



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE BIOFÍSICA

**APLICACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN EL
RÉGIMEN NO-RELATIVISTA PARA OBTENER LOS
NIVELES DE LANDAU DE UN ELECTRÓN SOMETIDO A
UN CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO.**

Trabajo de Titulación:

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar el grado académico de:

BIOFÍSICA

AUTOR: BRIGITTE MAGDALENA MERINO NARANJO

DIRECTOR: PhD. RAFAEL OMAR RODRÍGUEZ

Riobamba – Ecuador

2020

© 2020, **Brigitte Magdalena Merino Naranjo**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Brigitte Magdalena Merino Naranjo soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en esta Tesis, declaro que el presente trabajo de titulación es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otra fuente están debidamente citados y referenciados. La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.

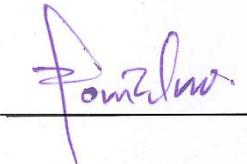
Riobamba, 05 de marzo del 2020

A handwritten signature in purple ink, appearing to be 'Brigitte Merino', is written over a horizontal dashed line.

Brigitte Magdalena Merino Naranjo.
Ci: 060481204-0

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE BIOFÍSICA

El Tribunal de la Comisión de Trabajo de Titulación certifica que: El trabajo de titulación: Tipo: Proyecto de investigación, **APLICACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN EL RÉGIMEN NO-RELATIVISTA PARA OBTENER LOS NIVELES DE LANDAU DE UN ELECTRÓN SOMETIDO A UN CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO**, de responsabilidad de la señorita **Brigitte Magdalena Merino Naranjo**, ha sido minuciosamente revisado por los miembros de Tribunal del trabajo de Titulación, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, quedando autorizada su presentación.

	Firma	Fecha
Dr. Richard Williams Pachacama Choca. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2020-03-05
Dr. Rafael Omar Rodríguez DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN		2020-03-05
Dr. Rommel de Lacruz Guerrero Mora. MIEMBRO DEL TRIBUNAL		2020-03-05

DEDICATORIA

A las personas que más admiro y amo en la vida, mis padres, Mario y Sarita por su amor, apoyo, confianza, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.

A todas las personas que me han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a la persona que me impulsó a realizar este trabajo y que me brindó ayuda y confianza para terminarlo, para ti Omar.

Brigitte

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Mario y Sarita, por ser las personas más importantes en mi vida, gracias por estar siempre a mi lado apoyándome, dándome su amor, cariño y protección, sin ustedes no hubiera sido posible llegar hasta aquí, les agradezco por todo lo que hacen por mí.

De manera especial a mis tutores de tesis Dr. Rafael Omar Rodríguez, y el Dr. Rommel Guerrero, por sus enseñanzas, por haberme guiado con paciencia, por estar pendientes de mí y nunca dejarme sola en cada avance en la elaboración de este trabajo de titulación, gracias por haberme brindado el apoyo para desarrollarme profesionalmente y seguir cultivando mis valores.

A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y a mis docentes por haberme brindado tantas oportunidades y enriquecerme en conocimiento, además de conocer muchas personas que de alguna manera influyeron positivamente en el desarrollo y crecimiento de mi vida.

Brigitte

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
ÍNDICE DE ANEXOS.....	x
ABREVIATURAS.....	xii
RESUMEN.....	xiii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1.MARCO TEÓRICO REFERENCIAL	2
1.1. Antecedentes de la investigación	2
1.2. Planteamiento del problema	4
<i>1.2.1. Efecto Hall Clásico</i>	<i>4</i>
<i>1.2.2. El efecto Hall Cuántico</i>	<i>7</i>
1.3. Justificación del problema	8
1.4. Objetivos	9
<i>1.4.1. Objetivo General</i>	<i>9</i>
<i>1.4.2. Objetivos Específicos</i>	<i>9</i>
1.5. Marco teórico	10
<i>1.5.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana</i>	<i>10</i>
<i>1.5.1.1. Coordenadas Generalizadas</i>	<i>10</i>
<i>1.5.1.2. Principio de Hamilton y Ecuaciones de Lagrange.....</i>	<i>11</i>
<i>1.5.1.3. Ecuaciones canónicas de Hamilton.....</i>	<i>11</i>
<i>1.5.2. Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz</i>	<i>12</i>
<i>1.5.2.1. Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.....</i>	<i>12</i>
<i>1.5.2.2. Fuerza de lorentz.....</i>	<i>14</i>
<i>1.5.3. Potencial Escalar y Vectorial</i>	<i>17</i>
<i>1.5.4. Transformaciones de Calibre de los potenciales</i>	<i>17</i>
<i>1.5.5. Teoría Cuántica no-relativista</i>	<i>17</i>
<i>1.5.5.1 Ecuación de Schrödinger.....</i>	<i>17</i>
<i>1.5.5.2. Función de Onda</i>	<i>18</i>
<i>1.5.5.3. Cuantización de la energía.....</i>	<i>19</i>
<i>1.5.5.4. Cuantificación de la energía en la teoría de Schrödinger:</i>	<i>19</i>
<i>1.5.6. Método de Separación de Variables</i>	<i>19</i>
<i>1.5.7. Resolución de ecuaciones diferenciales por el método de serie de potencias ...</i>	<i>21</i>

1.5.8. Polinomios de Hermite	22
1.5.8.1. Propiedades básicas de los polinomios de Hermite	23

CAPÍTULO II

2.MARCO METODOLÓGICO.....	24
2.1. Descripción clásica de un electrón en un campo electromagnético	24
2.1.1. Forma potencial de las ecuaciones de Maxwell	24
2.1.2. Importancia de los potenciales electromagnéticos	25
2.1.3. Invariancia de calibre de las ecuaciones de Maxwell	26
2.2. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana del electrón en un campo electromagnético.....	27
2.3. Descripción cuántica de un electrón en un campo magnético homogéneo.	30
2.3.1. Niveles de Landau.....	35

CAPITULO III

3.RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	37
CONCLUSIONES.....	39
RECOMENDACIONES.....	40
BIBLIOGRAFÍA	
ANEXOS	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Fuerza de Lorentz.	2
Figura 2-1: Representación esquemática de un transistor MOSFET de silicio.	3
Figura 3-1: Niveles de Landau.....	4
Figura 4-1: Efecto Hall Ordinario.....	5
Figura 5-1: Esquema del efecto Hall en un conductor.....	5
Figura 6-1: Fuente de Campo Magnético	12
Figura 7-1: Esquema de líneas de campo eléctrico.....	13
Figura 8-1: Representación de las líneas de campo magnético	14
Figura 9-1: Ilustración de la interacción y generación de campos eléctricos y fuerzas eléctricas para el caso $q < 0$	15
Figura 10-1: Ilustración de la interacción y generación de campos eléctricos y fuerzas eléctricas para el caso $q > 0$	15
Figura 11-1: Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico uniforme.....	16
Figura 1-2: Representación cartesiana del campo magnético y eléctrico en la muestra.	31
Figura 2-2: Movimiento circular del electrón.....	33

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1-1: Campo magnético y resistividad	6
Gráfico 2-1: Resistencia eléctrica con respecto al campo magnético aplicado.....	8
Gráfico 1-3: Representación de los niveles de energía	36
Gráfico 2-3: Distribuciones de probabilidad.....	37

ÍNDICE DE ANEXOS

- ANEXO A:** DEGENERACIÓN DE ESTADOS EN UNA MUESTRA FINITA.
- ANEXO B:** CÓDIGO EN MATLAB PARA GRAFICAR LOS NIVELES DE ENERGÍA, DESDE $N=0$ HASTA $N=6$. FIGURA 3-3.

ABREVIATURAS

$\vec{E}(\vec{x}, t)$	Campo Eléctrico
$\vec{B}(\vec{x}, t)$	Campo Magnético
\vec{F}	Fuerza de Lorentz
$\vec{A}(\vec{x}, t)$	Potencial vectorial magnético
$\Phi(\vec{x}, t)$	Potencial escalar
Π	Momento Cinético
$L(\vec{x}, \vec{v}, t)$	Función Lagrangiana
$H(\vec{x}, \vec{p}, t)$	Función Hamiltoniana
$\psi(x, y, z)$	Función Propia de Onda
ω	Frecuencia del ciclotrón
H_n	Polinomios de Hermite
\hbar	Constante de Planck
q	Carga del electrón
m	Masa del electrón
i	Unidad imaginaria

RESUMEN

El interés de esta tesis fue estudiar los niveles de Landau, los cuales aparecen a partir de la cuantización de los electrones en presencia de campos magnéticos, estudiar el comportamiento de los electrones con movimiento bidimensional en el seno de un campo magnético homogéneo. Lo impresionante del estudio de este sistema fue que las ecuaciones de movimiento se redujeron a la forma de un oscilador armónico cuántico unidimensional, donde la frecuencia es la frecuencia del ciclotrón y su espectro de energía luce igual al del oscilador. Para empezar, se realizó el tratamiento clásico a partir del formalismo canónico con el que se planteó las ecuaciones de movimiento para así llegar al Lagrangiano y Hamiltoniano que contienen la información del sistema de un electrón en un campo magnético homogéneo en función de los potenciales electromagnéticos. La segunda parte del trabajo corresponde al tratamiento cuántico no relativista para representar al electrón con movimiento bidimensional en un campo magnético homogéneo, antes de empezar con la teoría cuántica por simplicidad de cálculos se eligió el calibre de Landau, condición con la cual se asegura que el campo magnético se encuentre en la dirección z, el cual no afecta en las propiedades físicas observables. Finalmente, el Hamiltoniano y el calibre de Landau, se introdujeron en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para ser resuelta la misma que se solucionó mediante series de potencia, a partir del cual se obtuvo la solución a la función propia que de una manera elegante se reescribe en función de los polinomios de Hermite y se llega a los niveles de Landau que están degenerados y por lo tanto el conjunto de estados para cada nivel de energía representa un nivel de Landau, además esta degeneración también fue apreciada en las densidades de probabilidad.

Palabras clave: <NIVELES DE LANDAU>, <CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO>, <LAGRANGIANO (FUNCIÓN MATEMÁTICA)>, <HAMILTONIANO (FUNCIÓN MATEMÁTICA)>, <DEGENERACIÓN DE NIVELES DE ENERGÍA>, <ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER>, <TRANSFORMACIONES DE CALIBRE>, <POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS>, <CALIBRE DE LANDAU>, <POLINOMIOS DE HERMITE>.



