Datos obtenidos mediante la práctica manual.

No	Distancia (m)	Tiempo 1 (s)	Tiempo 2 (s)	Tiempo 3 (s)	Tiempo Promedio (s)
1	0	0	0	0	0
2	0.15	0.243	0.240	0.241	0.241
3	0.30	0.482	0.485	0.478	0.481
4	0.45	0.721	0.723	0.724	0.722
5	0.60	0.961	0.964	0.961	0.962

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

9. MODELO LINEAL

Mediante los valores obtenidos en la práctica manual establezca la función posición

Se considera dos puntos de la tabla de datos.

$$A(0.241; 0.15)$$

$$B(0.481; 0.30)$$

Se genera el modelo matemático lineal basado en la ecuación

$$y = mx + b$$

Siendo

$$\begin{cases} 0.15 = 0.241m + b \\ 0.30 = 0.481m + b \end{cases}$$

De acuerdo al proceso se tiene $m = 0.625, b = -6.25x10^{-4}$

Quedando la ecuación

$$y = 0.625x - 6.25x10^{-4}$$

Analizando con los términos de posición y tiempo, se tiene

$$x = 0.625t - 6.25x10^{-4}$$

Al analizar una velocidad constante

$$\frac{dv}{dt} = 0.625$$

Siendo la velocidad

$$v = 0.625\frac{m}{s}$$

En función a la expresión se puede determinar la posición

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} 0.625dt$$

10. CÁLCULOS.

Tabla 23-5: Cálculos posición.

No.	Posición (práctica)	Posición (Modelo lineal)	Posición (Cálculo integral)
1	0.00	$-6.25x10^{-4}$	0.00
2	0.15	0.15	0.150625
3	0.30	0.30	0.300625
4	0.45	0.450625	0.45125
5	0.60	0.60125	0.60125

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

11. ERRORES EN LAS MEDICIONES

Mediante la teoría de errores establezca el error absoluto, relativo y porcentual en función a los datos reales.

Tabla 24-5: Errores en las mediciones. Proyecto 1.

Datos	**Promedio**	**Error absoluto** $E_a = \|x_1 - \bar{x}\|$	**Error relativo** $E_r = \frac{E_a}{\bar{x}}$	**Error porcentual (%)** $E_{\%} = 100E_r$
		MODELO LINEAL		
0.15	0.15	0	0	0
0.30	0.30	0	0	0
0.450625	0.45	0.000625	0.00138	0.138
0.60125	0.60	0.00125	0.00208	0.208
		CÁLCULO INTEGRAL		
0.150625	0.15	0.000625	0.00416	0.416
0.300625	0.30	0.000625	0.00208	0.208
0.45125	0.45	0.00125	0.00277	0.277
0.60125	0.60	0.00125	0.00208	0.208

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

CONCLUSIONES

- El software matemático libre GeoGebra fue aceptado durante la fase de diagnóstico mediante la aplicación de una encuesta a los estudiantes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa "San Francisco" , quienes determinaron su nivel de manejo así como la predisposición de su utilización como una herramienta tecnológica didáctica que permita mejorar el rendimiento académico, facultando la construcción de la propuesta metodológica y tecnológica avanzada para el estudio de la integral definida; de la misma manera mediante la aplicación del pre test y bajo el análisis estadístico se determinó la homogeneidad en el nivel de conocimientos previos que cada grupo mantenía al inicio de la investigación.

- La fundamentación basada en la aplicación del método bibliográfico durante la fase dos permitió argumentar y respaldar de manera científica y teórica las variables de la investigación siendo la implementación del software GeoGebra como herramienta didáctica, así como la integral definida como contenido de estudio para de esta manera vincularlas al rendimiento académico de los estudiantes de tercero de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa "San Francisco".

- La propuesta metodológica y tecnológica avanzada desarrollada durante la fase tres se basó en el diseño de los planes de clase mediante la utilización del software GeoGebra para el estudio de la integral definida, así como también en el método heurístico para la resolución de problemas, de la misma manera el diseño de desarrolló en función al Currículo Priorizado presentado por el Ministerio de Educación del Ecuador durante la pandemia por COVID-19, así como el tiempo de aplicación.

- La aplicación de la propuesta metodológica y tecnológica avanzada diseñada para el estudio de la integral definida se desarrolló en el grupo experimental durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021 de manera virtual debido a la pandemia por COVID-19 donde se despertó el interés y motivación por el estudio de la integral definida, así como el mejoramiento en el rendimiento académico de los estudiantes garantizando de esta manera a la propuesta metodológica como herramienta didáctica; mientras que en el grupo de control se trabajó con la metodología tradicional: Tiza, pizarrón y lengua (TPL).

- La validación de la implementación del software GeoGebra para el estudio de la integral definida como propuesta metodológica y tecnología avanzada, se determinó mediante la aplicación de una prueba objetiva a los grupos tanto de control como de experimentación durante la fase de evaluación permitiendo de esta manera mediante un análisis estadístico T-Student comprobar la hipótesis de que la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida incide significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco, puesto que se obtuvo como resultados $t = 2{,}09$ y $t_{crítico} = 1{,}98$, siendo mayor el valor calculado que el crítico.

