



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CARRERA DE BIOFÍSICA**

**“ESTUDIO TEÓRICO-COMPUTACIONAL DEL EFECTO  
TÚNEL MONO DIMENSIONAL CON N-BARRERAS:  
APLICACIÓN A DISTANCIAS FINITAS E INFINITAS”**

**Trabajo de titulación**

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

**BIOFÍSICA**

**AUTOR: NOEMI CAROLINA MORETA MOROCHO**

**DIRECTOR: Dr. RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA**

Riobamba – Ecuador

2020

© 2020, Noemi Carolina Moreta Morocho

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho del Autor.

Yo, Noemi Carolina Moreta Morocho, declaro que el presente trabajo de titulación es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de titulación; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 19 de Agosto de 2020

**Noemi Carolina Moreta Morocho**

**060553261-3**

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CARRERA DE BIOFÍSICA**

El Tribunal del Trabajo de Titulación certifica que: El trabajo de titulación: Tipo: Proyecto de Investigación, “**ESTUDIO TEÓRICO-COMPUTACIONAL DEL EFECTO TÚNEL MONO DIMENSIONAL CON N-BARRERAS: APLICACIÓN A DISTANCIAS FINITAS E INFINITAS**”, realizado por la señorita: **NOEMI CAROLINA MORETA MOROCHO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del trabajo de titulación, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	<b>FIRMA</b>	<b>FECHA</b>
<b>Biof. María Fernanda Heredia Moyano PRESIDENTE DEL TRIBUNAL</b>	<b>MARIA FERNANDA HEREDIA MOYANO</b> <small>Firmado digitalmente por MARIA FERNANDA HEREDIA MOYANO Fecha: 2020.08.24 17:08:49 -05'00'</small>	<b>2020-08-19</b>
<b>Dr. Richard Willians Pachacama Choca DIRECTOR DE TRABAJO DE TITULACIÓN</b>	<b>RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA</b> <small>Firmado digitalmente por RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA Nombre de reconocimiento (DN): c=EC, serialNumber=0601921703, sn=PACHACAMA CHOCA, cn=RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA, 1.3.6.1.4.1.37442.10.4-0601921703, givenName=RICHARD WILLIANS, email=rpachacama@gmail.com, st=SIROBAMBA, l=CHIMBORAZO, ou=Certificado de Clase 2 de Persona Física EC (FIRMA)</small>	<b>2020-08-19</b>
<b>Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla MIEMBRO DEL TRIBUNAL</b>	<b>LUIS MARCELO CORTEZ BONILLA</b> <small>Firmado digitalmente por LUIS MARCELO CORTEZ BONILLA Nombre de reconocimiento (DN): c=EC, o=BANCO CENTRAL DEL ECUADOR, ou=ENTIDAD DE CERTIFICACION DE INFORMACION-ECIBCE, l=QUITO, serialNumber=000497075, cn=LUIS MARCELO CORTEZ BONILLA Fecha: 2020.08.25 15:08:05 -05'00'</small>	<b>2020-08-19</b>

## **DEDICATORIA**

El presente Trabajo de Titulación se lo dedico a Dios quien me permitió nacer en una hermosa familia que me han acompañado y brindado apoyo en este largo caminar.

Noemi

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco a Dios por nacer en una cálida familia quienes me han acompañado incondicionalmente en cada etapa de mi vida. También le doy gracias por la inteligencia que me ha proveído y así avanzar con mi carrera profesional.

De igual manera, agradezco a mi familia. A mi madre, Edelina, quien ha sabido alentarme con sus abrazos, sonrisas, palabras; por lo que se ha convertido en mi fuente de inspiración por su sabiduría y valores que me ha inculcado. A mi padre, Carlos, le agradezco darme todo lo necesario para seguir con mis estudios y nunca abandonarme. A mis hermanos, Danilo, Lised y Hernán, les agradezco por estar siempre unidos ya sea en los buenos o malos momentos.

Agradezco a mis amigos Ruth, Sofía, Maribel y especialmente Zuleima, quien me ha ayudado con apoyo intelectual y emocional para iniciar este trabajo de titulación; gracias a todas por estar ahí y formar parte de mi vida.

Un enorme agradecimiento a mi profesor Cristian Vacacela, quien ha jugado un papel importante en el desarrollo de este trabajo de titulación, por brindarme todo su apoyo y paciencia, es uno de mis mejores profesores que he tenido la dicha de conocer y sin él este trabajo no hubiese sido posible hacerlo.

Finalmente, un cálido agradecimiento a mi tutor, Dr. Richard Pachacama, quien me ha apoyado y ha estado pendiente de mí y ha contribuido significativamente en este trabajo de titulación.

Noemi

## TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
INDICE DE GRÁFICOS.....	x
ÍNDICE DE ANEXOS.....	xi
ABREVIATURAS.....	xii
RESUMEN.....	xiii
SUMMARY.....	xiv
INTRODUCCIÓN.....	1
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL.....</b>	<b>2</b>
1.1. Antecedentes.....	2
1.2. Planteamiento del problema.....	3
1.2.1. <i>Enunciado del problema</i> .....	3
1.2.2. <i>Formulación (Incógnita)</i> .....	3
1.3. Justificación.....	3
1.4. Objetivos.....	4
1.4.1. <i>Objetivo General</i> .....	4
1.4.2. <i>Objetivos Específicos</i> .....	4
1.5. Marco Teórico.....	4
1.5.1. <i>Efecto túnel unidimensional</i> .....	4
1.5.2. <i>Efecto túnel unidimensional a través de dos barreras secuenciales</i> .....	6
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>2. MARCO METODOLÓGICO.....</b>	<b>8</b>
2.1. Descripción analítica del efecto túnel mono dimensional a través de una barrera de potencial.....	8
2.2. Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias finitas.....	14
2.2.1. <i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para dos barreras de potencial a distancias finitas.</i> .....	14
2.2.2. <i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para tres barreras de potencial a distancias finitas.</i> .....	20
2.2.3. <i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias finitas.</i> .....	26
2.3. Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias infinitas.....	32

2.3.1.	<i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para dos barreras de potencial con distancias infinitas.</i>	32
2.3.2.	<i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para tres barreras de potencial a distancias infinitas.</i>	37
2.3.3.	<i>Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias infinitas.</i>	43
<b>CAPÍTULO III</b>		
3.	<b>MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS</b>	50
	<b>CONCLUSIONES</b>	56
	<b>RECOMENDACIONES</b>	57
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		
<b>ANEXOS</b>		



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1-1:</b>	Efecto túnel cuántico, $E < V$ .....	5
<b>Figura 2-1:</b>	Efecto túnel a través de dos barreras potenciales sucesivas.....	7
<b>Figura 1-2:</b>	Efecto túnel cuántico con una barrera de potencial.....	8
<b>Figura 2-2:</b>	Efecto túnel cuántico con dos barreras de potencial a distancias finitas.....	14
<b>Figura 3-2:</b>	Efecto túnel cuántico con tres barreras de potencial con distancias finitas.....	20
<b>Figura 4-2:</b>	Efecto túnel cuántico n- barreras de potencial con distancias finitas.....	26
<b>Figura 5-2:</b>	Efecto túnel cuántico para 2 barreras de potencial con distancias infinitas.....	32
<b>Figura 6-2:</b>	Efecto túnel cuántico para 3 barreras de potencial con distancias infinitas.....	37
<b>Figura 7-2:</b>	Efecto túnel cuántico para n- barreras de potencial con distancias infinitas.....	43
<b>Figura 1-3:</b>	Efecto túnel cuántico mono dimensional para n-barreras de potencial separadas a distancias finitas (figura a) e infinitas (figura b).....	50

## INDICE DE GRÁFICOS

- Gráfico 1-3:** Coeficiente de transmisión para una partícula con energía entre  $E= 0.99V$  (literal a) y  $0.75V$  (literal e) que atraviesa  $n= 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a$ , separadas a distancias finitas.....51
- Gráfico 2-3:** Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho entre  $a= 1nm$  y  $a=5nm$ , separadas a distancias finitas.....52
- Gráfico 3-3:** Coeficiente de transmisión para una partícula con energía entre  $E= 0.99V$  y  $0.75V$  que atraviesa  $n= 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a$ , separadas a distancias infinitas.....52
- Gráfico 4-3:** Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho entre  $a= 1nm$  y  $a=5nm$ , separadas a distancias infinitas.....53
- Gráfico 5-3:** (a) y (b) Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a= 1nm$ , separadas a distancias infinitas y finitas respectivamente. (c) y (d) Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.75V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a= 1nm$ , separadas a distancias infinitas y finitas respectivamente.....54
- Gráfico 6-3:** Coeficiente de reflexión para una partícula con  $E= 0.75V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a= 1nm$ , separadas a distancias infinitas (a) y finitas respectivamente (b).....55

## ÍNDICE DE ANEXOS

**Anexo A:** Líneas de código en el Software matemática para el efecto túnel mono dimensional con n-barreras: aplicación a distancias finitas e infinitas.

**Anexo B:** Ejercicios aplicativos del efecto túnel.

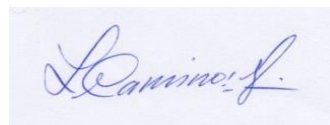
## ABREVIATURAS

$\psi(x)$ :	Función de onda.
$V(x)$ :	Energía potencial.
$E$ :	Energía cinética de la partícula.
$n$ :	Número de barreras de potencial
$N$ :	Número de región en el que puede encontrarse una partícula.
$A_N$ :	Amplitud de onda incidente.
$B_N$ :	Amplitud de onda reflejada.
$q$ :	Momento asociado a la partícula.
$k$ :	Vector de onda.
$T$ :	Coefficiente de transmisión.
$R$ :	Coefficiente de reflexión.

## RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se hace un estudio teórico-computacional del efecto túnel mono dimensional con n-barreras de potencial: aplicación a distancias finitas e infinitas, para lo cual primero se procede con una descripción analítica de este efecto a través de una sola barrera de potencial, usando las soluciones de las ecuación de Schrödinger, para posteriormente hacer derivaciones para dos, tres y el caso general de n-barreras de potencial, ya sean que estas barreras se encuentren separadas a distancias finitas (distancia de separación entre barreras igual al ancho de la barrera) o el caso en el cual estas barreras se encuentren separadas a distancias infinitas ( distancia de separación mucho mayor que el ancho de la barrera). Como resultado de estas derivaciones se obtiene una generalización del coeficiente de transmisión y reflexión para barreras a distancias finitas y otra generalización para barreras a distancias infinitas. Estas generalizaciones al implementarlas en el software Mathematica, indican que el coeficiente de transmisión (efecto túnel) depende tanto de la energía de la partícula, del ancho de barrera y del número de barreras de potencial, sin embargo lo más interesante resulta ser que el coeficiente de transmisión para distancias finitas es menor que para distancias infinitas. Finalmente se recomienda una continuación experimental para corroborar estos resultados.

Palabras clave: <BIOFÍSICA>, <FUNCIÓN DE ONDA>, <EFECTO TÚNEL>, <BARRERA DE POTENCIAL>, <POZO DE POTENCIAL>, <ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER>, <COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN>, <COEFICIENTE DE REFLEXIÓN>.



19-08-2020

0226-DBRAI-UPT-2020

## SUMMARY

In the present research work, a theoretical-computational study of the effect tunnel mono-dimensional with  $n$ -bars of potential is made: application at finite and infinite distances, for which first it was proceeding with an analytical description of this effect through a single potential barrier, using the solutions of the Schrödinger equation, and then make derivations for two, three and the general case of  $n$ -potential barriers, whether these barriers are separated at finite distances (separation distance between barriers equal to the width of the barrier) or the case in which these barriers are separated at infinite distances (separation distance much greater than the width of the barrier). As a result of these derivations, a generalization of the transmission and reflection coefficient is obtained for barriers at finite distances and another generalization for barriers at infinite distances. These generalizations, when implemented in the Mathematica software, indicate that the transmission coefficient (tunnel effect) depends on both particle energy, barrier width, and the number of potential barriers, but more interestingly, the transmission coefficient for finite distances is lower than for infinite distances. Finally, an experimental continuation is recommended to these results.

KEYWORDS: <BIOPHYSICS>, <WAVE FUNCTION>, <TUNNEL EFFECT>, <POTENTIAL BARRIER>, <POTENTIAL WELL>, <SCHRÖDINGER EFFECT>, <TRANSMISSION RATE>, <REFLECTION RATE>.

## INTRODUCCIÓN

El efecto túnel es un fenómeno físico-cuántico en que las partículas pueden penetrar una barrera de potencial con energía potencial mayor que la energía total de las partículas. Este fenómeno resulta atractivo e importante debido a que viola los principios de la mecánica clásica en el cual una partícula al querer atravesar una barrera de este tipo se ve completamente reflejada, sin embargo al ser estudiada desde el punto de vista de la mecánica cuántica, cuyo mundo está gobernado por leyes estadísticas, existe la probabilidad de que la partícula pueda penetrar la barrera de potencial, obteniendo así un coeficiente de transmisión de energía que por lo visto en mecánica clásica estaba prohibido.

Este fenómeno es objeto de estudio para cualquiera que se adentre en el mundo de la mecánica cuántica, y se lo encuentra disponible en cualquier texto introductorio a esta rama de la física, sin embargo la mayoría de libros y artículos científicos no proveen de una generalización para  $n$ -barreras de potencial. Es por ello que este trabajo está dirigido a encontrar una generalización matemática para  $n$ -barreras de potencial las cuales están separadas a distancias finitas (distancia de separación entre barreras igual al ancho de la barrera de potencial) y distancias infinitas (distancia de separación entre barreras mucho mayor que el ancho de la barrera).

El presente trabajo de titulación consta de 3 capítulos:

En el Capítulo I se aborda los antecedentes, planteamiento del problema, justificación objetivos y el material bibliográfico que serán útiles para el desarrollo y comprensión del trabajo.

El Capítulo II está enmarcado en el desarrollo del trabajo, para lo cual primero se procede con una descripción analítica del efecto túnel con una barrera de potencial para posteriormente hacer la derivación con dos, tres hasta encontrar una generalización con  $n$ -barreras de potencial separadas a distancias finitas e infinitas.

El Capítulo III está dedicado a los resultados obtenidos con su respectiva discusión, esto gracias a la obtención de una generalización matemática del efecto túnel provista en el Capítulo II, la cual es implementada en Mathematica, una herramienta computacional que permite analizar estos resultados.

# CAPÍTULO I

## 1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

### 1.1. Antecedentes

En 1928, el físico George Gamow, se basó en la mecánica cuántica para estudiar la desintegración radiactiva alfa (Harper, 2001, pp. 335-372), así descubrió que la tunelización cuántica ayuda a describir matemáticamente el decaimiento alfa de los núcleos atómicos. Más tarde, en 1986, Binnig y Rohrer ganaron el premio Nobel en Física por diseñar el microscopio de barrido de efecto túnel (STM) (Bayda et al., 2020, pp. 1-15), este fue uno de los inventos más importantes para la nanociencia porque por primera vez se podía observar e incluso manipular átomos de las superficies de los materiales; todo esto gracias a la tunelización cuántica.

En 1982, Chandra y Eastman calcularon los coeficientes de reflexión y de transmisión cuántico para un transistor de barrera triangular dopada (PDBT) mediante las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Como resultado se mostró que el coeficiente de transmisión depende de las longitudes de ancho de las barreras de potencial (Chandra y Eastman, 1982, pp. 9165-9169).

En 1987, Yuji Ando y Tomohiro Itoh presentaron un método simple para calcular con precisión la probabilidad de transmisión mecánica cuántica y la corriente a través de barreras de potencial arbitrarios usando la aproximación del potencial en múltiples pasos (Ando y Itoh, 1987, pp. 1497-1502).

En 2010, Jesús Arriaga realizó una investigación de la tunelización cuántica resonante de electrones con un número arbitrario de pozos potenciales usando el método de la matriz de transferencia para determinar la transmisión y reflexión. Como resultado, las distribuciones periódicas de las barreras proporcionaron un espectro de resonancia (Arriaga, 2010, pp. 1-68).

En 2017, Manuel Franco estudió el efecto túnel cuántico en barreras exóticas de potencial, para lo cual usó el método de aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión de una partícula al incidir sobre una barrera de potencial y con esto calculó la energía de los estados ligados de ciertos potenciales (Franco, 2017, pp. 1-44).



En 2019, se publicó un artículo científico titulado “Quantum tunneling through two sequential barriers: A simple derivation”, presentando la derivación del Efecto túnel a través de dos barreras de potencial, usando las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger (Carrasco et al, 2019, pp.1-6).

## **1.2. Planteamiento del problema**

### ***1.2.1. Enunciado del problema***

El efecto túnel es un fenómeno físico que solo se lo puede explicar mediante la mecánica cuántica. Este fenómeno hace referencia a la probabilidad de una partícula pueda atravesar una barrera de potencial sin necesidad de que esta partícula tenga energía cinética mayor a la de la barrera. En mecánica clásica esto resulta imposible, pero en mecánica cuántica este evento es posible y es estudiado mediante las soluciones de la ecuación de onda de Schrödinger. Este fenómeno se lo aprecia en la desintegración radiactiva, efecto túnel de campo transistor, microscopio de efecto túnel (Hill et al., 2016, pp. 4831-4837), etc.

