



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE BIOFÍSICA

**“APLICACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN EL RÉGIMEN
NO-RELATIVISTA PARA OBTENER LOS NIVELES DE ENERGÍA
DE UN ELECTRÓN EN EL EFECTO AHARONOV-BOHM”**

Trabajo de Titulación

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

BIOFÍSICO

AUTOR: OMAR SEBASTIÁN MUÑOZ MERINO

DIRECTOR: Ph.D. RAFAEL OMAR RODRÍGUEZ

Riobamba-Ecuador

2020

© 2020, Omar Sebastián Muñoz Merino

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Omar Sebastián Muñoz Merino, declaro que el presente trabajo de titulación es de mi autoría y los resultados de este son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica del contenido de este trabajo de titulación. El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 05 de marzo de 2020



Omar Sebastián Muñoz Merino

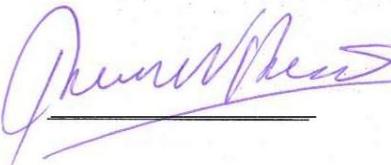
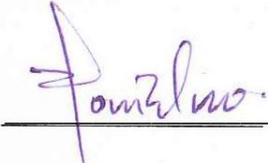
CI. 060469431-5

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA DE BIOFÍSICA

El tribunal del Trabajo de Titulación certifica que: El proyecto de investigación: “**Aplicación de la mecánica cuántica en el régimen no-relativista para obtener los niveles de energía de un electrón en el efecto Aharonov-Bohm**” de responsabilidad del Señor Omar Sebastián Muñoz Merino, ha sido revisado minuciosamente por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Titulación, el mismo que obedece con los requisitos científicos, en tal virtud el tribunal autoriza su presentación.

	Firma	Fecha
Dr. Richard Williams Pachacama Choca PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2020-03-05
Dr. Rafael Omar Rodríguez DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN		2020-03-05
Dr. Rommel de Lacruz Guerrero Mora MIEMBRO DEL TRIBUNAL		2020-03-05

DEDICATORIA

A mi madre y a mis abuelitos que siempre estuvieron apoyándome en mis estudios y en mi realce académico, gracias por la confianza depositada en mí a lo largo de este camino.

A Brigitte, quien se ha convertido en mi soporte y mi guía, para el desarrollo del presente trabajo.

Omar

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por brindarme la sabiduría y la experiencia, para poder salir adelante en este camino profesional, que trace hace pocos años.

A mis amigos, que han estado a mi lado frente a este duro reto académico, perseverando siempre hacia el camino del conocimiento científico y la investigación, a ellos, gracias por los consejos y ayuda brindada hacia mí. Han sido grandes momentos, sin duda, los que hemos pasado juntos.

A cada uno de mis profesores de la Escuela de Física y Matemática, por la comprensión brindada, al momento de impartir sus conocimientos, una gran recompensa proporcionada hacía mí.

Por último, a mi tutor PhD. Omar Rodríguez quien ha sido un apoyo incondicional, examinando y discutiendo ideas acerca del trabajo de investigación, siempre pendiente del desarrollo del mismo. Este trabajo nunca habría sido posible sin él

Omar

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
ÍNDICE DE ANEXOS	x
RESUMEN.....	xii
SUMMARY	¡Error! Marcador no definido.
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL	3
1.1. Identificación del problema.....	3
1.2. Justificación del problema.....	3
1.3. Antecedentes de la investigación.....	4
1.4. Objetivos	14
1.4.1. <i>Objetivo general</i>	14
1.4.2. <i>Objetivos específicos</i>	14
1.5. Marco Teórico	14
1.5.1. <i>Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana</i>	14
1.5.1.1. <i>Mecánica Lagrangiana</i>	14
1.5.1.2. <i>Mecánica Hamiltoniana</i>	18
1.5.2. <i>Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz</i>	19
1.5.2.1. <i>Ecuaciones de Maxwell</i>	19
1.5.2.2. <i>Fuerza de Lorentz</i>	20
1.5.3. <i>Potenciales Electromagnéticos</i>	21
1.5.4. <i>Ecuaciones de Maxwell en función de los potenciales electromagnéticos</i>	23
1.5.5. <i>Transformaciones de calibre – potenciales electromagnéticos</i>	24
1.5.5.1. <i>Fijando Calibre: Calibre de Coulomb y calibre de Lorentz</i>	25
1.5.5.2. <i>Ecuaciones de Maxwell invariantes de calibre</i>	26
1.5.6. <i>Teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica</i>	27
1.5.6.1. <i>La Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo</i>	27

1.5.6.2. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo	30
1.5.6.3. Cuantización como un problema de valores propios	31

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO	33
2.1. Formalismo canónico – electrón sometido a un campo electromagnético	33
2.1.1. Lagrangiana para un electrón en un campo electromagnético.....	33
2.1.2. Hamiltoniano para un electrón en un campo electromagnético	35
2.2. Potencial vector de un solenoide	36
2.2.1. Campo magnético en el solenoide	36
2.2.2. Flujo magnético en el solenoide	39
2.2.3. Potencial vector fuera del solenoide	40
2.3. Efecto Aharonov-Bohm – fenómeno de interferencia.....	43
2.3.1. Potencial vector como factor de fase	43
2.3.2. Experimento de la doble rendija.....	45
2.4. Otro Efecto Aharonov-Bohm - Niveles de energía del electrón alrededor del solenoide	47

CAPITULO III

3. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	52
3.1. Discusión sobre el flujo magnético Φ y flujo de London Φ_L	52
3.2. Significado de n positiva y n negativa para los niveles de energía	52
3.3. Espectro de energía no degenerado (electrón alrededor del solenoide)	53
3.4. Espectro de energía degenerado (electrón alrededor del solenoide)	54
3.5. Discusión acerca de la importancia del factor de fase en el fenómeno de interferencia.....	55

CONCLUSIONES.....	57
--------------------------	-----------

RECOMENDACIONES.....	59
-----------------------------	-----------

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1:	Patrón de interferencia, haz de electrones en una región con $\vec{B} = \vec{0}$ y $\vec{A} \neq \vec{0}$	5
Figura 2-1:	Interferómetro electrónico, punto A, tres cristales de difracción, punto B, observación de las franjas de interferencia.	6
Figura 3-1:	(a) Patrón de interferencia en ausencia del campo magnético. (b) Patrón de interferencia en presencia de un campo magnético.....	7
Figura 4-1:	Arreglo experimental para el efecto Aharonov-Bohm, caso electrostático (potencial escalar). Fenómeno de interferencia.	9
Figura 5-1:	Patrón de interferencia, caso del potencial electrostático, a diferentes longitudes de onda.....	12
Figura 6-1:	Construcción de un toroide magnético.....	12
Figura 7-1:	Sistema óptico para formación del patrón de interferencia electrónico.	12
Figura 8-1:	Fuerza de Lorentz \vec{F} , para un electrón con carga e^- , y velocidad \vec{v}	21
Figura 1-2:	Campo magnético bajo una corriente i en el solenoide, a lo largo de \hat{z}	37
Figura 2-2:	Líneas de campo magnético en un circuito cerrado dentro del solenoide, a lo largo de \hat{z}	38
Figura 3-2:	Flujo magnético a través de una sección de área de la espira del solenoide de radio b	39
Figura 4-2:	Potencial vector \vec{A} en un punto P , producido por una espira de radio b , $\rho \gg b$	40
Figura 5-2:	Potencial vector \vec{A} , representado en coordenadas cilíndricas, fuera del solenoide con radio ρ	41
Figura 6-2:	Efecto Aharonov-Bohm: haz de electrones dividido en dos a través de un fino solenoide, para luego interferir.....	45
Figura 7-2:	Electrón en trayectoria circular debido al potencial vector, alrededor del solenoide.	48
Figura 8-2:	Periodicidad de $\psi(\phi)$	50
Figura 1-3 :	Espectro de energía para distintos valores de n e intensidades del flujo magnético.	54

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: EFECTO AHARONOV-BOHM ELÉCTRICO.

ANEXO B: EVIDENCIA EXPERIMENTAL DEL EFECTO AHARONOV-BOHM.

ANEXO C: EXPERIMENTO DEL IMÁN TOROIDAL.

ANEXO D: APLICACIÓN DEL EFECTO AHARONOV-BOHM.

ANEXO E: EFECTO AHARONOV-BOHM COMO UN EJEMPLO DE LA FASE DE BERRY.

ABREVIATURAS

$\vec{E}(\vec{x}, t)$	Campo Eléctrico en la locación \vec{x} .
$\vec{B}(\vec{x}, t)$	Campo Magnético en la locación \vec{x} .
$\varphi(\vec{x}, t)$	Potencial escalar o potencial electrostático.
$\vec{A}(\vec{x}, t)$	Potencial Vector o potencial vectorial magnético.
Φ	Flujo Magnético.
$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$	Función Lagrangiana.
$H(q_i, p_i, t)$	Función Hamiltoniana.
e_0	Unidad de carga ($1.602176 \times 10^{-19} C$).
$e = -e_0$	Carga del electrón.
h	Constante de Planck.
\hbar	Constante reducida de Planck.
c	Constante de la velocidad de la luz.
i	Unidad imaginaria.
$\Psi(\vec{x}, t)$	Función de onda para $\vec{A} \neq \vec{0}$.
$\Psi_0(\vec{x}, t)$	Función de onda para $\vec{A} = \vec{0}$.
$\psi(\vec{x}, t)$	Función propia de onda general.
$\Lambda(\vec{x}, t)$	Función escalar de calibre.
Φ_L	Flujo cuántico de London.
$\Delta\Phi$	Diferencia de fase para dos haces coherentes de electrones.

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación, se desarrolló la dinámica del electrón bajo campos de calibre o también denominados potenciales electromagnéticos. Se estudió la importancia de los potenciales en la teoría cuántica y de como estos, son considerados cantidades físicas más fundamentales que los campos en sí. La modificación de la dinámica del electrón, causada por los potenciales en la teoría cuántica, se la conoce como *efecto Aharonov-Bohm*. Se planteó el efecto para el caso magnético, esto es, en presencia del potencial vector \vec{A} , considerando el movimiento del electrón alrededor de un solenoide de radio pequeño, muy largo, con campo magnético \vec{B} uniforme en su interior. Para la descripción del efecto y la importancia de los potenciales, el electrón orbita una región del solenoide donde el campo magnético es cero, pero el potencial vector no lo es, al mismo tiempo, se calculó los estados ligados de energía del electrón para este caso, y como estos, se ven modificados por el valor del flujo magnético al interior del solenoide, flujo al cual el electrón no está expuesto. Se explicó el significado de que el potencial vector, aparezca como un factor de fase en la función de onda que caracteriza a un electrón, el cual describe el cambio del patrón de interferencia entre dos haces de electrones, que pasan por los exteriores del solenoide, en una región excluida de campos, pero en presencia del potencial vector, lo que implica que el patrón de interferencia se desplace en la pantalla, debido a que los haces llegan con diferentes fases, esa diferencia se la representa como $\Delta\Phi$. El potencial vector es un campo auxiliar en electrodinámica clásica, sin embargo, en mecánica cuántica tiene implicaciones físicas en partículas cargadas. Se recomienda para evidencias experimentales, instrumentos que generen un campo magnético sin fugas, es decir una región excluida de campos.

Palabras clave: <POTENCIAL VECTOR>, <SOLENOIDE>, <ELECTRÓN>, <FUNCIÓN DE ONDA>, <NIVELES DE ENERGÍA>, <PATRÓN DE INTERFERENCIA>, <DIFERENCIA DE FASE>, <CAMPOS DE CALIBRE>.



ABSTRACT

In this research work, the dynamics of the electron were developed under gauge fields or also called electromagnetic potentials. The importance of potentials in quantum theory was studied, and how these are considered like more fundamental physical quantities, than the fields themselves. The modification of the electron dynamics, caused by the potentials in quantum theory, is known as the *Aharonov-Bohm effect*. The effect for magnetic case was boarded that is, in the presence of the potential vector \vec{A} , considering the motion of the electron around a small, very long radius solenoid, with a uniform magnetic field \vec{B} inside. For effect description and the importance of the potentials, the electron orbits a region of the solenoid where the magnetic field is zero, but the potential vector is not. At the same time, the bound energy states of the electron were calculated for this case, and thus they are modified by the value of the magnetic flux, inside the solenoid, flux to which the electron is not exposed. It explained the meaning of the potential vector appearing as a phase factor in the wave function that characterizes an electron, which describes the change in the interference pattern between two electron beams, which pass through the exterior of the solenoid, in a region excluded from fields; however, in the presence of the potential vector, which implies that interference pattern moves on the screen, because the beams arrive on different phases, that difference is represented as $\Delta\Phi$. The potential vector is an auxiliary field in classical electrodynamics; however, in quantum mechanics it has physical implications on charged particles. It is recommended for experimental evidence, instruments that generate a magnetic field without leaks, that is, a region excluded from fields.

Keywords: <POTENTIAL VECTOR>, <SOLENOID>, <ELECTRON>, <WAVE FUNCTION>, <ENERGY LEVELS>, <INTERFERENCE PATTERN>, <PHASE DIFFERENCE>, <GAUGE FIELDS>.



INTRODUCCIÓN

En mecánica clásica, el movimiento de partículas cargadas viene descrito directamente por acción de las fuerzas. El electrón bajo un campo electromagnético, se describe en función de la fuerza de Lorentz. Los campos eléctricos y magnéticos vienen planteados en las ecuaciones de Maxwell, las cuales pueden ser simplificadas a dos ecuaciones mediante el uso del potencial vector \vec{A} y potencial escalar φ .

La importancia de los potenciales en la mecánica cuántica, fue planteado por (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959) donde discutieron, como el electrón podría ser influenciado por los potenciales, aun si todos los campos físicos fueran apartados de este, a este fenómeno se conoció como *efecto Aharonov-Bohm*

El *efecto Aharonov-Bohm* es una predicción teórica, que considera a la mecánica cuántica como la teoría esencial para describir dicho fenómeno. En la mecánica clásica, los potenciales no tienen significado físico, ya que las ecuaciones de movimiento vienen descritas por campos físicos. En la teoría cuántica las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada son sustituidas por la ecuación de Schrödinger para una onda.

La ecuación de Schrödinger, que es la ecuación fundamental para describir el efecto, en un régimen no-relativista, viene representada desde el formalismo canónico, el cual no puede manifestarse únicamente en términos de campos, se necesita también la representación de los potenciales.

Estos campos auxiliares o potenciales, sufren transformaciones de calibre, que no alteran las propiedades físicas observables. Los potenciales, también conocidos como campos de calibre, dejan invariante las ecuaciones de movimiento, en este caso las ecuaciones del campo electromagnético. Los potenciales modifican el comportamiento dinámico en las partículas cargadas, incluso cuando no existe campos, sin embargo, este comportamiento solo se da empleando la teoría cuántica.

El trabajo de investigación está distribuido en cuatro capítulos. En el capítulo I, se analiza la problemática del estudio y porque se lo desea realizar, describiendo anteriores trabajos acerca del *efecto Aharonov-Bohm*, que han tenido relevancia en la mecánica cuántica, relacionando al electrón con los potenciales.

En el Capítulo II, se realiza una revisión minuciosa, empezando desde el punto vista de la mecánica clásica, con la teoría de Maxwell para el electromagnetismo que incluye a los

potenciales, y la invarianza de las ecuaciones de movimiento, además de describir el formalismo lagrangiano y hamiltoniano. En el caso de la teoría cuántica se detalla fundamentos básicos, a partir de la ecuación de Schrödinger.

En el Capítulo III, se plantea el formalismo canónico, determinando la lagrangiana y el hamiltoniano para el electrón en un campo electromagnético. Se calcula el valor exacto del potencial vector \vec{A} , que se genera fuera del solenoide a partir del campo magnético interno generado por una corriente eléctrica, así como el flujo magnético. El tratamiento cuántico se describe en dos etapas diferentes. La primera es encontrar los estados ligados de energía del electrón, al pasar por el solenoide, en una región donde el campo magnético es igual a cero, pero el potencial vector no lo es, empleando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. La segunda parte, se basa en la importancia del potencial vector como factor de fase en la función de onda del electrón, y mediante la interferencia de dos haces de electrones (experimento de la doble rendija) que pasan por los exteriores del mismo solenoide, se logra determinar la diferencia de fase adquirida entre los haces, siendo esta la cantidad que modifica o desplaza el patrón de interferencia.