RECOMENDACIONES

- Analizar el nivel de conocimiento, manejo y acceso tanto de estudiantes como docentes antes de implementar algún software matemático durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Investigar las diferentes herramientas matemáticas tecnológicas para su aplicación y los contenidos que pueden abordarse con ellas.

- Socializar la importancia de aplicación de herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto a docentes como estudiantes para evitar metodologías tradicionales.

- Validar constantemente la aplicación de los recursos didácticos o herramientas tecnológicas para evitar que el rendimiento académico de los estudiantes, así como su aprendizaje se vea afectado.

GLOSARIO

Aprendizaje: Es un proceso en donde el educando utiliza sus conocimientos ante situaciones no solo educativos sino dentro de cualquier contexto. (Trejo., 2012)

Competencia digital: Se considera el uso seguro de las tecnologías en la sociedad, ya sea en la búsqueda, obtención y trato en la información para utilizarla de forma crítica y sistemática. (Escoda., 2017, pág. 21)

Currículo priorizado: Es un documento sobre la base del currículo vigente del 2016 que presenta la organización que dan sentido a los aprendizajes vinculando las destrezas con criterio de desempeño en la aplicación de conocimientos adquiridos en las actividades de la vida cotidiana. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2020, pág. 3)

Didáctica: Se considera el arte de enseñar, misma que estudia la matética siendo las limitaciones de quien aprende, la sistemática que maneja la disponibilidad de contenidos y la metódica en donde estudia los métodos y técnicas que permiten orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje. (Martínez, 2014).

Destreza con criterio de desempeño: Expresa el saber hacer, estableciendo relaciones con cierto conocimiento teórico y diferentes niveles de complejidad, responde a las interrogantes: ¿qué debe saber hacer? ¿qué debe saber? ¿con qué grado de complejidad? (Ministerio de Educación del Ecuador., 2010, págs. 19, 20)

Educación: Se considera como un proceso en donde se dirige a una persona para que ésta desarrolle sus aprendizajes los cuales son acumulados de forma voluntaria e involuntaria y le permitirán desenvolverse durante su vida. (Trejo., 2012)

Enseñanza: Consiste no solo en trasmitir información sino también dirigir un proceso mediante la utilización de metodologías, debe integrar a todos los actores del entorno educativo. (Trejo., 2012)

Evaluación: Se considera como un proceso continuo que evidencia el logro de objetivos de aprendizaje de los estudiantes y no necesariamente deben incluir notas o calificaciones, la evaluación provee retroalimentación al estudiante para mejorar y alcanzar los aprendizajes mínimos establecidos en el currículo. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2020, pág. 5)

Evaluación diagnóstica: Se aplica al inicio del año lectivo o periodo académico para determinar las condiciones previas antes de iniciar el proceso de aprendizaje. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2019., pág. 7)

Evaluación formativa: Se realiza durante el proceso de aprendizaje y permite al docente realizar ajustes en su metodología. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2019., pág. 7)

Evaluación sumativa: Es una evaluación totalizadora que permite reflejar la proporción de alcance de los objetivos de aprendizaje. (Ministerio de Educación del Ecuador., 2019., pág. 7)

GeoGebra: Es un programa de libre acceso y multiplataforma creado por Markus Hohenwarter en 2001, que, con dinámica ayuda a la enseñanza de la Matemática, combina de forma interactiva geometría, álgebra, aritmética, análisis, estadística y probabilidades en un solo paquete. (Universidad Nacional de Educación del Ecuador., 2019, pág. 5)

L.O.E.I.: Ley Orgánica de Educación Intercultural.

Pedagogía: Se considera la ciencia normativa de la educación, es decir, que permite el estudio integral de la misma, la cual lleva el proceso educativo para alcanzar la solución de problemas experimentados y garantizar el cumplimiento de la objetividad de conocimientos. (Trejo., 2012).

Rendimiento académico: Hace referencia a la evaluación de conocimiento adquirido durante un proceso o etapa escolar. (ECURED, s.f.)

Recurso didáctico: Son un medio que permiten al docente orientar su proceso pedagógico de manera creativa vinculada a la atención e interés de los estudiantes, es decir, facilitan dicho proceso con el cumplimiento de objetivos, desarrollo de destrezas competencias, entre otros. (Morales, 2013).

R.L.O.E.I.: Reglamento de la Ley Orgánica de Educación Intercultural.