Hasta donde sabemos, el estudio del efecto túnel mono dimensional sigue siendo un viejo y controvertido problema que lo encontramos en diversos textos de mecánica cuántica, sin embargo solo se lo ha estudiado con un número limitado de barreras de potencial. Por lo cual, una generalización a n-barreras brindaría, variando la distancia entre barreras, un gran aporte en la comprensión de este fenómeno.

### ***1.2.2. Formulación (Incógnita)***

El efecto túnel todavía es uno de los objetos de estudio importante para la física, es así que:

¿Existe una generalización matemática del efecto túnel a n-barreras de potencial separadas a distancias finitas e infinitas?

## **1.3. Justificación**

En la actualidad el efecto túnel representa un fenómeno físico – cuántico, observable a escalas nanométricas que se ve inmerso en diversas aplicaciones en el área de nanotecnología como el microscopio de efecto túnel (Hill et al., 2016, pp. 4831-4837), el cual mediante este fenómeno físico

permite estudiar, explorar y obtener imágenes de superficies a escalas nanométricas, incluso permite manipular los átomos de esas superficies.

El efecto túnel permite comprender la materia de una manera totalmente nueva mediante la mecánica cuántica, por esta razón se ha incursionado en el estudio de este fenómeno a nivel físico fundamental en un espacio mono dimensional con n-barreras de potencial separadas a distancias finitas e infinitas, empleando las soluciones de la ecuación de Schrödinger independientes de tiempo (Ando y Itoh, 1987, pp. 1497-1502) que permite encontrar el coeficiente de transmisión y el de reflexión que caracterizan este fenómeno, a la vez utilizando herramientas computacionales como Mathematica que permitirá implementar el formalismo matemático, y así hacer un análisis de los resultados obtenidos.

## **1.4. Objetivos**

### ***1.4.1. Objetivo General***

Realizar un estudio teórico-computacional del efecto túnel mono dimensional con n-barreras: aplicación a distancias finitas e infinitas.

### ***1.4.2. Objetivos Específicos***

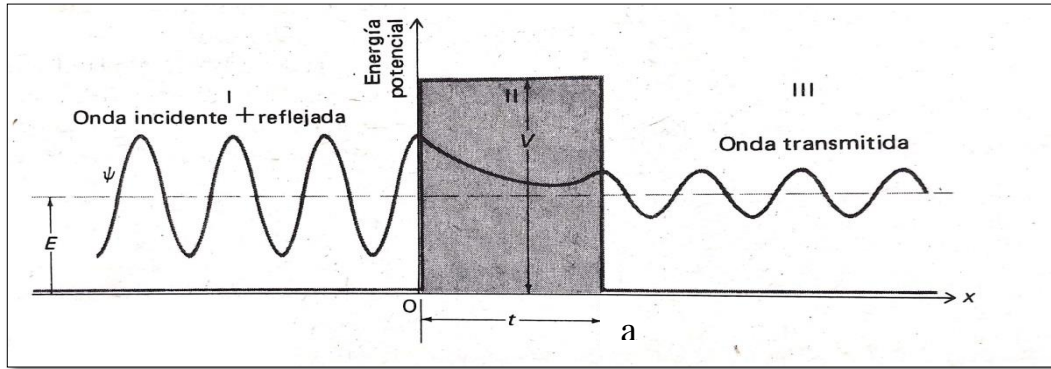
- Describir analíticamente el efecto túnel mono-dimensional para una barrera de potencial.
- Derivar el formalismo matemático del efecto túnel mono-dimensional para n-barreras de potencial con distancias finitas.
- Derivar el formalismo matemático del efecto túnel mono-dimensional para n-barreras de potencial con distancias infinitas.
- Implementar el formalismo matemático en el software Mathematica.

## **1.5. Marco Teórico**

### ***1.5.1. Efecto túnel unidimensional***

En la figura 3-1 se muestra que la función de onda penetra una corta distancia dentro de la barrera de potencial, dando una probabilidad finita de encontrar a una partícula más allá de los

límites clásicos impuestos por la pared material (Acosta et al., 1975, pp. 151-156). La función de densidad de probabilidad dentro de la barrera es descrita como el resultado de un sistema de ondas estacionarias en la función  $\psi$  correspondiente a cada nivel permitido de energía (Acosta et al., 1975, pp. 151-156).



**Figura 1-1.** Efecto túnel cuántico,  $E < V$ .

Fuente: (Acosta et al., 1975)

Al ser una onda estacionaria, esta es el resultado de dos funciones de onda que van en sentido opuesto entre fronteras reflectoras, se puede considerar que la función de onda en cualquier pared consta de una onda incidente y una reflejada (Acosta et al., 1975, pp. 151-156).

La función potencial tiene los siguientes valores:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V & \text{para } 0 < x < a \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases} \quad (1)$$

Las soluciones de las ecuaciones de onda de Schrödinger para cada región son:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx), & x < 0 \\ C\exp(-qx) + D\exp(qx), & 0 < x < a \\ F\exp(ikx) + G\exp(-ikx), & x > a \end{cases} \quad (2)$$

Los coeficientes A, C y F son las amplitudes de la función de onda incidente; B, D y G son las amplitudes de reflexión.

Donde  $k$  es el vector de onda, dado por:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (3)$$

y  $q$  es el momento asociado a la partícula, dado por:

$$q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (4)$$

Las condiciones de continuidad y valor único en todos los puntos del eje  $x$ , permiten resolver las varias amplitudes en términos de la energía de la partícula, la altura de la barrera y su espesor material (Acosta et al., 1975, pp. 151-156).

Cuando la energía de la barrera es superior a la energía total de la partícula o ancha comparada con la longitud de onda de la función de onda, entonces el coeficiente de transmisión es proporcional al cuadrado de la amplitud de esa función (Acosta et al., 1975; Ling et al., 2016):

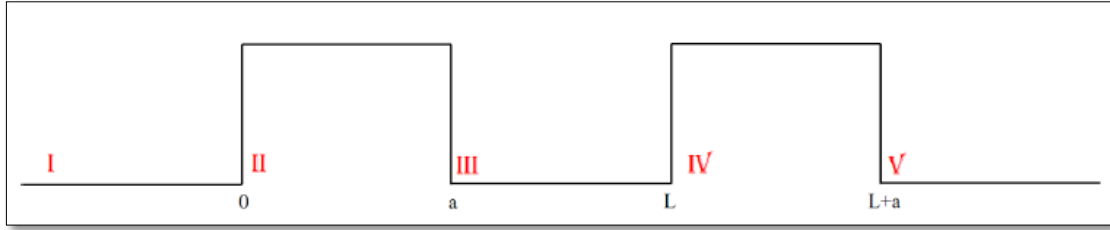
$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2qa} \quad (5)$$

El coeficiente de reflexión se define como:

$$R = 1 - T \quad (6)$$

### ***1.5.2. Efecto túnel unidimensional a través de dos barreras secuenciales***

En la siguiente figura se ilustra el efecto túnel a través de dos barreras potenciales sucesivas, con ancho  $a$ , y  $L - a$  la distancia entre ellas.



**Figura 2-1.** Efecto túnel a través de dos barreras potenciales sucesivas.

**Fuente:** (Carrasco et al., 2019)

En las cinco regiones I ( $x \leq 0$ ), II ( $0 \leq x \leq a$ ), III ( $a \leq x \leq L$ ), IV ( $L \leq x \leq L + a$ ) y V ( $x \geq L + a$ ) las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger son las siguientes (Carrasco et al, 2019, pp.1-6):

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx} \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx} \\ \psi_{IV}(x) = A_{IV} e^{-q(x-L)} + B_{IV} e^{q(x-L)} \\ \psi_V(x) = A_V e^{ikx} + B_V e^{-ikx} \end{cases} \quad (7)$$

Evaluando la continuidad de la función de onda en  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $x=L$  y  $x=L+a$ , mediante las condiciones de frontera y empleando las siguientes expresiones:

$$\frac{k}{q} = \sqrt{\frac{E}{V}} \ll 1 \quad (8)$$

y

$$\frac{q}{k} = \sqrt{\frac{V}{E}} \gg 1 \quad (9)$$

El coeficiente de transmisión es:

$$T = \left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \left( 16 \frac{E}{V} e^{-2qa} \right)^2 \quad (10)$$

Y el coeficiente de reflexión es:

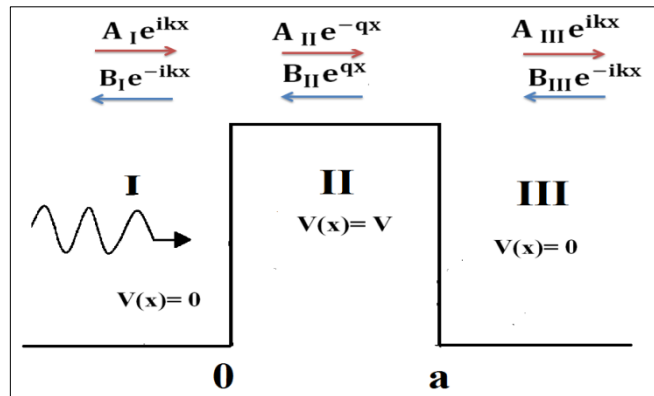
$$R = 1 - T \quad (11)$$

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO METODOLÓGICO

#### 2.1. Descripción analítica del efecto túnel mono dimensional a través de una barrera de potencial.

Sea una partícula con energía cinética  $E$ , no relativista, que incide de izquierda (región I) a derecha (región III) una barrera de potencial de ancho  $a$  con energía potencial  $V > E$ .



**Figura 1-2.** Efecto túnel cuántico con una barrera de potencial.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

A continuación se detalla el valor de la energía potencial para las regiones I, II y III:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } x > a \end{cases} \quad (12)$$

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y mono dimensional para cada región son:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx}, & \text{si } x > a \end{cases} \quad (13)$$

Los coeficientes **A** y **B** representan la amplitud de la función de onda: reflejada y transmitida respectivamente, **k** es el momento de la partícula cuando está libre (región I y II) y **q** es el momento de la partícula al interactuar con la barrera de potencial, tomando los siguientes valores:

$$\begin{cases} q^2 = \frac{2m(V - E)}{\hbar^2} \\ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \end{cases} \quad (14)$$

Se procede a evaluar la continuidad de la función de onda mediante las condiciones de frontera:

- $\psi_I(x) = \psi_{II}(x), x=0$  (15)

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (16)$$

- $\frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), x=0$  (17)

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (18)$$

- $\psi_{II}(x) = \psi_{III}(x), x=a$  (19)

$$A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{ika} \quad (20)$$

- $\frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x), x=a$  (21)

$$-qA_{II}e^{-qa} + qB_{II}e^{qa} = ikA_{III}e^{ika} \quad (22)$$

Como se estudia la transmisión de una partícula de izquierda a derecha, entonces  $B_{III} = 0$ .

Una vez aplicado las condiciones de frontera se puede encontrar el coeficiente de transmisión y de reflexión de la partícula.

Primero se despeja  $B_{II}$  de las ecuaciones 16 y 20, también  $qB_{II}$  de las ecuaciones 18 y 22 obteniendo:

$$\begin{cases} B_{II} = A_I + B_I - A_{II} \\ qB_{II} = ikA_I - ikB_I + qA_{II} \\ B_{II} = A_{III}e^{ika}e^{-qa} - A_{II}e^{-2qa} \\ qB_{II} = ikA_{III}e^{ika}e^{-qa} + qA_{II}e^{-2qa} \end{cases} \quad (23)$$

Igualando:  $B_{II} = B_{II}$  y  $qB_{II} = qB_{II}$ , tenemos:

$$\begin{cases} B_I = A_{III}e^{ika}e^{-qa} - A_{II}(e^{-2qa} - 1) - A_I \\ B_I = -A_{III}e^{ika}e^{-qa} + i\frac{q}{k}A_{II}(e^{-2qa} - 1) + A_I \end{cases} \quad (24)$$

De nuevo igualando  $B_I = B_I$ , resulta:

$$2A_{III}e^{ika}e^{-qa} - A_{II}(e^{-2qa} - 1)\left(1 + i\frac{q}{k}\right) = 2A_I \quad (25)$$

Se considera las siguientes relaciones para las funciones hiperbólicas:

$$\begin{cases} 2\cosh \alpha = e^\alpha + e^{-\alpha} \\ 2\sinh \alpha = e^\alpha - e^{-\alpha} \\ \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \\ 1 \pm e^{2\alpha} = e^\alpha e^{-\alpha} \pm e^\alpha e^\alpha = e^\alpha(e^{-\alpha} \pm e^\alpha) = \pm e^\alpha(e^\alpha \pm e^{-\alpha}) \end{cases} \quad (26)$$

Entonces:

$$e^{-2qa} - 1 = \frac{1}{e^{2qa}} - 1 = \frac{1 - e^{2qa}}{e^{2qa}} = \frac{-e^{qa}(e^{qa} - e^{-qa})}{e^{2qa}} = -2e^{-qa}\sinh(qa) \quad (27)$$

Por lo tanto la ecuación 25 se reescribe como:

$$2A_{III}e^{ika}e^{-qa} + 2\left(1 + i\frac{q}{k}\right)e^{-qa}\sinh(qa)A_{II} = 2A_I \quad (28)$$

Se emplean las ecuaciones 20 y 22 para obtener  $A_{II}$  en función de  $A_{III}$ . Entonces se procede a despejar  $B_{II}e^{qa}$  de dichas ecuaciones:



$$\begin{cases} B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{ika} - A_{II}e^{-qa} \\ B_{II}e^{qa} = i\frac{k}{q}A_{III}e^{ika} + A_{II}e^{-qa} \end{cases} \quad (29)$$

Igualando  $B_{II}e^{qa} = B_{II}e^{qa}$  se obtiene:

$$A_{II} = \frac{1}{2} \left(1 - i\frac{k}{q}\right) A_{III}e^{ika}e^{qa} \quad (30)$$

Este valor se reemplaza en la ecuación 28:

$$A_{III}e^{ika}e^{-qa} + \frac{1}{2} \left(1 - i\frac{k}{q}\right) \left(1 + i\frac{q}{k}\right) \sinh(qa) A_{III}e^{ika} = A_I \quad (31)$$

$$A_{III}e^{ika} \left\{ e^{-qa} + \frac{1}{2} \left[2 + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\right] \sinh(qa) \right\} = A_I \quad (32)$$

$$A_{III}e^{ika} \left[ e^{-qa} + \sinh(qa) + \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa) \right] = A_I \quad (33)$$

$$A_{III}e^{ika} \left[ e^{-qa} + \frac{e^{qa}}{2} - \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa) \right] = A_I \quad (34)$$

$$A_{III}e^{ika} \left[ \frac{e^{qa}}{2} + \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa) \right] = A_I \quad (35)$$

$$A_{III}e^{ika} \left[ \cosh(qa) + \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa) \right] = A_I \quad (36)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{e^{ika}}{\cosh(qa) + \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa)} \frac{e^{-ika}}{\cosh(qa) - \frac{1}{2} i \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right) \sinh(qa)} \quad (37)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)} \quad (38)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{q}{k}\right)^2 + \left(\frac{k}{q}\right)^2 - 2 \right] \sinh^2(qa)} \quad (39)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (40)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (41)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(qa)} \quad (42)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(qa)} \quad (43)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} + 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (44)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1-E/V)}{(E/V)(1-E/V)} \right] \sinh^2(qa)} \quad (45)$$

$$\left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (46)$$

Debido al mínimo valor del coeficiente de transmisión, cuando E se aproxima cero, el cual resulta ser el límite en que k tiende a cero; para estas energías pequeñas:  $qa \gg 1$ , entonces el seno hiperbólico se aproxima a:

$$\sinh(qa) \approx \frac{e^{qa}}{2} \quad (47)$$

De esta manera el coeficiente de transmisión es:

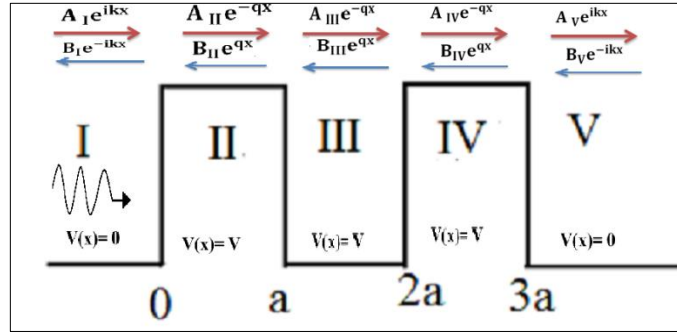
$$T_1 = \left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a\sqrt{2m(V-E)}} \quad (48)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R_1 = 1 - T_1 \quad (49)$$

**2.2. Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias finitas.**

**2.2.1. Derivación del efecto túnel mono dimensional para dos barreras de potencial a distancias finitas.**



**Figura 2-2.** Efecto túnel cuántico con dos barreras de potencial a distancias finitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula, con energía cinética  $E$ , que incide de izquierda a derecha a través de dos barreras de potencial, con energía potencial  $V > E$ , separadas a una distancia de longitud  $a$  igual al tamaño del ancho de las barreras. Las paredes de estas dos barreras forman un pozo de potencial (región III) de valor aproximadamente igual al de la energía potencial ( $V$ ) de estas barreras, debido a que su corta distancia produce una interacción entre barreras.