Finalmente, en el Capítulo IV, se analiza los resultados obtenidos, a partir de los estados ligados de energía del electrón y la relevancia del potencial como factor de fase, discutiendo la importancia del potencial vector en la mecánica cuántica (*efecto Aharonov-Bohm*). Así mismo, se dan a conocer las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

1.1. Identificación del problema

A partir del siglo XX, la mecánica cuántica se ha convertido en la teoría capaz de predecir y describir fenómenos físicos, que la mecánica clásica no podía abarcar. La teoría cuántica es consistente con la evidencia experimental, convirtiéndose en una teoría aceptada, en el campo de la física. La mecánica cuántica emplea potenciales en las ecuaciones fundamentales del movimiento para partículas cargadas, siendo estos campos auxiliares, importantes, al momento de describir algún fenómeno cuántico. Por otro lado, la mecánica clásica que trabaja en relación a fuerzas y ecuaciones que envuelven a campos físicos concilia a estos potenciales (potencial vector, potencial escalar), como herramientas a la formulación de la teoría electromagnética. El problema radica en la discusión que existe entre los campos físicos frente a los potenciales, donde se intenta determinar cuál de los dos provee de un significado físico frente a sistemas cuánticos, es así como el *efecto Aharonov-Bohm* es un efecto puramente cuántico, y la existencia de los potenciales es requerida.

1.2. Justificación del problema

La primera vez que se describió el efecto a tratar, fue por (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959), en donde hablan acerca de las posibles implicaciones experimentales que pueden tener los potenciales electromagnéticos en la teoría cuántica. En electrodinámica, el potencial vector y potencial escalar solo son una herramienta matemática para plantear las ecuaciones de campo. En mecánica cuántica se requiere un formalismo canónico, así los potenciales no desaparecen de las ecuaciones básicas del movimiento. Los potenciales son necesarios en la descripción de un fenómeno cuántico, y como estos modifican la dinámica de una partícula cargada.

El presente trabajo intenta describir el *efecto Aharonov-Bohm*, haciendo uso de predicciones teóricas y experimentales desarrolladas en años posteriores, para denotar la importancia de los potenciales, en este caso el potencial vector en la teoría cuántica. El estudio teórico del efecto, tiene implicaciones importantes para fenómenos físicos que la mecánica clásica no puede conciliar, uno de ellos es el fenómeno de interferencia de un haz de partículas cargadas, es decir

dicho estudio valida la confirmación experimental actual, y experimentos propuestos anteriormente.

El estudio de los potenciales otorga al campo de la física una comprensión experimental más amplia. Además, el *efecto Aharonov-Bohm* y sus aplicaciones son hoy en día una corriente que conlleva al avance de dispositivos en base a la nanociencia moderna, específicamente en superconductividad de materiales.

1.3. Antecedentes de la investigación

El *efecto Aharonov-Bohm* es considerado una de las siete maravillas cuánticas, según la revista *New Scientist*, ya que enfatiza la importancia de los potenciales en relación a los campos. Con el desarrollo de la mecánica cuántica, los potenciales son indispensables para la formulación de las ecuaciones de movimiento, lo que implica un formalismo canónico para la aparición de estos campos auxiliares. En los últimos 50 años, el *efecto Aharonov-Bohm* se ha convertido en un fenómeno novedoso para la mecánica cuántica. Siendo los potenciales los protagonistas, y los que modifican la dinámica de partículas cargadas, en regiones libre de campos, cuestionándose si los potenciales son más reales que los campos. Los potenciales además poseen una propiedad importante, son campos de calibre, es decir, la física que caracteriza al fenómeno no se ve modificada, dejando invariante a las ecuaciones fundamentales, que describen el sistema físico.

A continuación, se muestran trabajos previos acerca del *efecto Aharonov-Bohm*, desde las implicaciones teóricas, hasta las evidencias experimentales.

Uno de los primeros trabajos realizados fue por (Ehrenberg & Siday, 1949), en donde calcularon el índice refractivo en la óptica electrónica en términos del potencial vector \vec{A} . El potencial vector \vec{A} , en la óptica electrónica satisface el teorema de Stokes, esto para no producir arbitrariedades. El trabajo se centró en el formalismo canónico, la fuerza de Lorentz, y el flujo magnético encerrado, para la medición del patrón de interferencia en la óptica electrónica. El potencial vector \vec{A} , no está explícitamente en la fuerza de Lorentz, lo que implicó ningún efecto visible en su geometría óptica. Sin embargo, determinaron que el ángulo de inclinación de los rayos de electrones dependía totalmente del potencial vector \vec{A} .

Un segundo trabajo corresponde a (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959), donde afirmaron, que en la mecánica cuántica el formalismo canónico es necesario, así los potenciales no se eliminarían de las ecuaciones fundamentales, que describirán el movimiento de partículas cargadas. Ellos fueron los primeros en proponer posibles experimentos, que daban a conocer la importancia o el papel

que juegan los potenciales en la teoría cuántica. El planteamiento experimental, será fundamentando en los anexos del presente trabajo.

Por último, (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959) argumentaron que en la teoría cuántica el comportamiento de un electrón, se ve dominado por los potenciales, en regiones donde los campos electromagnéticos son excluidos de la partícula.(Y. A. and D. Bohm, 1959)(Y. A. and D. Bohm, 1959) Así los potenciales que son campos auxiliares, y que dejan invariante a las ecuaciones de campo bajo transformaciones de calibre, vienen representados por integrales en circuitos cerrados, con relación a los campos, el potencial vector viene representado como:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

El primer estudio experimental del *efecto Aharonov-Bohm* fue llevado a cabo por (Chambers, 1960), él se planteó el experimento propuesto por (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959). En este experimento, él determinó el desplazamiento de las líneas de franja del patrón de interferencia, punto Q. Incidió un haz de electrones, punto P, que se divide en dos, siguiendo caminos diferentes C_1 y C_2 , en las cercanías de un solenoide con campo magnético uniforme en su interior, pero cero en el exterior, y con un potencial diferente de cero fuera del solenoide, este arreglo se observa en la figura 1-1.

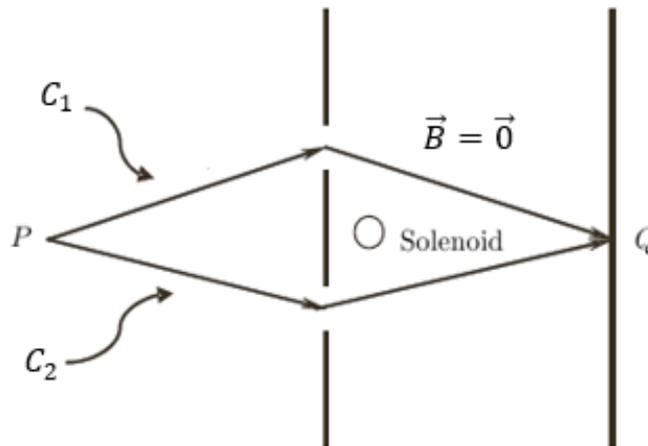


Figura 1-1: Patrón de interferencia, haz de electrones en una región con $\vec{B} = \vec{0}$ y $\vec{A} \neq \vec{0}$.

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

En la figura 1-1, se considera un solenoide de longitud infinita, práctico para las predicciones teóricas, pero no para un modelo experimental. Se consideró un bigote magnético en vez de un solenoide, el hecho de considerar este instrumento, lograba cambiar la magnitud del flujo magnético a medida que su longitud cambiaba.

La investigación se basó principalmente en el cálculo de la diferencia de fase adquirida por los dos haces de electrones, a lo largo del camino, $e\Phi/\hbar c$, donde e es la carga del electrón, Φ es el flujo magnético y \hbar la constante de Planck racionalizada. Este valor, calculado previamente por (Y. Aharonov. & D. Bohm, 1959), se relacionaba directamente con el potencial vector, debido al teorema de Stokes. El trabajo concluyó, que el desplazamiento de las franjas del patrón de interferencia en la pantalla, eran debido al flujo magnético generado en el bigote magnético.

En otra investigación experimental tenemos a (F. Werner & D. Brill , 1960), ellos montaron un experimento en el cual un interferómetro electrónico, que generaba un haz de electrones, el cual era dividido en dos, se recombinaba en un patrón de interferencia. Ellos plantearon su base instrumental a partir del interferómetro construido por (Marton et al., 1954) (figura 2-1), donde el flujo magnético pasaba a través de los haces..

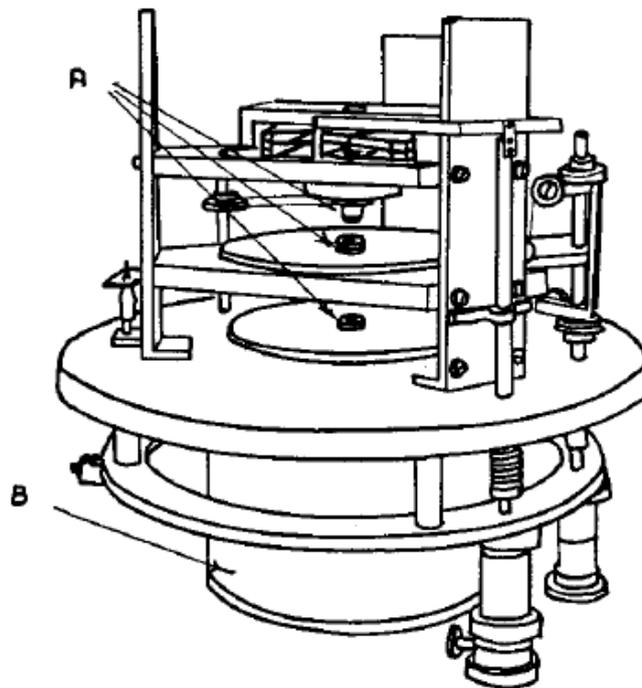


Figura 2-1: Interferómetro electrónico, punto A, tres cristales de difracción, punto B, observación de las franjas de interferencia.

Realizado por: (Marton et al., 1954).

Este estudio consideró la presencia de un campo magnético débil, para el interferómetro electrónico, que generaba que los haces de electrones se desplacen, cuando estos fueran difractados por los cristales C_1 , C_2 y C_3 , esto se logra evidenciar en la figura 3-1 (b). La figura 3-1 (a) es para el interferómetro electrónico en ausencia de un campo magnético. El haz pasa por el

crystal C_1 , generando que el haz se divida en dos componentes, l_1 y m_1 , para luego pasar por el cristal C_2 , con componentes l_2 y m_2 , al pasar por el cristal C_3 , los haces interfieren.

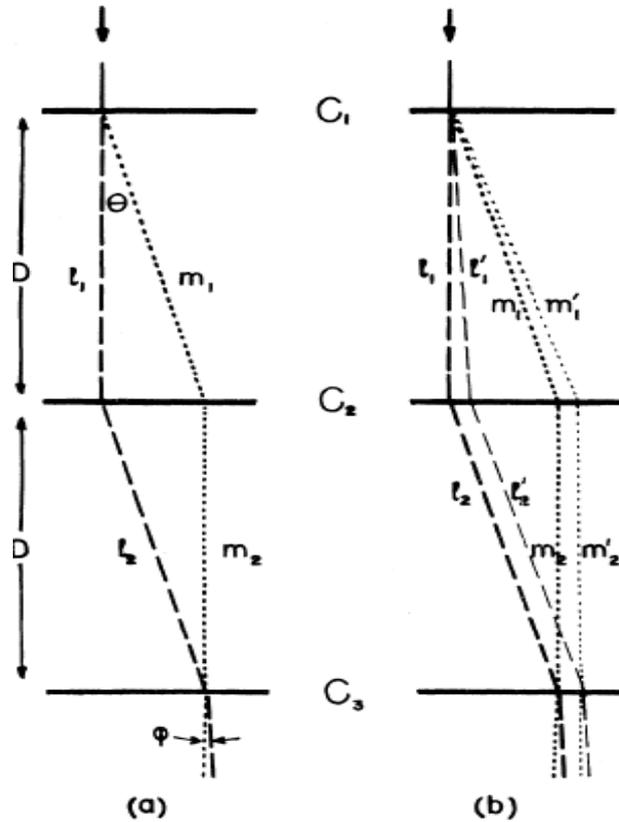


Figura 3-1: (a) Patrón de interferencia en ausencia de un campo magnético. (b) Patrón de interferencia en presencia de un campo magnético.

Realizado por: (F. Werner & D. Brill , 1960).

En la figura 3-1 (b), las nuevas componentes que interfieren son l'_2 y m'_2 , al pasar por el cristal C_3 . Se determinó la diferencia de fase o fase relativa que obtuvieron los haces en presencia del campo magnético $e\Phi/\hbar c$, la cual definía el patrón de interferencia entre los haces.

En un artículo desarrollado por (D. Bohm & Y. Aharonov, 1961), llamado “*Futher Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*” se discutió de nuevo el significado de los potenciales en la teoría cuántica. Los potenciales electromagnéticos, (ϕ, \vec{A}) , potencial escalar y potencial vector respectivamente, adquieren un significado en la mecánica cuántica. En regiones libre de campos de espacio y tiempo con conexión múltiple, los fenómenos experimentales de interferencia y dispersión, dependen únicamente de la integración de los potenciales, es decir,

$$I = \oint A_u dx^u, \quad (2)$$

donde, $A_u = (\varphi, \vec{A})$. El trabajo propuso predicciones teóricas para un solenoide de longitud infinita, con un flujo magnético, que se enciende adiabáticamente, el cual es el encargado de modificar los estados ligados de energía para un electrón. El flujo estaba cuantizado en unidades del “flujo magnético de London” (ch/e), donde h es la constante de Planck, y e la carga del electrón. El cambio en el patrón de interferencia de un haz de electrones (*efecto Aharonov-Bohm*), venía dada por una cantidad denominada diferencia de fase,

$$\Delta\Phi = \frac{e}{c\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

En el trabajo realizado por (Peshkin et al., 1961) calcularon los estados ligados de un electrón y la dispersión de un haz de electrones, para campos magnéticos confinados a regiones inaccesibles, empleando la teoría cuántica. La ecuación de Schrödinger, provee una explicación correcta del movimiento del electrón, para regiones con conexión múltiple (ausencia del campo magnético), pero con la presencia del potencial vector, los estados ligados del electrón son modificados.

La realidad física de los potenciales recae principalmente, en que estos campos están presentes a lo largo de circuitos cerrados. Es decir, cantidades como la diferencia de fase, y la cuantización del flujo, dependen íntimamente de una integral de línea para los potenciales (De Beauregard, 1967).

Posteriormente (Boyer, 1973) comparó los efectos que produce un campo electromagnético en un electrón, y los potenciales electromagnéticos, por separado. El imagino dos posibles experimentos, uno para el caso electrostático, es decir en presencia del potencial escalar φ , y otro para el caso magnético, en presencia del potencial vector.

Para el caso electrostático dos paquetes coherentes de haces de electrones, pasaban a través de dos tubos cilíndricos, en cada uno se generaba una diferencia potencial, luego de atravesar los haces, los cilindros, estos interferían, obsérvese la figura 4-1.

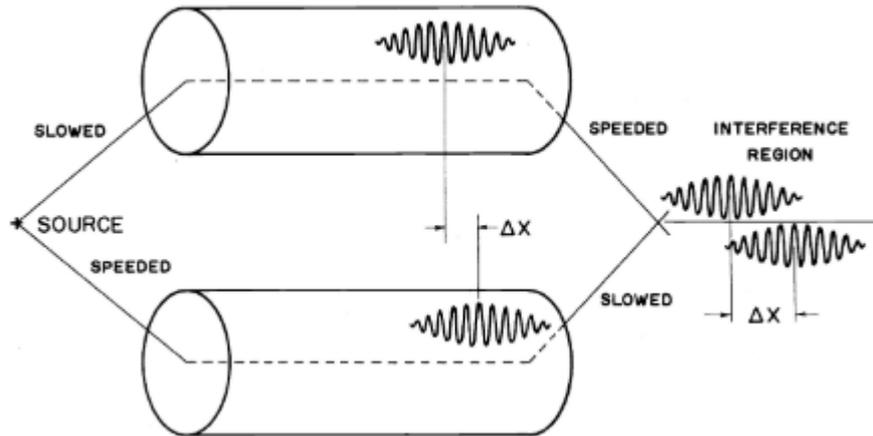


Figura 4-1: Arreglo experimental para el *efecto Aharonov-Bohm*, caso electrostático (potencial escalar). Fenómeno de interferencia.

Realizado por: (Boyer, 1973).

El patrón de interferencia se veía afectado por la diferencia de fase adquirida por los haces, el cual tomaba el valor de,

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar}(\varphi_1 - \varphi_2)t, \quad (4)$$

donde, esta diferencia de fase depende estrictamente del tiempo, a diferencia del potencial vector, ecuación (1.3).