BIBLIOGRAFÍA

Açıkgül, K. (2021). Opiniones de los profesores de matemáticas sobre un kit de aprendizaje apoyado por GeoGebra para la enseñanza de polígonos. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*. Obtenido de 10.1080 / 0020739X.2021.1895339

Álvarez, M., Cordero, J., González, J., & Sepúlveda, O. (2019). Software GeoGebra como herramienta en enseñanza y aprendizaje de la Geometría. *Educación y Ciencia*, 387-402. Obtenido de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/view/10059

Áviles, J., Morales, A., Cuevas, R., & Alonso, A. (2015). *Aplicación de geogebra en la determinación de máximos y míninos en línea.* México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Çekmez, E. (2020). Estableciendo el vínculo entre la gráfica de una curva paramétrica y las derivadas de sus funciones componentes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(1), 115-130. doi:10.1080 / 0020739X.2019.1663950

Clavijo Gañan, E. E. (2017). *V Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.* Obtenido de Graphical visualization with GeoGebra in the calculation learning: https://www.researchgate.net/profile/Juan_Bedoya16/publication/344932659_Graphical_visualization_with_GeoGebra_in_the_calculation_learning/links/5f998f23299bf1b53e4bda2e/Graphical-visualization-with-GeoGebra-in-the-calculation-learning.pdf

Diaz, L., Rodríguez, J., & Lingán, S. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y representaciones, 6*(2), 217-251. Obtenido de : http://

ECURED. (s.f.). *Rendimiento académico.* Obtenido de https://www.ecured.cu/Rendimiento_acad%C3%A9mico

Escoda., A. P. (2017). *Alfabetización Mediática, TIC y competencias digitales.* Barcelona: Oberta UOC Publishing, SLU.

Espeso, P. (3 de 2 de 2021). *Geogebra, una práctica herramienta para aprender matemáticas.* Obtenido de https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/herramienta-aprender-matematicas/

Fredy Barahona Avecilla, O. B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su. *Revista Tecnológica ESPOL – RTE*, 121-132.

Godino, J. (2011). Indicadores de Idoneidad didáctica en procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*. Obtenido de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *En: Entramado, 14*(2), 198-214. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/entra/v14n2/1900-3803-entra-14-02-198.pdf

Helingeniero. (13 de Enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=7XpoibFcCwk

J**iménez, J., & Jiménez, S. (2017).** GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanzaaprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad, 4*(7), 1-17. Obtenido de file:///C:/Users/hp/Downloads/654-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2631-1-10-20170120.pdf

Loyola, J. (2019). *Memorias de la I jornada ecuatorina de GeoGebra.* Ecuador: Universidad Nacional de Educación-UNAE. Obtenido de https://unae.edu.ec/wp-content/uploads/2020/03/GeogebraMemorias.pdf

Mamani, M. A. (2020). El GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida en estudiantes de la Escuela Profesional de Ingeniería de Sistemas de la UNA Puno. Puno, Perú: Repositorio Institucional UNA-PUNO.

Martínez. (2014). *Teoría de la educación para maestros. Didáctica para enseñar competencias.* (Vol. Tomo 2.). Madrid.: Madrid: Biblioteca Online.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2010). *Actualización y fortalecimiento curricular.* Quito.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Currículo EGB y BGU de Matemática.*

Ministerio de Educación del Ecuador. (2019.). *Instructivo para la aplicación de evaluación estudiantil.*

Ministerio de Educación del Ecuador. (2020). *Currículo priorizado.*

Ministerio de Educación del Ecuador. (2020). *Instructivo para la evaluación estudiantil.*

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (20 de 05 de 2021). *Tutorial de Geogebra*. Obtenido de file:///C:/Users/hp/Downloads/e3ec38-tutorial-geogebra%20(1).pdf

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo de Matemática.*

Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos. (2020). *Currículo Priorizado.*

Morales. (2013). *Informe final del Trabajo de Graduación o Titulación previo a la obtención del Título de Licenciado(a) en Ciencias de la Educación. la Educación.* Obtenido de http://repositorio.uta.edu.ec/bitstream/123456789/5089/1/teb_2013_858.pdf

Núñez, M. M. (2019). GeoGebra móvil en la enseñanza de Matemáticas. *Memorias de la I Jornada Ecuatoriana de GeoGebra.*, 41-47.

Osman, B., & Acar, H. (2020). El efecto del aprendizaje colaborativo asistido por computadora utilizando el software GeoGebra en el rendimiento matemático de los estudiantes de 11 ° grado en funciones exponenciales y logarítmicas. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080 / 0020739X.2020.1788186

Paucar, N. T. (2019). Software Geogebra en el aprendizaje de las derivadas e integrales en estudiantes universitarios de Cañete. Lima, Perú: Escuela de Posgrado Universidad César Vallejo.

Pico, C. M. (2018). *Experiencias de aprendizaje significativo para la apropiación de conocimientos en ciencias económicas, administrativas y contables.* Poli. Politécnico GRan Colombiano.

Ponce, J., Roberts, K., Wegener, M., & McIntyre, T. (2019). Visualización dinámica de integrales de línea de campos vectoriales: una propuesta didáctica. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(6), 934- 949. doi:10.1080 / 0020739X.2018.1510554

Rivera, J. P. (2014). Empleo del software educativo y su eficiencia en el rendimiento académico del cálculo integral en la Universidad Peruana Unión, filial Tarapoto. *Apuntes Universitarios*, 43-56.