ABSTRACT

This thesis is aimed at studying Landau levels which appear from the quantization of electrons in the presence of magnetic fields, to study the behavior of electrons with two-dimensional motion within a homogeneous magnetic field. The impressive thing about the study of this system was the motion equations were reduced to the shape of a one-dimensional quantum harmonic oscillator, where the frequency is the cyclotron frequency and its energy spectrum looks the same as the oscillator. To begin with the classic treatment was carried out based on the canonical formalism with which the motion equations were raised in order to arrive to Lagrangian and Hamiltonian that contains the system information of an electron in a homogeneous magnetic field based on the electromagnetic potentials. The second part of the work corresponds to the non-relativistic quantum treatment to represent the electron with two-dimensional motion in a homogeneous magnetic field; before starting the quantum theory for calculations simplicity the Landau gauge was chosen, condition which it is ensured the Magnetic field is in the z-direction, which does not affect the observable physical properties. Finally, the Hamiltonian and the Landau gauge were introduced into the independent time Schrödinger equation to be solved, which was solved through power series, which the eigenfunction solution was obtained in an elegant way, it was rewritten according to Hermite polynomials and it gets the Landau levels that are degenerated and therefore the set of states for each energy level represents a Landau level, in addition this degeneration was also appreciated in the probability densities.

Keywords: <LANDAU LEVELS>, <HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD>, <LAGRANGIAN (MATHEMATICAL FUNCTION)>, <HAMILTONIAN (MATHEMATICAL FUNCTION)>, <ENERGY LEVELS DEGENERATION>, <SCHRÖDINGER EQUATION>, <GAUGE TRANSFORMATIONS>, <ELECTROMAGNETIC POTENTIALS>, <LANDAU GAUGE>, <HERMITE POLYNOMIALS>.



INTRODUCCIÓN

Estudiar teóricamente las propiedades de transporte del gas de electrones en dos dimensiones sometido a un campo electromagnético supone uno de los temas que interesa a la física para dar aplicaciones inmediatas en el campo de la tecnología, en cuanto tiene que ver a la construcción de dispositivos electrónicos que se basan en semiconductores. (Mayado, 2011)

El presente trabajo está estructurado en cuatro capítulos, el Capítulo I se describe los antecedentes, los trabajos previos que sirven de guía para comenzar y los objetivos a llegar.

En el Capítulo II, se muestra todo el material bibliográfico revisado útil para la posterior resolución del problema.

El Capítulo III se subdivide en tres importantes fases, en la primera fase se plantea el Hamiltoniano para la partícula cargada que interacciona con el campo electromagnético, adicionalmente se muestra que esta descripción es más simple si se plantea en términos de los potenciales escalares y vectoriales mediante las ecuaciones de Maxwell.

La segunda se discute la existencia de simetrías de calibre las cuales predicen que la física provista por los potenciales electromagnéticos no cambia.

La tercera parte se estudia el movimiento de la partícula interactuando con el campo usando la mecánica cuántica mediante la ecuación de Schrödinger.

Finalmente, el Capítulo IV se analizan los resultados obtenidos para el caso particular del electrón en un campo electromagnético, la aparición de los niveles de Landau y su significado físico en cuanto tiene que ver a la degeneración de estados y el espectro de energía, así como también como las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

1.1. Antecedentes de la investigación

Los estados de Landau surgen a partir de la cuantización de las órbitas de las partículas eléctricamente cargadas en presencia de campos magnéticos homogéneos. En la mecánica clásica, las partículas obedecen las leyes de Newton, las cuales logran predecir sus trayectorias en todo instante, consiguiendo así una descripción determinista del sistema. Para el estudio se considera una partícula con carga q y velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético de intensidad \vec{B} . Esta partícula experimenta una fuerza debida a la ley de la fuerza de Lorentz. (Aticas et al., 2012)

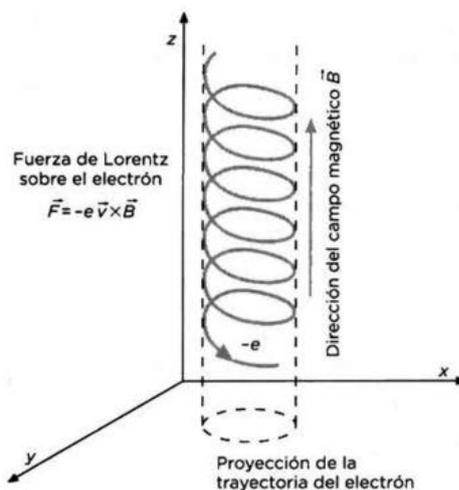


Figura 1-1: Fuerza de Lorentz.

Fuente: Lev Landau.1930.

El estudio de los niveles de Landau empieza desde la comprensión del efecto hall cuántico que se entiende muy bien y puede explicarse simplemente en términos de orbitales de partículas solas, de un electrón en un campo magnético, se comienza pues, con el problema de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme. (Mayado, 2011)

En la presencia de un campo magnético los electrones están sometidos a la fuerza de Lorentz que curva su trayectoria en la dirección perpendicular a las del campo aplicado y su velocidad. Estos electrones son desviados y se acumulan en los bordes de la muestra utilizada, generando un campo eléctrico que compensa exactamente la fuerza de Lorentz.

El voltaje que resulta genera una resistencia eléctrica, llamada de Hall, que crece conforme crece el campo magnético aplicado. No obstante, clásicamente no es posible explicar que la dependencia de la resistencia con el campo magnético presenta una serie de escalones. Esta dependencia es una manifestación del carácter cuántico de los electrones y es conocido como el efecto Hall cuántico. (Villatoro, 2009)

Klaus von Klitzing en 1980, intentaba mejorar la movilidad electrónica en transistores de efecto de campo de silicio (MOSFET) en el Laboratorio de Altos Campos Magnéticos, cuando descubrió que la resistencia Hall de estos dispositivos estaba cuantizada casi exactamente.

En estos transistores una capa nanométrica de silicio, que es semiconductor, es depositada entre dos capas de óxido de silicio, que es aislante, confinando el movimiento de los electrones en la capa de silicio, que por su ínfimo grosor permite a los electrones formar gases bidimensionales en los que se mueven libremente. Al aplicar un campo magnético intenso, la energía de los estados electrónicos se cuantiza en los llamados niveles de Landau. (Von Klitzing, 1984).

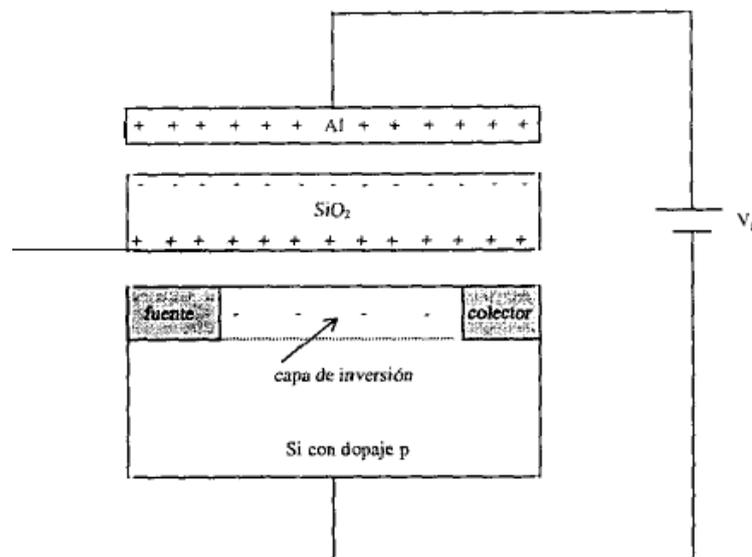


Figura 2-1: Representación esquemática de un transistor MOSFET de silicio.

Fuente: Díaz, Carlos.2003

En presencia de un campo magnético, los niveles de energía de una partícula están igualmente espaciados, esto quiere decir, con el espacio entre cada nivel proporcional al campo magnético aplicado \vec{B} . Los niveles de energía se llaman niveles de Landau. El espectro se ve muy, muy diferente al de una partícula libre en ausencia de un campo magnético. Se empieza con una partícula moviéndose en un plano. Esto tiene dos grados de libertad. Pero se termina escribiendo esto en términos del oscilador armónico que tiene un solo grado de libertad. Es decir, el campo

magnético \vec{B} reduce los grados de libertad de movimiento a uno y cambia el otro grado de libertad por la cuantización de la energía. (Tong, 2016)

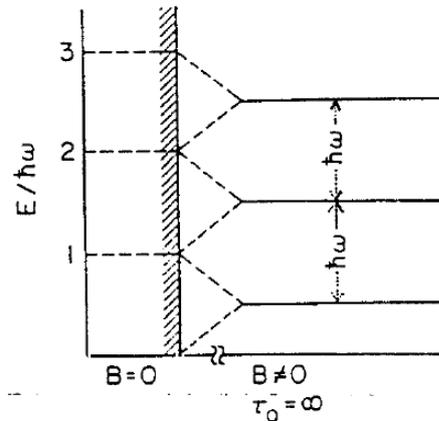


Figura 3-1: Niveles de Landau.

Fuente: Urbina.2002

1.2. Planteamiento del problema

Existen estudios previos que describen el efecto clásico que tiene un campo magnético sobre una carga en movimiento que es la de curvar su trayectoria: Si la velocidad de la carga es ortogonal al campo dicha carga describirá una órbita circular: Si la velocidad forma un cierto ángulo con el campo la trayectoria será helicoidal: Estos comportamientos están descritos perfectamente por la Fuerza de Lorentz (Barco Ríos, Rojas Calderón y Restrepo Parra, 2012).

1.2.1. Efecto Hall Clásico

El efecto Hall clásico original fue descubierto en 1879 por Edwin Hall. Es una simple consecuencia del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético. Este efecto se aprecia cuando por una lámina conductora o semiconductora se hace circular una corriente y se coloca en presencia de un campo magnético. Las cargas que están circulando experimentan la fuerza de Lorentz y son desplazadas hacia uno de los bordes de la lámina. Esto hace que aparezca un exceso de carga negativa en uno de los bordes en tanto que en el otro aparece un exceso de carga positiva, lo que provoca que aparezca un campo eléctrico inducido, que a su vez ejerce una fuerza eléctrica sobre las cargas. Esta fuerza eléctrica, actúa en la misma dirección, pero en sentido contrario a la magnética. La acumulación de cargas continua hasta que el campo eléctrico se hace suficientemente grande como para que la fuerza eléctrica compense a la magnética. Esta situación se caracteriza por la diferencia de potencial que aparece entre los bordes denominada voltaje Hall.

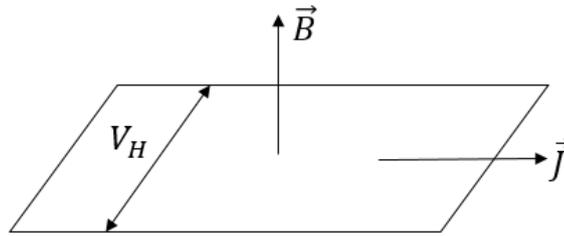


Figura 4-1: Efecto Hall Ordinario.