Entonces se plantea los sistemas de ecuaciones para cada región tanto para la energía potencial y la función de onda:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ V, & \text{si } a < x < 2a \\ V, & \text{si } 2a < x < 3a \\ 0, & \text{si } x > 3a \end{cases} \quad (50)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{-qx} + B_{III} e^{qx}, & \text{si } a < x < 2a \\ \psi_{IV}(x) = A_{IV} e^{-qx} + B_{IV} e^{qx}, & \text{si } 2a < x < 3a \\ \psi_V(x) = A_V e^{ikx} + B_V e^{-ikx}, & \text{si } x > 3a \end{cases} \quad (51)$$

$B_V = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha.

Se aplican las condiciones de frontera:

$$\bullet \quad \psi_I(x) = \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (52)$$

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (53)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (54)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (55)$$

$$\bullet \quad \psi_{II}(x) = \psi_{III}(x), \quad x=a \quad (56)$$

$$A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (57)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x), \quad x=a \quad (58)$$

$$-A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = -A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (59)$$

$$\bullet \quad \psi_{III}(x) = \psi_{IV}(x), \quad x=2a \quad (60)$$

$$A_{III}e^{-2qa} + B_{III}e^{2qa} = A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} \quad (61)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x), \quad x=2a \quad (62)$$

$$-A_{III}e^{-2qa} + B_{III}e^{2qa} = -A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} \quad (63)$$

$$\psi_{IV}(x) = \psi_V(x), \quad x=3a \quad (64)$$

$$A_{IV}e^{-3qa} + B_{IV}e^{3qa} = A_V e^{3ika} \quad (65)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x), \quad x=3a \quad (66)$$

$$-qA_{IV}e^{-3qa} + qB_{IV}e^{3qa} = ikA_V e^{3ika} \quad (67)$$

Ahora se consigue el coeficiente de transmisión y para ello despejamos  $B_{II}e^{qa}$  de las ecuaciones 57 y 59:

$$\begin{cases} B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} - A_{II}e^{-qa} \\ B_{II}e^{qa} = -A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} + A_{II}e^{-qa} \end{cases} \quad (68)$$

Igualamos  $B_{II}e^{qa} = B_{III}e^{qa}$  y obtenemos:

$$A_{III} = A_{II} \quad (69)$$

Se reemplaza este valor en 68, obteniendo:

$$B_{II} = B_{III} \quad (70)$$

Se procede a despejar  $B_{III}e^{2qa}$  de las ecuaciones 61 y 63:

$$\begin{cases} B_{III}e^{2qa} = A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} - A_{III}e^{-2qa} \\ B_{III}e^{2qa} = -A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} + A_{III}e^{-2qa} \end{cases} \quad (71)$$

Se iguala  $B_{III}e^{2qa} = B_{III}e^{2qa}$ , obteniendo:

$$A_{IV} = A_{III} \quad (72)$$

Se reemplaza este valor en 71, resultando:

$$B_{III} = B_{IV} \quad (73)$$

Entonces, se obtiene las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} A_{IV} = A_{III} = A_{II} \\ B_{IV} = B_{III} = B_{II} \end{cases} \quad (74)$$

Con estas igualdades las ecuaciones de las condiciones de frontera cuando  $x=0$  se reescriben como:

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \rightarrow A_I + B_I = A_{IV} + B_{IV} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \rightarrow ikA_I - ikB_I = -qA_{IV} + qB_{IV} \end{cases} \quad (75)$$

Con estas ecuaciones se arma el nuevo sistema de ecuaciones cuando  $x=0$  y  $x=3a$ :

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{IV} + B_{IV} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{IV} + qB_{IV} \\ A_{IV}e^{-3qa} + B_{IV}e^{3qa} = A_V e^{3ika} \\ -qA_{IV}e^{-3qa} + qB_{IV}e^{3qa} = ikA_V e^{3ika} \end{cases} \quad (76)$$

Se procede a resolver este sistema de ecuaciones y para ello se despeja  $B_{IV}$  de la primera y tercera ecuación, también se despeja  $qB_{IV}$  de la segunda y cuarta ecuación:

$$\begin{cases} B_{IV} = A_I + B_I - A_{IV} \\ qB_{IV} = ikA_I - ikB_I + qA_{IV} \\ B_{IV} = A_V e^{3ika} e^{-3qa} - A_{IV} e^{-6qa} \\ qB_{IV} = ikA_V e^{3ika} e^{-3qa} + qA_{IV} e^{-6qa} \end{cases} \quad (77)$$

Finalmente, igualando  $B_{IV} = B_{IV}$  y  $qB_{IV} = qB_{IV}$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B_I = A_V e^{3ika} e^{-3qa} - A_{IV}(e^{-6qa} - 1) - A_I \\ B_I = -A_V e^{3ika} e^{-3qa} + i\frac{q}{k}A_{IV}(e^{-6qa} - 1) + A_I \end{cases} \quad (78)$$

Igualando  $B_I = B_I$  se obtiene:

$$2A_V e^{3ika} e^{-3qa} - \left(1 + i\frac{q}{k}\right)(e^{-6qa} - 1)A_{IV} = 2A_I \quad (79)$$

Donde:

$$e^{-6qa} - 1 = \frac{1}{e^{6qa}} - 1 = \frac{1 - e^{6qa}}{e^{6qa}} = \frac{-e^{3qa}(e^{3qa} - e^{-3qa})}{e^{6qa}} = -2e^{-3qa} \sinh(3qa) \quad (80)$$

Entonces la ecuación 79 se reescribe como:

$$2A_V e^{3ika} e^{-3qa} + 2\left(1 + i\frac{q}{k}\right)e^{-3qa} \sinh(3qa)A_{IV} = 2A_I \quad (81)$$

Empleando las dos últimas ecuaciones del sistema de ecuaciones dado en el numeral 77 se encuentra  $A_{IV}$  en función de  $A_V$ ; para ello se procede a despejar  $B_{IV}e^{3qa}$  :

$$\begin{cases} B_{IV}e^{3qa} = A_V e^{3ika} - A_{IV}e^{-3qa} \\ B_{IV}e^{3qa} = i\frac{k}{q}A_V e^{3ika} + A_{IV}e^{-3qa} \end{cases} \quad (82)$$

Luego, se iguala  $B_{IV}e^{3qa} = B_{IV}e^{3qa}$ , obteniendo:

$$A_{IV} = \frac{1}{2} \left( 1 - i\frac{k}{q} \right) e^{3ika} e^{3qa} A_V \quad (83)$$

Este valor se reemplaza en la ecuación 81:

$$A_V e^{3ika} e^{-3qa} + \frac{1}{2} \left( 1 - i\frac{k}{q} \right) \left( 1 + i\frac{q}{k} \right) \sinh(3qa) e^{3ika} A_V = A_I \quad (84)$$

$$A_V e^{3ika} \left\{ e^{-3qa} + \frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh(3qa) \right\} = A_I \quad (85)$$

$$A_V e^{3ika} \left[ e^{-3qa} + \sinh(3qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(3qa) \right] = A_I \quad (86)$$

$$A_V e^{3ika} \left[ e^{-3qa} + \frac{e^{3qa}}{2} - \frac{e^{-3qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(3qa) \right] = A_I \quad (87)$$

$$A_V e^{3ika} \left[ \frac{e^{3qa}}{2} + \frac{e^{-3qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(3qa) \right] = A_I \quad (88)$$

$$A_V e^{3ika} \left[ \cosh(3qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(3qa) \right] = A_I \quad (89)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(3qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(3qa)} \quad (90)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(3qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(3qa)} \quad (91)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(3qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(3qa)} \quad (92)$$



$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1 - E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(3qa)} \quad (93)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1 - E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(3qa)} \quad (94)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1 - E/V} + 2 \right) \sinh^2(3qa)} \quad (95)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1 - E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1 - E/V)}{(E/V)(1 - E/V)} \right] \sinh^2(3qa)} \quad (96)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(3qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (97)$$

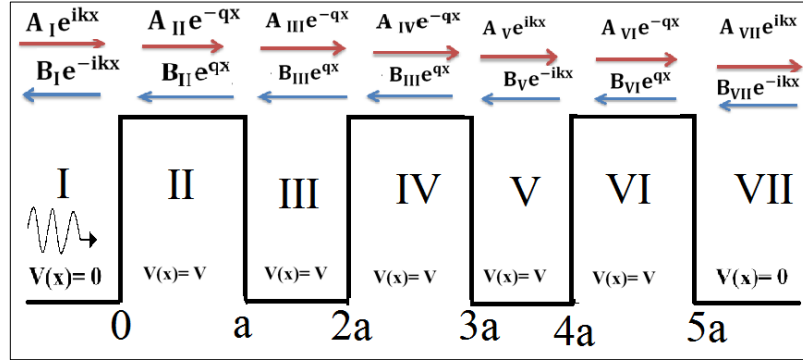
Cuando la barrera es alta (V) comparada con la energía de la partícula(E) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:  $\sinh(3qa) \approx \frac{e^{3qa}}{2}$  ; Es así que el coeficiente de transmisión es:

$$T_2 = \left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-6a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}} \quad (98)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R_2 = 1 - T_2 \quad (99)$$

2.2.2. *Derivación del efecto túnel mono dimensional para tres barreras de potencial a distancias finitas.*



**Figura 3-2.** Efecto túnel cuántico con tres barreras de potencial con distancias finitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula, con energía cinética  $E$ , que incide de izquierda a derecha a través de tres barreras de potencial, con energía potencial  $V > E$ , separadas a una distancia de longitud  $a$  igual al tamaño del ancho de las barreras. Las paredes entre dos barreras forman un pozo de potencial (región III y región V) de valor aproximadamente igual al de la energía potencial ( $V$ ) de las barreras, debido a que su corta distancia produce una interacción entre barreras.

Entonces el valor de  $V(x)$  y  $\psi(x)$  para cada región es:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ V, & \text{si } a < x < 2a \\ V, & \text{si } 2a < x < 3a \\ V, & \text{si } 3a < x < 4a \\ V, & \text{si } 4a < x < 5a \\ 0, & \text{si } x > 5a \end{cases} \quad (100)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{-qx} + B_{III} e^{qx}, & \text{si } a < x < 2a \\ \psi_{IV}(x) = A_{IV} e^{-qx} + B_{IV} e^{qx}, & \text{si } 2a < x < 3a \\ \psi_V(x) = A_V e^{-qx} + B_V e^{qx}, & \text{si } 3a < x < 4a \\ \psi_{VI}(x) = A_{VI} e^{-qx} + B_{VI} e^{qx}, & \text{si } 4a < x < 5a \\ \psi_{VII}(x) = A_{VII} e^{ikx} + B_{VII} e^{-ikx}, & \text{si } x > 5a \end{cases} \quad (101)$$

$B_{VII} = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha.

Aplicamos las condiciones de frontera:

$$\bullet \quad \psi_I(x) = \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (102)$$

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (103)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (104)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (105)$$

$$\bullet \quad \psi_{II}(x) = \psi_{III}(x), \quad x=a \quad (106)$$

$$A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (107)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x), \quad x = a \quad (108)$$

$$-A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = -A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (109)$$

$$\bullet \quad \psi_{III}(x) = \psi_{IV}(x), \quad x=2a \quad (110)$$

$$A_{III}e^{-2qa} + B_{III}e^{2qa} = A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} \quad (111)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x), \quad x=2a \quad (112)$$

$$-A_{III}e^{-2qa} + B_{III}e^{2qa} = -A_{IV}e^{-2qa} + B_{IV}e^{2qa} \quad (113)$$

$$\bullet \quad \psi_{IV}(x) = \psi_V(x), \quad x=3a \quad (114)$$

$$A_{IV}e^{-3qa} + B_{IV}e^{3qa} = A_Ve^{-3qa} + B_Ve^{3qa} \quad (115)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x), \quad x = 3a \quad (116)$$

$$-A_{IV}e^{-3qa} + B_{IV}e^{3qa} = -A_Ve^{-3qa} + B_Ve^{3qa} \quad (117)$$

$$\bullet \quad \psi_V(x) = \psi_{VI}(x), \quad x=4a \quad (118)$$

$$A_Ve^{-4qa} + B_Ve^{4qa} = A_{VI}e^{-4qa} + B_{VI}e^{4qa} \quad (119)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{VI}(x), \quad x=4a \quad (120)$$

$$-A_Ve^{-4qa} + B_Ve^{4qa} = -A_{VI}e^{-4qa} + B_{VI}e^{4qa} \quad (121)$$

$$\psi_{VI}(x) = \psi_{VII}(x), \quad x=5a \quad (122)$$

$$A_{VI}e^{-5qa} + B_{VI}e^{5qa} = A_{VII}e^{5ika} \quad (123)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{VII}(x), \quad x=5a \quad (124)$$

$$-qA_{VI}e^{-5qa} + qB_{VI}e^{5qa} = ikA_{VII}e^{5ika} \quad (125)$$

Primero,  $B_{IV}e^{3qa}$  se despeja de las ecuaciones 115 y 117:

$$\begin{cases} B_{IV}e^{3qa} = A_{VE}^{-3qa} + B_{VE}^{3qa} - A_{IV}e^{-3qa} \\ B_{IV}e^{3qa} = -A_{VE}^{-3qa} + B_{VE}^{3qa} + A_{IV}e^{-3qa} \end{cases} \quad (126)$$

Al igualar  $B_{IV}e^{3qa} = B_{IV}e^{3qa}$ , se obtiene

$$A_V = A_{IV} \quad (127)$$

Este valor se reemplaza en 126, obteniendo:

$$B_{IV} = B_V \quad (128)$$

Ahora, se despeja  $B_{VE}^{4qa}$  de las ecuaciones 119 y 121:

$$\begin{cases} B_{VE}^{4qa} = A_{VIE}^{-4qa} + B_{VII}e^{4qa} - A_{VE}^{-4qa} \\ B_{VE}^{4qa} = -A_{VIE}^{-4qa} + B_{VII}e^{4qa} + A_{VE}^{-4qa} \end{cases} \quad (129)$$

Igualando  $B_{VE}^{4qa} = B_{VE}^{4qa}$ , se obtiene:

$$A_{VI} = A_V \quad (130)$$

Este valor de la ecuación se sustituye en 129, obteniendo:

$$B_V = B_{VI} \quad (131)$$

Anteriormente, para el caso de dos barreras de potencial separadas a distancias finitas se tuvo las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} A_{IV} = A_{III} = A_{II} \\ B_{IV} = B_{III} = B_{II} \end{cases} \quad (132)$$

Agregando las igualdades obtenidas cuando  $x=3a$  y  $x=4a$ , se obtiene las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} A_{VI} = A_V = A_{IV} = A_{III} = A_{II} \\ B_{VI} = B_V = B_{IV} = B_{III} = B_{II} \end{cases} \quad (133)$$

Los valores de estas igualdades se reemplazan en las ecuaciones de condición de frontera cuando  $x=0$ :

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \rightarrow A_I + B_I = A_{VI} + B_{VI} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \rightarrow ikA_I - ikB_I = -qA_{VI} + qB_{VI} \end{cases} \quad (134)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones cuando  $x=0$  y  $x=5a$  es el siguiente:

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{VI} + B_{VI} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{VI} + qB_{VI} \\ A_{VI}e^{-5qa} + B_{VI}e^{5qa} = A_{VII}e^{5ika} \\ -qA_{VI}e^{-5qa} + qB_{VI}e^{5qa} = ikA_{VII}e^{5ika} \end{cases} \quad (135)$$

Se procede a resolver este sistema y para ello se despeja  $B_{VI}$  de la primera y tercera ecuación y  $qB_{VI}$  de la segunda y última ecuación:

$$\begin{cases} B_{VI} = A_I + B_I - A_{VI} \\ qB_{VI} = ikA_I - ikB_I + qA_{VI} \\ B_{VI} = A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} - A_{VI}e^{-10qa} \\ qB_{VI} = ikA_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} + qA_{VI}e^{-10qa} \end{cases} \quad (136)$$

Luego se iguala  $B_{VI} = B_{VI}$  y  $qB_{VI} = qB_{VI}$ , obteniendo:

$$\begin{cases} B_I = A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} - A_{VI}(e^{-10qa} - 1) - A_I \\ B_I = -A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} + i\frac{q}{k}A_{VI}(e^{-10qa} - 1) + A_I \end{cases} \quad (137)$$

De nuevo igualando  $B_I = B_I$ , se obtiene

$$2A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} - A_{VI}(e^{-10qa} - 1)\left(1 + i\frac{q}{k}\right) = 2A_I \quad (138)$$