Roberto, D. M. (s.f.). Obtenido de http://www.une.edu.pe/Titulacion/2013/exposicion/SESION-4-Confiabilidad%20y%20Validez%20de%20Instrumentos%20de%20investigacion.pdf

Sampieri., R. H. (2014). *Metodología de la Investigación. 6ta. Edición.* McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Comprensión conceptual de la integral definida con GeoGebra. *Computadoras en las escuelas, 33*(2), 120-132. Obtenido de 10.1080 / 07380569.2016.1177480

Trejo. (2012). *Metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje.* México: Trillas.

Universidad Nacional de Educación del Ecuador. (2019). *Memorias de la I Jornada Ecuatoriana de GeoGebra.* Azogues: EditorialUNAE.

Zamudio, A. L. (s.f.). *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.*, 1351-1358.

Zengin, Y. (2017). Los efectos del software GeoGebra en las actitudes y puntos de vista de los profesores de matemáticas en formación hacia la prueba y la demostración. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*, 1002-1022. doi:10.1080 / 0020739X.2017.1298855

ANEXOS

ANEXO A. FICHA DE VALIDACIÓN DE LA ENCUESTA.

Título

Implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Formulación del problema

¿De qué manera contribuye la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco?

Objetivo

Objetivo general

Implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Objetivos específicos

a. Diagnosticar el nivel de manejo del software GeoGebra en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

b. Fundamentar la información de manera científica y teórica sobre el software GeoGebra como herramienta tecnológica didáctica y la integral definida como contenido de estudio.

c. Diseñar prácticas experimentales en el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

d. Proponer las prácticas experimentales diseñadas en el software GeoGebra al grupo de experimentación para mejorar el rendimiento académico durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021.

e. Validar la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida mediante un análisis estadístico de datos del rendimiento académico del grupo de control y de experimentación.

Variable independiente: Software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

Variable dependiente: Rendimiento académico.

Ficha de validación

Encuesta sobre el estudio de la integral definida.

Instrucciones

En la siguiente ficha de registro usted debe evaluar el cuestionario para poder validarlo.

Por favor, escriba el valor del indicador escogido de entre las opciones para cada ítem, siendo:

1: Totalmente en desacuerdo.

2: En desacuerdo.

3: Me es indiferente.

4: De acuerdo.

5: Totalmente de acuerdo.

FICHA DE REGISTRO						
Investigador	Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano.					
ÍTEM	**CRITERIOS A EVALUAR**					**OBSERVACIONES**
	CLARIDAD	**COHERENCIA**	**SUFICIENCIA**	**METODOLOGÍA**	**PERTINENCIA**	
	Se formula con lenguaje adecuado.	Existe relación entre las dimensiones e indicadores.	Comprende los aspectos a analizar.	Responde al propósito del trabajo considerando los objetivos planteados.	El instrumento es adecuado al tipo de investigación.	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

8						
9						
10						
11						
12						
13						
ASPECTOS GENERALES					**GRADO DE ACUERDO**	**OBSE RV.**
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario.						
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial.						
El número de ítems es suficiente para recoger la información.						

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ANEXO B. ENCUESTA DIRIGIDA A ESTUDIANTES DE TERCERO DE BACHILLERATO.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE TERCERO DE BACHILLERATO DE LA UNIDAD EDUCATIVA “SAN FRANCISCO”

OBJETIVO: Diagnosticar el nivel de uso y manejo de las herramientas tecnológicas que ilustren las definiciones y teoremas del cálculo en los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa “San Francisco”.

INSTRUCCIONES: Estimado estudiante, solicito muy comedidamente llenar el siguiente cuestionario, para ello:

- Seleccione una sola respuesta.
- Conteste con sinceridad.
- Sus respuestas serán tratadas con total confidencialidad.

CUESTIONARIO

1. ¿Con qué frecuencia su docente de Matemática utiliza recursos didácticos o herramientas tecnológicas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje?

Nunca	Casi nunca	Ocasionalmente	Cada mes	Una vez a la semana

2. ¿Cómo le resulta a usted el estudio de cálculo integral?

Muy difícil	Difícil	Regular	Fácil	Muy fácil

3. Su docente de Matemática utiliza algún software matemático específico para el estudio de cálculo integral.

Nunca	Casi nunca	Ocasionalmente	Cada mes	Una vez a la semana

4. Considera que su rendimiento académico en el estudio de la Integral definida mejoraría con la aplicación de los software matemáticos.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

5. Considera importante la utilización de software matemáticos para el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño de la Integral Definida.

No es importante	Poco importante	Algo importante	Importante	Muy importante

6. Con la utilización de un software matemático en el estudio de la integral definida mejorará su interés y motivación por aprender.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

7. ¿Cómo considera su nivel en el manejo de software matemáticos?