El potencial escalar φ , desplaza el patrón interferencia, cuando está presente, e interfiere con los paquetes coherentes de electrones, que pasan por cada cilindro, figura 5-1.

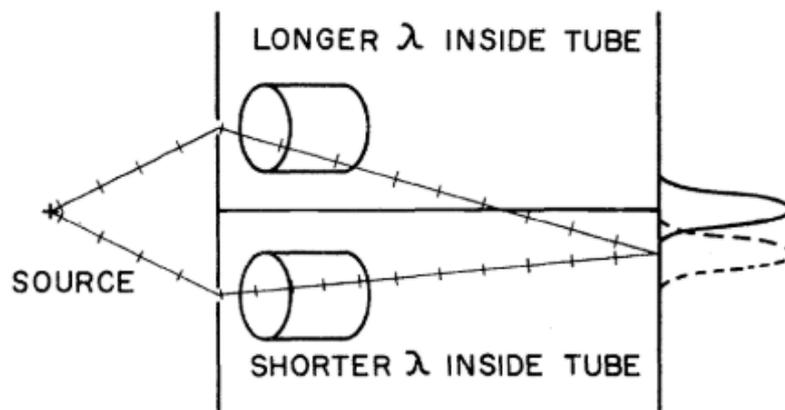


Figura 5-1: Patrón de interferencia, en presencia del potencial electrostático φ , a diferentes longitudes de onda.

Realizado por: (Boyer, 1973).

Para el caso magnético, el patrón de interferencia se desplazó debido a la diferencia de fase (3) que toman dos haces de electrones al pasar por un solenoide, luego de interferir debido a una rejilla de dos ranuras, donde un campo magnético uniforme, se encontraba en una región excluida para los haces, pero existía la presencia del potencial vector \vec{A} .

En un trabajo teórico desarrollado por (Berry et al., 1980) se estableció una solución exacta de la función de onda del electrón, en el *efecto Aharonov-Bohm*, aplicando un factor de fase, el cual se llama factor de fase magnético de Dirac. La solución de la ecuación de Schrödinger para un electrón, en un campo magnético \vec{B} , está dada por su función de onda cuando $\vec{A} = \vec{0}$, multiplicado por un factor de fase. La solución de la ecuación de Schrödinger cuando $\vec{A} = \vec{0}$, viene representada como Ψ_0 , así la solución para $\vec{A} \neq \vec{0}$, viene dada por:

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{r_0}^r \vec{A} \cdot d\vec{l}\right), \quad (5)$$

donde, r_0 es un punto arbitrario. El factor exponencial es conocido como factor de fase, sin embargo, la integral depende únicamente del camino no de los límites de integración. El trabajo planteó dos haces de electrones, cada uno representado por su respectiva función de onda $\Psi_0^{(1)}$ y $\Psi_0^{(2)}$ que, al superponerse, la fase relativa entre los haces se veía modificada en una región donde $\vec{A} \neq \vec{0}$, por un factor que relaciona al flujo magnético Φ , esto se visualiza en la ecuación (3), donde empleando el teorema de Stokes, se tiene,

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (6)$$

El *efecto Aharonov-Bohm* radica cuando el potencial vector \vec{A} , aparece en el hamiltoniano, que describe a un electrón con carga e en un campo electromagnético,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2, \quad (7)$$

donde, \vec{p} es el momento canónico. Subsecuentemente (Berry, 1984) propuso, que el electrón alrededor de un circuito cerrado, permanece en el enésimo estado propio de energía, si \vec{A} es un parámetro que varía lentamente, es decir estático para la “visión” del electrón. A este fundamento se lo conoce como teorema adiabático, es decir el hamiltoniano regresa a su forma original, y no existe transiciones en los niveles de energía del electrón. Sin embargo, la función de onda recoge un factor de fase, ecuación (5), que produce un cambio observable al medir el patrón de interferencia para un haz de electrones.

Los niveles de energía y la medición del patrón de interferencia del electrón, se ven modificados por la existencia del potencial vector \vec{A} , que se encuentra explícitamente en el operador hamiltoniano (1.7).

Subsiguientemente (Y. Aharonov & A. Casher, 1984) derivaron el lagrangiano efectivo, que describe la interacción de una partícula cargada y un momento magnético en el régimen no relativista, mostraron de igual manera como las partículas neutras con un momento magnético exhiben el *efecto Aharonov-Bohm* en ciertas condiciones. Ellos propusieron un haz de partículas neutras con momentos dipolares magnéticos que pasan alrededor de los lados opuestos de una carga lineal, sufriendo un cambio de fase cuántico relativo, sin embargo, esto se encuentra aún en investigación experimental (Boyer, 1987).

La investigación de (Y. Aharonov & A. Casher, 1984) afirmó que las partículas dipolares magnéticas deberían sufrir un cambio de fase, aun cuando no experimentan una fuerza clásica, mencionaron la dualidad de este efecto con el de un solenoide para partículas cargadas (*efecto Aharonov-Bohm*), a este nuevo efecto se lo conoce como efecto Aharonov-Casher.

En una investigación planteada por (Olariu & Popescu, 1985) se estudió los efectos cuánticos producidos por flujos electromagnéticos, donde, un haz de electrones viaja en una región donde el campo magnético no está presente, pero el flujo magnético confinado en un solenoide se relaciona al potencial vector. Llegaron a la conclusión que el potencial vector, es el responsable, del desplazamiento entre las líneas de franja del patrón de interferencia característico, poniendo en evidencia las predicciones teóricas, referentes al *efecto Aharonov-Bohm*.

Una confiable evidencia experimental acerca del *efecto Aharonov-Bohm* fue desarrollada por (Tonomura et al., 1986). Ellos desarrollaron una estructura toroidal recubierta por un superconductor, niobio Nb, con capas delgadas de óxido de silicio y aleaciones magnéticas de hierro y níquel (figura 6-1). Para que el niobio Nb sea un superconductor, la temperatura a la que tenía que estar expuesto era de 9.2K, generando así la desaparición total del flujo magnético en el interior del material, este fenómeno se conoce como el efecto Meissner. Así un haz de electrones era dirigido hacia un sistema óptico para microscopía de interferencia, donde el haz se dividía en dos, y al pasar por el toroide el patrón de interferencia se desplazaba, figura 7-1. Notaron que el flujo magnético encerrado estaba cuantizado, en unidades de $h/2e$, es decir, el valor del flujo magnético de London, al alcanzar la temperatura de 9.2K.

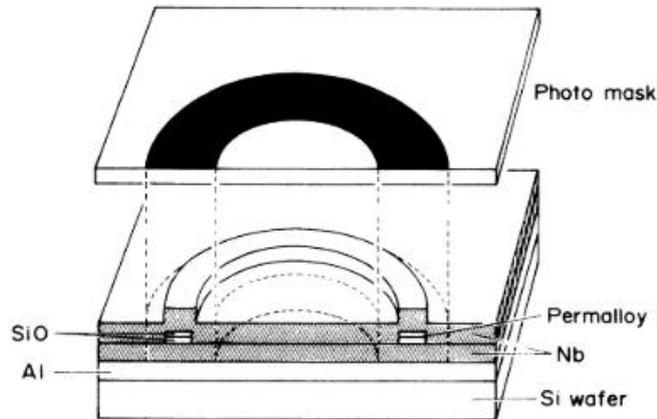


Figura 6-1: Construcción de un toroide magnético.

Realizado por: (Tonomura et al., 1986).

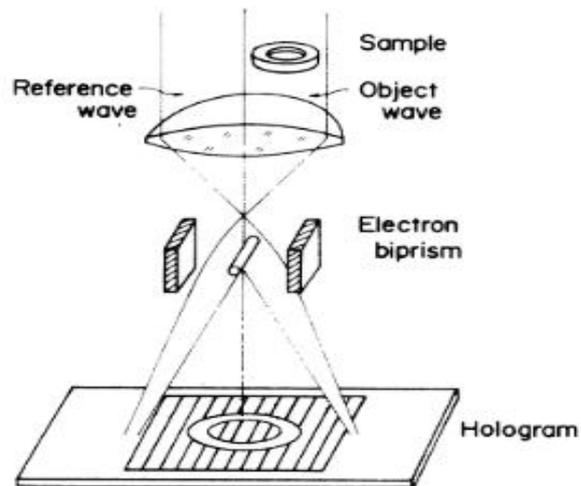


Figura 7-1: Sistema óptico para la formación del patrón de interferencia electrónico.

Realizado por: (Tonomura et al., 1986).

Según (Wang, 2007), el movimiento de las partículas cargadas en mecánica cuántica no está determinado por cantidades locales, como la fuerza, si no por el hamiltoniano, que representa la energía del sistema, de la misma forma por campos auxiliares como son: el potencial escalar φ y vectorial \vec{A} .

En un artículo científico realizado por (G. Spavieri & J. Quintero, 2011) se discutió acerca de nuevos efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm y la masa del fotón, determinaron que el efecto Aharonov-Casher donde el dipolo magnético de un neutrón interactúa con un campo eléctrico \vec{E} externo, no era apto para considerar mejores límites para la masa del fotón. Así mismo, los efectos

del tipo Aharonov-Bohm para un haz coherente de cargas de signos opuestos, represento una mejora, en el límite de la masa del fotón.

Se propuso un estudio para verificar el *efecto Aharonov-Bohm* en puntos cuánticos no uniformes, este fue realizado por (Gélvez et al., 2015). Un punto cuántico es una nanoestructura semiconductor, donde existe un confinamiento 3D de los electrones en la banda de conducción, y los huecos de la banda de valencia. El trabajo determinó el confinamiento periódico de los portadores de carga, en donde las nanoestructuras debían tener un carácter variable en presencia de un campo magnético externo, como el descrito para el *efecto Aharonov-Bohm* en presencia de los potenciales electromagnéticos. La presencia del potencial vector indicó un cambio en la morfología de los puntos cuánticos, sometidos a un campo magnético en la dirección de crecimiento. La función de onda característica de un electrón, confinado en cada uno de los puntos cuánticos, determino el espectro energético en las cercanías a un campo magnético sin interacción del mismo. Los niveles de energía del electrón, dependían de la intensidad del campo magnético externo a los puntos cuánticos no uniformes, es decir, en una región libre de campos, pero si en presencia del potencial vector. Esta investigación, fue una demostración del *efecto Aharonov-Bohm* y la importancia de los potenciales electromagnéticos, para la caracterización de estas nanoestructuras semiconductoras (puntos cuánticos).

Por ultimo en un trabajo realizado por (Pozzi et al., 2017) se empleó un experimento de interferencia con dos haces de electrones, que viajaban a través de un campo electrostático de un cable bimetalico. Este instrumento también considerado como un dipolo, se insertó en el camino de los dos haces, con fase coherente, que viajan a lo largo del eje z , perpendicular al eje dipolar. Los dos frentes de onda se superponían, para formar un patrón de interferencia, obteniendo resultados en la diferencia de fase en diferentes deflexiones laterales, que sufrían los haces al pasar por cada lado del dipolo sin desviación lateral. Concluyeron que el cambio de fase, es debido al efecto electrostático retardado, asociado con la componente de la “fuerza” eléctrica del dipolo, que actúa paralelo a las trayectorias del haz. Ellos estimaron como participante principal del efecto, al potencial electrostático o escalar φ .

Los antecedentes acerca del *efecto Aharonov-Bohm*, puestos a consideración en esta sección, aprecian la relevancia que tienen los potenciales electromagnéticos, prioritariamente el potencial vector \vec{A} , en la dinámica de las partículas cargadas bajo la teoría cuántica.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Explicar la importancia del potencial vector, haciendo uso de la mecánica cuántica no-relativista, para describir el *efecto Aharonov-Bohm*.

1.4.2. Objetivos específicos

- Encontrar la función lagrangiana y hamiltoniana para un electrón en presencia de un campo electromagnético.
- Calcular el potencial vector \vec{A} , a partir de la inducción del campo magnético encerrado en un solenoide.
- Determinar los niveles de energía de un electrón, que interacciona con el potencial vector usando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.
- Analizar la importancia de la aparición del potencial vector como factor de fase en la solución de la ecuación de Schrödinger en una región con campo magnético nulo.

1.5. Marco Teórico

1.5.1. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

1.5.1.1. Mecánica Lagrangiana

La representación más frecuente para leyes del movimiento en sistema mecánicos, es el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*) (Landau & Lifshitz, 2004, p.2).

A partir de este fundamento, todo sistema físico está caracterizado por una formulación alternativa para plantear las ecuaciones de movimiento, representada por una función denominada lagrangiana,

$$\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = T(\dot{q}_i(t)) - U(q_i(t)), \quad (8)$$

donde, T y U son las energías cinética y potencial, respectivamente, del sistema o de la partícula que se estudia.

En un sistema mecánico de n grados de libertad, las posiciones de las partículas del sistema están establecidas por valores de n coordenadas generalizadas q_i , que son funciones del tiempo, $q_i(t)$, y donde las velocidades \dot{q}_i no son mas que las derivadas temporales de cada coordenada generalizada $q_i(t)$ (Thornton & Marion, 1995, pp. 230-231).

El principio de mínima acción pondera, que para cualquier sistema físico, existe una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, de manera que la integral de dicha función, alcance el valor mínimo posible a manera que avanza en el tiempo (Landau & Lifshitz, 2004, p. 2).

Para instantes, $t_1 = t$ y $t_2 = t$, y posiciones determinadas por las coordenadas, $q(t)$ y $\dot{q}(t)$, el sistema físico se desplaza entre estas posiciones de forma que la integral es,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (9)$$

donde, \mathcal{L} es la lagrangiana, y la integral, es denominada *acción*.

Se desea disponer las ecuaciones diferenciales, que decretan el mínimo de la integral (9). Se considera un sistema físico con un solo grado de libertad, es decir para una única función, $q(t)$. La *acción* S , aumenta cuando se reemplaza

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad (10)$$

donde, $\delta q(t)$ es únicamente una función reducida en el intervalo t_1 a t_2 . Para los intervalos $t_1 = t$ y $t_2 = t$, las funciones (10) adquieren los mismos valores:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (11)$$

Al introducir (10), a la *acción* (9), se tiene,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (12)$$

donde, el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*) se escribe:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0. \quad (13)$$

Empleando la variación de (13), se obtiene,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (14)$$

y al integrar por partes, el segundo termino de (14), se tiene,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q, \quad (15)$$

donde, el primer término de la parte izquierda de (15), se elimina, respetando la condición (11), obteniendo:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) dt = 0. \quad (16)$$

La integral (16), debe ser equivalente a cero para cualquier valor de δq , esto es si el integrando es igual a cero, consiguiendo la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = 0. \quad (17)$$

Si existe varios grados de libertad, se obtiene para la expresión anterior n ecuaciones que tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (18)$$

Si se conoce la lagrangiana \mathcal{L} , de un sistema físico, la ecuación (18) dispone la correlación entre velocidades y coordenadas generalizadas del sistema, (q_i, \dot{q}_i) . La ecuación (18), se denomina ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, las ecuaciones del movimiento para un sistema físico en particular (Landau & Lifshitz, 2004, p.4).

De (18), se deduce otra cantidad importante, la derivada de la lagrangiana con respecto a la coordenada generalizada \dot{q}_i , es conocida como momento canónico conjugado o momento generalizado, y se escribe como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i. \quad (19)$$

Si la lagrangiana \mathcal{L} , describe un sistema físico cerrado (que no interacciona con nada), no depende claramente del tiempo, (Thornton & Marion, 1995, p.260), así,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (20)$$

por lo tanto, el diferencial total con respecto al tiempo de la lagrangiana es,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (21)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (18), para reemplazar $\partial\mathcal{L}/\partial q_i$, en (21), se tiene,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \ddot{q}_i, \quad (22)$$

o,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) = 0. \quad (23)$$

En la ecuación (23), la cantidad dentro del paréntesis, es constante en el tiempo, y se expresa como H , este término, se denomina función de energía (Thornton & Marion, 1995, p. 260),

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \mathcal{L} = H. \quad (24)$$

El teorema de la conservación de la energía (24), es establecido para sistemas cerrados y para sistemas dominados a un campo externo constante (que no depende del tiempo). Estos sistemas son denominados como conservativos (Landau & Lifshitz, 2004, p. 16).