Donde:

$$\begin{aligned} e^{-10qa} - 1 &= \frac{1}{e^{10qa}} - 1 = \frac{1 - e^{10qa}}{e^{10qa}} = \frac{-e^{5qa}(e^{5qa} - e^{-5qa})}{e^{10qa}} \\ &= -2e^{-5qa}\sinh(5qa) \end{aligned} \quad (139)$$

Entonces la ecuación 138 se reescribe como:

$$2A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} + 2\left(1 + i\frac{q}{k}\right)e^{-5qa}\sinh(5qa)A_{VI} = 2A_I \quad (140)$$

Para conocer el valor  $A_{VI}$  en función de  $A_{VII}$  se despeja  $B_{VI}e^{5qa}$  de las dos últimas ecuaciones del sistema dado en 136:

$$\begin{cases} B_{VI}e^{5qa} = A_{VII}e^{5ika} - A_{VI}e^{-5qa} \\ B_{VI}e^{5qa} = i\frac{k}{q}A_{VII}e^{5ika} + A_{VI}e^{-5qa} \end{cases} \quad (141)$$

Se iguala  $B_{VI}e^{5qa} = B_{VI}e^{5qa}$ , obteniendo:

$$A_{VI} = \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{k}{q}\right)A_{VII}e^{5ika}e^{5qa} \quad (142)$$

Este valor se reemplaza en la ecuación 140:

$$A_{VII}e^{5ika}e^{-5qa} + \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{q}{k}\right)\left(1 - i\frac{k}{q}\right)\sinh(5qa)A_{VII}e^{5ika} = A_I \quad (143)$$

$$A_{VII}e^{5ika}\left\{e^{-5qa} + \frac{1}{2}\left[2 + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\right]\sinh(5qa)\right\} = A_I \quad (144)$$

$$A_{VII} e^{5ika} \left[ e^{-5qa} + \sinh(5qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(5qa) \right] = A_I \quad (145)$$

$$A_{VII} e^{5ika} \left[ e^{-5qa} + \frac{e^{5qa}}{2} - \frac{e^{-5qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(5qa) \right] = A_I \quad (146)$$

$$A_{VII} e^{5ika} \left[ \frac{e^{5qa}}{2} + \frac{e^{-5qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(5qa) \right] = A_I \quad (147)$$

$$A_{VII} e^{5ika} \left[ \cosh(5qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(5qa) \right] = A_I \quad (148)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(5qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(5qa)} \quad (149)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(5qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(5qa)} \quad (150)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(5qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(5qa)} \quad (151)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(5qa)} \quad (152)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(5qa)} \quad (153)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} + 2 \right) \sinh^2(5qa)} \quad (154)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1-E/V)}{(E/V)(1-E/V)} \right] \sinh^2(5qa)} \quad (155)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (156)$$

Como la barrera es alta ( $V$ ) comparada con la energía de la partícula ( $E$ ) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:

$$\sinh(5qa) \approx \frac{e^{5qa}}{2} \quad (157)$$

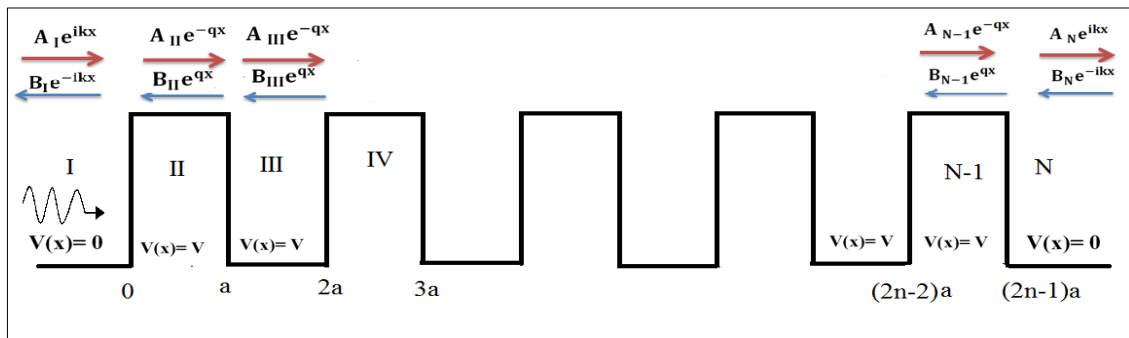
Así que el coeficiente de transmisión es:

$$T_3 = \left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-10a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \quad (158)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R_3 = 1 - T_3 \quad (159)$$

### 2.2.3. Derivación del efecto túnel mono dimensional para $n$ -barreras de potencial a distancias finitas.



**Figura 4-2.** Efecto túnel cuántico  $n$ -barreras de potencial con distancias finitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula que incide de izquierda a derecha con energía cinética  $E$ , a través de  $n$ -barreras de potencial, de ancho  $a$  y energía potencial  $V > E$ , separadas entre sí con una longitud igual al tamaño del ancho de las barreras, las cuales al interactuar entre sí forman pozos de potencial con energía potencial similar a  $V$ .

Es así que el valor de  $V(x)$  y  $\psi(x)$  para cada región es:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ \vdots & \\ \vdots & \\ V, & \text{si } (2n-2)a < x < (2n-1)a \\ 0, & \text{si } x > (2n-1)a \end{cases} \quad (160)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \psi_{N-1}(x) = A_{N-1} e^{-qx} + B_{N-1} e^{qx}, & \text{si } (2n-2)a < x < (2n-1)a \\ \psi_N(x) = A_N e^{ikx} + B_N e^{-ikx}, & \text{si } x > (2n-1)a \end{cases} \quad (161)$$

Donde  $n$  es el número de barreras de potencial y  $N$  es la región donde se puede encontrar la partícula y viene definida como  $2n+1$ .

$B_N = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha.

Aplicamos las condiciones de frontera:

$$\bullet \quad \psi_I(x) = \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (162)$$

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (163)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (164)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (165)$$

$$\bullet \quad \psi_{N-1}(x) = \psi_N(x), \quad x=(2n-1)a \quad (166)$$

$$A_{N-1} e^{-q(2n-1)a} + B_{N-1} e^{q(2n-1)a} = A_N e^{ik(2n-1)a} \quad (167)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N-1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_N(x), \quad x = (2n-1)a \quad (168)$$

$$-qA_{N-1} e^{-q(2n-1)a} + qB_{N-1} e^{q(2n-1)a} = ikA_N e^{ik(2n-1)a} \quad (169)$$

De las igualdades de 133 se deduce de manera general:

$$\begin{cases} A_{N-1} = \dots = A_{VI} = A_V = A_{IV} = A_{III} = A_{II} \\ B_{N-1} = \dots = B_{VI} = B_V = B_{IV} = B_{III} = B_{II} \end{cases} \quad (170)$$

Haciendo uso de estas relaciones, las ecuaciones de frontera cuando  $x=0$  se expresan como:

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \rightarrow A_I + B_I = A_{N-1} + B_{N-1} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \rightarrow ikA_I - ikB_I = -qA_{N-1} + qB_{N-1} \end{cases} \quad (171)$$

Con estas nuevas ecuaciones se forma el siguiente sistema de ecuaciones cuando  $x = 0$  y  $x = (2n-1)a$ :

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{N-1} + B_{N-1} \\ ikA_I - ikB_I = -qA_{N-1} + qB_{N-1} \\ A_{N-1}e^{-q(2n-1)a} + B_{N-1}e^{q(2n-1)a} = A_N e^{ik(2n-1)a} \\ -qA_{N-1}e^{-q(2n-1)a} + qB_{N-1}e^{q(2n-1)a} = ikA_N e^{ik(2n-1)a} \end{cases} \quad (172)$$

Para la resolución de este sistema se despeja  $B_{N-1}$  de la primera y tercera ecuación, también se despeja  $qB_{N-1}$  de la segunda y última ecuación:

$$\begin{cases} B_{N-1} = A_I + B_I - A_{N-1} \\ qB_{N-1} = ikA_I - ikB_I + qA_{N-1} \\ B_{N-1} = A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} - A_{N-1} e^{-2q(2n-1)a} \\ qB_{N-1} = ikA_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} + qA_{N-1} e^{-2q(2n-1)a} \end{cases} \quad (173)$$

Al igualar  $B_{N-1} = B_{N-1}$  y  $qB_{N-1} = qB_{N-1}$ , se obtiene:

$$\begin{cases} B_I = A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} - A_{N-1} (e^{-2q(2n-1)a} - 1) - A_I \\ B_I = -A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} + i \frac{q}{k} A_{N-1} (e^{-2q(2n-1)a} - 1) + A_I \end{cases} \quad (174)$$

De nuevo al igualar  $B_I = B_I$ , resulta:

$$2A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} - \left(1 + i \frac{q}{k}\right) A_{N-1} (e^{-2q(2n-1)a} - 1) = 2A_I \quad (175)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
e^{-2q(2n-1)a} - 1 &= \frac{1}{e^{2q(2n-1)a}} - 1 = \frac{1 - e^{2q(2n-1)a}}{e^{2q(2n-1)a}} \\
&= \frac{-e^{q(2n-1)a}(e^{q(2n-1)a} - e^{-q(2n-1)a})}{e^{2q(2n-1)a}} \\
&= -2e^{-q(2n-1)a} \sinh[q(2n-1)a]
\end{aligned} \tag{176}$$

Entonces la ecuación 175 se expresa como:

$$2A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} + 2 \left(1 + i \frac{q}{k}\right) e^{-q(2n-1)a} \sinh[q(2n-1)a] A_{N-1} = 2A_I \tag{177}$$

Ahora, se procede a encontrar  $A_{N-1}$  en función de  $A_N$ , para lo cual se despeja  $B_{N-1} e^{q(2n-1)a}$  de las dos últimas ecuaciones dadas en el sistema de ecuaciones dada en 172;

$$\begin{cases} B_{N-1} e^{q(2n-1)a} = A_N e^{ik(2n-1)a} - A_{N-1} e^{-q(2n-1)a} \\ B_{N-1} e^{q(2n-1)a} = \frac{ik}{q} A_N e^{ik(2n-1)a} + A_{N-1} e^{-q(2n-1)a} \end{cases} \tag{178}$$

Luego al igualar  $B_{N-1} e^{q(2n-1)a} = B_{N-1} e^{q(2n-1)a}$ , resulta:

$$A_{N-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ik}{q}\right) A_N e^{ik(2n-1)a} e^{q(2n-1)a} \tag{179}$$

Este valor se reemplaza en la ecuación 177:

$$\begin{aligned}
A_N e^{ik(2n-1)a} e^{-q(2n-1)a} + \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{q}{k}\right) \left(1 - \frac{ik}{q}\right) \sinh[q(2n-1)a] e^{ik(2n-1)a} A_N \\
= A_I
\end{aligned} \tag{180}$$

$$A_N e^{ik(2n-1)a} \left\{ e^{-q(2n-1)a} + \frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh[q(2n-1)a] \right\} = A_I \tag{181}$$

$$A_N e^{ik(2n-1)a} \left[ e^{-q(2n-1)a} + \sinh[q(2n-1)a] + \frac{1}{2}i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh[q(2n-1)a] \right] = A_I \quad (182)$$

$$A_N e^{ik(2n-1)a} \left[ e^{-q(2n-1)a} + \frac{e^{q(2n-1)a}}{2} - \frac{e^{-q(2n-1)a}}{2} + \frac{1}{2}i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh[q(2n-1)a] \right] = A_I \quad (183)$$

$$A_N e^{ik(2n-1)a} \left[ \frac{e^{q(2n-1)a}}{2} + \frac{e^{-q(2n-1)a}}{2} + \frac{1}{2}i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh[q(2n-1)a] \right] = A_I \quad (184)$$

$$A_N e^{ik(2n-1)a} \left[ \cosh[q(2n-1)a] + \frac{1}{2}i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh[q(2n-1)a] \right] = A_I \quad (185)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{e^{ik(2n-1)a} e^{-ik(2n-1)a}}{\cosh^2[q(2n-1)a] + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (186)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2[q(2n-1)a] + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (187)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2[q(2n-1)a] + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (188)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (189)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (190)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} + 2 \right) \sinh^2[q(2n-1)a]} \quad (191)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1 - E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1 - E/V)}{(E/V)(1 - E/V)} \right] \sinh^2[q(2n - 1)a]} \quad (192)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2[q(2n - 1)a]}{4 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right)}} \quad (193)$$

Cuando la barrera es alta (V) comparada con la energía de la partícula(E) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:

$$\sinh[q(2n - 1)a] \approx \frac{e^{q(2n-1)}}{2} \quad (194)$$

Así el coeficiente de transmisión es:

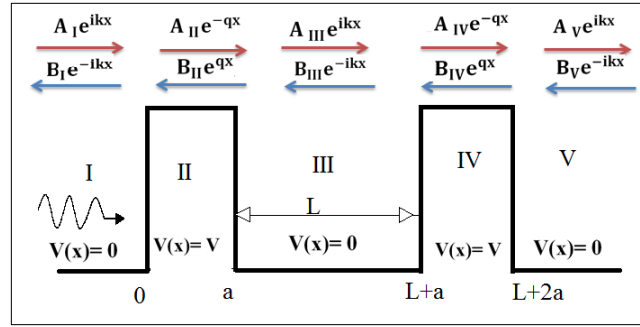
$$T_n = \left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2(2n-1)a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \quad (195)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R_n = 1 - T_n \quad (196)$$

**2.3. Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias infinitas.**

**2.3.1. Derivación del efecto túnel mono dimensional para dos barreras de potencial con distancias infinitas.**



**Figura 5-2.** Efecto túnel cuántico para 2 barreras de potencial con distancias infinitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula con energía cinética  $E$  que incide de izquierda a derecha dos barreras de potencial de ancho  $a$  y energía potencial  $V > E$ , separadas a una distancia  $L$  (distancia infinita para la partícula, donde  $L \gg a$ ) que no permite una interacción entre barreras y por ende no forman un pozo de potencial dejando a la partícula libre en la región III.

Se presentan los valores de  $V(x)$  y  $\psi(x)$  para cada región:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } a < x < L + a \\ V, & \text{si } L + a < x < L + 2a \\ 0, & \text{si } x > L + 2a \end{cases} \quad (197)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx}, & \text{si } a < x < L + a \\ \psi_{IV}(x) = A_{IV} e^{-qx} + B_{IV} e^{qx}, & \text{si } L + a < x < L + 2a \\ \psi_V(x) = A_V e^{ikx} + B_V e^{-ikx}, & \text{si } x > L + 2a \end{cases} \quad (198)$$

Aplicamos las condiciones de frontera:

- $\psi_I(x) = \psi_{II}(x), x=0$  (199)

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (200)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (201)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (202)$$

$$\bullet \quad \psi_{II}(x) = \psi_{III}(x), \quad x=a \quad (203)$$

$$A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (204)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x), \quad x = a \quad (205)$$

$$-A_{II}e^{-qa} + B_{II}e^{qa} = -A_{III}e^{-qa} + B_{III}e^{qa} \quad (206)$$

$$\bullet \quad \psi_{III}(x) = \psi_{IV}(x), \quad x = L + a \quad (207)$$

$$A_{III}e^{ik(L+a)} + B_{III}e^{-ik(L+a)} = A_{IV}e^{-q(L+a)} + B_{IV}e^{q(L+a)} \quad (208)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x), \quad x = L + a \quad (209)$$

$$ikA_{III}e^{ik(L+a)} - ikB_{III}e^{-ik(L+a)} = -qA_{IV}e^{-q(L+a)} + qB_{IV}e^{q(L+a)} \quad (210)$$

$$\bullet \quad \psi_{IV}(x) = \psi_V(x), \quad x = L + 2a \quad (211)$$

$$A_{IV}e^{-q(L+2a)} + B_{IV}e^{q(L+2a)} = A_Ve^{ik(L+2a)} \quad (212)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x), \quad x = L + 2a \quad (213)$$

$$-qA_{IV}e^{-q(L+2a)} + qB_{IV}e^{q(L+2a)} = ikA_Ve^{ik(L+2a)} \quad (214)$$

$B_V = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha. Como anteriormente ya se obtuvo el coeficiente de transmisión para la primera barrera de potencial, entonces nos enfocamos en calcular el coeficiente de transmisión para la segunda barrera, es así que:

$B_{IV}$  se despeja de las ecuaciones 208 y 212, también  $qB_{IV}$  se despeja de las ecuaciones 210 y 214:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{IV} = A_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)} + B_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)} - A_{IV}e^{-2q(L+a)} \\ qB_{IV} = ikA_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)} - ikB_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)} + qA_{IV}e^{-2q(L+a)} \\ B_{IV} = A_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} - A_{IV}e^{-2q(L+2a)} \\ qB_{IV} = ikA_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} + qA_{IV}e^{-2q(L+2a)} \end{array} \right. \quad (215)$$

Ahora se procede a igualar  $B_{IV} = B_{IV}$  y  $qB_{IV} = qB_{IV}$ , obteniendo:

$$B_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)} = A_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} - A_{IV}(e^{-2q(L+2a)} - e^{-2q(L+a)}) - A_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)} \quad (216)$$

$$y \quad (217)$$

$$B_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)} = -A_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} + \frac{iq}{k}A_{IV}(e^{-2q(L+2a)} - e^{-2q(L+a)}) + A_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)}$$