Pésimo	Malo	Regular	Bueno	Excelente

8. Le gustaría que en su estudio de la integral definida se implemente un software matemático.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

9. Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe ser libre.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

10. Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe ser de fácil manejo.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

11. Considera que el software matemático que se maneje durante el estudio de la integral definida debe contener vista gráfica, algebraica, hoja de cálculo para comprender de mejor manera.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

12. Considera usted que el software matemático que implemente en su estudio de la integral definida debe permitir la interacción de la práctica con el conocimiento.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

13. Le gustaría trabajar con el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

GRACIAS POR SU TIEMPO

ANEXO C. RESULTADOS ENCUESTA.

ENCUESTADOS	ITEMS												
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	4	5	4
2	1	1	1	4	4	4	1	5	4	5	5	5	5
3	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	4	5	5
4	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	4	5	5
5	1	1	1	4	4	4	2	5	5	5	4	5	5
6	2	3	2	5	5	5	3	5	4	5	5	5	4
7	1	2	1	5	5	5	3	4	5	4	5	5	5
8	2	2	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
9	1	1	1	4	4	4	3	4	5	5	5	4	5
10	1	1	1	4	4	4	2	4	5	5	4	5	5
11	1	1	1	5	4	4	1	5	5	5	4	5	4
12	1	1	1	4	4	4	1	5	5	4	5	5	5
13	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	4	5	5
14	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	4	5	5
15	2	3	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	4
16	1	2	1	4	4	4	2	5	5	4	5	5	5
17	1	2	1	4	4	4	1	5	5	5	5	5	5
18	2	2	1	4	4	5	1	5	5	5	5	4	5
19	1	1	1	4	4	4	1	5	5	5	5	5	5
20	1	2	2	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4
21	2	2	1	5	4	5	1	4	5	5	4	4	5
22	1	2	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
23	1	1	1	4	4	4	2	4	5	5	5	5	5
24	1	2	2	5	5	5	3	4	5	5	4	5	5
25	1	2	1	4	4	4	3	4	5	5	4	5	4
26	1	2	1	5	5	5	3	4	5	5	4	5	5
27	2	1	1	5	5	5	3	4	5	5	4	5	5
28	2	1	1	5	5	5	3	5	5	5	4	5	4
29	1	2	1	5	4	4	1	4	5	5	4	5	4
30	1	1	1	5	4	4	2	4	5	5	5	5	5
31	1	2	2	5	5	5	4	4	5	5	5	5	4
32	1	2	2	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5
33	2	1	1	5	4	4	2	4	5	5	5	5	5
34	2	2	2	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
35	1	1	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
36	1	1	1	4	5	5	2	4	5	5	5	5	5
37	1	2	1	4	4	5	3	4	5	5	5	5	5
38	2	3	2	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5
39	2	2	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
40	1	2	2	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5

41	2	2	2	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
42	2	2	2	5	5	5	1	5	5	5	5	5	5
43	2	2	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
44	2	2	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
45	2	2	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
46	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
47	1	3	1	5	4	4	2	4	5	5	5	5	5
48	2	2	2	5	5	4	3	5	5	5	5	5	5
49	2	3	2	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5
50	2	2	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
51	2	2	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
52	1	2	1	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5
53	1	1	1	4	4	5	3	5	5	5	5	5	5
54	2	2	1	4	4	4	3	5	5	5	5	5	5
55	1	2	1	5	5	4	3	5	5	5	5	5	5
56	2	2	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
57	1	1	1	5	4	4	3	5	5	5	5	5	5
58	2	2	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
59	2	2	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
60	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
61	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
62	1	1	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
63	2	2	1	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5
64	2	3	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
65	1	3	1	5	5	5	4	4	5	5	5	5	5
66	2	2	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
67	1	3	1	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5
68	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
69	2	3	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
70	1	1	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
71	2	2	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
72	2	3	2	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
73	2	2	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
74	2	3	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
75	2	3	1	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5
76	1	1	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
77	1	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
78	2	2	2	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
79	2	1	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
80	1	2	1	5	5	5	1	5	5	5	5	5	5
81	2	3	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
82	1	3	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
83	2	2	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
84	2	3	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
85	2	2	2	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5

86	2	3	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
87	1	1	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
88	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
89	2	3	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
90	1	2	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
91	2	3	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
92	1	1	2	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
93	1	2	1	4	4	5	2	5	5	5	5	5	5
94	1	2	1	4	4	4	2	4	5	5	5	5	5
95	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
96	2	1	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
97	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
98	2	3	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
99	2	3	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
100	2	2	1	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5
101	2	3	2	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
102	2	3	2	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5
103	2	3	1	5	5	5	2	3	5	5	5	5	5
104	1	1	1	4	4	4	2	5	5	5	5	5	5
105	2	2	1	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
106	2	3	1	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5
107	1	1	1	4	4	4	3	3	5	5	5	5	5
108	2	3	2	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5
109	2	2	1	5	5	5	4	4	5	5	5	5	5
110	2	3	2	5	5	5	3	4	5	5	5	5	5

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ANEXO D. FICHA DE VALIDACIÓN DE LAS PRUEBAS OBJETIVAS.