Si la energía potencial U , no depende de las coordenadas generalizadas \dot{q}_i , ósea las velocidades, y solo de q_i , es decir $U = U(q_i)$, entonces:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial(T - U)}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}, \quad (25)$$

por lo tanto, introduciendo (25) a (24), se obtiene,

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - (T - U) = H. \quad (26)$$

Además, T , la energía cinética del sistema es una función cuadrática de las velocidades, aplicando el teorema de Euler para funciones homogéneas, se tiene:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} = 2T. \quad (27)$$

Así, la función de energía (26), es igual a,

$$T(q, \dot{q}) + U(q) = H = E. \quad (28)$$

La última ecuación, es conocida también, como la energía total del sistema, la suma de la energía cinética T que depende de las velocidades y la energía potencial U de las coordenadas de las partículas en el sistema físico (Landau & Lifshitz, 2004, p. 17).

La energía total del sistema E , es una constante de movimiento. La función de energía H , es también llamada hamiltoniano del sistema físico, sin embargo, esta función será definida en la subsección siguiente.

1.5.1.2. Mecánica Hamiltoniana

La mecánica hamiltoniana, igual que la mecánica lagrangiana, es una formulación alternativa, que nos lleva a describir las ecuaciones de movimiento para un sistema físico. Sin embargo, esta formulación sobresale ante el mecanismo lagrangiano, ya que lleva a un sistema físico, descrito por la mecánica clásica hacia la mecánica cuántica de manera muy inherente (Avila et al., 2016)

La diferencia entre la mecánica hamiltoniana y la mecánica lagrangiana, radica en la representación de la función hamiltoniana o hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$, la cual depende de la coordenada generalizada p_i , denominada momento canónico conjugado (19).

Empleando la definición del momento canónico conjugado o momento generalizado, la función de energía (24) para el hamiltoniano, se escribe como:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (29)$$

La función hamiltoniana o hamiltoniano (29) viene representado por las coordenadas generalizadas, q_i, p_i y t , posiciones, momentos generalizados y tiempo respectivamente, en lugar de q_i, \dot{q}_i, t , por el cual el lagrangiano viene representado (Thornton & Marion, 1995, p. 266).

Para encontrar las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Hamilton, se toma primero el diferencial total de $H(q_i, p_i, t)$, obteniendo:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (30)$$

De la misma forma, el diferencial total de la ecuación (29), viene escrito como:

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + d\dot{q}_i p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (31)$$

Usando la ecuación (19) en las ecuaciones de Euler-Lagrange (18), se tiene,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i, \quad (32)$$

por lo tanto, al hacer uso de (18) y (32) para reemplazar los términos $\partial\mathcal{L}/\partial q_i$ y $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ de (31), se cancelan el cuarto y segundo término, y (31) se reescribe como:

$$dH = \sum_I (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (33)$$

Si se reconoce los términos dp_i , dq_i , y dt , entre las ecuaciones (33) y (30), se establece una relación dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}. \quad (34)$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton, ecuaciones diferenciales de primer orden, contrario a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, de segundo orden. Debido a su simplicidad y simetría se las denomina ecuaciones canónicas (Landau & Lifshitz, 2004, p. 159).

El diferencial total respecto al tiempo de la función hamiltoniana es,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (35)$$

y sustituyendo la primera y segunda ecuación de (34), se obtiene:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (36)$$

De la ecuación (36), se deduce que, si el hamiltoniano no depende del tiempo, entonces $dH/dt = 0$, por lo tanto, se obtiene la ley de la conservación de la energía, es decir el hamiltoniano es igual a la energía total del sistema, expresada anteriormente por la ecuación (29).

El hamiltoniano H es igual a la energía total del sistema E , si la energía cinética es una función cuadrática homogénea de la coordenada generalizada \dot{q}_i y si la energía potencial solo depende de la coordenada q_i (Thornton & Marion, 1995, p-261).

Por lo tanto, si se desea encontrar el hamiltoniano H para cualquier sistema físico, conservativo o no conservativo, se emplea la ecuación (29), siempre y cuando se conozca el lagrangiano \mathcal{L} .

1.5.2. Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz

1.5.2.1. Ecuaciones de Maxwell

En el año 1961, el físico-matemático escocés James Clerk Maxwell, formuló cuatro ecuaciones diferenciales parciales, que explicaban por completo los fenómenos electromagnéticos. Estas

ecuaciones son el fundamento principal para la electrodinámica clásica, representadas por la divergencia y el rotacional de los campos eléctricos y magnéticos (Griffiths, 1999, p. 321).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (37)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (40)$$

La ecuación (37), es la ley de Gauss para el campo eléctrico, la cual relaciona el flujo del campo eléctrico en una superficie cerrada con la carga neta encerrada en esta, donde la fuente de campo eléctrico es la densidad de carga $\rho(\vec{x}, t)$ (Reitz et al., 1996, pp. 393-394).

La ecuación (38), niega la existencia de los monopolos magnéticos (Reitz et al., 1996, p- 394), la ecuación (39), es la ley de la inducción electromagnética de Faraday, donde un campo magnético variable en el tiempo produce la existencia de un campo eléctrico.

Por último, la ecuación (40), es una extensión de la ley de Ampère, la cual produce la manifestación de un campo magnético rotacional, debido a un campo eléctrico variable en el tiempo, y a la densidad de corriente (fuente de campo magnético) \vec{J} , referente a una superficie encerrada en una curva cerrada (Reitz et al., 1996, p.394).

1.5.2.2. Fuerza de Lorentz

Para examinar el movimiento de una partícula de masa m y carga q , entorno a un campo electromagnético, la descripción clásica viene dada por la fuerza de Lorentz (Griffiths, 1999, p. 204),

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (41)$$

donde, \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético respectivamente, y \vec{v} la velocidad de la partícula cargada. Las ecuaciones de Maxwell junto a la fuerza de Lorentz (41), delinear la dinámica del campo electromagnético en una partícula cargada.

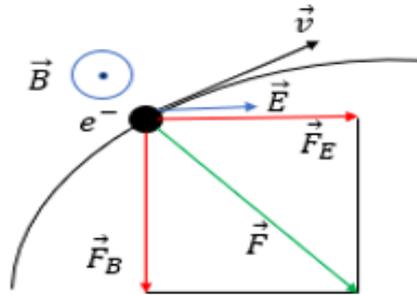


Figura 8-1: Fuerza de Lorentz \vec{F} , para un electrón con carga e^- , y velocidad \vec{v} .

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

1.5.3. Potenciales Electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell vistas en la subsección (1.5.2), rigen el comportamiento del campo eléctrico \vec{E} y campo magnético \vec{B} , a partir de sus fuentes, la densidad de carga ρ , y la densidad de corriente \vec{j} .

Sin embargo, es adecuado incluir potenciales, para conseguir un número menor de ecuaciones de segundo orden, siempre y cuando satisfagan las ecuaciones de Maxwell de forma exacta (Jackson, 1999, p. 239). La idea es representar el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} en forma de potenciales, haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (38) y (39), para ello se emplea el teorema de Helmholtz para estas ecuaciones (Kregar, 2011, p.2).

El teorema de Helmholtz, también conocido como descomposición Helmholtz enuncia: cualquier campo vectorial en \mathbb{R}^3 suave, puede descomponerse en la suma de un campo con rotor igual a cero, más otro solenoidal o con divergencia igual a cero (Griffiths, 1999, p. 53). Por ende, un campo vectorial \vec{F} en \mathbb{R}^3 , que obedece al teorema de Helmholtz, se produce por dos potenciales, un potencial escalar φ y un potencial vector \vec{A} , es decir,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (42)$$

Cuando \vec{F} posee divergencia igual a cero, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$, el campo \vec{F} se puede representar como:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (43)$$

ya que la divergencia del rotor $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ es igual a cero.

Cuando \vec{F} posee rotor igual a cero, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, denominado campo irrotacional, \vec{F} viene dado por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad (44)$$

así, el rotacional de $\vec{\nabla} \varphi$ es igual a cero. Por lo tanto, el campo vectorial \vec{F} , ecuación (1.42), es la suma de (43), la componente solenoidal y (44) la componente irrotacional (Griffiths, 1999, p.53).

Para representar el campo magnético \vec{B} a manera de potenciales, se emplea el teorema de Helmholtz, para la ecuación de Maxwell (38), es decir:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (45)$$

Esta ecuación satisface (38), ya que la divergencia del rotor del potencial vector \vec{A} es igual a cero,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (46)$$

El campo vectorial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ se conoce también como potencial vectorial magnético, por la relación con el campo magnético \vec{B} .

Introduciendo la ecuación (45) en (39), se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = \vec{0}. \quad (47)$$

En concordancia con el teorema de Helmholtz, para que el rotor del campo vectorial $\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t}$, sea nulo, se tiene que cumplir,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}, t), \quad (48)$$

y, por tanto,

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}, t) = \vec{0}. \quad (49)$$

Así, el campo eléctrico \vec{E} toma la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (50)$$

donde, $\varphi(\vec{x}, t)$ es el potencial escalar.

En conclusión, el par de ecuaciones de Maxwell para el campo magnético y campo eléctrico (38) y (39) respectivamente, se satisfacen cuando el campo eléctrico y magnético son expresados en términos del potencial escalar $\varphi(\vec{x}, t)$ y el potencial vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$ (Jackson, 1999, p. 239).

El conjunto de potenciales (φ, \vec{A}) contienen cuatro componentes, una escalar dada por el potencial escalar φ y tres vectoriales por el potencial vector \vec{A} , en lugar de las seis que se tiene para el campo eléctrico y magnético (\vec{E}, \vec{B}) . Es indispensable representar los campos a manera de potenciales, así, es factible plantear la descripción cuántica para el *efecto Aharonov-Bohm*, esto se desarrolla en el capítulo III.

1.5.4. Ecuaciones de Maxwell en función de los potenciales electromagnéticos

La representación potencial del campo magnético y campo eléctrico (45), (50) respectivamente, implican la reducción de las ecuaciones de Maxwell a la mitad (Griffiths, 1999, p. 417).

Para ello se hace uso de la ecuación (37), (la ley de Gauss para el campo eléctrico), se introduce la representación potencial (50) a (37), obteniendo:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = 4\pi\rho(\vec{x}, t), \quad (51)$$

reescribiendo (51), se tiene,

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)] = -4\pi\rho(\vec{x}, t). \quad (52)$$

De la misma forma, se emplea la representación potencial de las ecuaciones (45) y (50) para la ecuación (40), la ley de Ampère para el campo magnético, lo que resulta a,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)] = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}, t), \quad (53)$$

haciendo uso de la identidad del rotacional,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (54)$$

la ecuación (53) se reescribe como:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} \right]. \quad (55)$$

De esa manera, se logra reducir las ecuaciones de Maxwell a dos, (52) y (55), así, todos los fenómenos electromagnéticos se pueden interpretar en términos de potenciales, ya que las ecuaciones mencionadas encierran toda la información en las ecuaciones de Maxwell.

1.5.5. Transformaciones de calibre – potenciales electromagnéticos

Se puede aplicar condiciones adicionales para los potenciales φ y \vec{A} , siempre y cuando las ecuaciones del campo magnético \vec{B} y campo eléctrico \vec{E} , (45) y (50) no se vean modificadas, esto se conoce como libertad de calibre (Jackson, 1999, p. 240).

Si se establece los potenciales electromagnéticos como (φ, \vec{A}) , y en adición otros (φ', \vec{A}') , los cuales pertenecen al mismo campo eléctrico \vec{E} y campo magnético \vec{B} , entonces se implementan transformaciones para estos potenciales, las cuales dejan invariante al campo eléctrico y campo magnético (Griffiths, 1999, p. 419).

Estas transformaciones se denominan transformaciones de calibre para los potenciales (φ, \vec{A}) , las cuales vienen dados como:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t), \quad (56)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) \rightarrow \varphi'(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (57)$$

donde, $\Lambda(\vec{x}, t)$ se denomina, función escalar de calibre. Si se introduce la transformación del potencial vector \vec{A} , (56), a la ecuación del campo magnético (45), esta permanece invariante,

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \quad (58)$$

la ecuación (58) no se ve modificada por \vec{A} y \vec{A}' , ya que la adición del gradiente de $\Lambda(\vec{x}, t)$, hace que el rotor de este, sea igual a cero, dejando invariante el campo magnético. Este tipo de invarianza se la denomina invarianza de calibre, y no modifica la física del sistema.

De la misma forma la ecuación para el campo eléctrico (50), que se encuentra en dependencia de los potenciales φ y \vec{A} , permanece invariante, al introducir las transformaciones de calibre, (56) y (57), por lo tanto,

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \vec{E} \quad (59)$$

donde, los términos que depende de la función escalar de calibre Λ , se cancelan, recuperando la ecuación para el campo eléctrico, en esencia es invariante bajo transformaciones de calibre, igual que el campo magnético.

1.5.5.1. Fijando Calibre: Calibre de Coulomb y calibre de Lorentz

Fijar el calibre Coulomb, implica como en magnetostática (Griffiths, 1999, p. 241), elegir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (60)$$

por lo tanto, la ecuación (52), se modifica a:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t), \quad (61)$$

esta es la ecuación de Poisson. La utilidad de fijar el calibre Coulomb, permite que el potencial escalar φ sea fácil de calcular, a partir de la ecuación (61). Por otro lado, la desventaja radica en la dificultad de calcular el potencial vector \vec{A} (Griffiths, 1999, p. 421).

La ecuación diferencial para el potencial vector \vec{A} (55), fijando el calibre Coulomb (60), es:

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{x}, t)}{\partial t}\right], \quad (62)$$

Fijar el calibre de Lorentz, es elegir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (63)$$

lo que establece que en la ecuación (55), el segundo término de la parte derecha de esta se cancele, obteniendo:

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{x}, t). \quad (64)$$

Mientras que la ecuación diferencial para el potencial escalar φ , (52), fijando el calibre de Lorentz (63), se escribe,

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{x}, t). \quad (65)$$

Se logra observar, que fijar el calibre de Lorentz (63), lleva a las ecuaciones de movimiento que están representadas por los potenciales (52) y (55) a ecuaciones de onda (64) y (65) con fuentes, es decir, $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$, que son la densidad de carga y la densidad de corriente respectivamente (Jackson, 1999, p. 242-243).

1.5.5.2. Ecuaciones de Maxwell invariantes de calibre

Las ecuaciones de Maxwell que fueron reducidas a dos, (52) y (55), debido a la introducción de los potenciales electromagnéticos, también son invariantes de calibre.

Para la ecuación (52), se introduce las transformaciones de calibre de los potenciales, lo que resulta a,

$$\nabla^2 \varphi'(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}, t)] = -4\pi\rho(\vec{x}, t), \quad (66)$$

donde, φ' y \vec{A}' , son los potenciales bajo transformaciones de calibre (56) y (57), lo que permite reescribir (52) a,

$$\nabla^2 \left(\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Lambda(\vec{x}, t). \quad (67)$$

Los términos, que corresponden a la derivada temporal de la función escalar de calibre, $\partial\Lambda/\partial t$, se cancelan. Lo que significa que la ecuación (52) permanece invariante bajo transformaciones de calibre, recuperando la ecuación de movimiento original.

De la misma forma la ecuación de movimiento (55), con las transformaciones de calibre de los potenciales, toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) \\ = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \right], \end{aligned} \quad (68)$$

desarrollando (68),

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\nabla^2 \Lambda) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \\ = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla}(\nabla^2 \Lambda) + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (69)$$

Los términos semejantes de (69), que son: $\vec{\nabla}(\nabla^2 \Lambda)$ y la derivada de segundo orden con respecto al tiempo para la función escalar de calibre, $\partial^2 \Lambda / \partial t^2$, se eliminan, recuperando la ecuación de movimiento (55), por ende, es invariante bajo transformaciones de calibre (Orasch & Hohenester, 2014, p. 4-6).

La invarianza de calibre de las ecuaciones de Maxwell, es sin dudar la principal razón por la que los potenciales son simplemente una construcción matemática, sin ningún alcance físico, esto considerado por la electrodinámica clásica. Sin embargo, en el tratamiento cuántico, esto cambia, considerando a los potenciales como los campos primordiales que exponen la descripción del *efecto Aharonov-Bohm* (Kregar, 2011, p. 3).

1.5.6. Teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica

La teoría de Schrödinger demuestra que las partículas elementales, en medios microscópicos se acoplan o se describen mediante las leyes del movimiento ondulatorio, relacionado al comportamiento de una onda de De Broglie, o llamada también función de onda. La teoría dicta la conducta a nivel subatómico, las propiedades de los átomos y de las partículas que lo componen. Siendo una teoría efectiva a bajas energías de otra más general (relativista): la teoría de Dirac, por lo tanto, la teoría de Schrödinger gobierna en un régimen no-relativista (Martin Eisberg & Resnick, 1985, pp. 124-128).