Se procede a igualar estas dos ecuaciones  $B_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)} = B_{III}e^{-ik(L+a)}e^{-q(L+a)}$ , obteniendo:

$$2A_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} - \left(1 + \frac{iq}{k}\right)A_{IV}[e^{-2q(L+a)}(e^{-2qa} - 1)] = 2A_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)} \quad (218)$$

Conociendo que :  $e^{-2qa} - 1 = -2e^{-qa}\sinh(qa)$ , entonces se tiene:

$$2A_{V}e^{ik(L+2a)}e^{-q(L+2a)} + 2\left(1 + \frac{iq}{k}\right)\sinh(qa)A_{IV}e^{-2q(L+a)}e^{-qa} = 2A_{III}e^{ik(L+a)}e^{-q(L+a)} \quad (219)$$

Empleamos las ecuaciones 212 y 214 para obtener  $A_{IV}$  en función de  $A_{V}$ , para ello se despeja  $B_{IV}e^{q(L+2a)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{IV}e^{q(L+2a)} = A_{V}e^{ik(L+2a)} - A_{IV}e^{-q(L+2a)} \\ B_{IV}e^{q(L+2a)} = i\frac{k}{q}A_{V}e^{ik(L+2a)} + A_{IV}e^{-q(L+2a)} \end{array} \right. \quad (220)$$

Se procede a igualar  $B_{IV}e^{q(L+2a)} = B_{IV}e^{q(L+2a)}$ , obteniendo:



$$A_{IV} = \frac{1}{2} \left( 1 - i \frac{k}{q} \right) A_V e^{ik(L+2a)} e^{q(L+2a)} \quad (221)$$

Este valor se reemplaza en la ecuación 219:

$$A_V e^{ik(L+2a)} e^{-q(L+2a)} + \quad (222)$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{iq}{k} \right) \left( 1 - i \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) e^{ik(L+2a)} e^{q(L+2a)} e^{-2q(L+a)} e^{-qa} A_V = A_{III} e^{ik(L+a)} e^{-q(L+a)}$$

$$A_V e^{ik(L+2a)} e^{-ik(L+a)} \left\{ e^{-q(L+2a)} e^{q(L+a)} + \quad (223)$$

$$\frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh(qa) e^{q(L+a)} e^{q(L+2a)} e^{-2q(L+a)} e^{-qa} \right\} = A_{III}$$

$$A_V e^{ika} \left\{ e^{-qa} + \frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh(qa) \right\} = A_{III} \quad (224)$$

$$A_V e^{ika} \left[ e^{-qa} + \sinh(qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{III} \quad (225)$$

$$A_V e^{ika} \left[ e^{-qa} + \frac{e^{qa}}{2} - \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{III} \quad (226)$$

$$A_V e^{ika} \left[ \frac{e^{qa}}{2} + \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{III} \quad (227)$$

$$A_V e^{ika} \left[ \cosh(qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{III} \quad (228)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(qa)} \quad (229)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{q}{k} \right)^2 + \left( \frac{k}{q} \right)^2 - 2 \right] \sinh^2(qa)} \quad (230)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (231)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (232)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(qa)} \quad (233)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(qa)} \quad (234)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} + 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (235)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1-E/V)}{(E/V)(1-E/V)} \right] \sinh^2(qa)} \quad (236)$$

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (237)$$

Como la barrera es alta (V) comparada con la energía de la partícula(E) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:

$$\sinh(qa) \approx \frac{e^{qa}}{2} \quad (238)$$

Así la ecuación 237 se reescribe como:

$$\left| \frac{A_V}{A_{III}} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}} \quad (239)$$

Se emplea el coeficiente de transmisión para una barrera de potencial cuyo valor es:

$$T_1 = \left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}} \quad (240)$$

Ahora despejamos  $|A_{III}|^2$  de las ecuaciones 239 y 240 obteniendo:

$$\begin{cases} |A_{III}|^2 = \frac{|A_V|^2}{16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}}} \\ |A_{III}|^2 = 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} |A_I|^2 \end{cases} \quad (241)$$

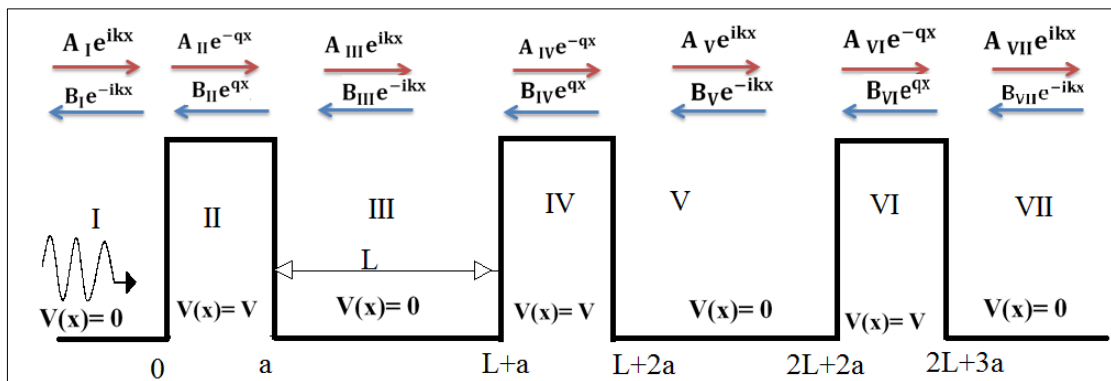
Igualando  $|A_{III}|^2 = |A_{III}|^2$ , el coeficiente de transmisión para dos barreras de potencial es:

$$T'_2 = \left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^2 \quad (242)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R'_2 = 1 - T'_2 \quad (243)$$

### 2.3.2. Derivación del efecto túnel mono dimensional para tres barreras de potencial a distancias infinitas.



**Figura 6-2.** Efecto túnel cuántico para 3 barreras de potencial con distancias infinitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula con energía cinética  $E$  que incide de izquierda a derecha tres barreras de potencial de ancho  $a$  y energía potencial  $V > E$ , separadas entre sí a una distancia  $L$  (distancia infinita para la partícula, donde  $L \gg a$ ) que no permite una interacción entre barreras y por

ende no forman un pozo de potencial dejando a la partícula libre en la región III y V. Los valores de  $V(x)$  y  $\psi(x)$  para cada región:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } a < x < L + a \\ V, & \text{si } L + a < x < L + 2a \\ 0, & \text{si } L + 2a < x < 2L + 2a \\ V, & \text{si } 2L + 2a < x < 2L + 3a \\ 0, & \text{si } x > 2L + 3a \end{cases} \quad (244)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx}, & \text{si } a < x < L + a \\ \psi_{IV}(x) = A_{IV} e^{-qx} + B_{IV} e^{qx}, & \text{si } L + a < x < L + 2a \\ \psi_V(x) = A_V e^{ikx} + B_V e^{-ikx}, & \text{si } L + 2a < x < 2L + 2a \\ \psi_{VI}(x) = A_{VI} e^{-qx} + B_{VI} e^{qx}, & \text{si } 2L + 2a < x < 2L + 3a \\ \psi_{VII}(x) = A_{VII} e^{ikx} + B_{VII} e^{-ikx}, & \text{si } x > 2L + 3a \end{cases} \quad (245)$$

Aplicamos las condiciones de frontera:

$$\bullet \quad \psi_I(x) = \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (246)$$

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (247)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (248)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (249)$$

$$\bullet \quad \psi_{II}(x) = \psi_{III}(x), \quad x=a \quad (250)$$

$$A_{II} e^{-qa} + B_{II} e^{qa} = A_{III} e^{-qa} + B_{III} e^{qa} \quad (251)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x), \quad x = a \quad (252)$$

$$-A_{II} e^{-qa} + B_{II} e^{qa} = -A_{III} e^{-qa} + B_{III} e^{qa} \quad (253)$$

$$\bullet \quad \psi_{III}(x) = \psi_{IV}(x), \quad x = L + a \quad (254)$$

$$A_{III} e^{ik(L+a)} + B_{III} e^{-ik(L+a)} = A_{IV} e^{-q(L+a)} + B_{IV} e^{q(L+a)} \quad (255)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{III}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x), \quad x = L + a \quad (256)$$

$$ikA_{III}e^{ik(L+a)} - ikB_{III}e^{-ik(L+a)} = -qA_{IV}e^{-q(L+a)} + qB_{IV}e^{q(L+a)} \quad (257)$$

$$\bullet \psi_{IV}(x) = \psi_V(x), \quad x = L + 2a \quad (258)$$

$$A_{IV}e^{-q(L+2a)} + B_{IV}e^{q(L+2a)} = A_Ve^{ik(L+2a)} \quad (259)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \psi_{IV}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x), \quad x = L + 2a \quad (260)$$

$$-qA_{IV}e^{-q(L+2a)} + qB_{IV}e^{q(L+2a)} = ikA_Ve^{ik(L+2a)} \quad (261)$$

$$\bullet \psi_V(x) = \psi_{VI}(x), \quad x = 2L + 2a \quad (262)$$

$$A_Ve^{2ik(L+a)} + B_Ve^{-2ik(L+a)} = A_{VI}e^{-2q(L+a)} + B_{VI}e^{2q(L+a)} \quad (263)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \psi_V(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{VI}(x), \quad x = 2L + 2a \quad (264)$$

$$ikA_Ve^{2ik(L+a)} - ikB_Ve^{-2ik(L+a)} = -qA_{VI}e^{-2q(L+a)} + qB_{VI}e^{2q(L+a)} \quad (265)$$

$$\bullet \psi_{VI}(x) = \psi_{VII}(x), \quad x = 2L + 3a \quad (266)$$

$$A_{VI}e^{-q(2L+3a)} + B_{VI}e^{q(2L+3a)} = A_{VII}e^{ik(2L+3a)} \quad (267)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \psi_{VI}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{VII}(x), \quad x = 2L + 3a \quad (268)$$

$$-qA_{VI}e^{-q(2L+3a)} + qB_{VI}e^{q(2L+3a)} = ikA_{VII}e^{ik(2L+3a)} \quad (269)$$

$B_{VII} = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha. Al igual que en el apartado anterior, se enfoca en la obtención del coeficiente de transmisión para la última barrera, puesto que ya se obtuvo el coeficiente para dos barreras. Entonces:  $B_{VI}$  se despejan de las ecuaciones 263 y 267, también se despeja  $qB_{VI}$  de las ecuaciones 265 y 269, resultando:

$$\begin{cases} B_{VI} = A_Ve^{2ik(L+a)}e^{-2q(L+a)} + B_Ve^{-2ik(L+a)}e^{-2q(L+a)} - A_{VI}e^{-4q(L+a)} \\ qB_{VI} = ikA_Ve^{2ik(L+a)}e^{-2q(L+a)} - ikB_Ve^{-2ik(L+a)}e^{-2q(L+a)} + qA_{VI}e^{-4q(L+a)} \\ B_{VI} = A_{VII}e^{ik(2L+3a)}e^{-q(2L+3a)} - A_{VI}e^{-2q(2L+3a)} \\ qB_{VI} = ikA_{VII}e^{ik(2L+3a)}e^{-q(2L+3a)} + qA_{VI}e^{-2q(2L+3a)} \end{cases} \quad (270)$$

Se procede a igualar  $B_{VI} = B_{VI}$  y  $qB_{VI} = qB_{VI}$ , obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$B_V e^{-2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} = A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-q(2L+3a)} - A_{VI} (e^{-2q(2L+3a)} - e^{-4q(L+a)}) - A_V e^{2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} \quad (271)$$

y

$$B_V e^{-2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} = -A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-q(2L+3a)} + i \frac{q}{k} A_{VI} (e^{-2q(2L+3a)} - e^{-4q(L+a)}) + A_V e^{2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} \quad (272)$$

Se procede a igualar estas dos ecuaciones,  $B_V e^{-2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} = B_V e^{-2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)}$ , obteniendo:

$$2A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-q(2L+3a)} - \left(1 + i \frac{q}{k}\right) A_{VI} [e^{-4q(L+a)} (e^{-2qa} - 1)] = 2A_V e^{2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} \quad (273)$$

Conociendo que :  $e^{-2qa} - 1 = -2e^{-qa} \sinh(qa)$ , entonces se tiene:

$$2A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-q(2L+3a)} + 2 \left(1 + i \frac{q}{k}\right) \sinh(qa) A_{VI} e^{-qa} e^{-4q(L+a)} = 2A_V e^{2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)} \quad (274)$$

Empleamos las ecuaciones 267 y 269 para obtener  $A_{VI}$  en función de  $A_{VII}$ , entonces se despeja  $B_{VI} e^{q(2L+3a)}$ :

$$\begin{cases} B_{VI} e^{q(2L+3a)} = A_{VII} e^{ik(2L+3a)} - A_{VI} e^{-q(2L+3a)} \\ B_{VI} e^{q(2L+3a)} = i \frac{k}{q} A_{VII} e^{ik(2L+3a)} + A_{VI} e^{-q(2L+3a)} \end{cases} \quad (275)$$

Iguando estas dos ecuaciones,  $B_{VI} e^{q(2L+3a)} = B_{VI} e^{q(2L+3a)}$ , se obtiene:

$$A_{VI} = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k}{q}\right) A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{q(2L+3a)} \quad (276)$$

Reemplazamos este valor de  $A_{VI}$  en la ecuación 274:

$$A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-q(2L+3a)} + \quad (277)$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + i \frac{q}{k}\right) \left(1 - i \frac{k}{q}\right) \sinh(qa) A_{VII} e^{-qa} e^{ik(2L+3a)} e^{q(2L+3a)} e^{-4q(L+a)} = A_V e^{2ik(L+a)} e^{-2q(L+a)}$$

$$A_{VII} e^{ik(2L+3a)} e^{-2ik(L+a)} \left\{ e^{-q(2L+3a)} e^{2q(L+a)} + \right. \quad (278)$$

$$\left. \frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh(qa) e^{-qa} e^{q(2L+3a)} e^{-4q(L+a)} e^{2q(L+a)} \right\} = A_V$$

$$A_{VII} e^{ika} \left\{ e^{-qa} + \frac{1}{2} \left[ 2 + i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \right] \sinh(qa) \right\} = A_V \quad (279)$$

$$A_{VII} e^{ika} \left[ e^{-qa} + \sinh(qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_V \quad (280)$$

$$A_{VII} e^{ika} \left[ e^{-qa} + \frac{e^{qa}}{2} - \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_V \quad (281)$$

$$A_{VII} e^{ika} \left[ \frac{e^{qa}}{2} + \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_V \quad (282)$$

$$A_{VII} e^{ika} \left[ \cosh(qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_V \quad (283)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(qa)} \quad (284)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{q}{k} \right)^2 + \left( \frac{k}{q} \right)^2 - 2 \right] \sinh^2(qa)} \quad (285)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (286)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (287)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(qa)} \quad (288)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1 - E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(qa)} \quad (289)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1 - E/V} + 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (290)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1 - E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1 - E/V)}{(E/V)(1 - E/V)} \right] \sinh^2(qa)} \quad (291)$$

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (292)$$

Cuando la barrera es alta (V) comparada con la energía de la partícula(E) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:

$$\sinh(qa) \approx \frac{e^{qa}}{2} \quad (293)$$

Así la ecuación 292 se reescribe como:

$$\left| \frac{A_{VII}}{A_V} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}} \quad (294)$$

Se emplea el coeficiente de transmisión para dos barrera de potencial cuyo valor es:

$$T'_2 = \left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}} \right]^2 \quad (295)$$

Ahora despejamos  $|A_V|^2$  de estas dos últimas ecuaciones:



$$\begin{cases} |A_V|^2 = \frac{|A_{VII}|^2}{16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}}} \\ |A_V|^2 = \left[16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}}\right]^2 |A_I|^2 \end{cases} \quad (296)$$

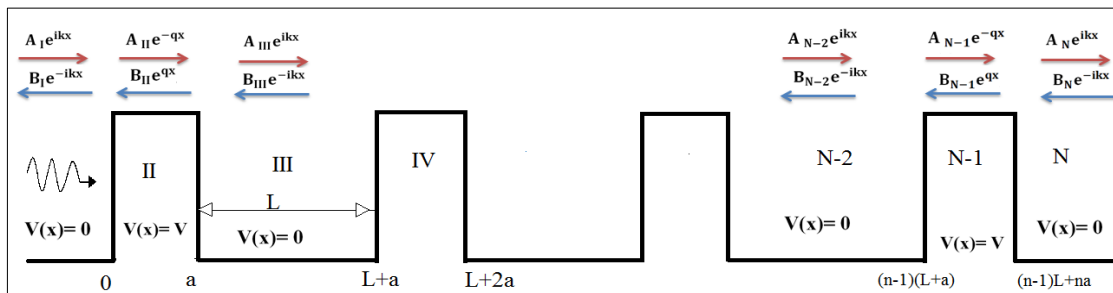
Igualando  $|A_V|^2 = |A_V|^2$ , el coeficiente de transmisión para tres barreras de potencial es:

$$T'_3 = \left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \left[16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}}\right]^3 \quad (297)$$

El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R'_3 = 1 - T'_3 \quad (298)$$

### 2.3.3. Derivación del efecto túnel mono dimensional para n-barreras de potencial a distancias infinitas.



**Figura 7-2.** Efecto túnel cuántico para n- barreras de potencial con distancias infinitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Sea una partícula con energía cinética  $E$  que incide de izquierda a derecha n-barreras de potencial de ancho  $a$  y energía potencial  $V > E$ , separadas entre sí a una distancia  $L$  (distancia infinita para la partícula, donde  $L \gg a$ ) que no permite una interacción entre barreras dejando a la partícula libre en dichas regiones.