Título

Implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Formulación del problema

¿De qué manera contribuye la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco?

Objetivo

Objetivo general

Implementar el software GeoGebra en el estudio de la integral definida para la determinación de la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.

Objetivos específicos

- Diagnosticar el nivel de manejo del software GeoGebra en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa San Francisco.
- Fundamentar la información de manera científica y teórica sobre el software GeoGebra como herramienta tecnológica didáctica y la integral definida como contenido de estudio.
- Diseñar prácticas experimentales en el software GeoGebra para el estudio de la integral definida.
- Proponer las prácticas experimentales diseñadas en el software GeoGebra al grupo de experimentación para mejorar el rendimiento académico durante la segunda parcial del segundo quimestre del año lectivo 2020-2021.
- Validar la implementación del software GeoGebra en el estudio de la integral definida mediante un análisis estadístico de datos del rendimiento académico del grupo de control y de experimentación.

Variable independiente: Software GeoGebra para el estudio de la integral definida.

Variable dependiente: Rendimiento académico.

Ficha de validación

Prueba objetiva diagnóstico y evaluación final.

Instrucciones

En la siguiente ficha de registro usted debe evaluar el cuestionario para poder validarlo.

Por favor, escriba el valor del indicador escogido de entre las opciones para cada ítem, siendo:

1: Totalmente en desacuerdo.

2: En desacuerdo.

3: Me es indiferente.

4: De acuerdo.

5: Totalmente de acuerdo.

FICHA DE REGISTRO						
Investigador	Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano.					
ÍTEM	**CRITERIOS A EVALUAR**					**OBSERVACIONES**
	CLARIDAD	**COHERENCIA**	**SUFICIENCIA**	**METODOLOGÍA**	**PERTINENCIA**	
	Se formula con lenguaje adecuado.	Existe relación entre las dimensiones e indicadores.	Comprende los aspectos a analizar.	Responde al propósito del trabajo considerando los objetivos planteados.	El instrumento es adecuado al tipo de investigación.	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

10						
ASPECTOS GENERALES					**GRADO DE ACUERDO**	**OBSE RV.**
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario.						
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial.						
El número de ítems es suficiente para recoger la información.						

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ANEXO E. PRUEBA OBJETIVA (PRE TEST).

UNIDAD EDUCATIVA "SAN FRANCISCO"
EVALUACIÓN DE DIAGNÓSTICO
TERCERO B.G.U.

1. DATOS INFORMATIVOS. **CALIFICACIÓN.**

ÁREA: MATEMÁTICA. **ASIGNATURA:** MATEMÁTICA.

DOCENTE: LISBETH GABRIELA RUIZ GALEANO.

ESTUDIANTE: ______________________________ **PARALELO:** _____.

FECHA: ____, _____________________ 2021. **MEDIO:** Plataforma institucional.

"Da la bienvenida cada mañana con una sonrisa. Mira en el nuevo día como otro regalo especial de su creador, otra oportunidad de oro." ***Og Mandino*****.**

2. OBJETIVO.

Verificar mediante la evaluación de diagnóstico los aprendizajes y destrezas con criterio de desempeño adquiridas durante el estudio de límites, derivadas e integral indefinida del periodo académico 2020-2021 para continuar con el proceso de enseñanza y aprendizaje de Integral Definida.

3. INSTRUCCIONES GENERALES.

Estimado estudiante sírvase leer las siguientes recomendaciones para el desarrollo óptimo de la presente evaluación:

- ✓ La evaluación tiene una duración de 50 minutos.
- ✓ La evaluación es individual y no está permitido ningún acto de deshonestidad académica (artículos 224 y 225 del Reglamente General de la LOEI).
- ✓ Todas las preguntas tienen una valoración asignada siendo 1.00 punto cada una.
- ✓ Para la valoración del proceso respectivo deberá subirlo como archivo PDF en un tiempo máximo de 5 min después de haber finalizado su evaluación en la plataforma.
- ✓ Recuerde: Usted sí puede. ¡Éxitos!

4. CRITERIO DE EVALUACIÓN.

CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5. INDICADOR DE EVALUACIÓN.

Halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso. (Ref.I.M.5.5.1.).

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

6. CUESTIONARIO.

1. Calcule los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+4x^2-4x-16}{x^2-4}$

6	+∞	-∞	-6	Ninguna de las anteriores.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$	+∞	-∞	$\frac{-\sqrt{3}}{6}$	Ninguna de las anteriores.

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3-5x^2+6x-3}{5x^2-5x-1}$

2	∞	0	-2	Ninguna de las anteriores.

2. Aplicando la definición, derive cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

a. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+2} \quad en\ x = 2$

4	-4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	Ninguna de las anteriores.

b. $\boldsymbol{g(x) = \frac{2}{x-6}\ en\ x = 4}$

2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Ninguna de las anteriores.