1.5.6.1. La Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

En la mecánica cuántica, la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$ de la partícula, es la que sustenta el comportamiento de la misma, y se la obtiene solucionando la ecuación de onda:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) + V\Psi(\vec{x}, t). \quad (70)$$

La ecuación (70), dispone la evolución temporal de la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$, mediante condiciones iniciales (De la Peña, 2006, p. 98). La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (70), es una ecuación de segundo orden en la derivada espacial y de primer orden en la derivada temporal, donde m es la masa de la partícula, $\Psi(\vec{x}, t)$ la función de onda, V la energía potencial y $\hbar = h/2\pi$ es la constante reducida de Planck.

La ecuación de Schrödinger se puede obtener por un proceso denominado primera cuantización, en el cual,

$$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (71)$$

donde, \hat{p} es el operador momento y \hat{E} es el operador energía (Martin Eisberg & Resnick, 1985, pp. 132-133).

La ecuación de onda mecánico-cuántica es consistente con cuatro argumentos que disponen las propiedades para describir el movimiento ondulatorio de las partículas, estas son:

- i. La ecuación debe ser firme con los postulados de De Broglie-Einstein,

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h}, \quad (72)$$

donde, λ es la longitud de onda y ν la frecuencia de la onda.

- ii. La ecuación debe ser lineal para la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$. Si se tiene dos soluciones $\Psi_1(\vec{x}, t)$ y $\Psi_2(\vec{x}, t)$, para una energía potencial en común V , entonces una combinación lineal de estas soluciones también pertenece a una solución para la ecuación de Schrödinger, por lo tanto,

$$\Psi(\vec{x}, t) = c_1\Psi_1(\vec{x}, t) + c_2\Psi_2(\vec{x}, t). \quad (73)$$

- iii. La energía potencial V puede ser una función solamente espacial \vec{x} y quizás que dependiente del tiempo t . Pero existe un caso particular, en el cual, la energía potencial es:

$$V(\vec{x}, t) = V_0, \quad (74)$$

esto, para el caso de una partícula libre, porque la fuerza que actúa sobre la partícula viene determinada por: $F = -\vec{\nabla}V(\vec{x}, t)$ (Martin Eisberg & Resnick, 1985, p. 129).

- iv. Tiene que ser consistente con la ecuación,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V, \quad (75)$$

donde, E es la energía total de la partícula con masa m , y es igual a la energía cinética $\vec{p}^2/2m$ más su energía potencial V (De la Peña, 2006, p. 54).

Una partícula, se la localiza en un punto en específico, sin embargo, la función de onda se propaga en el espacio, pudiéndose prolongar en un espacio tridimensional \vec{x} , para cualquier instante t . Para expresar la correspondencia directa de la función de onda con el estado de la partícula, se necesita proporcionar la interpretación estadística de Born, (Griffiths & Schroeter, 2018, p. 21), de la función de onda.

Esta interpretación establece la conexión entre las propiedades básicas de la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$ y la partícula, expresada por la densidad de probabilidad $P(\vec{x}, t)$,

$$P(\vec{x}, t) = \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 \quad (76)$$

donde, $\Psi^*(\vec{x}, t)$ el complejo conjugado de $\Psi(\vec{x}, t)$.

La densidad de probabilidad dictamina la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto del espacio \vec{x} al tiempo t .

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{probabilidad de encontrar a la partícula} \\ \text{entre } \vec{x} \text{ y } (\vec{x} + d\vec{x}), \text{ al tiempo } t \end{array} \right\}$$

De acuerdo con la interpretación estadística de la función de onda, (76), la normalización de $\Psi(\vec{x}, t)$, tiene como efecto que la integral de $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$, debe ser igual a uno, por tanto, la partícula tiene que estar en algún punto del espacio,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} = 1. \quad (77)$$

La ecuación de Schrödinger revela que si $\Psi(\vec{x}, t)$ resulta ser una solución también lo es: $A\Psi(\vec{x}, t)$, donde A es cualquier constante (compleja) (Martin Eisberg & Resnick, 1985, pp. 134-136).

Las soluciones no-normalizables no interpretan a las partículas, por ende, deben ser denegadas.

Para algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger, la integral puede ser infinita, es decir no se tiene ningún factor multiplicativo que haga uno a la integral. Lo mismo pasa cuando se tiene soluciones triviales $\Psi = 0$, es decir soluciones no-normalizables no representan a las partículas, y deben ser descartadas.

La función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$, tiene que tender a cero a medida que \vec{x} avanza a (\pm) infinito, de otra forma la función de onda no es normalizable (Griffiths & Schroeter, 2018, pp. 38-39). Resultando que,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} = 0, \quad (78)$$

por tanto, la integral (78), es constante, en otras palabras es independiente del tiempo, si $\Psi(\vec{x}, t)$ es normalizable para $t = 0$, entonces permanece normalizada en todo el tiempo futuro.

1.5.6.2. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

La importancia de toda la teoría recae en resolver la ecuación de Schrödinger (1.70), que relaciona la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$, que describe el comportamiento de la partícula. Para obtener $\Psi(\vec{x}, t)$ se considera al potencial V , independiente del tiempo, para este caso es factible resolver la ecuación (1.70) mediante el método de separación de variables (Griffiths & Schroeter, 2018, p. 58).

El método radica en buscar soluciones en donde la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$, se pueda escribir como el producto de,

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) f(t), \quad (79)$$

la solución (79), al introducirla a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (70) debe satisfacerla, a condición de que la energía potencial no dependa del tiempo $V(\vec{x})$.

Entonces por medio del método de separación de variables se tiene la siguiente ecuación,

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi + V, \quad (80)$$

la cual se satisface si ambos lados de la ecuación son iguales a una constante E ,

$$\frac{df}{dt} = -i \frac{E}{\hbar} f \quad (81)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}) + V\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (82)$$

El método de separación de variables, ha transformado una ecuación diferencial parcial (1.70), a dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución general de la ecuación (81) es $C \exp(-iEt/\hbar)$, sin embargo, la constante C es captada dentro de ψ , siendo el producto de ψ por f , el valor de interés. Por tanto,

$$f(t) = \exp(-iEt/\hbar). \quad (83)$$

La ecuación (82), la cual se denomina ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, no se puede resolver sin determinar el valor del potencial $V(\vec{x})$. Por tanto (79) se escribe como:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \exp(-iEt/\hbar). \quad (84)$$

Las funciones $\psi(\vec{x})$ son conocidas como funciones propias o estados propios, mientras que la constante E es la energía total de la partícula (Martin Eisberg & Resnick, 1985, p. 154).

Si bien la función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$, por si, depende explícitamente del tiempo, la densidad de probabilidad no lo hace, dicho de otra manera,

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^* \exp(+iEt/\hbar) \psi \exp(-iEt/\hbar) = |\psi(\vec{x})|^2. \quad (85)$$

Los estados propios o funciones propias $\psi(\vec{x})$, son las que definen la energía total del sistema. En mecánica clásica, la energía total es denominada Hamiltoniano,

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}), \quad (86)$$

sin embargo, en la teoría cuántica, los operadores son requeridos. Para obtener el operador Hamiltoniano, se emplea el operador del momento canónico (71), obteniendo:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}), \quad (87)$$

dicho de otro modo, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (82), se reescribe como:

$$\hat{H}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (88)$$

La energía total del sistema está definida por el operador Hamiltoniano \hat{H} .

1.5.6.3. Cuantización como un problema de valores propios

Para que cualquier solución, a la ecuación de Schrödinger independiente de tiempo (82), sea aceptable, los estados propios o funciones propias $\psi(\vec{x})$, deben cumplir lo siguiente:

- $\psi(\vec{x})$ será finita y de cuadrado integrable.
- $\psi(\vec{x})$ será mono-valuada en cualquier punto.
- $\psi(\vec{x})$ será una función continua, al igual que sus derivadas espaciales.

Del modo que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (82), incluye a la energía total E , como único parámetro, si las condiciones que se imponen determinan la solución de la ecuación, la energía del sistema físico esta cuantizada, en otras palabras, hay estados propios o funciones propias $\psi(\vec{x})$, solo para valores discretizados de energía E (De la Peña, 2006, pp. 56-57).

Las condiciones impuestas son tal que, si la partícula está ligada a una región, se interpreta que la energía potencial $V(\vec{x})$ es mayor a la energía total fuera de esta región, entonces se dice que la energía esta cuantizada, es decir, la energía toma valores discretos, $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, a estos valores se los conoce como valores propios o estados ligados de energía de la partícula. Sin embargo, para valores del potencial muy grandes o pequeños, los valores propios de energía están repartidos de manera continua (Martin Eisberg & Resnick, 1985, pp. 162-163).

Para cada valor propio de energía le corresponde una función propia, es decir, $\psi_1(\vec{x}), \psi_2(\vec{x}), \psi_3(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x})$.

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO

Se plantea encontrar el hamiltoniano de un electrón en un campo electromagnético, a partir de la interpretación de la fuerza de Lorentz, así mismo, se propone encontrar el valor del potencial vector en un solenoide muy fino, donde se induce una corriente eléctrica. A partir de estos cálculos, se dispone un tratamiento cuántico, encontrando los estados ligados del electrón alrededor del solenoide, y la explicación acerca del cambio en el patrón de interferencia de un haz de electrones alrededor del solenoide, debido al potencial vector. Las dos últimas descripciones son fenómenos directos del *efecto Aharonov-Bohm*.

2.1. Formalismo canónico – electrón sometido a un campo electromagnético

Es un requisito fundamental obtener el formalismo canónico para un electrón en interacción con un campo electromagnético, ya que el tratamiento final que se dará a la dinámica del electrón será mediante el empleo de la mecánica cuántica. Por esa razón se necesita encontrar la lagrangiana y el hamiltoniano del problema. Para ello se usa la interpretación del campo eléctrico \vec{E} y campo magnético \vec{B} en forma de potenciales (Wächter, 2018, p. 2).

2.1.1. Lagrangiana para un electrón en un campo electromagnético

Para un electrón de carga e que se mueve con una velocidad \vec{v} , en un campo electromagnético, la descripción clásica viene dada por la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (89)$$

Se introduce a (89), la representación potencial del campo eléctrico y campo magnético (45) y (50), esto es,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left\{ -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)] \right\}, \quad (90)$$

haciendo uso de la identidad del rotacional,

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (91)$$

la ecuación (90) se reescribe como:

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} \left[\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{x}, t) \right] \right\}. \quad (92)$$

Los términos $\partial \vec{A}/\partial t$ y $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$, se pueden agrupar en un único término, y así simplificar la ecuación (92). Como primer paso tomamos el diferencial total para el potencial vector respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{1}{dt} \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) (V_x dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) (V_y dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) (V_z dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt \right], \quad (93)$$

donde se ha hecho uso de, $dx = V_x dt$, $dy = V_y dt$, $dz = V_z dt$. Los términos en función de las velocidades, se pueden escribir como:

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) V_x + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) V_y + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) V_z = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{x}, t). \quad (94)$$

Así, la ecuación (93) se reescribe como:

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{x}, t), \quad (95)$$

la ecuación (95) se denominada derivada convectiva o sustancial, esta expresión señala, que a medida que la partícula se mueve, el potencial \vec{A} percibe los cambios, ya que el potencial cambia con el tiempo, y al momento que transcurre el tiempo la posición cambia como su validación espacial (Rodríguez, 2013). En consecuencia, la ecuación (92), se reduce, por el hecho de que la ecuación (95) agrupa los términos para convertirlo en uno solo, obteniendo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right) - \vec{\nabla} \left[e \left(\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \right]. \quad (96)$$

Con la representación potencial de la fuerza de Lorentz (2.8), se trata de encontrar la lagrangiana del electrón en un campo electromagnético.

Como prioridad, se calcula el potencial generalizado que esta explícitamente en la ecuación (96). Este potencial, se encontrará haciendo la comparación, entre la representación potencial de la fuerza de Lorentz y la fuerza generalizada que viene dada por,

$$\vec{F}(x_i, \dot{x}_i, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \hat{e}_i, \quad (97)$$

donde, \vec{p} es el momento generalizado, y U es el potencial generalizado, entonces, se concluye de la ecuación (96), que el potencial generalizado para un electrón en el seno de un campo electromagnético, viene dado por la siguiente expresión:

$$U(\vec{x}, \vec{v}, t) = e \left(\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right). \quad (98)$$

Con la obtención del potencial generalizado U , se plantea la lagrangiana \mathcal{L} , que no es más que la energía cinética T menos el potencial generalizado U del electrón, en interacción con el campo electromagnético, de este modo,

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}})^2 - e \left[\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right]. \quad (99)$$

El momento generalizado o momento canónico conjugado \vec{p} , se obtiene haciendo uso de la expresión $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i = p_i$, donde \dot{q}_i representa a la velocidad del electrón \vec{v} , por lo tanto,

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = \Pi + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (100)$$

donde, $\Pi = m\vec{v}$ es el momento cinético (Wächter, 2018, p. 2).

2.1.2. Hamiltoniano para un electrón en un campo electromagnético

Para ver el efecto de los potenciales en el electrón en consideración con la teoría cuántica, se necesita encontrar el formalismo hamiltoniano. Para esto, anteriormente, en el capítulo I, se determinó la formula general para encontrar la función hamiltoniana (29), para cualquier sistema físico, la cual está en dependencia con la función lagrangiana, la fórmula para encontrar el hamiltoniano en nuestro sistema viene dada por,

$$H(x_i, p_i, t) = \left[\sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{L} \right]. \quad (101)$$

No obstante, para este sistema físico el cual consta de un electrón en un campo electromagnético, \dot{x}_i representa la velocidad del electrón \vec{v} , p_i es el momento generalizado \vec{p} , y \mathcal{L} es la lagrangiana (99). Siendo así, (101) puede venir escrita como:

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \left(m\vec{v}^2 + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \left(\frac{1}{2} m\vec{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \quad (102)$$

Simplificando (102),

$$H = \frac{1}{2m} \Pi^2 + e\varphi = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi \quad (103)$$

donde $\Pi = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$, es el momento cinético representado por el momento generalizado \vec{p} y el potencial vector \vec{A} (Orasch & Hohenester, 2014).

Con el hamiltoniano encontrado, se puede llevar directamente el problema del electrón en interacción con el potencial vector hacia un tratamiento cuántico simplemente aplicando primera cuantización, aunque para ello se necesita conocer cuál es el valor exacto del potencial vector \vec{A} en un solenoide, que será tratado en la sección siguiente.

2.2. Potencial vector de un solenoide

Se considera un solenoide largo y de radio pequeño b , donde circula una corriente i con un campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, y flujo magnético Φ_B , colocado a lo largo del eje \hat{z} (Ferrer et al., 2013, p. 196-197).

El campo magnético se encontrará confinado en el interior del solenoide, es decir fuera de este el campo es cero, aun cuando el potencial vector no lo es, lo cual implica la interacción directa con el electrón al pasar por los exteriores del solenoide, siendo este el objetivo fundamental para entender el *efecto Aharonov-Bohm*.

2.2.1. Campo magnético en el solenoide

Como primera parte se calcula el campo magnético en el interior del solenoide, donde circula una corriente i , y las líneas de campo dentro del solenoide, determinan un campo magnético uniforme \vec{B} , figura 1-2.

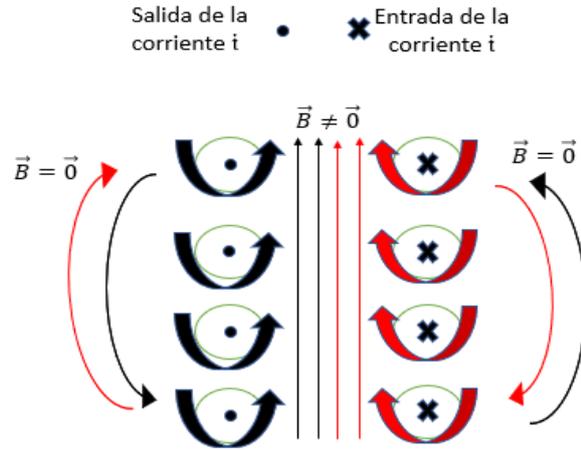


Figura 1-2: Líneas de campo magnético bajo una corriente i en el solenoide, a lo largo de \hat{z} .