Los valores de  $V(x)$  y  $\psi(x)$  para cada región son:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ V, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } a < x < L + a \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 0, & \text{si } (n-2)L + (n-1)a < x < (n-1)(L+a) \\ V, & \text{si } (n-1)(L+a) < x < (n-1)L + na \\ 0, & \text{si } x > (n-1)L + na \end{cases} \quad (299)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}, & \text{si } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = A_{II} e^{-qx} + B_{II} e^{qx}, & \text{si } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx}, & \text{si } a < x < L + a \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \psi_{N-2}(x) = A_{N-2} e^{ikx} + B_{N-2} e^{-ikx}, & \text{si } (n-2)L + (n-1)a < x < (n-1)(L+a) \\ \psi_{N-1}(x) = A_{N-1} e^{-qx} + B_{N-1} e^{qx}, & \text{si } (n-1)(L+a) < x < (n-1)L + na \\ \psi_N(x) = A_N e^{ikx} + B_N e^{-ikx}, & \text{si } x > (n-1)L + na \end{cases} \quad (300)$$

Donde  $n$  es el número de barras de potencial,  $N$  es la región donde se podría encontrar la partícula y está definida como  $2n+1$ .  $B_N = 0$ , porque se analiza el problema de izquierda a derecha.

Aplicamos las condiciones de frontera:

$$\bullet \quad \psi_I(x) = \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (301)$$

$$A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \quad (302)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_I(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{II}(x), \quad x=0 \quad (303)$$

$$ikA_I - ikB_I = -qA_{II} + qB_{II} \quad (304)$$

$$\bullet \quad \psi_{N-2}(x) = \psi_{N-1}(x), \quad x = (n-1)(L+a) \quad (305)$$

$$A_{N-2} e^{ik(n-1)(L+a)} + B_{N-2} e^{-ik(n-1)(L+a)} = A_{N-1} e^{-q(n-1)(L+a)} + B_{N-1} e^{q(n-1)(L+a)} \quad (306)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N-2}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N-1}(x), \quad x = (n-1)(L+a) \quad (307)$$

$$ikA_{N-2} e^{ik(n-1)(L+a)} - ikB_{N-2} e^{-ik(n-1)(L+a)} = -qA_{N-1} e^{-q(n-1)(L+a)} + qB_{N-1} e^{q(n-1)(L+a)} \quad (308)$$

$$\bullet \quad \psi_{N-1}(x) = \psi_N(x), \quad x = (n-1)L + na \quad (309)$$

$$A_{N-1}e^{-q[(n-1)L+na]} + B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]} = A_N e^{ik[(n-1)L+na]} \quad (310)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N-1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_N(x), \quad x = (n-1)L + na \quad (311)$$

$$-qA_{N-1}e^{-q[(n-1)L+na]} + qB_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]} = ikA_N e^{ik[(n-1)L+na]} \quad (312)$$

Como se ha hecho en los apartados anteriores, se va a enfocar en la obtención del coeficiente de transmisión para la última barrera de potencial, puesto que para las anteriores ya se han encontrado. Entonces:  $B_{N-1}$  se despeja de las ecuaciones 306 y 310, también  $qB_{N-1}$  se despeja de las ecuaciones 308 y 312, despejando e igualando  $B_{N-1}$  se obtiene:

$$\bullet \quad B_{N-1} = \frac{A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} + B_{N-2}e^{-ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)}}{A_{N-1}e^{-2q(n-1)(L+a)}} \quad (313)$$

$$\bullet \quad qB_{N-1} = \frac{ikA_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} - ikB_{N-2}e^{-ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} + qA_{N-1}e^{-2q(n-1)(L+a)}}{A_{N-1}e^{-2q(n-1)(L+a)}} \quad (314)$$

$$\bullet \quad B_{N-1} = A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} - A_{N-1}e^{-2q[(n-1)L+na]} \quad (315)$$

$$\bullet \quad qB_{N-1} = ikA_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} + qA_{N-1}e^{-2q[(n-1)L+na]} \quad (316)$$

De este sistema de ecuaciones se iguala  $B_{N-1} = B_{N-1}$  y  $qB_{N-1} = qB_{N-1}$ , obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$B_{N-2}e^{-ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} = \frac{A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} - A_{N-1}(e^{-2q[(n-1)L+na]} - e^{-2q(n-1)(L+a)}) - A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)}}{A_{N-1}e^{-2q(n-1)(L+a)}} \quad (317)$$

y

$$B_{N-2}e^{-ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} = -A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} + i\frac{q}{k}A_{N-1}(e^{-2q[(n-1)L+na]} - e^{-2q(n-1)(L+a)}) + A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} \quad (318)$$

Se procede a igualar estas dos últimas ecuaciones, obteniendo:

$$2A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} = 2A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} - \quad (319)$$

$$\left(1 + i\frac{q}{k}\right)A_{N-1}e^{-2q[(n-1)L+na]}(1 - e^{2qa})$$

Donde:  $1 - e^{2qa} \approx -2\sinh(qa)e^{qa}$ . Así la ecuación anterior se reescribe como:

$$2A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} = 2A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} + \quad (320)$$

$$2\left(1 + i\frac{q}{k}\right)\sinh(qa)A_{N-1}e^{-2q[(n-1)L+na]}e^{qa}$$

Empleando las ecuaciones 310 y 312, se despeja  $B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]}$  para obtener  $A_{N-1}$  en función de  $A_N$ :

$$\begin{cases} B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]} = A_N e^{ik[(n-1)L+na]} - A_{N-1}e^{-q[(n-1)L+na]} \\ B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]} = \frac{ik}{q}A_N e^{ik[(n-1)L+na]} + A_{N-1}e^{-q[(n-1)L+na]} \end{cases} \quad (321)$$

Igualando  $B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]} = B_{N-1}e^{q[(n-1)L+na]}$ , se obtiene:

$$A_{N-1} = \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{k}{q}\right)A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{q[(n-1)L+na]} \quad (322)$$

Reemplazamos este valor de  $A_{N-1}$  en la ecuación 320:

$$A_{N-2}e^{ik(n-1)(L+a)}e^{-q(n-1)(L+a)} = A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-q[(n-1)L+na]} + \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{q}{k}\right)\left(1 - i\frac{k}{q}\right)\sinh(qa)A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{q[(n-1)L+na]}e^{-2q[(n-1)L+na]}e^{qa} \quad (323)$$

$$A_N e^{ik[(n-1)L+na]}e^{-ik(n-1)(L+a)}\left\{e^{-q[(n-1)L+na]}e^{q(n-1)(L+a)} + \frac{1}{2}\left[2 + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\right]\sinh(qa)e^{q(n-1)(L+a)}e^{q[(n-1)L+na]}e^{-2q[(n-1)L+na]}e^{qa}\right\} = A_{N-2} \quad (324)$$

$$A_N e^{ika}\left\{e^{-qa} + \frac{1}{2}\left[2 + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\right]\sinh(qa)\right\} = A_{N-2} \quad (325)$$

$$A_N e^{ika}\left[e^{-qa} + \sinh(qa) + \frac{1}{2}i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\sinh(qa)\right] = A_{N-2} \quad (326)$$

$$A_N e^{ika} \left[ e^{-qa} + \frac{e^{qa}}{2} - \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{N-2} \quad (327)$$

$$A_N e^{ika} \left[ \frac{e^{qa}}{2} + \frac{e^{-qa}}{2} + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] = A_{N-2} \quad (328)$$

$$A_{N-2} = A_N e^{ika} \left[ \cosh(qa) + \frac{1}{2} i \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right] \quad (329)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(qa)} \quad (330)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{q}{k} \right)^2 + \left( \frac{k}{q} \right)^2 - 2 \right] \sinh^2(qa)} \quad (331)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{V-E}{E} + \frac{E}{V-E} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (332)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(qa) + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (333)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} - 2 \right) \right] \sinh^2(qa)} \quad (334)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} \right) + \frac{1}{2} \right] \sinh^2(qa)} \quad (335)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-E/V}{E/V} + \frac{E/V}{1-E/V} + 2 \right) \sinh^2(qa)} \quad (336)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-E/V)^2 + (E/V)^2 + 2(E/V)(1-E/V)}{(E/V)(1-E/V)} \right] \sinh^2(qa)} \quad (337)$$

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(qa)}{4 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)}} \quad (338)$$

Como la barrera es alta (V) comparada con la energía de la partícula(E) y ancha de tal modo que  $qa \gg 1$ , entonces:

$$\sinh(qa) \approx \frac{e^{qa}}{2} \quad (339)$$

Así la ecuación 338 se reescribe como:

$$\left| \frac{A_N}{A_{N-2}} \right|^2 = 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \quad (340)$$

Por otro lado, basándonos en el proceso de obtención de  $T'_2$  y  $T'_3$ , cuyos valores son:

$$\begin{cases} T'_2 = \left| \frac{A_V}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^2 \\ T'_3 = \left| \frac{A_{VII}}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^3 \end{cases} \quad (341)$$

Tenemos la siguiente generalización del efecto túnel a través de n-1 barreras:

$$T'_{n-1} = \left| \frac{A_{N-2}}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V \left( 1 - \frac{E}{V} \right)^2} e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^{n-1} \quad (342)$$

Se procede a despejar  $|A_{N-2}|^2$  de las ecuaciones 340 y 342:

$$\begin{cases} |A_{N-2}|^2 = \frac{|A_N|^2}{16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}}} \\ |A_{N-2}|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V \left( 1 - \frac{E}{V} \right)^2} e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^{n-1} |A_I|^2 \end{cases} \quad (343)$$

Igualando  $|A_{N-2}|^2 = |A_{N-2}|^2$ , el coeficiente de trasmisión para n-barras de

potencial es:

$$T'_n = \left| \frac{A_N}{A_I} \right|^2 = \left[ 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^n \quad (344)$$

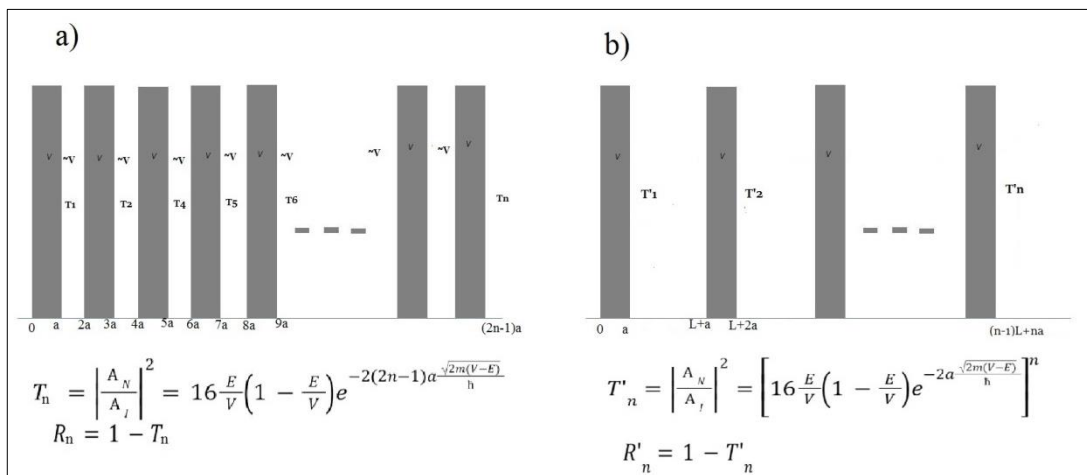
El coeficiente de reflexión viene dado por:

$$R'_n = 1 - T'_n \quad (345)$$

### CAPÍTULO III

#### 3. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En el capítulo anterior se obtuvieron dos ecuaciones generales que describen el Efecto Túnel para n-barreras de potencial de altura V, ya sea que estas barreras se encuentren separadas a distancias finitas (distancia entre barreras igual al ancho de una barrera) o infinitas (distancia entre barreras mucho mayor al ancho de una barrera), ecuaciones 195 y 344 respectivamente, las cuales se aprecian en la figura 1-3:



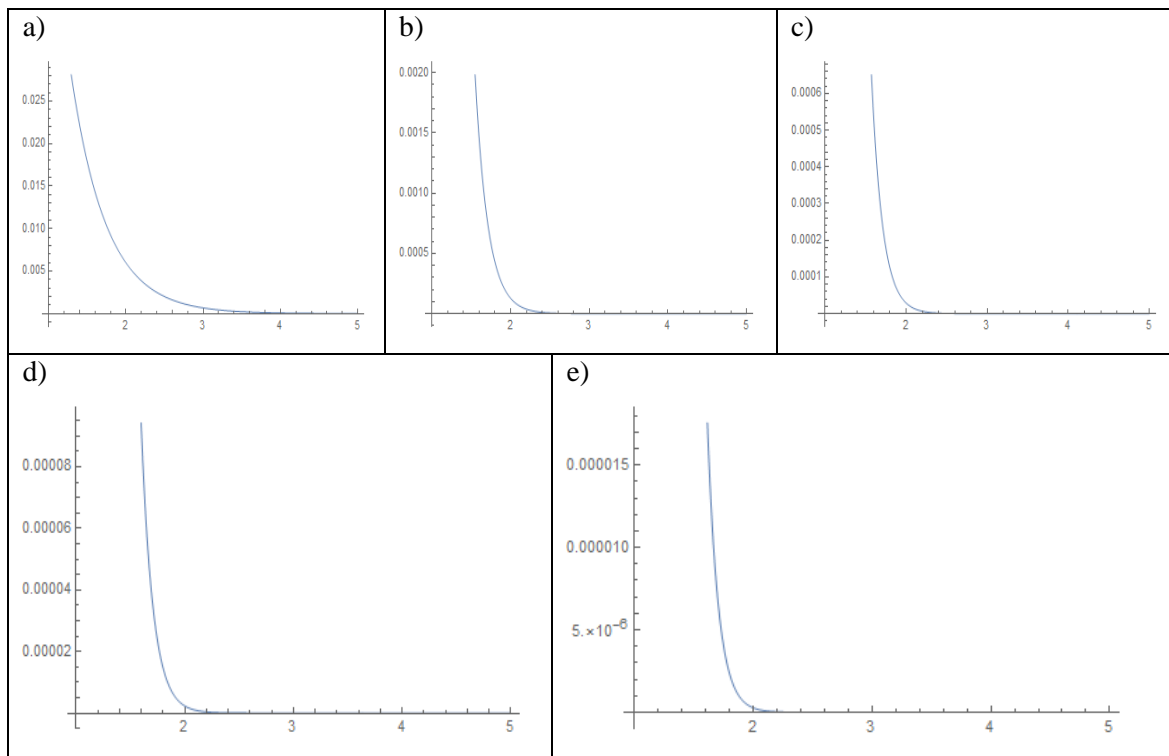
**Figura 1-3.** Efecto túnel cuántico mono dimensional para n-barreras de potencial separadas a distancias finitas (figura a) e infinitas (figura b).

**Realizado por:** Moreta, Noemi. 2020

Mediante la implementación de estas dos ecuaciones generales en el software Mathematica, se obtiene los siguientes resultados:

En el gráfico 1-3 se aprecia como la probabilidad de transmisión (eje vertical) aplicación a distancias finitas, de una partícula que atraviesa n=5 barreras de potencia (eje horizontal) de altura V igual a 14.92 eV y ancho a=1nm, va disminuyendo progresivamente a medida que la energía cinética de la partícula decrece  $E_{max} = 0.99V$  (literal a),  $E_{min} = 0.75V$  (literal e).