3. Determine la segunda derivada de las siguientes funciones, aplicando las propiedades.

a. $\boldsymbol{y = \frac{4x^4-5x^3+6x^2}{7}}$

$\frac{1}{7}(16x^2 - 15 + 6)$	$\frac{1}{7}(16x^2 - 5x + 6)$	$\frac{1}{7}(48x^2 - 30x + 12)$

b. $\boldsymbol{y = \frac{x^2+6x-1}{x+3}}$

$\frac{x^2 + 6x + 19}{(x+3)^2}$	$-\frac{20}{(x+3)^3}$	$\frac{60}{(x+3)^4}$

4. Calcule las integrales siguientes.

a. $\boldsymbol{\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx}$

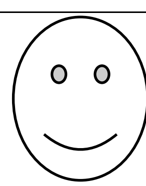
$\frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C$	$\frac{x^3}{6} + 2x + C$	$6x^3 + \frac{2}{x} + C$

b. $\boldsymbol{\int (x+2)^2 dx}$

$\frac{(x+2)^2}{2} + C$	$\frac{(x+2)^3}{3} + C$	$\frac{x+2}{3} + C$

c. $\boldsymbol{\int \frac{x^3}{x+2} dx}$

$\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + 8\ln(x + 2) + C$	$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln(x+2) + C$	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x - 8\ln(x+2) + C$



ANEXO F. RESULTADOS PRE TEST.

ESTUDIANTES	ITEMS										SUMA	GRUPO
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	CONTROL
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	CONTROL
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	CONTROL
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**4**	CONTROL
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**4**	CONTROL
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	CONTROL
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	CONTROL
8	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	CONTROL
9	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**5**	CONTROL
10	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**5**	CONTROL
11	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
12	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**6**	CONTROL
13	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
14	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
16	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	**6**	CONTROL
17	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	**7**	CONTROL
18	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
19	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	**7**	CONTROL
20	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
21	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	**7**	CONTROL
22	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
23	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	**7**	CONTROL
24	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
25	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
26	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
27	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	**7**	CONTROL
28	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	**8**	CONTROL
29	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	**8**	CONTROL
30	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
31	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	**8**	CONTROL
32	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
33	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
34	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
35	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
36	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
37	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	CONTROL
39	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	**1**	EXPERIMENTAL
40	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**	EXPERIMENTAL

41	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	**2**	EXPERIMENTAL
42	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	**2**	EXPERIMENTAL
43	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	**3**	EXPERIMENTAL
44	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	EXPERIMENTAL
45	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	**3**	EXPERIMENTAL
46	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	**4**	EXPERIMENTAL
47	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**4**	EXPERIMENTAL
48	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	EXPERIMENTAL
49	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	**4**	EXPERIMENTAL
50	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
51	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**5**	EXPERIMENTAL
52	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
53	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**5**	EXPERIMENTAL
54	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
55	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
56	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
57	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	**5**	EXPERIMENTAL
58	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
59	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	**5**	EXPERIMENTAL
60	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
61	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
62	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
63	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
64	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
65	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
66	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
67	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
68	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
69	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
70	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
71	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
72	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
73	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
74	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**6**	EXPERIMENTAL
75	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
76	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
77	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
78	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
79	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
80	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
81	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
82	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
83	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
84	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
85	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL

86	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
87	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
88	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
89	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
90	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
91	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
92	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**8**	EXPERIMENTAL
93	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
94	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	EXPERIMENTAL
96	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**9**	EXPERIMENTAL
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	EXPERIMENTAL
98	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
103	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
104	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
106	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
107	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
109	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
110	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.

ANEXO G. PRUEBA OBJETIVA (POST TEST).

UNIDAD EDUCATIVA “SAN FRANCISCO”

EVALUACIÓN SUMATIVA

TERCERO B.G.U.

1. DATOS INFORMATIVOS. **CALIFICACIÓN.**

ÁREA: MATEMÁTICA. **ASIGNATURA:** MATEMÁTICA.

DOCENTE: LISBETH GABRIELA RUIZ GALEANO.

ESTUDIANTE: ______________________________ **PARALELO:** _____.

FECHA: ____, ______________________ 2021. **MEDIO:** Plataforma institucional.

"Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado. Un esfuerzo total es una victoria completa." ***Mahatma Gandhi.***

2. OBJETIVO.

Verificar mediante la evaluación sumativa los aprendizajes y destrezas con criterio de desempeño adquiridas durante el estudio de la integral definida durante el periodo académico 2020-2021.

3. INSTRUCCIONES GENERALES.

Estimado estudiante sírvase leer las siguientes recomendaciones para el desarrollo óptimo de la presente evaluación:

- ✓ La evaluación tiene una duración de 50 minutos.
- ✓ La evaluación es individual y no está permitido ningún acto de deshonestidad académica (artículos 224 y 225 del Reglamente General de la LOEI).
- ✓ Todas las preguntas tienen una valoración asignada siendo 1.00 punto cada una.
- ✓ Para la valoración del proceso respectivo deberá subirlo como archivo PDF en un tiempo máximo de 5 min después de haber finalizado su evaluación en la plataforma.
- ✓ Recuerde: Usted sí puede. ¡Éxitos!