Fuente: Merino, Brigitte.2020.

Las mediciones del voltaje Hall se utilizan para determinar la densidad y el signo de los portadores de carga en un material, así como un método para determinar campos magnéticos. (Tong, 2016).

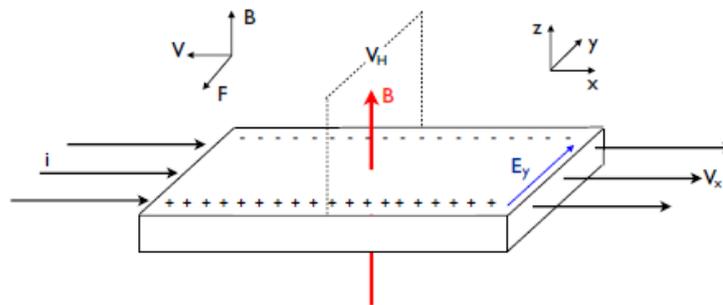


Figura 5-1: Esquema del efecto Hall en un conductor.

Fuente: Mascaró, Pablo.2014

El efecto Hall en metales es muy pequeño comparado con los semiconductores, dada la alta concentración de portadores de los primeros en comparación con los segundos. Entre los metales, el bismuto es el que tiene un efecto Hall mayor, con mucha diferencia respecto del resto de metales. Los portadores se desviarán dependiendo de su signo dando lugar a la acumulación de cargas en el borde de la placa, con lo que aparece el campo eléctrico inducido transversal llamado campo de Hall, hasta que el equilibrio se alcance cuando la fuerza magnética compense con la debida fuerza del campo Hall:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_H = -q\vec{E}_H \quad (1)$$

El campo eléctrico Hall:

$$\vec{E}_H = -\left(\frac{1}{qn}\right)\vec{J} \times \vec{B} = -R_H(\vec{J} \times \vec{B}) \quad (2)$$

R_H es la resistencia Hall que viene dado como:

$$R_H = \frac{B}{qn} \quad (3)$$

Donde n es el número de portadores de carga.

Se observa entonces que la resistencia depende del campo magnético. El Voltaje Hall nos permite determinar la concentración de portadores y el signo de los mismos.

$$V_H = \frac{R_H I}{d} \quad (4)$$

Para un sistema bidimensional:

Se empieza desde la relación dada por la Ley de Ohm que relaciona la densidad de corriente con la conductividad y el campo eléctrico:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5)$$

La conductividad de Drude dada por la expresión:

$$\sigma_o = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (6)$$

Se toma en cuenta que ahora σ y ρ son tensores de orden dos y las magnitudes vectoriales \vec{j} y \vec{E} están dentro de un espacio bidimensional, estando \vec{B} en la tercera dimensión. Así:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (8)$$

Se tiene entonces,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/\sigma_o & \omega\tau/\sigma_o \\ -\omega\tau/\sigma_o & 1/\sigma_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{m}{nq^2\tau} \\ \rho_{xy} &= \frac{B}{nq} \end{aligned} \quad (10)$$

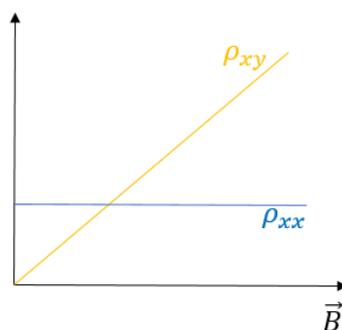


Gráfico 1-1: Campo magnético y resistividad

Realizado por: Merino, Brigitte.2020

Gráficamente se observa que la resistividad transversal se incrementa linealmente con el campo magnético.

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (11)$$

La conductividad es la inversa de la resistividad así:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}^{-1} \quad (12)$$

Así se obtiene las expresiones para la conductividad:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_o}{1+(\omega\tau)^2} \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{-\sigma_o\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \quad (13)$$

Cien años más tarde K.von Klitzing, G.Dorda y M.Pepper, descubrieron que el Efecto Hall, en condiciones de temperatura muy baja y campos magnéticos intensos, manifestaba características diferentes a las observadas por Hall, que lo identificaban como un fenómeno claramente cuántico. (Mayado, 2011)

El problema radica en que hasta el hallazgo del efecto Hall cuántico se pensaba que tanto la conductividad como la resistividad eran magnitudes que dependían de las características del material, así como de la temperatura, de la geometría y del tamaño de la muestra. Para la observación del efecto Hall cuántico, se establecen condiciones como bajas temperaturas, grado de desorden, muestras grandes, esta dependencia con las características del material desaparecen dando lugar a cantidades constantes y cuantizadas, entonces para poder interpretar este resultado se debe recurrir a la teoría cuántica. El espectro continuo de una partícula cargada libre, en presencia de un campo magnético constante, da lugar a una serie de niveles de energía, que son los conocidos niveles de Landau. (Mayado, 2011).

1.2.2. El efecto Hall Cuántico

El efecto Hall Cuántico, sin embargo, se observa bajo condiciones muy distintas. La muestra es de material semiconductor; y en particular, en el primer experimento, se utilizaron transistores de efecto de campo de silicio (MOSFET o Si-MOSFET), en los cuales es posible conseguir un gas bidimensional de electrones. Esta muestra se sometió a un campo magnético muy intenso (del orden de 15 T), perpendicular, y a temperaturas muy bajas (por debajo de los 2K). Bajo estas condiciones K.von Klitzing y sus colaboradores observaron que la resistividad Hall no variaba linealmente con el campo magnético, sino que aparecen una serie de mesetas en las cuales la resistividad es constante, e independiente de las características del experimento. Además, se observó que la conductividad longitudinal, en la dirección del flujo de corriente, se anula

precisamente en los intervalos correspondientes a estas mesetas. En definitiva, la conductividad Hall aparecía cuantizada como un múltiplo entero de $\frac{q^2}{h}$. Las mesetas están separadas por intervalos de comportamiento normal. (Mayado, 2011). En los intervalos correspondientes a las mesetas el tensor de conductividad es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{q^2}{h} \\ i\frac{q^2}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Y la resistencia Hall (que para una muestra bidimensional coincide con la resistividad) medida con una precisión mayor que 10^{-8} es:

$$R_H = \frac{h}{iq^2} = \frac{25812.80\Omega}{i} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (15)$$

Este resultado, observado experimentalmente, es sorprendente si tenemos en cuenta que la medida se realiza directamente sobre el material macroscópico, con toda la complejidad que ello implica.

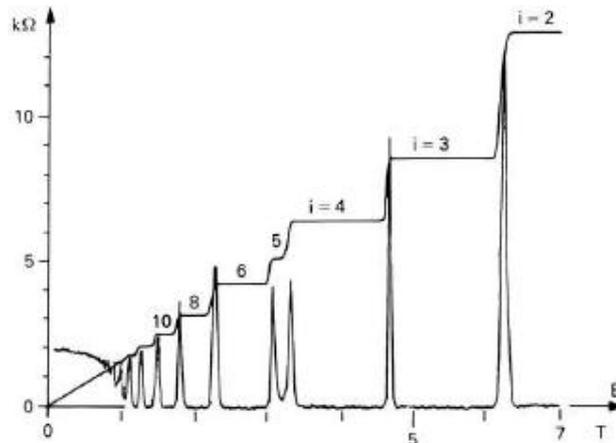


Gráfico 2-1: Resistencia eléctrica con respecto al campo magnético aplicado.

Fuente: Tong, David. 2016

1.3. Justificación del problema

La cuantización es un procedimiento matemático para construir un modelo cuántico para un sistema físico a partir de su descripción clásica. Clásicamente una corriente de electrones atravesando por una muestra fina de un conductor o semiconductor y sometido a un campo magnético perpendicular a su dirección de movimiento, ocurre que este campo magnético produce

la desviación de las cargas induciendo un campo eléctrico que a su vez genera fuerza eléctrica que es compensada con la fuerza magnética, como resultado las cargas se acumulan en el borde de la placa y producen una diferencia de potencial, este es el efecto Hall, una de sus aplicaciones consiste en encontrar el número de portadores de carga y su uso es para el estudio de conducción en semiconductores y otros materiales. Además, la resistividad y conductividad son características macroscópicas dependientes de propiedades de la muestra. Mientras que si las condiciones cambian como a bajas temperaturas y campos magnéticos intensos ocurre que la conductividad eléctrica se discretiza, los electrones bidimensionales siguen órbitas de tipo ciclotrón debido al campo magnético. A nivel cuántico aparecen los niveles de Landau, estos niveles degeneran y todos los electrones libres acaban con energías en estos niveles, saltando entre ellos conforme crece el campo magnético, dando como resultado la cuantización eléctrica en el material tomando valores a saltos como escalones.

La resistividad Hall, no era lineal como se esperaba clásicamente, tenía mesetas a ciertos valores en los cuales era constante e independiente de las características del experimento, así como también la conductividad longitudinal en dirección del flujo de corriente se anula en los intervalos correspondientes a las mesetas, y aparece cuantizada como múltiplos en función de la constante de Planck, este es el efecto Hall cuántico, es por eso que este trabajo se plantea revisar la descripción cuántica de esto que fue un descubrimiento muy importante ya que la resistencia como tal pasó a ser un efecto cuántico, no solamente dependía del tipo de material, si no de su estructura interna, su estructura atómica es decir su estructura cuántica.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Describir los Niveles de Landau para un electrón sometido a un campo magnético homogéneo utilizando la teoría cuántica no-relativista.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Utilizar el formalismo canónico para describir a un electrón en un campo electromagnético.
- Otorgar un tratamiento cuántico para el electrón en un campo magnético homogéneo.
- Plantear la solución de los niveles de Landau para el caso expuesto del electrón sometido al campo magnético homogéneo.

1.5. Marco teórico

1.5.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

La Mecánica de Lagrange o lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana, más flexible y a menudo más útil para resolver problemas. Se basa en un principio de mínima acción, pero se puede obtener de la mecánica newtoniana, ya que ambas son equivalentes. La mecánica lagrangiana es importante porque permite de manera natural ampliar la mecánica para incluir campos (por ejemplo, la electrodinámica, que incluye partículas cargadas junto con campos electromagnéticos).