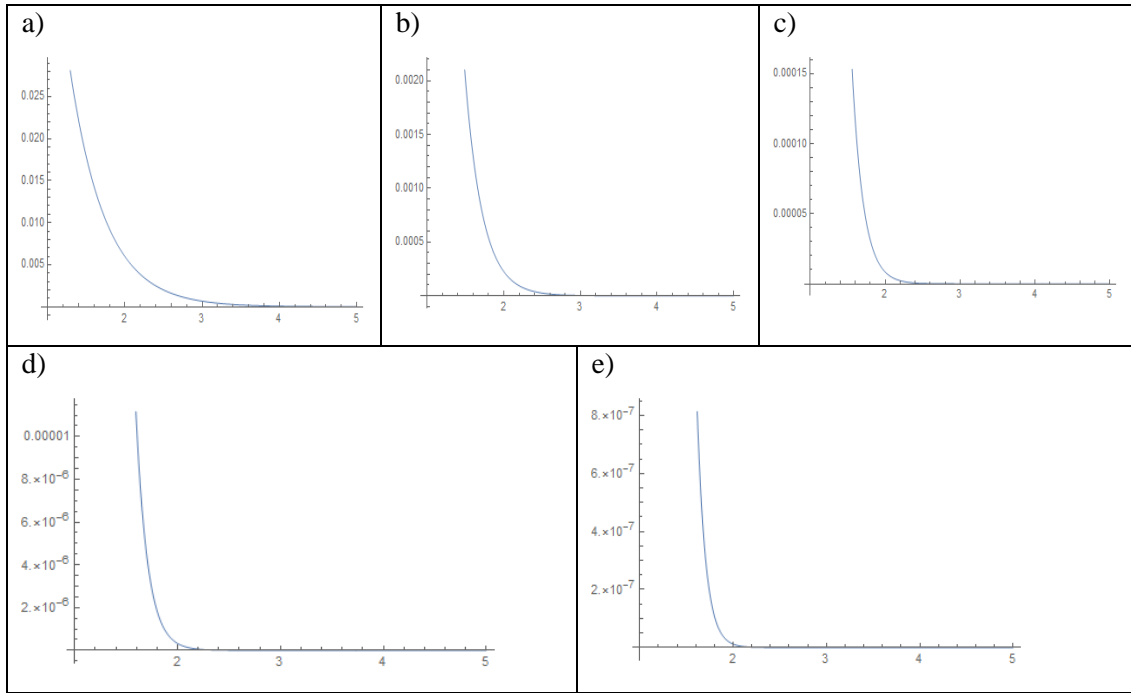


**Gráfico 1-3.** Coeficiente de transmisión para una partícula con energía entre  $E= 0.99V$  (literal a) y  $0.75V$  (literal e) que atraviesa  $n= 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a$ , separadas a distancias finitas.

**Realizado por:** Moreta, Noemi. 2020

Por otro lado, el gráfico 2-3 muestra el coeficiente de transmisión (eje vertical) aplicación a distancias finitas para una partícula de energía  $E= 0.99V$ , con distintos anchos de barrera  $a=1nm$  (literal a),  $a=2nm$  (literal b),  $a=3nm$  (literal c),  $a=4nm$  (literal d) y  $a=5nm$  (literal e); que atraviesa  $n=5$  barreras de potencial (eje horizontal) de altura  $V=14.92 eV$ . Se aprecia que a medida que el ancho de la barrera aumenta, el coeficiente de transmisión disminuye.

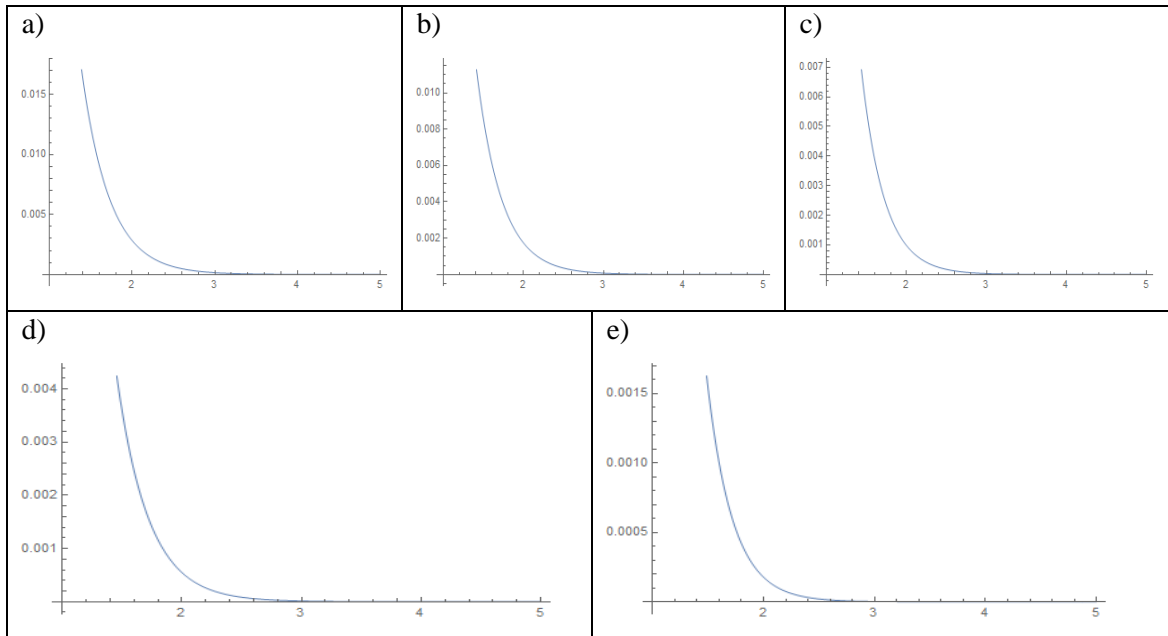
En el Anexo B se presentan ejercicios aplicativos que corroboran estos resultados obtenidos en el software Mathematica.



**Gráfico 2-3.** Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho entre  $a= 1nm$  y  $a=5nm$ , separadas a distancias finitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

En el gráfico 3-3, con los mismos datos del gráfico 1-3, el coeficiente de transmisión para distancias infinitas también decrece a medida que la energía disminuye.

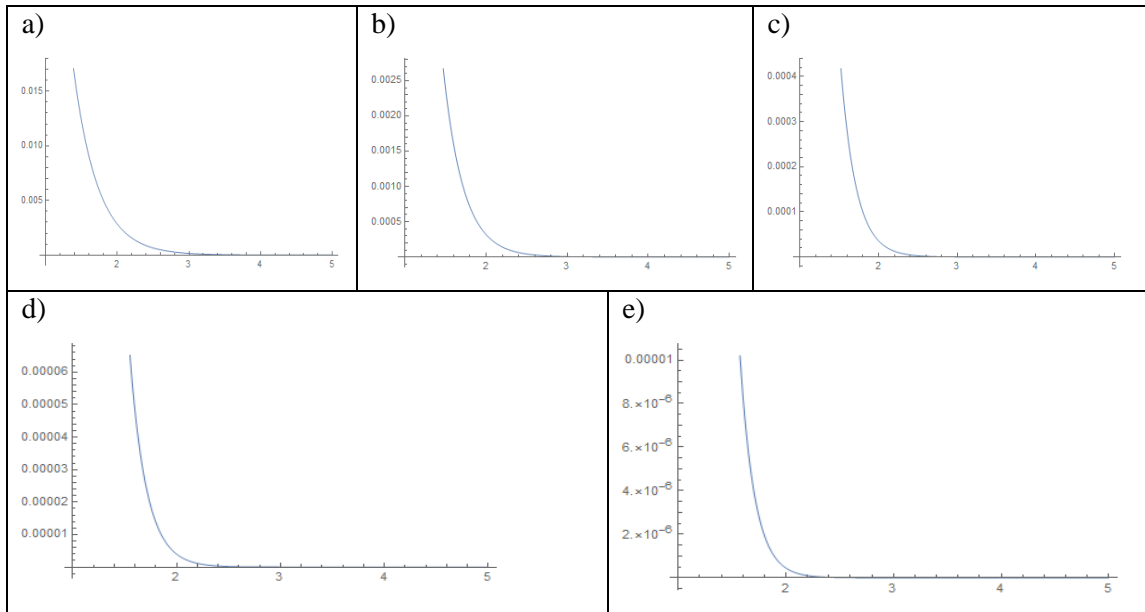


**Gráfico 3-3.** Coeficiente de transmisión para una partícula con energía entre  $E= 0.99V$  y  $0.75V$  que atraviesa  $n= 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a$ , separadas a distancias infinitas.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Al analizar el gráfico 4-3, con los mismos datos del gráfico 2-3, pero aplicado a barreras separadas por distancias infinitas, de igual manera se observa que a medida que el ancho de la barrera aumenta el coeficiente de transmisión también disminuye.

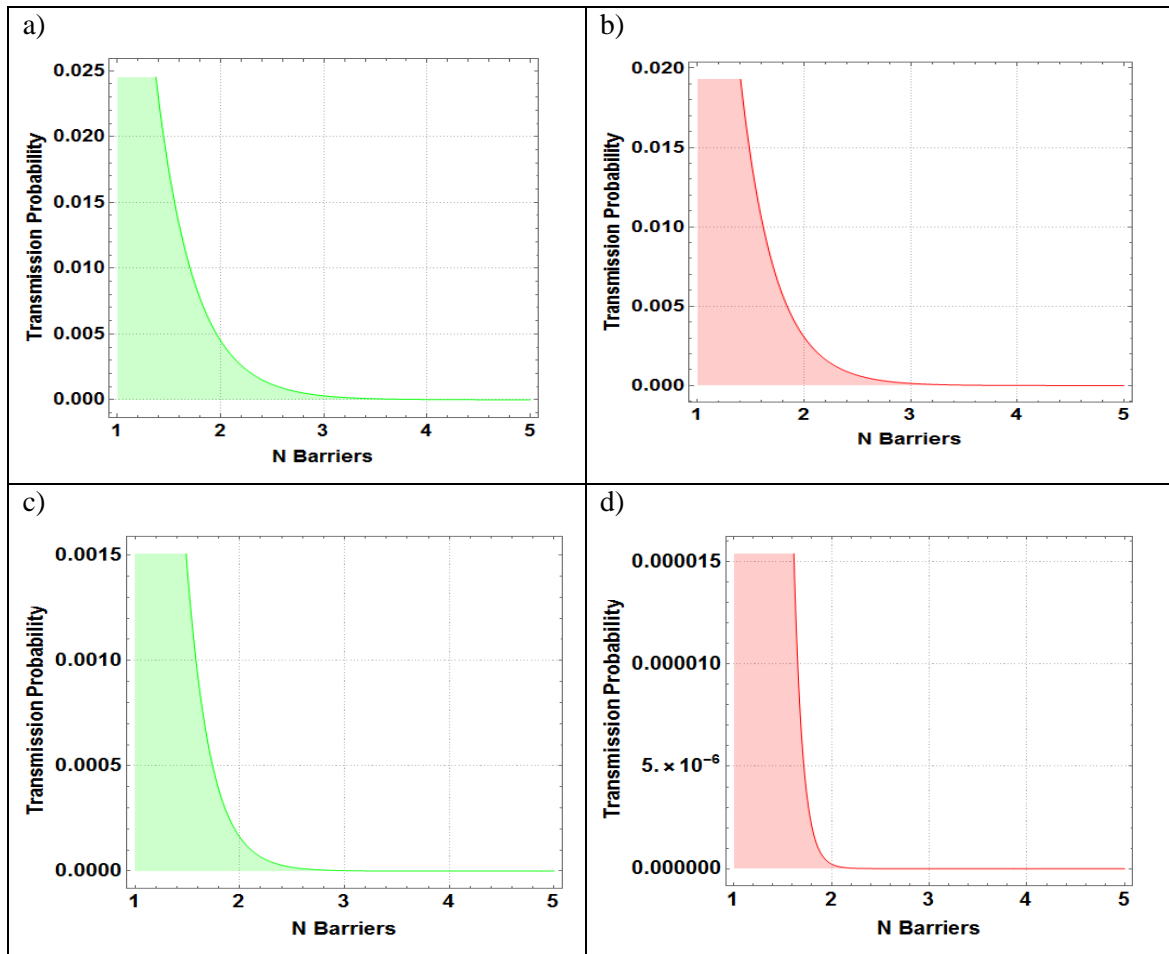
En general para todas las gráficas, se observa que a medida que el número de barreras aumenta (eje x), el coeficiente de transmisión disminuye (eje y).



**Gráfico 4-3.** Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho entre  $a= 1nm$  y  $a=5nm$ , separadas a distancias infinitas.

**Realizado por:** Moreta, Noemi. 2020

El gráfico 5-3 muestra cómo el coeficiente de transmisión para  $n$  barreras de potencial cambia dependiendo de la energía cinética de la partícula, pero mucho más que esto, demuestra que cuando tenemos el caso de barreras de potencial separadas simétricamente a una distancia igual al ancho de la barrera de potencial (distancias finitas), el coeficiente de transmisión es menor que para el caso de barreras separadas simétricamente a una distancia mucho mayor que el ancho de barrera de potencial (distancias infinitas).



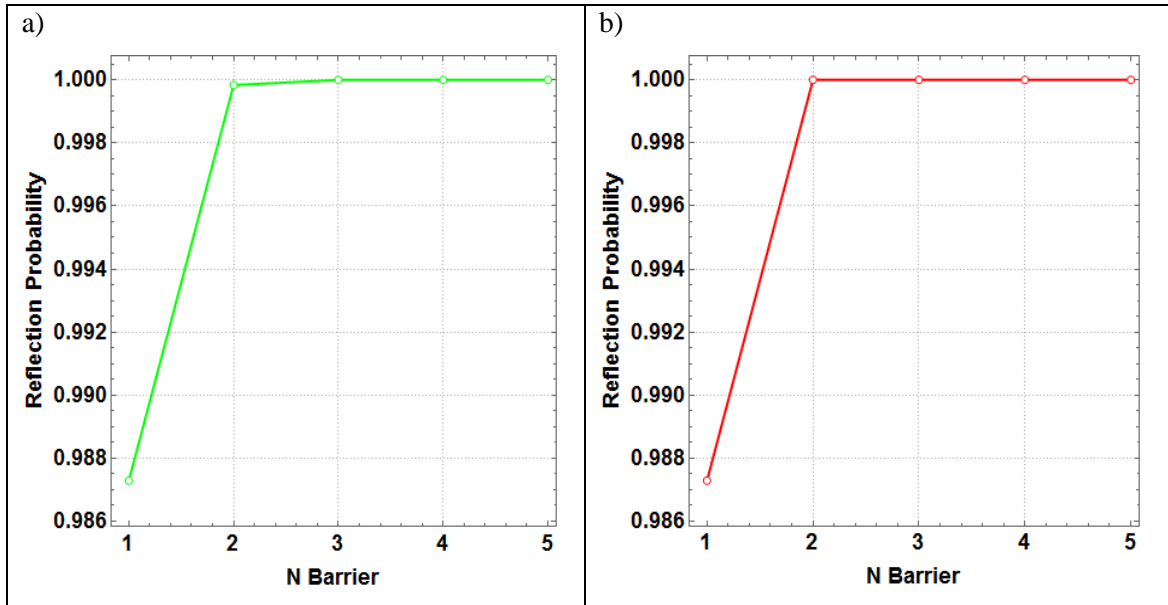
**Gráfico 5-3.** (a) y (b) Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.99V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a= 1nm$ , separadas a distancias infinitas y finitas respectivamente. (c) y (d) Coeficiente de transmisión para una partícula con  $E= 0.75V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a= 1nm$ , separadas a distancias infinitas y finitas respectivamente.

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

La obtención de estos resultados se debe a que cuando se tiene barreras de potencial, de altura  $V$ , separadas a distancias igual al ancho de la barrera, éstas darán lugar a la formación de pozos de potencial, como se observa en la figura 1-3 a. Estos pozos de potencial tendrán una altura aproximada a  $V$  (altura de barrera), y por consiguiente afectará en la probabilidad de transmisión de la partícula. En otras palabras, cuando se tiene este caso, se podría decir que la partícula no solo atraviesa las barreras de potencial sino también los pozos de potencial, influyendo así en la disminución del coeficiente de transmisión en comparación con el caso de barreras separadas a distancias infinitas.

Cuando es el caso de barreras separadas a distancias lo suficientemente grandes (distancias infinitas para la partícula), evitando así la interacción entre barreras y por consiguiente creación de pozos de potencial, la partícula solamente interacciona con las barreras de potencial y en las

regiones que separan las barreras, la partícula se encuentra libre (figura 1-3 b). Es por ello que el coeficiente de transmisión para este caso es mayor que cuando se tienen barreras separadas a distancias finitas.



**Gráfico 6-3.** Coeficiente de reflexión para una partícula con  $E = 0.75V$  que atraviesa  $n = 5$  barreras de potencial de altura  $V$  y ancho  $a = 1nm$ , separadas a distancias infinitas (a) y finitas respectivamente (b).

Realizado por: Moreta, Noemi. 2020

Finalmente, en el gráfico 6-3 se muestra el coeficiente de reflexión para el caso de distancias infinitas (a) y para el de finitas (b). Como era de esperarse, cuando se trata de barreras separadas a distancias infinitas, la probabilidad de reflexión es menor que para el caso de barreras separadas a distancias finitas, puesto que el valor de este coeficiente viene generalmente dado por  $R = 1 - T$ , como se observa en la figura 1-3, donde  $T$  es el coeficiente de transmisión.