4. CRITERIO DE EVALUACIÓN.

CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

5. INDICADOR DE EVALUACIÓN.

Halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso. (Ref.I.M.5.5.1.).

Fuente: Currículo Priorizado 2020-2021. (Ministerio de Educación-Subsecretaría de Fundamentos Educativos, 2020)

6. CUESTIONARIO.

A. Seleccione la respuesta correcta.

1. Dada la función $g(x) = 2x^2 - 3x$, calcule $\int_0^6 g(x)dx$.

95	45	90	180

2. Determine el valor de la siguiente integral definida $\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$

$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{50}{3}$	$\frac{70}{3}$

3. Halle mediante suma de áreas de rectángulos el área por debajo de $f(x) = x^2 + 2x + 3$, entre los puntos $a = -1$ y $b = 1$.

$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{50}{3}$	$\frac{70}{3}$

4. Determine el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - 3x - 3$, y las rectas $y = 0, x = -1, x = 1$.

$\frac{16}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{56}{3}$	$\frac{76}{3}$

5. Determine el área de la región limitada por $y = 4x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$.

41	125	41.66	28.33

6. **Halle el área comprendida entre la curva $y = sin\ x$ y el eje de las x en el intervalo $[0; \pi]$**

2	0	1	4

B. ***Determine (V) si es verdadero o (F) si es falso según corresponda a cada proposición.***

7. **Al aplicar las propiedades de la integral definida se verifica que su resultado es:**

$$\int_{-2}^{0}\left(-\frac{5}{8}x^3 + 3x - 5\right)dx = -\frac{27}{2}$$

8. **Una partícula se desplaza en línea recta con una aceleración de $a = 800\frac{m}{s^2}$, siendo su velocidad $v = 20\frac{m}{s}$ cuando $x = 1\text{m}$ y $\text{t} = 3s$. La expresión que obtenga de la velocidad es $v = 800t - 2380$ y de la posición es $x = 400t^2 - 2380t + 3542$.**

9. **Se aplica una fuerza de 500N que deforma al resorte desde una longitud natural de 20cm a 24cm. El trabajo efectuado al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 28cm es 240J.**

10. **Una partícula se mueve a lo largo del eje x debido a la aplicación de una fuerza $f(x) = 2x\sqrt{3x+1}$, el trabajo realizado conforme la partícula se desplaza desde 3m hasta 7m es 163J aproximadamente.**

ANEXO H. RESULTADOS POST TEST.

ESTUDIANTE	ÍTEMS										SUMA	GRUPO
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**	CONTROL
2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**	CONTROL
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	CONTROL
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	**3**	CONTROL
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	**3**	CONTROL
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	CONTROL
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**4**	CONTROL
8	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	CONTROL
9	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**5**	CONTROL
10	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**5**	CONTROL
11	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	CONTROL
12	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**5**	CONTROL
13	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
14	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
16	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	**6**	CONTROL
17	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	**6**	CONTROL
18	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	CONTROL
19	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	**7**	CONTROL
20	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
21	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	**7**	CONTROL
22	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
23	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
24	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
25	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
26	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
27	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
28	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	CONTROL
29	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
30	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
31	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
32	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	CONTROL
33	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
34	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
35	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**9**	CONTROL
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	CONTROL
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	CONTROL
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	CONTROL
39	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**	EXPERIMENTAL
40	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**3**	EXPERIMENTAL

41	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	**3**	EXPERIMENTAL
42	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	EXPERIMENTAL
43	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	EXPERIMENTAL
44	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**4**	EXPERIMENTAL
45	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	**4**	EXPERIMENTAL
46	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
47	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
48	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
49	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
50	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
51	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**5**	EXPERIMENTAL
52	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
53	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
54	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
55	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
56	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
57	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	**6**	EXPERIMENTAL
58	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
59	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**6**	EXPERIMENTAL
60	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
61	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**6**	EXPERIMENTAL
62	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
63	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
64	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
65	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**6**	EXPERIMENTAL
66	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
67	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
68	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
69	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
70	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
71	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
72	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
73	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
74	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	**7**	EXPERIMENTAL
75	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
76	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
77	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**7**	EXPERIMENTAL
78	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**7**	EXPERIMENTAL
79	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
80	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
81	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
82	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
83	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
84	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
85	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL

86	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
87	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
88	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
89	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
90	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
91	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**8**	EXPERIMENTAL
92	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
93	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
94	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**9**	EXPERIMENTAL
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	EXPERIMENTAL
96	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**9**	EXPERIMENTAL
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	EXPERIMENTAL
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
103	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
104	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
106	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
107	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
109	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL
110	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	EXPERIMENTAL

Realizado por: Lisbeth Gabriela Ruiz Galeano, 2022.