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

El campo magnético en el interior del solenoide es diferente de cero $\vec{B} \neq \vec{0}$ mientras que fuera, es igual a cero $\vec{B} = \vec{0}$, en otras palabras, el solenoide es de radio pequeño comparado con su longitud, así, las líneas de campo fuera del solenoide se cancelan, y disminuye la acción del campo. Se calcula el campo magnético \vec{B} dentro del solenoide que se extiende en el eje \hat{z} , empleando la ley de Ampère, la cual es,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} i_{enc}. \quad (104)$$

Esta ley expresa la circulación del campo magnético a través de un circuito cerrado, representado por una integral de línea, donde esta, es directamente proporcional a la corriente que circula por la trayectoria mostrada en la figura 2-2, la corriente encerrada i_{enc} (Griffiths, 1999, p. 238).

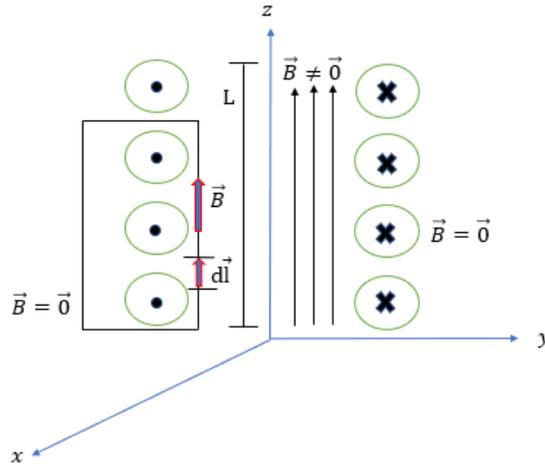


Figura 2-2: Líneas de campo magnético en un circuito cerrado dentro del solenoide, a lo largo de \hat{z} .

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

La integral solo se calcula en la sección interna del solenoide, ya que fuera de este el campo magnético es igual a cero $\vec{B} = \vec{0}$, el diferencial de línea $d\vec{l}$ representa la longitud L de la sección interna, por lo que la ley de Ampère se reduce a:

$$BL = \frac{4\pi}{c} i_{enc}. \quad (105)$$

La intensidad de corriente encerrada i_{enc} se determina considerando el número de espiras del solenoide n por unidad de longitud L y por la corriente i , es decir, $i_{enc} = nLi$, por lo tanto, el campo magnético toma la forma,

$$B = \frac{4\pi}{c} ni. \quad (106)$$

El campo magnético se representa como una cantidad vectorial \vec{B} , debido a la simetría cilíndrica del problema, las líneas de campo se propagan entorno al eje \hat{z} y \vec{B} viene dado como:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} ni \hat{z} & \text{en el interior del solenoide} \\ \vec{0} & \text{fuera del solenoide} \end{cases} \quad (107)$$

2.2.2. Flujo magnético en el solenoide

El cálculo del flujo magnético Φ_B se lo puede desarrollar de dos maneras distintas, una relacionándolo con el campo magnético previamente encontrado y el otro con el potencial vector \vec{A} . Para ello considérese un área anular del solenoide de radio b , sobre la cual pasan las líneas de campo magnético y los diferentes elementos de área o superficie $d\vec{S}$, como se puede observar en la Figura 3-2.

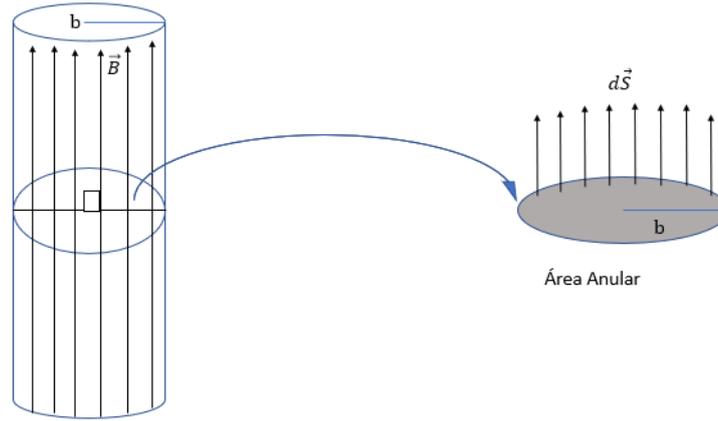


Figura 3-2: Flujo magnético a través de una sección de área de la espira del solenoide de radio b .

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

La relación entre el flujo magnético y el campo magnético viene dada por la siguiente ecuación:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (108)$$

Esta integral de superficie, se resuelve considerando al diferencial de superficie igual a $d\vec{S} = \hat{z} S$ donde S es el área de la espira del solenoide, y \hat{z} el versor respecto al eje z (Ferrer et al., 2013, p. 197). El área de la espira está representada como $S = \pi b^2$, de manera que el flujo magnético viene dado por:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{z} S \quad (109)$$

Al introducir el valor del campo magnético \vec{B} (107), y el valor del área de la espira del solenoide, se tiene finalmente,

$$\Phi_B = \frac{4\pi^2 n i b^2}{c} \quad (110)$$

2.2.3. Potencial vector fuera del solenoide

El valor del potencial vector \vec{A} es fundamental, ya que está explícitamente en la función hamiltoniana previamente encontrada (103).

Si el electrón viaja en las cercanías del solenoide, pero sin entrar, entonces no interactúa directamente con el campo magnético, ya que fuera del solenoide, el campo es igual a cero, sin embargo, el potencial vector no lo es.

Se plantea encontrar el potencial \vec{A} en un punto $P = (\rho, \phi, z)$, coordenadas cilíndricas por la simetría del problema. El potencial es producido por una espira de radio b , donde circula una corriente i , siendo $\rho \gg b$, el radio desde el centro de la espira al punto P fuera del solenoide. Esta representación se la puede ver en la Figura 4-2.

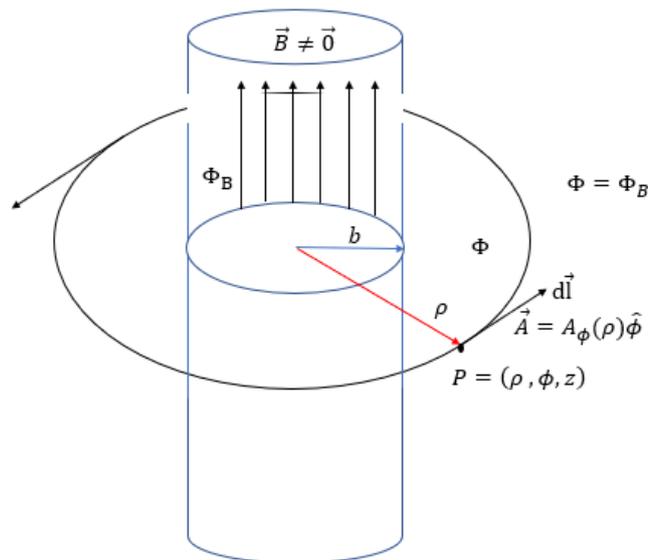


Figura 4-2: Potencial vector \vec{A} en un punto P , producido por una espira de radio b , $\rho \gg b$.

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

El flujo magnético fuera del solenoide Φ tiene el mismo valor que el flujo magnético en el interior del solenoide Φ_B , es decir $\Phi = \Phi_B$, ya que el flujo total, es la suma del flujo dentro y fuera del solenoide.

Como se puede ver en la figura 4-2, el potencial vector solo tiene la componente A_ϕ , ya que el campo magnético viene representado en el eje \hat{z} , esto es, sea

$$\vec{A} = A_\rho(\rho)\hat{\rho} + A_\phi(\rho)\hat{\phi} + A_z(\rho)\hat{z}, \quad (111)$$

donde, las componentes A_ρ y A_z deben ser igual a cero, ya que al realizar el rotacional del potencial vector se tiene:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix} = [\partial_\rho A_\phi(\rho) - \partial_\phi A_\rho(\rho)]\hat{z} \quad (112)$$

La componente $A_\rho(\rho) = 0$, debido a que el potencial vector se proyecta a través del versor $\hat{\phi}$, como se ve en la Figura 5-2. Además, el potencial \vec{A} depende solo de la coordenada ρ , ya que es un campo que varía con la distancia, o sea con la componente radial.

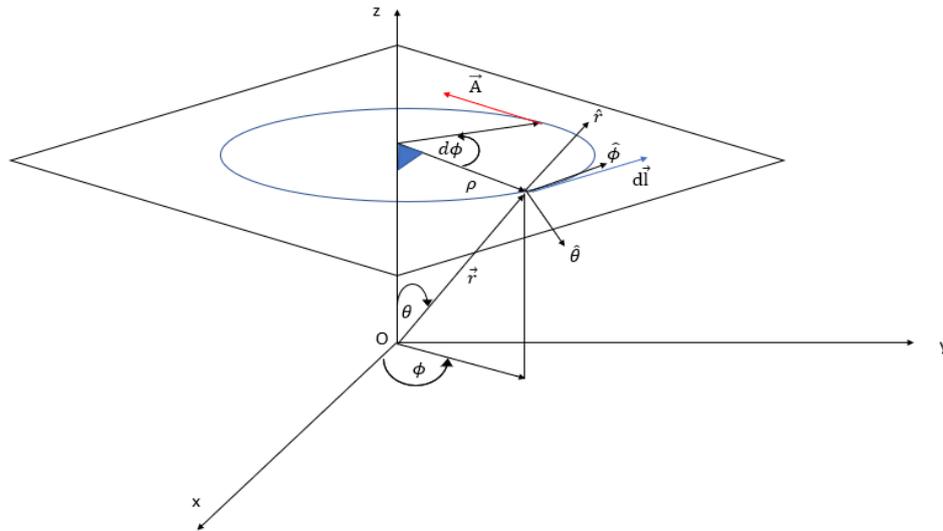


Figura 5-2: Potencial vector \vec{A} , representado en coordenadas cilíndricas, fuera del solenoide con radio ρ .

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

El potencial vector puede venir representado de igual forma en coordenadas esféricas como: $\vec{A}(\rho) \rightarrow \vec{A}(r, \theta) = A_\phi(r, \theta)\hat{\phi}$, véase la figura 5-2, donde, $\rho = r \sin(\theta)$, de ahí la dependencia de r y θ en coordenadas esféricas para el potencial vector.

Para el cálculo del potencial vector, se utiliza el teorema de Stokes, que relaciona dicho potencial con el campo magnético y el flujo magnético (Rodríguez, 2013). Esto viene dado por:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (113)$$

El diferencial de línea es igual a $d\vec{l} = r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$ en coordenadas esféricas, aunque existe la relación $r \sin(\theta) = \rho$, satisfaciendo así, el diferencial de línea en coordenadas cilíndricas $d\vec{l} = \rho d\phi \hat{\phi}$. La ecuación (113) se reescribe,

$$\Phi = \oint A_{\phi} \hat{\phi} \cdot r \sin(\theta) d\phi \hat{\phi}. \quad (114)$$

Desarrollando (114),

$$\Phi = A_{\phi} r \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (115)$$

$$\Phi = 2\pi A_{\phi} r \sin(\theta), \quad (116)$$

donde la componente A_{ϕ} puede escribirse en coordenadas esféricas de tal manera que,

$$A_{\phi}(r, \theta) = \frac{\Phi r \sin(\theta)}{2\pi} \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}, \quad (117)$$

y en coordenadas cilíndricas como:

$$A_{\phi}(\rho) = \frac{\Phi}{2\pi\rho}. \quad (118)$$

Un vector con este módulo y dirección a lo largo de ϕ , se puede representar de la siguiente manera,

$$\vec{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{(\hat{z} \times \vec{r})^2} \quad (119)$$

donde la componente de \vec{r} es $r \sin(\theta) = \rho$, véase la figura 5-2, siendo ρ la distancia desde el eje z (Wakamatsu et al., 2018).

En el límite $b \rightarrow 0$, es decir, para un solenoide muy fino, y considerando $\Phi = \Phi_B$, el potencial vector fuera del solenoide, da origen a un campo magnético nulo en todas partes, excepto sobre el eje \hat{z} , siendo el potencial $\vec{A} \neq \vec{0}$ en la región externa del solenoide (Kregar, 2011, p. 4).

2.3. Efecto Aharonov-Bohm – fenómeno de interferencia

2.3.1. Potencial vector como factor de fase

Para poder describir el *efecto Aharonov-Bohm*, siendo un efecto aplicado a la teoría cuántica, se necesita el formalismo hamiltoniano, para un electrón en un campo electromagnético, esto viene dado por la ecuación (103). Sin embargo, es requerido aplicar primera cuantización, por lo tanto, el operador hamiltoniano toma la forma,

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi \right] = \hat{H}, \quad (120)$$

y, por consiguiente, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo viene dada como:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi \right] \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (121)$$

Si se considera el *efecto Aharonov-Bohm* para el caso en que un electrón se encuentra en una región de conexión múltiple, es decir, cuando $\vec{A} \neq \vec{0}$, y con $\vec{B} = \vec{0}$, se plantea el caso del solenoide descrito en la sección anterior. Al no existir contribución eléctrica, el potencial escalar es cero, por tanto, $e\varphi = 0$. Entonces la ecuación (121) se reduce a,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (122)$$

donde,

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \right] = \hat{H}. \quad (123)$$

En regiones conectadas individualmente, donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$, se puede obtener una solución para (122), manifestando que,

$$\Psi(\vec{x}, t) = \exp[ig(\vec{x})] \Psi_0(\vec{x}, t), \quad (124)$$

donde $\Psi_0(\vec{x}, t)$ es la solución cuando $\vec{A} = \vec{0}$, por lo tanto, la solución de la ecuación de Schrödinger en presencia del potencial vector, no es nada más que, la solución cuando $\vec{A} = \vec{0}$ acompañado de un factor de fase $\exp[ig(\vec{x})]$, en el cual $g(\vec{x})$ es igual a:

$$g(\vec{x}) = \frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}', \quad (125)$$

donde \vec{x}_0 es un punto arbitrario, resultado de la libertad de calibre para el potencial vector \vec{A} , además la función $g(\vec{x})$ depende solamente del camino desde \vec{x}_0 a \vec{x} (Orasch & Hohenester, 2014, p. 9). Este camino arbitrario escogido, se lo establece debido a la transformación de calibre para el potencial vector \vec{A} :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0(\vec{x}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}), \quad |\vec{A}_0| = 0, \quad (126)$$

esta justificación reside debido a:

$$\vec{B} = \vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \leftrightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}) \quad (127)$$

donde $\Lambda(\vec{x})$ es la función escalar de calibre, debido a que el rotacional del gradiente de Λ es cero, se plantea

$$\Lambda(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'. \quad (128)$$

Entonces la función $g(\vec{x})$ que pertenece al factor de fase $\exp[ig(\vec{x})]$ se escribe en función de $\Lambda(\vec{x})$, como:

$$g(\vec{x}) = \frac{e}{\hbar c} \Lambda(\vec{x}). \quad (129)$$

Para comprobar que la función de onda (124) es solución a la ecuación (122), se toma como primer paso el gradiente de $\Psi(\vec{x}, t)$,

$$\vec{\nabla} \Psi = \exp[ig(\vec{x})] [i\vec{\nabla}g(\vec{x})]\Psi_0 + \exp[ig(\vec{x})](\vec{\nabla}\Psi_0). \quad (130)$$

Conjuntamente de (125) y (129), se deduce que $\vec{\nabla}g = e\vec{A}/\hbar c$, por lo tanto (130) se reescribe como:

$$\vec{\nabla} \Psi = \exp[ig(\vec{x})] \left[i \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \right] \Psi_0 + \exp[ig(\vec{x})](\vec{\nabla}\Psi_0). \quad (131)$$

Al aplicar la solución $\Psi = \exp(ig) \Psi_0$, al operador hamiltoniano (123), se obtiene,

$$\hat{H}\Psi = -\hbar^2(\nabla^2\Psi_0) \exp[ig(\vec{x})]. \quad (132)$$

Si se coloca (132) y la solución (124), a la ecuación de Schrödinger (122), entonces los factores de fase se cancelan, dejando a la ecuación de Schrödinger para Ψ_0 , es decir cuando $\vec{A} = \vec{0}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_0(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_0(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (133)$$

En otras palabras, la función de onda para un electrón en las cercanías del solenoide engloba un factor de fase, para $\vec{A} \neq \vec{0}$ en una región donde $\vec{B} = \vec{0}$, considerando a este factor como no arbitrario.

2.3.2. Experimento de la doble rendija

El fenómeno de interferencia sucede por la superposición de ondas, además de obtener franjas estacionarias (patrón de interferencia) (Kregar, 2011, p. 5).