## CONCLUSIONES

- Se procedió a la descripción analítica del efecto túnel mono-dimensional para una barrera de potencial usando las soluciones de la ecuación de Schrödinger independientes de tiempo, cuya metodología de obtención del coeficiente de transmisión (ecuación 48) y reflexión (ecuación 49) sirvieron como base fundamental para ampliar a una generalización con n-barreras de potencial.
- Se obtuvo la derivación matemática del efecto túnel mono-dimensional primero para dos barreras, luego para tres barreras y posteriormente la generalización para n-barreras de potencial con distancias finitas (distancia de separación igual al ancho de la barrera), dada en la ecuación 195, usando las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente de tiempo para cada región y siguiendo la misma metodología de resolución para una barrera de potencial, resaltando que por cada interacción entre dos barreras se genera un pozo de potencial con aproximadamente la misma altura  $V$  de la barrera.
- Se realizó la derivación matemática del efecto túnel mono-dimensional con distancias infinitas, primero para dos barreras, luego para tres barreras y posteriormente para n-barreras de potencial con distancias infinitas (distancia de separación mucho mayor al ancho de la barrera), dada en la ecuación 344, usando las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente de tiempo para cada región y siguiendo la misma metodología de resolución para una barrera de potencial, mencionando que al ser la distancia de separación muy grande entre barreras no se generan pozos de potencial, sino son regiones donde la partícula está libre.
- Se realizó la implementación en el software Mathematica de las dos ecuaciones generales obtenidas para el efecto túnel mono dimensional con n-barreras de potencial separadas a distancias finitas e infinitas, teniendo como resultado que el coeficiente de transmisión depende tanto del ancho de la barrera, la energía cinética de la partícula y del número de barreras de potencial. Por otro lado, al comparar los coeficientes de transmisión para el caso de barreras separadas a distancias finitas, este resulta menor que para barreras separadas a distancias infinitas.

## **RECOMENDACIONES**

- Se recomienda una continuación experimental con el objetivo de corroborar los resultados obtenidos.
- Se recomienda al lector que es importante seguir con la metodología propuesta en el presente trabajo de titulación para que llegue a las ecuaciones generalizadas enmarcadas en este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

**ACOSTA, V. et al.**, *Curso de física moderna*. México D.F-México: HARLA, 1975, pp. 151-156.

**ANDO, Y. y ITOH, T.**, “Calculation of transmission tunneling current across arbitrary potential barriers”. *Journal of Applied Physics* [en línea], 1987, vol.61 (1), pp. 1497-1502. [Consulta: 15 febrero 2020]. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1063/1.338082>.

**ARRIAGA, J.**, Efecto túnel resonante a través de arreglos de barreras de potencial. [en línea] (Trabajo de titulación). (Licenciatura) Instituto Politécnico Nacional, México D.F-México.2010. pp. 1-68. [Consulta: 20 de febrero 2020]. Disponible en: <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/10908/111.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

**BAYDA, S. et al.**, “The History of Nanoscience and Nanotechnology : From Chemical – Physical Applications to Nanomedicine”. *Molecules* [en línea], 1987, vol.25 (1), pp. 1-15. [Consulta: 30 marzo 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.3390/molecules25010112>.

**Carrasco, Z. et al.**, “Quantum tunneling through two sequential barriers: A simple derivation”. *Journal of Physics: Conference Series* [en línea], 2019, vol. 1391, pp. 1-6. [Consulta: 1 enero 2020]. Disponible en: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1391/1/012009>.

**CHANDRA, A. y EASTMAN, L.F.** “Quantum mechanical reflection at triangular ‘planardoped’ potential barriers for transistors”. *Journal of Applied Physics* [en línea], 1982, vol. 53(12), pp. 9165-9169. [Consulta: 1 marzo 2020]. . Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1063/1.330428>.

**FRANCO, J.** Efecto túnel cuántico en barreras exóticas de potencial. [en línea] (Trabajo de titulación). (Licenciatura) UNIVERSIDAD DE SEVILLA, Sevilla-España. 2017. pp. 1-44. [Consulta: 15 febrero 2020]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/11441/67949%0A>.

**HARPER, E.** “In Appreciation George Gamow : Scientific Amateur and Polymath”. *Physics in Perspective* [en línea], 2001, vol. 3(1), pp. 335-372. [Consulta: 7 marzo 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/PL00000536>.



**HILL, H.M. et al.**, “Band Alignment in MoS<sub>2</sub>/WS<sub>2</sub> Transition Metal Dichalcogenide Heterostructures Probed by Scanning Tunneling Microscopy and Spectroscopy”. NANO LETTERS [en línea], 2016, vol. 16(8), pp. 4831-4837. [Consulta: 1 marzo 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.6b01007>.

**LING, S.J. et al.**, The Quantum Tunneling of Particles through Potential Barriers. University Physics volume 3 [en línea]. 2016, S.l.: OpenStax, [Consulta: 9 junio 2020]. Disponible en: <https://opentextbc.ca/universityphysicsv3openstax/chapter/the-quantum-tunneling-of-particles-through-potential-barriers/>.

## ANEXOS

**Anexo A.** Líneas de código en el Software matemática para el efecto túnel mono dimensional con n-barreras: aplicación a distancias finitas e infinitas.

### Hartree units

```
Clear[ħ,m,c]
ħ=1;
m=1;
c=1;
```

### Proposed One Barrier Tunneling and Reflection effect - corrected

```
Clear[Energy, a, V]
a = 0.;
Energy = 1;
Vnew = Solve[1 == 16  $\frac{\text{Energy}}{V} (1 - (\text{Energy}/V)) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-\text{Energy})}}{\hbar}}$ , V][[2]]
V/.Vnew
```

### Transmission & Reflection Plot

```
Clear[V]
V = Flatten[Vnew][[1,2]];
a = 1;
Energy = 0.75V;
tunnelList = Table[{n, (16  $\frac{\text{Energy}}{V} (1 - (\text{Energy}/V)) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-\text{Energy})}}{\hbar}}$ )n}, {n, 1, 5}]
tuneldosList = Table[{n, (16  $\frac{\text{Energy}}{V} (1 - (\text{Energy}/V)) e^{-2(2n-1)a \frac{\sqrt{2m(V-\text{Energy})}}{\hbar}}$ )}, {n, 1, 5}]
```

### N - Transmission

```
Clear[V]
V = Flatten[Vnew][[1,2]];
a = 1;
Energy = 0.99V;
Table[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V} (1 - (\text{Energy}/V)) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-\text{Energy})}}{\hbar}}$ )n, {n, 1, 5}], {Energy, 0.99V, 0.75V, -0.5}]
Table[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V} (1 - (\text{Energy}/V)) e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V-\text{Energy})}}{\hbar}}$ )n, {n, 1, 5}], {a, 1, 5, 1}]
```

```
Clear[V]
V = Flatten[Vnew][[1,2]];
a = 1;
Energy = 0.99V;
```

```
Energy =
```

Table[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ ), {n, 1, 5}], {Energy, 0.99V, 0.75V, -0.5}]

Table[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ ), {n, 1, 5}], {a, 1.5, 1}]

Manipulate [Plot [ (16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )<sup>n</sup>, {n, 1, 5}, Frame  
→ True, PlotTheme → Detailed, PlotRange → Automatic, PlotStyle  
→ Green, FrameLabel → {N Barriers, Transmission Probability}, LabelStyle  
→ Directive[18, Bold, Black], ImageSize → 450, AspectRatio → 1, Filling  
→ Axis, PlotLegends → Expressions ], {Energy, 0.99V, 0.98V, -0.00001}]

Manipulate[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ ), {n, 1, 5}, Frame  
→ True, PlotTheme → "Detailed", PlotRange → Automatic, PlotStyle  
→ Red, FrameLabel  
→ {"N Barriers", "Transmission Probability"}, LabelStyle  
→ Directive[18, Bold, Black], ImageSize → 450, AspectRatio → 1, Filling  
→ Axis, PlotLegends → "Expressions"], {Energy, 0.99V, 0.98V, -0.00001}]

Manipulate[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )<sup>n</sup>, {n, 1, 5}, Frame →  
True, PlotTheme → "Detailed", PlotRange → Automatic, PlotStyle → Green, FrameLabel →  
{"N Barriers", "Transmission Probability"}, LabelStyle →  
Directive[18, Bold, Black], ImageSize → 450, AspectRatio → 1, Filling →  
Axis, PlotLegends → "Expressions"], {Energy, 0.75V, 0.5V, -0.1}]

Manipulate[Plot[(16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ ), {n, 1, 5}, Frame →  
True, PlotTheme → "Detailed", PlotRange → Automatic, PlotStyle → Red, FrameLabel →  
{"N Barriers", "Transmission Probability"}, LabelStyle →  
Directive[18, Bold, Black], ImageSize → 450, AspectRatio → 1, Filling →  
Axis, PlotLegends → "Expressions"], {Energy, 0.75V, 0.5V, -0.1}]

## N – Reflection

Clear[V]  
V=Flatten[Vnew][[1,2]];  
a=1;  
Energy=3V/4;

ReflectionList = Table[{n, 1 - (16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )<sup>n</sup>}, {n, 1, 5}]

Table[N[1 - (16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )<sup>n</sup>, 20], {n, 1, 5}]

ReflectiondosList =

Table[{n, 1 - (16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )}, {n, 1, 5}]

Table[N[1 - (16  $\frac{\text{Energy}}{V}$  (1 - (Energy/V))  $e^{-2a(2n-1)\sqrt{\frac{2m(V-\text{Energy})}{\hbar}}}$ )], 20], {n, 1, 5}]

ListPlot[ReflectionList, PlotRange → All, Frame → True, PlotMarkers → "OpenMarkers", PlotStyle → {Thick, Green}, Joined → True, ImageSize → 450, AspectRatio → 1., PlotTheme → "Detailed", LabelStyle → Directive[18, Black, Bold], FrameLabel → {"N Barrier", "Reflection Probability"}]

ListPlot[ReflectiondosList, PlotRange → All, Frame → True, PlotMarkers → "OpenMarkers", PlotStyle → {Thick, Red}, Joined → True, ImageSize → 450, AspectRatio → 1., PlotTheme → "Detailed", LabelStyle → Directive[18, Black, Bold], FrameLabel → {"N Barrier", "Reflection Probability"}]

**Anexo B.** Ejercicios aplicativos del efecto túnel.

**Ejercicio 1.**

Dos nanocables de cobre están aislados por una nanocapa de óxido de cobre que proporciona una barrera potencial de 10.0 eV. Estime la probabilidad de tunelización entre los nanocables por electrones de 7.00 eV a través de una capa de óxido de 5.00 nm de espesor. ¿Qué pasaría si el grosor de la capa se redujera a solo 1.00 nm? ¿Qué pasaría si la energía de los electrones se incrementara a 9.00 eV? (Ling et al., 2016).

**Desarrollo:** Se trata la capa de cobre como una barrera potencial de altura finita.

Identificamos:

- $V_0=10.0$  eV
- $E_1=7.00$  eV
- $a_1= 5.00$  nm
- Masa en reposo del electrón:  $m=511$  keV/c<sup>2</sup>
- $E_2=9.00$  eV
- $a_2= 1.00$  nm
- Constante de plank reducida:  $\hbar=0.1973$  keVnm/c
- Coeficiente de transmisión para una barrera de potencial:  $T = 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}}$

Constantes de solución:

$$\frac{2m}{\hbar^2} = \frac{2(511 \text{ keV}/c^2)}{(0.1973 \text{ keVnm}/c)^2} = \frac{26\,254}{\text{keV}(\text{nm})^2} \quad (346)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} = \sqrt{26\,254 \frac{(10.0 \text{ eV} - E)}{\text{keV}(\text{nm})^2}} = \frac{\sqrt{26.254(10.0 \text{ eV} - E)}}{\text{nm}} \quad (347)$$

Para un electrón de baja energía  $E_1=7.00$  eV:

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{26.254(10.0 \text{ eV} - E_1)}}{\text{nm}} = \frac{\sqrt{26.254(10.0 \text{ eV} - 7.00 \text{ eV})}}{\text{nm}} = \frac{8.875}{\text{nm}} \quad (348)$$

$$T(a, E_1) = 16 \frac{E_1}{V_0} \left(1 - \frac{E_1}{V_0}\right) e^{-2\beta_1 a} = 16 \frac{7}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) e^{-17.75a/\text{nm}} = 3.36e^{-17.75a/\text{nm}} \quad (349)$$

Para un electrón con mayor energía  $E_2=9.00$  eV:

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{26.254(10.0 \text{ eV} - E_2)}}{\text{nm}} = \frac{\sqrt{26.254(10.0 \text{ eV} - 9.00 \text{ eV})}}{\text{nm}} = \frac{5.124}{\text{nm}} \quad (350)$$

$$T(a, E_2) = 16 \frac{E_2}{V_0} \left(1 - \frac{E_2}{V_0}\right) e^{-2\beta_1 a} = 16 \frac{9}{10} \left(1 - \frac{9}{10}\right) e^{-10.25a/\text{nm}} = 1.44e^{-10.25a/\text{nm}} \quad (351)$$

Para una barrera amplia  $a_1 = 5.00 \text{ nm}$ :

$$T(a_1, E_1) = 3.36e^{-17.75a_1/\text{nm}} = 3.36e^{-17.75(5.00\text{nm})/\text{nm}} = 3.36e^{-88.75} \quad (352)$$

$$T(a_1, E_2) = 1.44e^{-10.25a_1/\text{nm}} = 1.44e^{-10.25(5.00\text{nm})/\text{nm}} = 1.44e^{-51.25} \quad (353)$$

Para una barrera estrecha  $a_2 = 1.00 \text{ nm}$ :

$$T(a_2, E_1) = 3.36e^{-17.75a_2/\text{nm}} = 3.36e^{-17.75(1.00\text{nm})/\text{nm}} = 3.36e^{-17.75} \quad (354)$$

$$T(a_2, E_2) = 1.44e^{-10.25a_2/\text{nm}} = 1.44e^{-10.25(1.00\text{nm})/\text{nm}} = 1.44e^{-10.25} \quad (355)$$

De estas estimaciones vemos que la probabilidad de túnel se ve más afectada por el ancho de la barrera potencial que por la energía de una partícula incidente. En las tecnologías actuales, podemos manipular átomos individuales en superficies metálicas para crear barreras potenciales que son fracciones de un nanómetro, dando lugar a corrientes de túnel medibles. Una de las muchas aplicaciones de esta tecnología es el microscopio de túnel de exploración (STM).

## Ejercicio 2.

Calcular el coeficiente de transmisión para dos barreras separadas a distancias finitas e infinitas de potencial del ejercicio 1.

### Desarrollo:

- Coeficiente de transmisión para dos barreras de transmisión a distancias finitas:

$$T_n = 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2(2n-1)a\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}}; n = 2 \text{ (número de barreras)} \quad (356)$$

Cuando la barrera es amplia  $a_1 = 5.00 \text{ nm}$ :

$$T_2(a_1, E_1) = 3.36e^{-3(88.75)} = 3.36e^{-266.3} \quad (357)$$

$$T_2(a_1, E_2) = 1.44e^{-3(51.25)} = 1.44e^{-153.8} \quad (358)$$

Cuando la barrera es estrecha  $a_2 = 1.00 \text{ nm}$ :

$$T_2(a_2, E_1) = 3.36e^{-3(17.75)} = 3.36e^{-53.25} \quad (359)$$

$$T_2(a_2, E_2) = 1.44e^{-3(10.25)} = 1.44e^{-30.75} \quad (360)$$

- Coeficiente de transmisión para dos barreras de transmisión a distancias infinitas:

$$T'_n = \left[ 16 \frac{E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) e^{-2a \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}} \right]^n ; n = 2 \text{ (número de barreras)} \quad (361)$$

Cuando la barrera es amplia  $a_1 = 5.00 \text{ nm}$ :

$$T'_2(a_1, E_1) = (3.36e^{-88.75})^2 = 11.3e^{-177.5} \quad (362)$$

$$T'_2(a_1, E_2) = (1.44e^{-51.25})^2 = 2.07e^{-102.5} \quad (363)$$

Cuando la barrera es estrecha  $a_2 = 1.00 \text{ nm}$ :

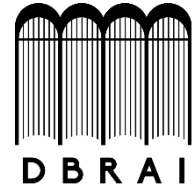
$$T'_2(a_2, E_1) = (3.36e^{-17.75})^2 = 11.3e^{-35.5} \quad (364)$$

$$T'_2(a_2, E_2) = (1.44e^{-10.25})^2 = 2.07e^{-20.5} \quad (365)$$

De estos resultados, se observa que el coeficiente de transmisión a través de dos barreras de potencial a distancias finitas es menor que el coeficiente de transmisión a distancias infinitas:  $T_2 < T'_2$ .



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**  
**DIRECCIÓN DE BIBLIOTECAS Y RECURSOS PARA EL**  
**APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN**



**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS**  
**REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA**

**Fecha de entrega:** 24 / 08 /2020

<b>INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)</b>
<b>Nombres – Apellidos: :</b> Noemi Carolina Moreta Morocho
<b>INFORMACIÓN INSTITUCIONAL</b>
<b>Facultad:</b> Ciencias
<b>Carrera:</b> Biofísica
<b>Título a optar:</b> Biofísica
<b>f. Analista de Biblioteca responsable:</b> Lic. Luis Caminos Vargas Mgs.



24-08-2020

0226-DBRAI-UPT-2020