1.5.1.1. Coordenadas Generalizadas

Un sistema dado de N partículas puede estar sometido a ligaduras (restricciones sobre el movimiento de las partículas). Es el caso de una masa que se mueve sobre un plano horizontal (cuyo movimiento en la dirección normal se encuentra anulado), o una masa que forma un péndulo simple (cuya distancia al centro de rotación es constante). Se llaman grados de libertad de un sistema, s , al número de maneras independientes en que se puede mover éste (incluyendo implícitamente las ligaduras). Entonces $s = 3N - M$, donde M es el número de ligaduras. Llamamos coordenadas generalizadas a cualquier conjunto de s coordenadas que nos permite especificar de manera única el estado del sistema. Pueden ser coordenadas cartesianas, angulares, etc. (Velasco, 2004). El conjunto de coordenadas generalizadas es:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t) = \{q_j(t)\} \quad (16)$$

A este conjunto asociamos un conjunto de velocidades generalizadas:

$$\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t) = \{\dot{q}_j(t)\} \quad (17)$$

A partir de las coordenadas cartesianas, y siempre que las ecuaciones de ligadura sean holónomas (esto es, involucren sólo coordenadas y no velocidades), vamos a poder poner unas coordenadas cartesianas en términos de las otras y definir un conjunto posible de coordenadas generalizadas. Las coordenadas generalizadas se van a poder relacionar con las coordenadas cartesianas mediante:

$$X_{ai} = X_{ai}(q_1, q_2, \dots, q_s; t) = X_{ai}(\{q_j\}; t) \quad (18)$$

$$\dot{X}_{ai} = \dot{X}_{ai}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) \quad (19)$$

La relación implica, en general, al tiempo (debido a que puede haber ligaduras móviles). Siempre que el jacobiano de la transformación anterior sea no nulo, existirá una transformación inversa:

$$q_j = q_j(\{X_{ai}\}; t), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\{X_{ai}, \dot{X}_{ai}\}; t) \quad (20)$$

1.5.1.2. Principio de Hamilton y Ecuaciones de Lagrange.

El principio de Hamilton para sistemas conservativos en coordenadas generalizadas es:

$$\delta S[\{q_j\}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = 0 \quad (21)$$

donde L es el lagrangiano, que se puede construir a través de las fórmulas de transformación entre coordenadas cartesianas y generalizadas:

$$L(\{X_{ai}, \dot{X}_{ai}\}) = T(\{X_{ai}\}) - U(\{\dot{X}_{ai}\}) \quad (22)$$

$$L(\{X_{ai}, \dot{X}_{ai}\}) = T(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) - U(\{q_j\}; t) \equiv L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) \quad (23)$$

Este es la Lagrangiana definido como la diferencia entre la energía cinética y el potencial, depende de las variables generalizadas, las coordenadas y las velocidades.

Para definir las ecuaciones de movimiento se utiliza la ecuación de Lagrange que viene dada como:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (24)$$

En cambio, la mecánica Hamiltoniana se trata de otra reformulación de la mecánica newtoniana que nos da otro punto de vista. Es un punto de partida imprescindible para formulaciones más teóricas de la mecánica y en aplicaciones como la mecánica celeste o la mecánica cuántica. La mecánica hamiltoniana consiste en utilizar como variables $\{q_j, p_j\}$, es decir, en sustituir las velocidades por los momentos generalizados.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (25)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento se parte del hamiltoniano, definido en mecánica lagrangiana como una posible constante del movimiento. Aunque no sea constante para un cierto problema, es una función que se puede definir de todas maneras. (Velasco, 2004). Se observa que, en su definición, contiene los momentos generalizados:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} - L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (26)$$

1.5.1.3. Ecuaciones canónicas de Hamilton

Se construye el Hamiltoniano a través de la transformación de Legendre:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \dot{q}_j(q_j p_j) p_j - L(q_j, \dot{q}_j(q_j p_j), t) \quad (27)$$

Un sistema que admite un Hamiltoniano se denomina un sistema canónico. Estos sistemas tienen su relevancia en mecánica cuántica, ya que la teoría se puede desarrollar solo desde el punto de vista de sistemas canónicos. A partir de la transformada de Legendre se deriva y se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\dot{p}_j \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \dot{q}_j \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}\tag{28}$$

Hasta aquí lo que tiene que ver con respecto al formalismo canónico, ahora es momento de analizar las ecuaciones que describen a la partícula en un campo electromagnético.

1.5.2. Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz

Se comprende como campo magnético a la representación matemática del modo en que las fuerzas magnéticas se distribuyen en el espacio que circunda a una fuente magnética. Al igual que el campo eléctrico, el magnético es un campo vectorial, es decir, una cantidad vectorial asociada con cada punto del espacio. Las líneas de campo magnético son una forma de representar este campo magnético. Un campo magnético se encuentra siempre rodeando una fuente como un imán o un electroimán, o también una corriente eléctrica en desplazamiento. (Sears y Zemansky, 2009)

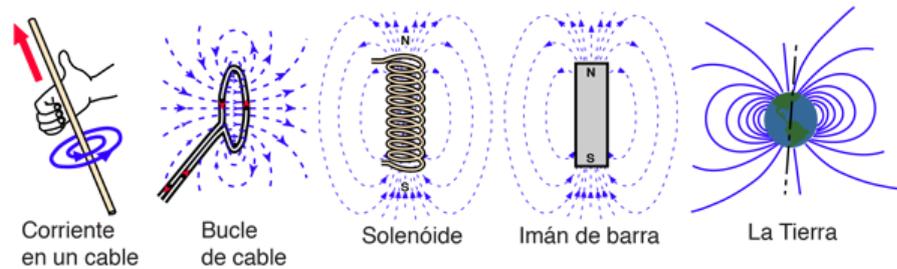


Figura 6-1: Fuente de Campo Magnético

Fuente: Nave, Olmo. 2005

1.5.2.1. Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

Las ecuaciones de Maxwell dan una descripción completa de los campos electromagnéticos leyes que relacionan campos eléctricos y magnéticos.

La primera y segunda ley relacionan los campos y sus fuentes, mientras que la tercera y cuarta ley se relacionan con variación en el tiempo.

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (30)$$

$$\partial_t \vec{E}(\vec{x}, t) - \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) \quad (31)$$

$$\partial_t \vec{B}(\vec{x}, t) + \nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (32)$$

Donde $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{j}(\vec{x}, t)$ son las densidades de carga y corriente, respectivamente, fuentes de los campos electromagnéticos.

La Ley de Gauss (29) para el campo eléctrico. Muestra la divergencia del campo eléctrico que es proporcional a la densidad de carga en el interior de la superficie; es decir, el campo eléctrico diverge o converge desde una carga fuente, gráficamente se representa con vectores, cuando estos salen es positivo y si entran es negativo.

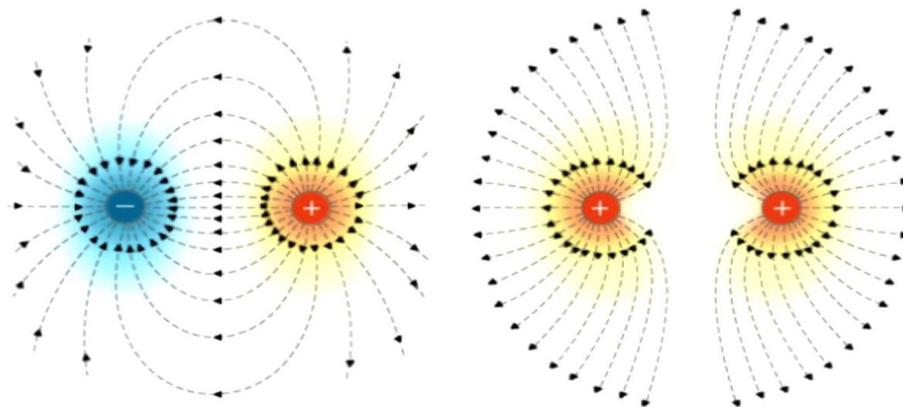


Figura 7-1: Esquema de líneas de campo eléctrico.

Fuente: Zemansky. 2009.

La segunda (30), es la Ley de Gauss para el campo magnético, muestra la divergencia del campo magnético es igual a cero representa la idea que el campo magnético no diverge. Intuitivamente quiere decir que no entran ni salen vectores, a diferencia del campo eléctrico en la figura anterior, más bien las líneas de campo son cerradas, comienzan y terminan en el mismo lugar.

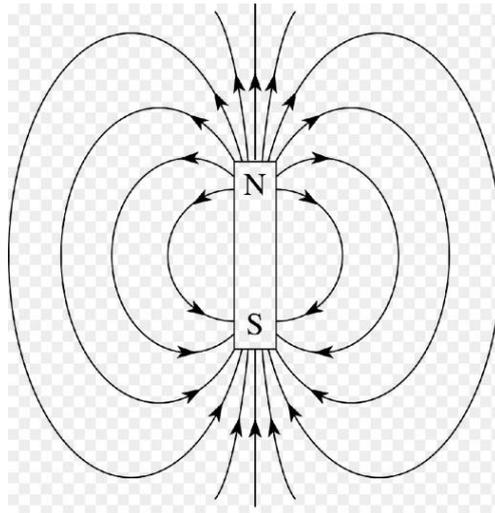


Figura 8-1: Representación de las líneas de campo magnético.

Fuente: Zemansky.2009

La tercera (31), es la Ley de Ampere, muestra que cuando hay un campo eléctrico que varía con el tiempo se produce un campo magnético. Esta ecuación explica que, si se tiene un conductor, que tiene una densidad de corriente \vec{j} , ésta provoca la aparición de un campo magnético \vec{B} rotacional alrededor del conductor y que el rotor de \vec{B} apunta en el mismo sentido que \vec{j} .

La cuarta (32) es la Ley de Faraday, explica que un campo magnético que varía en el tiempo implica la existencia de un campo eléctrico. El rotacional del campo eléctrico es igual a menos la derivada temporal del campo magnético con respecto al tiempo, es decir, todo campo magnético que varíe en el tiempo inducirá un campo eléctrico.

1.5.2.2. Fuerza de Lorentz

En la imagen a continuación se visualiza lo que sabemos es la fuerza electrostática que sufre una carga q en función de otra carga eléctrica, considerada como fuente q_1 .

Si eliminamos la carga de prueba, podemos pensar que el espacio que rodea a la carga fuente ha sufrido algún tipo de perturbación, ya que una carga de prueba situada en ese espacio sufrirá una fuerza. (Barco Ríos, Rojas Calderón y Restrepo Parra, 2012).