Se propone un experimento donde un haz coherente de electrones se divide en dos, al pasar por rendija de dos ranuras, los dos haces de electrones pasan rodeando al solenoide en una región donde $\vec{A} \neq \vec{0}$ y $\vec{B} = \vec{0}$, para luego recombinarse en la pantalla, donde formaran un patrón de interferencia, esto se puede visualizar en la Figura 6-2.

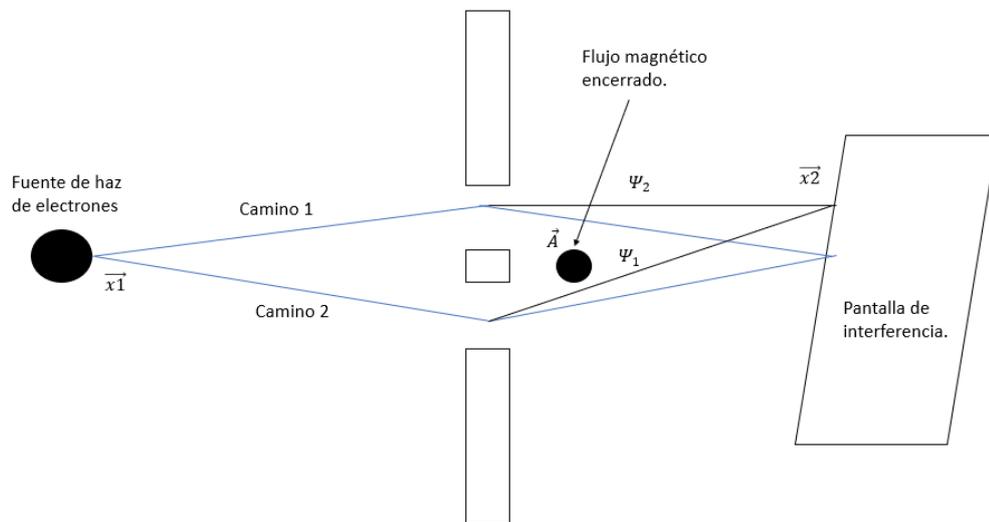


Figura 6-2: Efecto Aharonov-Bohm: haz de electrones dividido en dos a través de un fino solenoide, para luego interferir.

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

En la Figura 6-2 se observa como los dos haces de electrones cada uno representado por su función de onda Ψ_1 y Ψ_2 , describen un camino desde \vec{x}_1 a \vec{x}_2 , al recombinarse los haces, ellos llegan con diferentes fases. La idea de plantear este experimento, no recae en determinar el patrón de interferencia, al contrario, es determinar la cantidad física que provoca que el patrón de interferencia en una región de $\vec{A} \neq \vec{0}$ y $\vec{B} = \vec{0}$, se desplaza, la diferencia de fase. El paso de los haces es lo bastante lento, con el fin de que los campos sean percibidos por las partículas como estáticos, es decir un camino solo en el espacio ($t = 0$) (Y. Aharonov. and D. Bohm, 1959).

Consecuentemente, las soluciones para cada haz de electrones Ψ_1 y Ψ_2 , viene dadas como:

$$\Psi_1 = \Psi_{1,0} \exp[ig_1(\vec{x})], \quad \Psi_2 = \Psi_{2,0} \exp [ig_2(\vec{x})], \quad (134)$$

reemplazando la función $g(\vec{x})$ (125), para cada solución se tiene,

$$\Psi_1 = \Psi_{1,0} \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right], \quad \Psi_2 = \Psi_{2,0} \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right], \quad (135)$$

donde, $\Psi_{1,0}$ y $\Psi_{2,0}$ son soluciones para $\vec{A} = \vec{0}$, y las exponenciales, corresponden a los factores de fase para cada función de onda.

Subsecuentemente, el patrón de interferencia se ve modificado por los factores de fase para cada haz, es así como la diferencia entre ellos, determina lo siguiente,

$$\Delta\Phi = g_1 - g_2 = \frac{e}{c\hbar} \left[\int_{C_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right] = \left(\frac{e}{c\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right) \quad (136)$$

en el que, C_1 y C_2 corresponden a los caminos recorridos por los haces. Dicha diferencia entre las fases se lleva a lo largo de un circuito cerrado alrededor del solenoide, de ahí la integral de línea para el potencial vector (Wakamatsu et al., 2018, p. 261). Aplicando el teorema de Stokes descrito por (113), a la ecuación (136), se obtiene finalmente,

$$\Delta\Phi = \frac{e}{c\hbar} \Phi. \quad (137)$$

La diferencia total entre las fases (137), está determinada por el flujo magnético Φ dentro del solenoide (H. Mansoori & Mirza, 2016, p. 89). En otras palabras, si se altera o modifica el campo magnético dentro del solenoide, cambia la diferencia de fase (137) entre los haces y por ende existe un corrimiento en las franjas estacionarias del patrón de interferencia (Wächter, 2018, pp. 6-7).

El *efecto Aharonov-Bohm* para el patrón de interferencia es establecido en la superposición de los haces, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_{1,0} \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right] + \Psi_{2,0} \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right], \quad (138)$$

se logra reescribir (138) a la forma,

$$\Psi = \left[\Psi_{1,0} \exp \left(\frac{ie}{c\hbar} \int_{C_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} - \frac{ie}{c\hbar} \int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right) + \Psi_{2,0} \right] \exp \left(\frac{ie}{c\hbar} \int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right). \quad (139)$$

Se observa en (139), la diferencia entre las fases para los caminos C_1 y C_2 , de esa manera, empleando (136) y (137), la ecuación (139) se plantea como:

$$\Psi = \left[\Psi_{1,0} \exp \left(\frac{ie}{c\hbar} \Phi \right) + \Psi_{2,0} \right] \exp \left(\frac{ie}{c\hbar} \int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \right). \quad (140)$$

En resultados físicos, esto predice un cambio en el patrón de interferencia, entre $\Psi_{1,0}$ y $\Psi_{2,0}$, ya que su fase relativa ha sido modificada por el flujo magnético, dado por la ecuación (137) (Berry et al., 1980).

En efecto vemos que la aparición del flujo magnético Φ , es debido al potencial vector \vec{A} que se encuentra explícitamente en la ecuación de Schrödinger (122), lo que produce una modificación relativa entre las fases de la función de onda, que describe al electrón en una región externa del solenoide, con campo magnético ausente, este caso se conoce como *efecto Aharonov-Bohm* (Orasch & Hohenester, 2014, p. 16).

2.4. Otro Efecto Aharonov-Bohm - Niveles de energía del electrón alrededor del solenoide.

En esta sección se determina como el potencial vector \vec{A} , tiene influencia directa en la dinámica del electrón, específicamente en los estados ligados o valores propios de energía del mismo. Para lograr esto, se emplea la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, las soluciones a esta ecuación arrojan los estados ligados de energía y los estados propios o funciones propias del electrón, bajo interacción del potencial vector (Griffiths & Schroeter, 2018, pp. 343-344).

Se estudia el caso en que el electrón se mueve circularmente alrededor del solenoide, con un radio ρ , esto es posible debido a que la velocidad de la partícula posee la misma dirección que el potencial vector \vec{A} .

Esto se observa directamente por la lagrangiana que describe a un electrón en un campo electromagnético (99), específicamente en el término de la energía potencial $e \left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)$.

El electrón se encuentra fuera del solenoide, es decir $\rho \gg b$, en esta región el campo magnético es igual a cero $\vec{B} = \vec{0}$, pero no lo es el potencial vector \vec{A} . La partícula igual que el potencial se encuentran en el plano $z = 0$, esto debido a la simetría del problema, así la ecuación de

Schrödinger se plantea en coordenadas cilíndricas con el ángulo azimutal ϕ , ya que la componente del potencial vector es A_ϕ , esta representación se la observa en la figura 7-2.

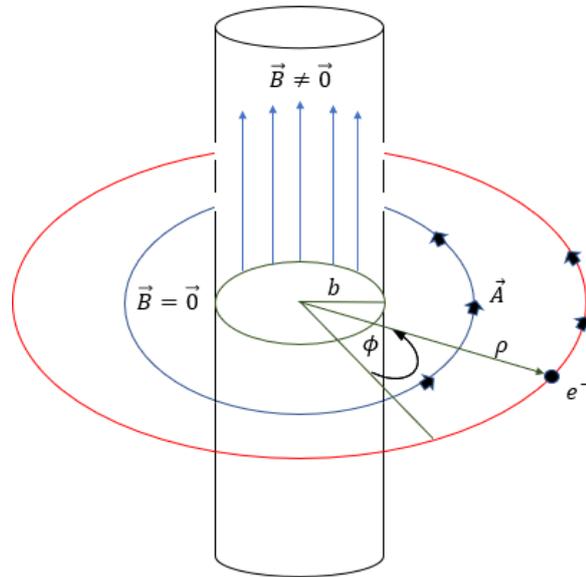


Figura 7-2: Electrón en trayectoria circular debido al potencial vector \vec{A} , alrededor del solenoide.

Realizado por: Omar Muñoz, 2020.

El operador hamiltoniano viene dado por la ecuación (103), ya que, al ser un efecto puramente magnético, no existe una contribución del campo eléctrico, lo que significa que el potencial escalar es igual a cero $\varphi = 0$.

Por tanto, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, con el operador hamiltoniano (103), viene escrita de la forma,

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(\phi) = E \psi(\phi), \quad (141)$$

donde m es la masa del electrón, e la carga del electrón y $\psi(\phi)$ representa los estados propios del mismo, los cuales dependen solo de la componente ϕ , puesto que el electrón describe la misma trayectoria que el potencial vector alrededor del solenoide, el cual solo depende del ángulo azimutal A_ϕ .

El operador $\vec{\nabla}$ viene representando en coordenadas cilíndricas como,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}, \quad (142)$$

y, el potencial vector: $A_\phi = \Phi/2\pi\rho$, en consecuencia, la ecuación de Schrödinger (141) que depende solo de la coordenada ϕ se reescribe como:

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\phi} \hat{\phi} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(\phi) = E \psi(\phi). \quad (143)$$

Desarrollando la expresión al cuadrado de la ecuación (143),

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} - 2i \frac{e}{\hbar c} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{d}{d\phi} + E \frac{2m\rho^2}{\hbar^2} - \left(\frac{e\Phi}{\hbar 2\pi c} \right)^2 \right] \psi(\phi) = 0, \quad (144)$$

el segundo término de (144), la derivada única $d/d\phi$, surge debido al conmutador,

$$\left[\frac{d}{d\phi}, A_\phi \right] \psi(\phi) = \frac{d}{d\phi} (A_\phi \psi(\phi)) - A_\phi \frac{d}{d\phi} \psi(\phi) = \psi(\phi) \frac{d}{d\phi} A_\phi(\rho) = 0 \quad (145)$$

La ecuación (144) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes o de tipo Euler, debido a eso se puede reescribir la ecuación de la forma,

$$\frac{d^2\psi(\phi)}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi(\phi)}{d\phi} + \epsilon \psi(\phi) = 0, \quad (146)$$

donde:

$$\beta = \frac{\Phi}{\Phi_L}, \quad \epsilon = E \frac{2m\rho^2}{\hbar^2} - (\beta)^2. \quad (147)$$

El factor Φ_L es conocido como flujo cuántico de London (Wächter, 2018, p. 9). Este factor es igual a:

$$\Phi_L = \frac{\hbar 2\pi c}{e} = \frac{hc}{e} = 4.135 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2. \quad (148)$$

Para resolver la ecuación (146), se plantea soluciones del tipo:

$$\psi(\phi) = C \exp(i\lambda\phi), \quad (149)$$

con:

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (150)$$

Adicionalmente, $\psi(\phi)$ debe ser normalizable, obteniendo el valor de C de (149), esto es,

$$\int_{-0}^{2\pi} |\psi(\phi)|^2 d\phi = 1 \rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (151)$$

de modo que, $\psi(\phi)$ se obtiene introduciendo el valor λ a (149), obteniendo:

$$\psi_{\pm}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[i \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} \right) \phi \right]. \quad (152)$$

De igual modo, $\psi(\phi)$ debe ser mono-valuada y continua en $\psi_{\pm}(\phi + 2\pi n) = \psi_{\pm}(\phi)$, como se puede ver en la Figura 8-2.

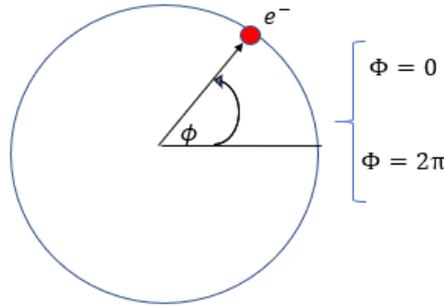


Figura 8-2: Periodicidad de $\psi(\phi)$.

Realizado por: Omar Muñoz, 2020

Esto señala que la probabilidad de encontrar al electrón en $\phi = 0$ es la misma en $\phi = 2\pi$, por corresponder al mismo punto. Si $\psi_{\pm}(\phi + 2\pi n) = \psi_{\pm}(\phi)$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[i \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} \right) (\phi + 2\pi n) \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[i \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} \right) \phi \right]. \end{aligned} \quad (153)$$

La ecuación (153) se cumple si,

$$\exp \left[i \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} - \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} \right) (2\pi n) \right] = 1, \quad (154)$$

$$\exp \left[i \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} + \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} \right) (2\pi n) \right] = 1, \quad (155)$$

lo que significa que el argumento de la exponencial λ , debe ser un entero, es decir,

$$\frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2mE} = n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (156)$$

Con esta condición, se consiguen los estados ligados de energía para el electrón, que vienen dados por:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_L} \right)^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (157)$$

donde $\Phi_L = \hbar 2\pi c/e$. Por último, las funciones propias $\psi(\phi)$, acogen la forma:

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(in\phi) \quad (158)$$

De (157), se deduce que el espectro de energía para el electrón en interacción con el potencial vector \vec{A} posee degeneración doble. Los niveles de energía se sujetan a la intensidad del flujo magnético Φ , a la cual el electrón no está expuesto.

CAPITULO III

3. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

3.1. Discusión sobre el flujo magnético Φ y flujo de London Φ_L .

Se imagina como primera situación al solenoide apagado, es decir en ausencia de un flujo magnético, y el electrón se encuentra en el estado fundamental, para $n = 0$.

Si se incrementa el flujo lentamente, considerando el teorema adiabático, que dictamina que si colocamos al electrón en un estado de energía no degenerado y se varía los parámetros gradualmente (flujo magnético), el electrón permanecerá en el mismo estado propio, en otras palabras, para $n = 0$. De igual manera, el electrón percibe al potencial \vec{A} como estático, debido al teorema adiabático.

No obstante, a medida que se aumenta el flujo magnético Φ , se logra alcanzar $\Phi = \Phi_L$. En consecuencia, el electrón ya no se encuentra en el estado fundamental, según la ecuación (157).

Al caracterizar el flujo magnético Φ con el parámetro de intensidad δ , se tiene,

$$\frac{\Phi}{\Phi_L} = \delta \quad (159)$$

dicho de otra manera, el flujo Φ es múltiplo de Φ_L , y aumenta por unidad de flujo de London Φ_L .

3.2. Significado de n positiva y n negativa para los niveles de energía

Según los estados propios $\psi_n(\phi)$ para el electrón, dados por (158) e igualmente los estados ligados de energía (157), n toma valores enteros. Los niveles de energía del electrón (157), pueden reescribirse como:

$$E_n = \frac{1}{2m\rho^2} \left(n\hbar - \frac{e\Phi}{2\pi c} \right)^2. \quad (160)$$

De la ecuación (160) se deduce que, los estados ψ_n tienen un momento angular canónico específico L_z , dado por:

$$L_z = n\hbar \quad (161)$$

donde el momento angular tiene componente en z , ya que el electrón orbita al solenoide el cual está colocado entorno al eje z , y el número n cuantiza la componente L_z del momento angular orbital en múltiplos de \hbar (161). Por lo tanto, para valores positivos de n el electrón se mueve en dirección de las agujas del reloj, y en dirección contraria para valores de n negativos.

Además, los valores propios del electrón, determinan si su energía es mayor o menor. Se representa los niveles de energía de la forma:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n - \frac{e\Phi}{\hbar c} \right)^2. \quad (162)$$

Si n adquiere valores negativos entonces la energía del electrón será mayor que para valores negativos, esto debido a la carga del electrón ($e = -e_0 < 0$). En otras palabras (162) queda representada como:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n + \frac{e_0\Phi}{\hbar c} \right)^2. \quad (163)$$

3.3. Espectro de energía no degenerado (electrón alrededor del solenoide)

Para cualquier sistema físico, al cual una partícula pertenece, su espectro de energía se denomina no degenerado, cuando para cada nivel de energía (estados ligados de energía o valores propios) existe un solo estado propio ψ_n que lo caracterice.