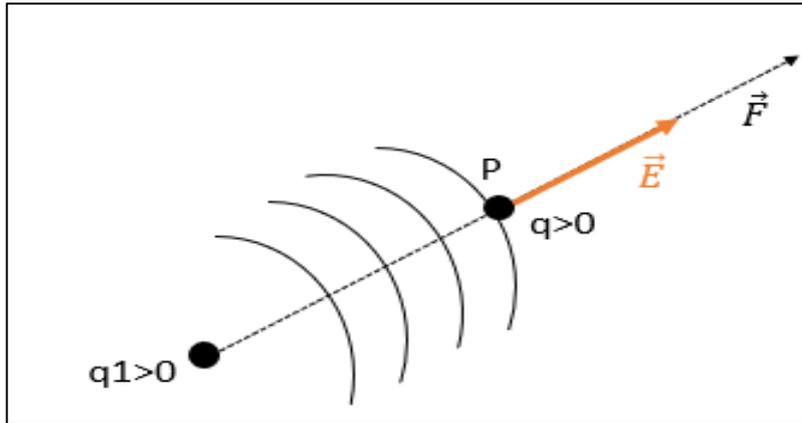


Figura 9-1: Ilustración de la interacción y generación de campos eléctricos y fuerzas eléctricas para el caso $q < 0$

Realizado por: Merino, Brigitte. 2020

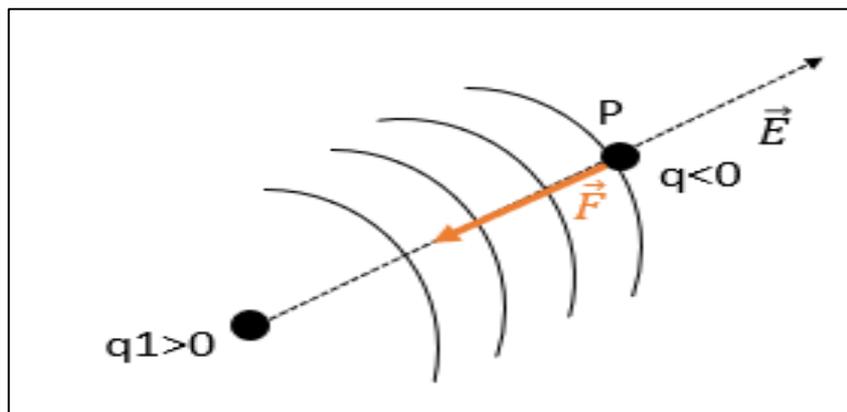


Figura 10-1: Ilustración de la interacción y generación de campos eléctricos y fuerzas eléctricas para el caso $q > 0$.

Realizado por: Merino, Brigitte. 2020

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (33)$$

Esta expresión muestra la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga q de prueba debido a un campo eléctrico producido por otra carga q_1 considerada como la carga fuente.

Una partícula cargada que se mueve en un campo eléctrico sufre una fuerza eléctrica \vec{F}_e en la misma dirección del campo \vec{E} que curva su trayectoria. Si la partícula alcanza el espacio comprendido entre las dos placas según una dirección paralela, se desviará hacia la placa positiva, si su carga es negativa y hacia la negativa en caso contrario, pero siempre en un plano vertical, es decir, perpendicular a ambas placas. (Serway y John W. Jewett, 2005)

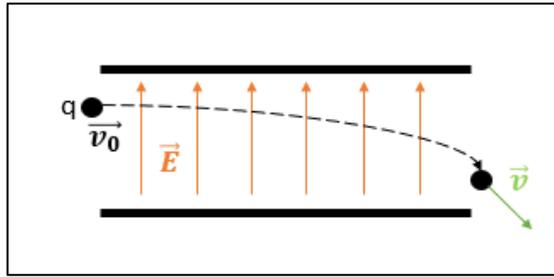


Figura 11-1: Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico uniforme.

Realizado por: Merino, Brigitte. 2020

En conclusión, y como consideración general esto nos muestra que la fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que otros cuerpos cargados originan.

- Una carga en movimiento o corriente móvil crea un campo magnético en el espacio circundante, además de su campo eléctrico. (Serway y John W. Jewett, 2005)
- El campo magnético ejerce una fuerza sobre cualquier otra carga o corriente en movimiento presente en el campo.
- La magnitud de la fuerza magnética \vec{F}_B es proporcional a la magnitud de la carga y al campo magnético \vec{B} . (Serway y John W. Jewett, 2005)
- La fuerza magnética \vec{F}_B depende de la velocidad de la partícula.
- La fuerza magnética \vec{F}_B es perpendicular al campo magnético \vec{B} y a la velocidad \vec{v} .
- Cuando la velocidad \vec{v} es paralela al campo magnético \vec{B} , la fuerza magnética \vec{F}_B es cero.
- El valor máximo de la fuerza magnética \vec{F}_B se da cuando \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares entre sí. (Barco Ríos, Rojas Calderón y Restrepo Parra, 2012)

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (34)$$

$$F_B = qvB \sin \phi$$

En el caso de que forme un ángulo entre la velocidad y el campo magnético. En conclusión, cuando una partícula carga se mueve a través de una región del espacio donde estén presentes los campos eléctricos y magnéticos, ambos ejercerán fuerzas sobre la partícula, por lo tanto, la fuerza total conocida como la Fuerza de Lorentz será la suma vectorial de las fuerzas eléctricas y magnéticas asociadas. La interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético viene dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (35)$$

1.5.3. *Potencial Escalar y Vectorial*

Los potenciales son funciones matemáticas, el potencial escalar Φ es una herramienta útil para describir el campo eléctrico, está definido solamente en regiones del espacio donde no hay corrientes, y cuando eso ocurre es matemáticamente análogo al potencial eléctrico en electrostática. (Ruz y Castro, 2018)

El potencial vectorial o vector potencial magnético \vec{A} es un campo vectorial tridimensional cuyo conocimiento permite conocer el campo magnético. (Griffiths, 1942)

1.5.4. *Transformaciones de Calibre de los potenciales*

Las leyes de la física no pueden depender de la arbitrariedad que provenga de los formalismos matemáticos que describen la evolución de los sistemas. Hay varios ejemplos en los cuales se tiene arbitrariedad en algunas cantidades, que no pueden ser medidas experimentalmente, las cuales se invocan para facilitar los cálculos o que simplemente su presencia en las ecuaciones no altera los resultados físicos que se pueden obtener de estas. En electrodinámica, aunque el campo electromagnético es siempre conservativo, se puede presentar una arbitrariedad en las ecuaciones que lo describen debido a la naturaleza misma del campo. La arbitrariedad en este caso también proviene de las funciones potenciales para el campo, donde cambiar los potenciales en virtud de dicha arbitrariedad representa una transformación que comúnmente se denomina transformación gauge. La electrodinámica semiclásica no es invariante bajo esta clase de transformaciones, en contraste con la electrodinámica clásica y la electrodinámica cuántica que si son invariantes. (Zambrano, Sanchez y Morales, 2003). Estas transformaciones nos muestran que la teoría no varía. Para el potencial escalar y vectorial magnético vienen dado como:

$$\Phi \rightarrow \Phi - \partial_t X \qquad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla X \qquad (36)$$

1.5.5. *Teoría Cuántica no-relativista*

1.5.5.1 *Ecuación de Schrödinger*

La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal del estado cuántico de un sistema físico no relativista, y muestra una relación cuantitativa entre la onda y la partícula, que nos dice de que forma la onda determina la probabilidad de observar la partícula en un determinado lugar. (Gratton, 2003).

La forma más general es la ecuación dependiente del tiempo, la cual describe un sistema que evoluciona con el paso del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) \quad (37)$$

Donde el vector (\vec{r}) representa las coordenadas espaciales

La ecuación de Schrödinger se puede obtener por un proceso denominado primera cuantización, en el cual,

$$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (38)$$

donde, \hat{p} es el operador momento y \hat{E} es el operador energía (Martin Eisberg & Resnick, 1985, pp. 132-133).

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es la ecuación que describe los estados estacionarios. Solo se utiliza cuando el Hamiltoniano no es dependiente del tiempo. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, en terminología de álgebra lineal, es una ecuación con autovalores. (Ruz y Castro, 2018)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (39)$$

Los estados propios o funciones propias $\psi(\vec{r})$, son las que definen la energía total del sistema. En mecánica clásica, la energía total es denominada Hamiltoniano,

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \quad (40)$$

sin embargo, en la teoría cuántica, los operadores son requeridos. Para obtener el operador Hamiltoniano, se emplea el operador del momento canónico (38), obteniendo:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}), \quad (41)$$

dicho de otro modo, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se reescribe como:

$$\hat{H} \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}). \quad (42)$$

La energía total del sistema está definida por el operador Hamiltoniano \hat{H} .

1.5.5.2. Función de Onda

La función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ es inherentemente compleja y por lo tanto no se puede medir con un instrumento real. Pero esta es una característica deseable pues nos impide atribuir a la función de onda una existencia física como (por ejemplo) la de las olas de la superficie del agua. En realidad, $\psi(\vec{r}, t)$ no es más que un instrumento de cálculo que solo tiene significado en el contexto de la teoría de Schrödinger de la que forma parte. La función de onda contiene toda la información

sobre la partícula asociada, compatible con el principio de incerteza. Para obtener esa información hay que relacionar $\psi(\vec{r}, t)$ con las variables dinámicas de la partícula asociada. (Gratton, 2003).

1.5.5.3. Cuantización de la energía

Cuantizar significa conocer el sistema físico en términos cuánticos de la energía de la partícula. Por lo tanto, los valores permitidos de la energía para la partícula cuántica están bien separados y forman un conjunto discreto. Resulta, entonces que la energía de una partícula cuya energía potencial es independiente del tiempo está cuantificada, pues solo para un conjunto discreto de valores E_1, E_2, E_3, \dots de la energía (que se denominan niveles de energía) hay soluciones aceptables de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. (Gratton, 2003).

1.5.5.4. Cuantificación de la energía en la teoría de Schrödinger:

- Si la relación entre $V(x)$ y la energía total E es tal que una partícula clásica está confinada (ligada), los niveles de energía permitidos son discretos.
- Si esa relación es tal que una partícula clásica no está ligada, la energía total puede tomar cualquier valor, de modo que los niveles de energía forman un continuo. (Gratton, 2003)

1.5.6. Método de Separación de Variables

Este es uno de los métodos más antiguos para encontrar soluciones particulares de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) lineales. Básicamente permite reducir el problema de la búsqueda de soluciones de cierto tipo de EDP a problemas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. (Maña Baenas y Alonso, 1988). El método de separación de variables para la solución de una ecuación diferencial parcial consiste en proponer una solución del tipo:

$$u(x, t) = \varphi(x)T(t) \quad (43)$$

Donde $\varphi(x)$ es una función dependiente de x , $T(t)$ es una función de t . Se introduce esta solución en la ecuación diferencial, de manera que se proporcione las mismas variables de un lado y del otro. A continuación, un ejemplo:

Se tiene la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (44)$$

Introduciendo (43) en (44):

$$\varphi(x) \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} T(t) \quad (45)$$

Se divide a los dos miembros por $k\varphi(x)T(t)$:

$$\frac{1}{KT} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (46)$$

Como se puede ver las variables están separadas en el sentido de que el lado izquierdo es una función que depende solo de t y el lado derecho es una función que depende solo de x . Por tanto, ambos lados de la fórmula deben ser constantes, y escribiremos:

$$\frac{1}{KT} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\lambda \quad (47)$$

Donde λ es una constante arbitraria. La ecuación anterior se desglosa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para $\varphi(x)$ y otra para $T(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\lambda \varphi \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\lambda KT \end{aligned} \quad (48)$$

La ecuación diferencial ordinaria dependiente de t , y cuya solución es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda KT \quad (49)$$

$$T(t) = -ce^{-\lambda KT}$$

Donde c es una constante arbitraria. La función $\varphi(x)$ dependiente de la variable espacial x . La solución no trivial que existe solamente para algunos valores de λ , se llama auto función correspondiente al autovalor λ . (Pablo, Pestana y Rodríguez, 2002). Como esta ecuación es de segundo orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes, se considera su polinomio característico:

$$r^2 = -\lambda \quad (50)$$

Se distinguen entonces 3 casos para λ y sus soluciones:

- Si $\lambda < 0$, entonces las dos raíces son reales y distintas $r = \pm\sqrt{-\lambda}$

La solución viene dada por:

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (51)$$

c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

- Si $\lambda = 0$, entonces $r = 0$ es una raíz doble.