Por ejemplo, se tiene el caso de un oscilador armónico cuántico, el cual se emplea para examinar las oscilaciones de átomos en moléculas, los valores propios de energía para este sistema vienen dados por:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (164)$$

Los niveles de energía están cuantizados, en otras palabras, solo adquieren valores discretos. Asimismo, se logra identificar que el estado fundamental de energía para este caso no es cero, al contrario, es $(1/2)\hbar\omega$. Esto es un ejemplo de sistema no degenerado, ya que, para valores enteros de n , a cada nivel de energía (164) le corresponde un solo estado propio ψ_n .

Regresando al caso del electrón alrededor del solenoide, planteado anteriormente, en el cual el flujo magnético es múltiplo del flujo de London, entonces, a medida que se aumenta el flujo en el solenoide se alcanza $\Phi = \Phi_L$.

Para este caso, el sistema puede ser no degenerado, esto se deduce de la formula (157), siempre y cuando valores de n posean la misma magnitud, pero difieran de signo. Por ejemplo:

$$E_{+2} = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(2 - \frac{\Phi}{\Phi_L} \right)^2 \quad (165)$$

$$E_{-2} = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(-2 - \frac{\Phi}{\Phi_L} \right)^2 \quad (166)$$

Por tanto, las energías E_{+2} y E_{-2} , asociadas a diferentes estados ψ_{+2} y ψ_{-2} , difieren, por lo que se tiene que el espectro de energía es no degenerado para este caso, con $\delta = 1$ y $n = \pm 2$.

3.4. Espectro de energía degenerado (electrón alrededor del solenoide)

Un ejemplo claro acerca de un sistema cuántico con degeneración, es la solución para un átomo hidrogenoide, en tal sistema, los niveles energéticos del átomo consiguen acoger dos electrones con el mismo valor de energía (mismo autovalor), de manera que, cada electrón está en uno de los dos estados probables para este autovalor, en consecuencia, los dos estados son estados degenerados.

Otro sistema cuántico con degeneración, es para el caso en que un electrón orbita un solenoide, donde el campo magnético está ausente, pero el potencial vector no, es decir, el caso de este estudio. El espectro energético aquí presenta doble degeneración, considerando $\Phi = \delta\Phi_L$, en el cual el flujo magnético al interior del solenoide aumenta en unidades del flujo de London Φ_L , hasta alcanzar el mismo valor $\Phi = \Phi_L$, para $\delta = 1$. Para diferentes valores de n , sin considerar el caso no degenerado (valores de n de igual magnitud y que difieran de signo), el sistema presenta doble degeneración si δ es semientero o entero, ya que existe dos posibles estados propios que posean la misma energía, obsérvese la figura 1-3.

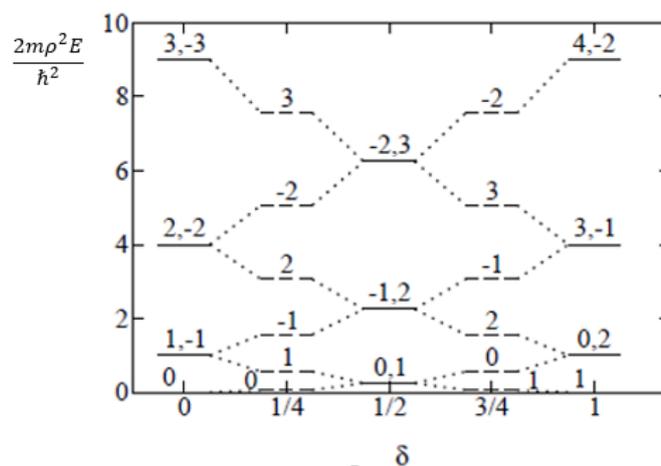


Figura 1-3: Espectro de energía para distintos valores de n e intensidades del flujo magnético.

Realizado por: (Ferrer et al., 2013).

Por ejemplo, para dos estados ψ_{-2} y ψ_4 , asociados al mismo valor de energía, y $\delta = 1$ esto es,

$$E_{-2} = E_4 = \frac{9\hbar^2}{2m\rho^2}. \quad (167)$$

Al fenómeno en el cual, el flujo aumenta en unidades del flujo de London, y con un espectro de energía con degeneración doble, se lo conoce como flujo espectral, ya que los niveles de energía para un electrón alrededor de un solenoide el cual es encendido adiabáticamente, depende principalmente del valor del flujo magnético, al cual el electrón no está expuesto.

Según (157), los niveles están relacionados al valor del flujo magnético, sin embargo, en la región donde el electrón orbita el solenoide, el flujo magnético no está presente. Entonces, la aparición del flujo Φ recae en el potencial vector \vec{A} , presente en el operador Hamiltoniano. El potencial \vec{A} determina los posibles estados del electrón cuando este orbita el solenoide en una locación con $\vec{B} = \vec{0}$, una causa directa de la importancia de los potenciales en la mecánica cuántica, y sin duda una clara descripción del *efecto Aharonov-Bohm*.

3.5. Discusión acerca de la importancia del factor de fase en el fenómeno de interferencia

La aparición del factor $\exp[i\theta(\vec{x})]$, sucede al considerar el caso en que un electrón se dispone a una región donde $\vec{B} = \vec{0}$, pero el potencial es $\vec{A} \neq \vec{0}$, la solución a la ecuación de Schrödinger vendrá dada para el caso en que el potencial es $\vec{A} = \vec{0}$ más el factor de fase, por lo tanto este factor, no es ninguna arbitrariedad.

La importancia del potencial en el fenómeno de interferencia, se da en la diferencia de fase total entre dos haces de electrones que pasan por el solenoide, para luego recombinarse y formar un patrón de interferencia en la pantalla, esta diferencia entre las fases de la función onda que representa a cada haz, viene dado por la ecuación,

$$\Delta\Phi = \frac{e}{c\hbar}\Phi. \quad (168)$$

En otras palabras, la interferencia de dos haces de electrones con sus respectivas funciones de onda, se ve modificada por el flujo magnético dentro del solenoide, sin embargo, los haces no experimentan este flujo. Así pues, el flujo magnético nace de la relación del potencial vector entorno a un circuito cerrado mediante el teorema de Stokes.

A medida que el flujo magnético aumenta en el interior del solenoide, la diferencia de fase entre los haces se ve modificada, y por consiguiente su patrón de interferencia cambia (desplazamiento de las franjas estacionarias en la pantalla). Esta diferencia (3.10) ha sido calculada previamente por (Chambers, 1960) y se ha convertido en una evidencia experimental directa del significado físico del potencial vector \vec{A} en ausencia de campos, es ha esto a lo que se llama efecto *Aharonov-Bohm*, de igual manera otro *efecto Aharonov-Bohm* es el descrito anteriormente para los niveles de energía del electrón.

CONCLUSIONES

- La teoría clásica, que describe el comportamiento de un electrón, viene fundamentada por la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana, siendo la última, una formulación que lleva al sistema clásico a la mecánica cuántica de una manera muy natural, mediante el operador Hamiltoniano. En la mecánica cuántica es necesario el formalismo canónico, de esa manera los potenciales no son eliminados de las ecuaciones de movimiento (ecuación de Schrödinger).
- El campo magnético generado por un solenoide solo está presente en el interior del solenoide, y es nulo fuera del mismo. A diferencia del campo magnético \vec{B} , el potencial vector asociado \vec{A} está presente tanto dentro como fuera del solenoide, esto debido a la relación entre el flujo magnético y el potencial, debido al teorema de Stokes. En consecuencia, es importante la representación potencial de los campos eléctrico y magnético, no solo para determinar el valor del potencial vector, sino también porque esto conlleva a establecer la formulación canónica a partir de la ecuación clásica de movimiento para un electrón en un campo electromagnético, la fuerza de Lorentz.
- Los estados ligados de energía para el electrón, en una región del solenoide donde el campo magnético es nulo, pero no el potencial, son proporcionales al valor del flujo magnético que se genera dentro del solenoide, al cual el electrón no está sometido, sin embargo, la interacción con el potencial vector determina que los autovalores de energía se relacionen con el flujo, ya que este está incluido en el valor del potencial.
- El factor de fase, que aparece como solución a la ecuación de Schrödinger para el electrón que orbita el solenoide, es el encargado directo, para describir el cambio en el patrón de interferencia entre dos haces de electrones. Los haces al pasar por una región del solenoide donde $\vec{B} = \vec{0}$ y $\vec{A} \neq \vec{0}$ adquieren diferentes fases, la diferencia de las fases de los haces viene determinada por el valor del flujo magnético dentro del solenoide, el patrón cambia a medida que el flujo Φ cambia, una consecuencia directa del potencial vector \vec{A} (*efecto Aharonov-Bohm*).
- Los potenciales electromagnéticos sugieren ser entidades físicas mucho más fundamentales que los campos físicos. El efecto *Aharonov-Bohm* es un fenómeno netamente de origen cuántico. En mecánica clásica los potenciales no tienen ningún significado físico, porque las ecuaciones envuelven solo cantidades de campo, en otras palabras, los potenciales son establecidos como campos auxiliares netamente matemáticos, de ahí la relevancia de las transformaciones de calibre de estos, para dejar invariante las ecuaciones de movimiento en electrodinámica. No obstante, en la teoría cuántica, estos campos auxiliares se consideran

como cantidades con significado físico para describir la dinámica de partículas cargadas, que se toma en regiones del espacio donde los campos físicos están ausentes, pero no los potenciales, y el *efecto Aharonov-Bohm* existe.

RECOMENDACIONES

- Es necesario el formalismo canónico para cualquier sistema físico, si lo que se quiere es describir al sistema mediante la teoría cuántica.
- Para posibles experimentos acerca del *efecto Aharonov-Bohm* es recomendable usar un toroide magnético, en vez de un solenoide puesto que el toroide provee de un campo magnético en su interior sin fugas, y la aparición del potencial vector para la descripción del efecto.
- Para la observación del fenómeno de interferencia, la fuente del haz de electrones debe ser ideal en comparación con la longitud de onda, para un haz coherente, y de la misma forma considerar instrumentos que generen un campo magnético sin fugas al exterior, para que los haces al interferir, sea en una región donde los campos son excluidos.

BIBLIOGRAFÍA

AHARONOV, Y., & CASHER, A. Topological Quantum Effects for neutral particles, 1984. *Physical Review Letters*, 53(4), 319–321.

AVILA, N., ROSALES, D., RICO, K., & HAMILTON, D. *Transformaciones de Legendre y Ecuaciones de Hamilton*, 2016, 1–6.

BERRY, M. V. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes, 1984. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 392(1802), 45–57. <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023>.

BERRY, M. V, CHAMBERS, R. G., STENHOLM, S., MORANDI, G., MENOSSI, E., AFANASIEV, G. N., & LOUDON, R. Exact Aharonov-Bohm wavefunction obtained by applying Dirac's magnetic phase factor, 1980. *European Journal of Physics*, 1, 240–244.

BOHM, D., & AHARONOV, Y. Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, 1961. *Physical Review*, 123(4), 1511–1524.

BOHM, D., & AHARONOV, Y. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, 1959. *Physical Review*, 1(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485>

BOYER, T. H. Classical electromagnetic deflections and lag effects associated with quantum interference pattern shifts: Considerations related to the aharonov-bohm effect, 1973. *Physical Review D*, 8(6), 1679–1693. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.1679>

BOYER, T. H. Proposed Aharonov-Casher effect: Another example of an Aharonov-Bohm effect arising from a classical lag, 1987. *Phys. Rev. A*, 36(10), 5083–5086.

CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux, 1960. *Physical Review Letters*, 5(1), 3–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.5.3>

DE BEAUREGARD, C. Physical Reality of Electromagnetic Potentials?, 1967. *Physics Letters*, Institut Henri Poincaré, Paris, France 25(2), 2–3.

DE LA PEÑA, L. *Introducción a la Mecánica Cuántica*, 2006. (3ra ed.; Fondo de Cultura Economica, Ed.). Mexico DF.

EHRENBERG, W., & SIDAY, R. E. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics, 1949. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 62(1), 8–21. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/62/1/303>

FERRER, R., MASSMAN, H., ROESSLER, J., & ROGAN, J. *Mecánica cuántica I*, 2013. (Vol. 1). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>

GÉLVEZ, A. L., GUTIERREZ, W., & PRADA, F. Efecto Aharonov-Bohm en puntos cuánticos no unifromes, 2015. *Innovaciencia*, 3(1), 9–17.

GRIFFITHS, D. J. Introduction to Electrodynamics, 1999. In P. Hall (Ed.), *Notes and Queries* (3ra ed., Vol. s9-V). <https://doi.org/10.1093/nq/s9-V.121.316-c>

GRIFFITHS, D. J., & SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*, 2018. (3ra ed.). <https://doi.org/10.1142/8428>

HOSSEINI MANSOORI, S. A., & MIRZA, B. Non-Abelian Aharonov-Bohm effect with the time-dependent gauge fields, 2016. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 755, 88–91. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.02.004>

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*, 1999. (3ra ed.; I. John Wiley and Sons, Ed.). California.

KREGAR, A. Aharonov-Bohm effect, 2011. *Mesoscopic Physics in Complex Media*, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1051/iesc/2010mpcm01005>

LANDAU, L., & LIFSHITZ, E. M. Mecánica. In *Intelligence*, 2004. (2da ed., Vol. 1). <https://doi.org/10.1109/TMAG.2004.836740>

MARTIN EISBERG, R., & RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 1985. (2da ed.; I. JOHN WILEY AND SONS, Ed.). Santa Barbara.

MARTON, L., SIMPSON, J. A., & SUDDETH, J. A. An electron interferometer, 1954. *Review of Scientific Instruments*, 25(11), 1099–1104. <https://doi.org/10.1063/1.1770945>

OLARIU, S., & POPESCU, I. I. The quantum effects of electromagnetic fluxes, 1985. *Reviews of Modern Physics*, 57(2), 339–436. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.339>

ORASCH, O., & HOHENESTER, U. *The Aharonov-Bohm-Effect*, 2014. *Karl-Franzens-Universität Graz*. Retrieved from <http://physik.uni-graz.at/~uxh/diploma/orasch14.pdf>

PESHKIN, M., TALMI, I., & TASSIE, L. J. The quantum mechanical effects of magnetic fields confined to inaccessible regions, 1961. *Annals of Physics*, 12(3), 426–435. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(61\)90069-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90069-0)

POZZI, G., LU, P. H., DUCHAMP, M., & DUNIN-BORKOWSKI, R. E. Generation of electron vortex beams using line charges via the electrostatic Aharonov-Bohm effect, 2017. *Ultramicroscopy*, 181, 1339–1351. <https://doi.org/10.1016/j.ultramic.2017.06.001>

REITZ, J. R., MILFORD, F. J., & CHRISTY, R. W. *Fundamentos de la teoría electromagnética*, 1996. (4ta ed.; A.-W. Iberoamericana, Ed.). Barcelona.

RODRÍGUEZ, V. *Electromagnetismo I*, 2013. (1ra ed.; U. Editorial, Ed.). Madrid.

SPAVIERI, G., & QUINTERO, J. Nuevos efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm y la masa del fotón, 2011. *Publicaciones En Ciencias y Tecnología*, 5, 53–62.

THORNTON, S. T., & MARION, J. B. *Classical Dynamics of particles and systems*, 1995. (5ta ed.; Thomson, Ed.). Virginia.

TONOMURA A., ENDO, J., KAWASAKI, T., MATSUDA, T., & OSAKABE, N. Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor, 1986. *Phys. Rev. A*, 34(2), 815–821.

WÄCHTER, S. *The Aharonov-Bohm effect*, 2018. Proseminar on Algebra, Topology and Group theory in physics. pp. 1–14. Zurich.

WAKAMATSU, M., KITADONO, Y., ZOU, L., & ZHANG, P. The role of electron orbital angular momentum in the Aharonov–Bohm effect revisited. 2018. *Annals of Physics*, 397, 259–277. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.08.010>

WANG, R. F. *The Dynamical Mechanism of the Aharonov-Bohm Effect*, 2007, pp. 1–13. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/0705.4011>

WERNER, F. G., & BRILL, R. F. Significance of electromagnetic in the quantum theory in the interpretation of electron interferometer fringe observations, 1960. *Physical Review Letters*, 4(7), 4–7.