La solución viene dada por:

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x \quad (52)$$

- Si $\lambda > 0$, entonces existen dos raíces imaginarias puras $r = \pm i\sqrt{\lambda}$

La solución viene dada por:

$$\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (53)$$

1.5.7. Resolución de ecuaciones diferenciales por el método de serie de potencias

El método de las soluciones en series, es uno de los métodos más antiguos de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Consiste en determinar los coeficientes $C_0, C_1, C_2 \dots$ de modo que la función. (Nuñez, 2002)

$$y(x) = C_0 + C_1(t - t_0) + C_2(t - t_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \quad (54)$$

sea solución de una ecuación dada, en un intervalo alrededor del punto $x = x_0$

Si $x_0 = 0$, entonces:

$$y(x) = C_0 + C_1t + C_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (55)$$

Dependiendo la ecuación a resolver se sacan las derivadas:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \quad (56)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Estas derivadas se introducen en la ecuación diferencial, se igualan los índices, con el fin de llegar a una ecuación que sirva para hallar los coeficientes C_0, C_1, \dots conocida como la ecuación de recurrencia. A continuación, un ejemplo considerando la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0 \quad (57)$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \quad (58)$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Sustituido en la ecuación:

$$y'' + y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \quad (59)$$

Se igualan los índices:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \quad (60)$$

Utilizando k, donde $k=n-2$, por lo tanto, se tiene $n=k+2$. Si $n=2$, entonces $k=0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \quad (61)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k] x^k = 0 \quad (62)$$

Entonces la ecuación de recurrencia vendría dada por:

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k = 0 \quad (63)$$

$$C_{k+2} = \frac{-C_k}{(k+2)(k+1)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (64)$$

A partir de esta ecuación se pueden dar valores a k para hallar los coeficientes.

1.5.8. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son una secuencia de polinomios ortogonales clásicos que surgen en la probabilidad, por ejemplo en la física donde dar lugar a los estados propios del oscilador armónico cuántico. (Sánchez, 2000).

Los polinomios de Hermite vienen definidos en toda la recta real, vale decir, $x \in (-\infty, \infty)$, por lo cual la función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es $w(x) = e^{-x^2}$ (también algunos autores utilizan $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$). (Hernández y Núñez, 2010). Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x) g(x) \quad (65)$$

Debido a las fórmulas de Rodrigues y al peso que hemos considerado anteriormente, se definen los polinomios de Hermite mediante la expresión:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (66)$$

Se tiene que:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (67)$$

Es decir, H_n es par si n es par, e impar si n es impar. Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1 \\
 H_1(x) &= 2x \\
 H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
 H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

1.5.8.1. Propiedades básicas de los polinomios de Hermite

Función Generatriz: La función generatriz de los polinomios de Hermite está definida como:

$$G(x, t) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} \tag{69}$$

A partir de esta función se observan propiedades:

Ortogonalidad: Los polinomios ortogonales son conjuntos de polinomios que forman una base ortogonal de cierto espacio de Hilbert. (Sánchez, 2000).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m \tag{70}$$

Ecuación de Hermite: Los polinomios de Hermite son solución a la ecuación diferencial de Hermite:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny = 0 \tag{71}$$

Matemáticamente, esta ecuación corresponde a casos particular del problema de Sturm-Liouville, vale decir, ecuación de autovalor para un operador diferencial autoadjunto. Los polinomios de Hermite son un caso particular de soluciones a un problema de Sturm-Liouville. Dichas soluciones forman un conjunto completo y ortogonal, con cierta función de peso. En el caso de familias de polinomios ortogonales, existen relaciones de recurrencia que vinculan cada polinomio con los de grados inmediatamente anterior y posterior, y típicamente poseen una función generatriz. (Jorge L Ferrante Colaboradora y Sandra Barrutia, 2014)

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO

2.1. Descripción clásica de un electrón en un campo electromagnético

Para empezar, se necesita realizar un análisis riguroso de la partícula cargada bajo la influencia de los campos eléctricos y magnéticos para lo cual haremos uso de los conceptos básicos pero necesarios de la electrodinámica clásica.

Sea una partícula con carga q , moviéndose a bajas energías (no relativista) dentro de una región con un campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} . La interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético viene dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (72)$$

Donde,

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (73)$$

El miembro derecho de (72) es la fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada de carga q que se mueve bajo la acción de los campos \vec{E} y \vec{B} .

2.1.1. Forma potencial de las ecuaciones de Maxwell

Es necesario representar estas ecuaciones con los potenciales escalar y vectorial que son funciones matemáticas, obtendremos unas ecuaciones sistemáticas, fáciles de tratar que proveerán mayor información y nos simplifican el problema para poder hallar los campos eléctricos y magnéticos.

Satisfaciendo la ecuación (30), se deduce que el campo magnético es el rotacional de un potencial vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$, así pues:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (74)$$

En la ecuación (32) aplicamos (74):

$$\partial_t (\nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t)) + \nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (75)$$

$$\nabla \times (\vec{E}(\vec{x}, t) + \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t)) = \vec{0} \quad (76)$$

Si la expresión $\vec{E}(\vec{x}, t) + \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t)$ tiene rotor nulo, se denomina un campo irrotacional, y su descomposición de Helmholtz se reduce a:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (77)$$

Esto significa que, en situaciones no estacionarias, el campo eléctrico no deriva de un potencial escalar, sino que también incluye la derivada temporal del potencial vector magnético.

Aplicando (77) en (29):

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \right) = 4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (78)$$

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t^2\Phi(\vec{x}, t) + \partial_t \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t^2\Phi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (79)$$

No se altera la ecuación por aumentar estos términos: $-\partial_t^2\Phi(\vec{x}, t)$ y $+\partial_t^2\Phi(\vec{x}, t)$ en (79) Por lo que tenemos:

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t^2\Phi(\vec{x}, t) + \partial_t \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t\Phi(\vec{x}, t) \right) = -4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (80)$$

Ahora en (31) sustituyendo los cambios anteriores (74) y (77), se tiene:

$$\partial_t \left(-\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \right) - \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) \right) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) \quad (81)$$

Haciendo uso de la identidad del rotacional:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (82)$$

Se llega a:

$$-\partial_t \nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t^2 \vec{A}(\vec{x}, t) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) + \nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) \quad (83)$$

De la ecuación (83) se agrupa los términos $-\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right)$, $-\partial_t \nabla\Phi(\vec{x}, t)$ y reordenando la expresión anterior tenemos:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) - \partial_t^2 \vec{A}(\vec{x}, t) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t\Phi(\vec{x}, t) \right) \quad (84)$$

A continuación, a manera de resumen las ecuaciones de Maxwell en función de los potenciales:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (74)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (77)$$

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t^2\Phi(\vec{x}, t) + \partial_t \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t\Phi(\vec{x}, t) \right) = -4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (79)$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) - \partial_t^2 \vec{A}(\vec{x}, t) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t\Phi(\vec{x}, t) \right) \quad (84)$$

2.1.2. Importancia de los potenciales electromagnéticos

Los potenciales, escalar $\Phi(\vec{x}, t)$ y vectorial magnético $\vec{A}(\vec{x}, t)$ permiten de una manera más fácil conocer el campo eléctrico y magnético, respectivamente, son herramientas matemáticas útiles para sistematizar el problema en campos electromagnéticos en general. Las ecuaciones de Maxwell contienen las fuentes que permite de alguna manera hallar directamente los campos, pero esto es complicado, por lo que dichas ecuaciones se expresan en función de los potenciales a partir de las fuentes $\vec{j}(\vec{x}, t)$ y $\rho(\vec{x}, t)$.

2.1.3. Invariancia de calibre de las ecuaciones de Maxwell

Dichas transformaciones se conocen como transformaciones de calibre y se dice que la teoría presenta invariancia de calibre. Este tipo de invariancia es de importancia fundamental en física y está íntimamente ligada a la noción de interacción. Se tiene entonces que el campo electromagnético viene descrito por toda una familia de potenciales que difieren entre sí por transformaciones de calibre. Estas transformaciones dejan invariantes los campos.

A partir de las transformaciones introducidas en (36) se muestra como los campos quedan invariantes al ser introducidas en las ecuaciones de Maxwell:

$$\Phi \rightarrow \Phi - \partial_t X \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla X \quad (36)$$

A partir de las ecuaciones (74), (77), (79) y (84).

Introduciendo las transformaciones en (74):

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla x \left(\vec{A}(\vec{x}, t) + \nabla X(\vec{x}, t) \right) \quad (85)$$

Considerando la propiedad del rotacional dado por: $\nabla x(\nabla X(\vec{x}, t)) = 0$ en la expresión anterior obtenemos que la ecuación queda invariante bajo la transformada:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla x \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (86)$$

Ahora en la ecuación (77), introducimos (36):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla(\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t X(\vec{x}, t)) - \partial_t \left(\vec{A}(\vec{x}, t) + \nabla X(\vec{x}, t) \right) \quad (87)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (77)$$

La ecuación (77) queda invariante.

En la ecuación (79) aplicamos el calibre de igual manera (36):

$$\nabla^2(\Phi - \partial_t X) - \partial_t^2(\Phi - \partial_t X) = -4\pi\rho - \partial_t \left(\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla X) + \partial_t(\Phi - \partial_t X) \right) \quad (88)$$

$$\nabla^2\Phi - \partial_t \nabla^2 X - \partial_t^2\Phi + \partial_t^2(\partial_t X) = -4\pi\rho - \partial_t \nabla \cdot \vec{A} - \partial_t \nabla^2 X - \partial_t^2\Phi + \partial_t(\partial_t^2 X) \quad (89)$$

$$\nabla^2\Phi - \partial_t^2\Phi = -4\pi\rho - \partial_t (\nabla \cdot \vec{A} + \partial_t\Phi) \quad (79)$$

Se recuperó la ecuación (79), es decir es invariante bajo calibre.

Ahora el mismo procedimiento en la ecuación (84):

$$\nabla^2(\vec{A} + \nabla X) - \partial_t^2(\vec{A} + \nabla X) = -4\pi\vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla X) + \partial_t(\Phi - \partial_t X) \right) \quad (90)$$

$$\nabla^2\vec{A} + \nabla(\nabla^2 X) - \partial_t^2\vec{A} - \partial_t^2\nabla X = -4\pi\vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 X + \partial_t\Phi - \partial_t^2 X \right) \quad (91)$$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x}, t) - \partial_t^2\vec{A}(\vec{x}, t) = -4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \partial_t\Phi(\vec{x}, t) \right) \quad (84)$$

Se recupera la ecuación (84) en el proceso anterior.

2.2. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana del electrón en un campo electromagnético.

A partir de la ecuación de la fuerza de Lorentz (35):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (35)$$

Utilizando (74) y (77) en (35):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(-\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t)) \right) \quad (92)$$

Usando la identidad del producto vectorial triple en la ecuación anterior:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \quad (93)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(-\nabla\Phi(\vec{x}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (94)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(-\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) - \nabla(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (95)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior esta de manera implícita el potencial generalizado U, recordando que la energía potencial de un cuerpo es una consecuencia de que el sistema de fuerzas que actúa sobre el mismo sea conservativo.

$$U = q \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (96)$$

El potencial generalizado se relaciona directamente con la velocidad. Y según se sabe de la segunda ley de Newton la fuerza es conservativa, tal que las componentes cartesianas de la fuerza equivalen al gradiente de la energía potencial cambiado de signo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\nabla U \quad (97)$$

Con esto entonces:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q\nabla \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (98)$$

Donde,

$$\vec{p} \equiv \Pi + q\vec{A} \quad (99)$$

Es el momento canónico, la forma de introducir un campo electromagnético en Mecánica Cuántica.

Partiendo de la ecuación (95):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(-\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) - \nabla \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \right) \quad (100)$$

Los primeros términos luego del paréntesis corresponden a una derivada Convectiva o Sustancial, que viene de la forma:

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{x}, t) = \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) \quad (101)$$

Esta derivada relaciona el ritmo de variación con el tiempo de una propiedad de una partícula, como lo es $\vec{A}(\vec{x}, t)$, esta no es más que una de las muchas generalizaciones del concepto de derivada que aparecen en física.

Se usa el diferencial total de $\vec{A}(\vec{x}, t)$:

$$d\vec{A}(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right)(V_x dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right)(V_y dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)(V_z dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) dt \quad (102)$$

Que no es más que una combinación lineal de diferenciales cuyas componentes son los del gradiente de la función $\vec{A}(\vec{x}, t)$.

Ahora dividiendo (102) para dt :

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{1}{dt} \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right)(V_x dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right)(V_y dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)(V_z dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) dt \right] \quad (103)$$

Tomando en cuenta las expresiones:

$$\begin{aligned} (V_x dt) &= dx \\ (V_y dt) &= dy \\ (V_z dt) &= dz \end{aligned} \quad (104)$$

En la ecuación (103) los dt de cada término del diferencial total de $\vec{A}(\vec{x}, t)$ se eliminan con el dt que dividimos en toda la expresión, obteniendo dos expresiones:

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right)V_x + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right)V_y + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)V_z = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) \quad (105)$$

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) dt = \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (106)$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}(\vec{x}, t) \quad (107)$$

A manera general se observa que a medida que el electrón se mueve el potencial siente los cambios, porque el potencial cambia con el tiempo, y cuando pasa el tiempo cambia de posición y su validación espacial.

Se parte de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, que en resumen son las ecuaciones de Newton generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (108)$$

La Lagrangiana es $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$, y el Hamiltoniano $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$

Se hace uso de las ecuaciones que se dan a continuación:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \vec{p} \quad (109)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\right) = \vec{p} \quad (110)$$

Como el tiempo avanza la función cambia, y lo hace porque depende del tiempo y el tiempo varía y también porque \vec{x}, \vec{v} cambian a medida que evoluciona el sistema. Se cabe recalcar que \vec{p} y \vec{p} no son lo mismo.

El diferencial total de la función Lagrangiana viene dado por:

$$dL(\vec{x}, \vec{v}, t) = \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\right) d\vec{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) d\vec{v} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt \quad (111)$$

$$dL(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{p}d\vec{x} + \vec{p}d\vec{v} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt \quad (112)$$

El termino $\vec{p}d\vec{v}$ se lo puede expresar de la forma:

$$\vec{p}d\vec{v} = d(\vec{v}\vec{p}) - \vec{v}d\vec{p} \quad (113)$$

La ecuación (113) se introduce en (112):

$$dL(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{p}d\vec{x} + d(\vec{v}\vec{p}) - \vec{v}d\vec{p} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt$$

$$dL(\vec{x}, \vec{v}, t) - \vec{p}d\vec{x} - d(\vec{v}\vec{p}) + \vec{v}d\vec{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt \quad (114)$$

Por otro lado, está también el diferencial total para el Hamiltoniano:

$$dH(\vec{x}, \vec{p}, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right) d\vec{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\right) d\vec{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) dt \quad (115)$$

Empleando las ecuaciones canónicas de Hamilton dadas en (28):

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right) = -\vec{p}; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\right) = \vec{v}; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) \quad (116)$$

Estas ecuaciones se introducen en (115) con la finalidad de encontrar la relación con la Lagrangiana.

$$dH(\vec{x}, \vec{p}, t) = -\vec{p}d\vec{x} + \vec{v}d\vec{p} - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt \quad (117)$$

Ahora en la ecuación anterior se introduce el término despejado en (114):

$$dH(\vec{x}, \vec{p}, t) = -\vec{p}d\vec{x} + \vec{v}d\vec{p} - dL(\vec{x}, \vec{v}, t) + \vec{p}d\vec{x} + d(\vec{v}\vec{p}) - \vec{v}d\vec{p} \quad (118)$$

Se simplifica:

$$dH(\vec{x}, \vec{p}, t) = -dL(\vec{x}, \vec{v}, t) + d(\vec{v}\vec{p}) \quad (119)$$

Así se llega a definir el Hamiltoniano:

$$H(\vec{x}_i, \vec{p}_i, t) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{p}_i - L(\vec{x}_i, \vec{v}_i, t) \quad (120)$$

Según el principio de Hamilton la Lagrangiana está definida como:

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = T(\vec{x}, \vec{v}) - U(\vec{x}) \quad (121)$$

En (96) ya se definió el potencial U, este se introduce en la ecuación anterior:

$$L = T - q \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (122)$$

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \quad (123)$$

Introduciendo el momento conjugado:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{1}{2} m v^2 - q \left(\Phi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right) \right) = \Pi + q \vec{A} \quad (124)$$

Donde $\Pi = m\vec{v}$ es el momento cinético, entonces el momento conjugado en función del potencial vector:

$$\vec{p} \equiv \Pi + q \vec{A} \quad (125)$$

En (120), se aplica el momento conjugado, y el lagrangiano ya definido:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = (m v^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}) - \left(\frac{1}{2} m v^2 - q \Phi + q \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \quad (126)$$

Desarrollando la expresión se obtiene el Hamiltoniano para la partícula cargada en un campo electromagnético:

$$H = T + q \Phi = \frac{2m v^2 - m v^2}{2} + q \Phi \quad (127)$$

Como el hamiltoniano representa la energía total de la partícula sometida a un campo electromagnético y sabemos que:

$$\Pi = \vec{p} - q \vec{A} \quad (128)$$

Tenemos finalmente la ecuación de la energía en función de los potenciales:

$$E = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + q \Phi = H \quad (129)$$

Con esta ecuación encontrada de la energía ya será posible comenzar el tratamiento cuántico.

2.3. Descripción cuántica de un electrón en un campo magnético homogéneo.

Se comienza con el planteamiento de la ecuación de Schrödinger Independiente del tiempo para una partícula de carga q moviéndose en el seno de campo magnético \vec{B} se obtiene haciendo el cambio del momento canónico $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}$, donde \vec{A} es el potencial vector.

También se propone el campo magnético es constante $\vec{B} = B\vec{e}_z$, como se aprecia en la imagen a continuación:

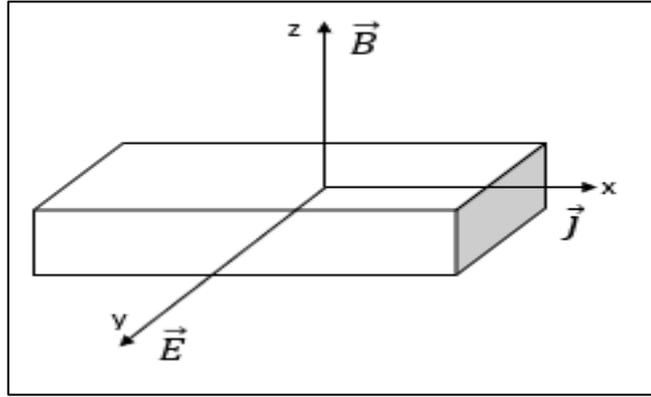


Figura 1-2: Representación cartesiana del campo magnético y eléctrico en la muestra.

Realizado por: Merino, Brigitte.2020

Desarrollando la expresión donde el campo magnético se relaciona con el potencial vector.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (130)$$

$$\vec{B} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\vec{e}_x + (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\vec{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\vec{e}_z$$

Como el campo magnético es constante en el eje z se tiene que los otros términos se anulan.

$$\vec{B} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\vec{e}_z \quad (131)$$

Por cuestión de simplificar cálculos, existe libertad de calibre en la elección del potencial vector para un campo magnético. Las propiedades físicas no se ven influenciadas por la elección del calibre.

$$\vec{B} = (\partial_x A_y)\vec{e}_z \quad (132)$$

Integrando la anterior expresión:

$$\int (\partial_x A_y) = \int B dx \quad (133)$$

$$A_y = Bx$$

Esto se llama calibre de Landau, para un sistema bidimensional de electrones moviéndose en el plano x-y. El Hamiltoniano no depende de y, z, los operadores p_y, p_z conmutan con el hamiltoniano, por lo tanto, estos operadores comparten autofunciones con el hamiltoniano:

$$H\psi = E\psi$$

$$p_y\psi = |p_y|\psi = \hbar k_y\psi \quad (134)$$

$$p_z\psi = |p_z|\psi = \hbar k_z\psi$$

Escribiendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $\psi(x, y, z)$:

$$H\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (135)$$

$$H\psi(x, y, z) = \left[\frac{p^2}{2m} \right] \psi(x, y, z)$$

Introduciendo el momento canónico antes mencionado en (2.54):

$$H\psi(x, y, z) = \frac{[\vec{p} - q\vec{A}]^2}{2m} \psi(x, y, z) \quad (136)$$

Se resuelve el término al cuadrado:

$$H\psi(x, y, z) = \left[\frac{p^2}{2m} - \frac{\vec{p} \cdot q\vec{A}}{m} + \frac{(q\vec{A})^2}{2m} \right] \psi(x, y, z) \quad (137)$$

Aplicando primera cuantización, se introduce el operador momento:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \quad (138)$$

Quedando en la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x, y, z) + \left[\frac{(q\vec{A})^2}{2m} + i\hbar \frac{d}{dy} \frac{qA_y}{m} \right] \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (139)$$

Lo cual la teoría nos asegura que solución a la misma es la siguiente función propia de la forma:

$$\psi(x, y, z) = e^{i(K_y y + K_z z)} \varphi(x) \quad (140)$$

Lo cual dice que la partícula se comporta como libre en el eje y y z, ondas planas en esa dirección.

Esta solución se introduce en la ecuación (139):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 e^{i(K_y y + K_z z)} \varphi(x) + \left[\frac{(q\vec{A})^2}{2m} + i\hbar \frac{d}{dy} \frac{qA_y}{m} \right] e^{i(K_y y + K_z z)} \varphi(x) = E e^{i(K_y y + K_z z)} \varphi(x) \quad (141)$$

Reduciendo la ecuación anterior y eliminando el término $e^{i(K_y y + K_z z)}$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} + \frac{\hbar^2 K_y^2}{2m} + \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m} \right] \varphi(x) + \left[\frac{(q\vec{A})^2}{2m} - \frac{\hbar K_y q A_y}{m} \right] \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (142)$$

donde se introducen los siguientes cambios,

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \\ A &= Bx \\ \omega &= \frac{qB}{m} \end{aligned} \quad (143)$$

Esta última es la conocida frecuencia del ciclotrón, que describe el movimiento circular de las partículas bajo la influencia de un campo magnético.

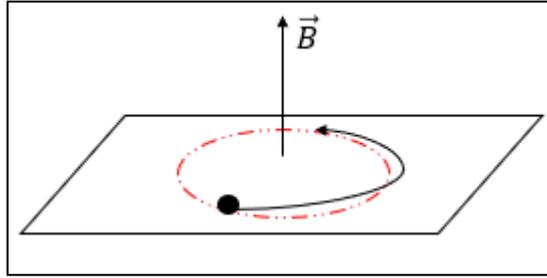


Figura 2-2: Movimiento circular del electrón.

Realizado por: Merino, Brigitte. 2020

Se desarrolla el segundo término y se sustituye los cambios de (143) y simplificando se llega a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} \varphi(x') + \frac{1}{2} \omega^2 m x'^2 \varphi(x') = \left(E - \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m} \right) \varphi(x') \quad (144)$$

La ecuación anterior describe la situación física del oscilador armónico simple.

Utilizando la equivalencia anterior se va a demostrar cuales son los niveles de energía de la partícula cargada si $K_z = 0$ (por simplicidad) y se propone $\omega^2 m = C$ en la ecuación (144):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} \varphi(x') + \frac{1}{2} C x'^2 \varphi(x') = E \varphi(x') \quad (145)$$

La frecuencia clásica viene dada por:

$$\omega = 2\pi\nu \quad (146)$$

$$C = 4\pi\nu^2 m$$

Entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} \varphi(x') + 2\pi\nu^2 m x'^2 \varphi(x') = E \varphi(x') \quad (147)$$

Si se nombra $\beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$ y $\alpha = \frac{2\pi m \nu}{\hbar}$ en la ecuación anterior:

$$\frac{d^2}{dx'^2} \varphi(x') + [\beta - \alpha^2 x'^2] \varphi(x') = 0 \quad (148)$$

Para facilitar el cálculo se introduce un cambio de variable $u = \sqrt{\alpha} x'$

Por lo que se expresa la segunda derivada de la ecuación (2.74) en función de la nueva variable u . Recurriendo a la regla de la cadena en general para derivadas de orden superiores conocido como la fórmula de Faà di Bruno:

$$\mu = \sqrt{\alpha} x' \quad (149)$$

$$\frac{du}{dx'} = \sqrt{\alpha}$$

Como la función $\varphi(x')$ no depende de μ el segundo término se anula, quedando:

$$\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi(x')}{du^2}\alpha \quad (150)$$

Introduciendo estos cambios y dividiendo para α en la ecuación (148) quedando:

$$\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} + \left[\frac{\beta}{\alpha} - u^2\right]\varphi(u) = 0 \quad (151)$$

Se plantea que la solución para la ecuación diferencial anterior de segundo orden es:

$$\varphi(u) = Ae^{-\frac{u^2}{2}}H(u) \quad (152)$$

El signo de la exponencial, en caso de ser positivo, la función de onda adquirirá valores infinitamente grandes por lo cual no podrá ser normalizada, como consecuencia debe ser negativo. Además, esta función tendrá una rápida caída asintótica y para mantenerla debe ser multiplicada por un polinomio finito $H(u)$ para este caso los conocidos Polinomios de Hermite.

Desarrollando las derivadas del primer término de (151) y haciendo uso de la solución (152), se tiene,

$$\frac{d^2}{du^2}\varphi(u) = Ae^{-\frac{u^2}{2}}\left[-H(u) + u^2H(u) - 2u\frac{dH(u)}{du} + \frac{d^2H(u)}{du^2}\right] \quad (153)$$

Sustituyendo estas derivadas en (151):

$$\frac{d^2H(u)}{du^2} - 2u\frac{dH(u)}{du} + \left[\frac{\beta}{\alpha} - 1\right]H(u) = 0 \quad (154)$$

Esta es la conocida ecuación de Hermite donde, H , por supuesto es el polinomio de Hermite, polinomio finito que viene de la forma:

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \quad (155)$$

Se sustituye este polinomio en la ecuación diferencial, para resolver por el método de serie de potencias. Tomando en cuenta su primera y segunda derivada e introduciendo estas dos últimas expresiones en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n u^{n-2} - 2u \sum_{n=1}^{\infty} na_n u^{n-1} + \left[\frac{\beta}{\alpha} - 1\right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = 0 \quad (156)$$

Por lo tanto, tenemos la relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = \frac{2n+1 - \frac{\beta}{\alpha}}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (157)$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n + 1 - \frac{\beta}{\alpha}}{(n + 1)(n + 2)} \quad (158)$$

Esta relación de recurrencia da la solución a la ecuación diferencial de segundo orden y separa los términos pares e impares que nos quedan además en función de dos constantes de integración a_0 y a_1 . La solución viene dada por:

$$H(u) = H_{pares}(u) + H_{impares}(u) \quad (159)$$

$$H_{pares}(u) = a_0 + a_2u^2 + a_4u^4 + \dots \quad (160)$$

$$H_{impares}(u) = a_1 + a_3u^3 + a_5u^5 + \dots \quad (161)$$

También se sabe que la ecuación de recurrencia para valores muy grandes de n se aproxima a:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n + 1 - \frac{\beta}{\alpha}}{(n + 1)(n + 2)} \approx \frac{2}{n} \quad (162)$$

2.3.1. Niveles de Landau

Para lograr que la solución dada resuelva el problema se requiere un tope, es decir después de cierto número todos los términos de la serie son cero, esto se logra cuando el numerador de la ecuación de recurrencia se hace 0:

$$2n + 1 - \frac{\beta}{\alpha} = 0 \quad (163)$$

Sustituyendo los valores de $\beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$ y $\alpha = \frac{2\pi mv}{\hbar}$ obtenemos:

$$E_{n,K_z} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m} \quad (164)$$

Estos son los valores de energía que puede tomar el electrón en el seno de un campo magnético homogéneo, es decir el mínimo nivel de energía no es cero y se nota la dependencia de dos números cuánticos.

Como se observa también, con la presencia de campo magnético constante los niveles de energía de la partícula están igualmente espaciados por $\hbar\omega$, donde ω es la frecuencia del ciclotrón la que otorga movimiento circular al electrón. Estos son los llamados Niveles de Landau.

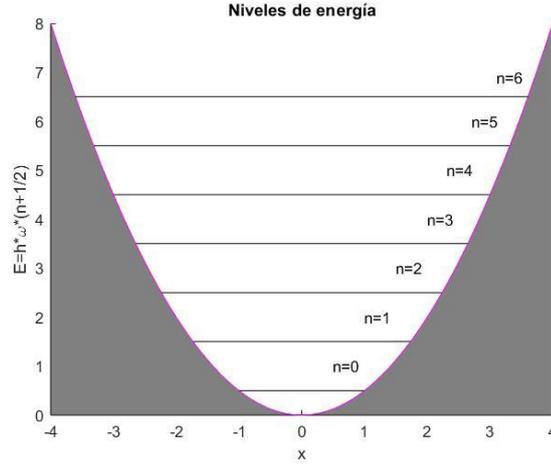


Gráfico 1-3: Representación de los niveles de energía de energía.

Realizado por: Merino, Brigitte. 2020

Por lo tanto, la solución para el caso general del problema vendrá dado por la función propia:

$$\psi(x, y, z) = A e^{-\frac{u^2}{2}} H(u) e^{i(K_y y + K_z z)}, \quad (165)$$

Donde:

$$\mu = \sqrt{\alpha} x' = \sqrt{\frac{2\pi m v}{\hbar}} \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \right) \quad (166)$$

La ecuación (3.89) reescrita:

$$\psi_{n, k_y, K_z}(x, y, z) = A e^{-\frac{m\omega \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \right)^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \right) \right) e^{i(K_y y + K_z z)} \quad (167)$$

En términos de la longitud magnética conocida como $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ se puede reescribir la ecuación anterior, así:

$$\psi_{n, k_y, K_z}(x, y, z) = A e^{-\frac{(x - k_y l_B^2)^2}{2l_B^2}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} (x - k_y l_B^2) \right) e^{i(K_y y + K_z z)} \quad (168)$$

CAPITULO III

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

- Se parte de un problema físico en tres dimensiones y se termina con un problema unidimensional, como si una de las dimensiones se ha perdido, todo esto directamente relacionado con el campo magnético \vec{B} , el cual redujo los grados de libertad de movimiento a uno y cambió el otro grado de libertad por la cuantización de la energía.
- Cada nivel de energía no tiene un único estado asociado, como lo es en el caso del oscilador armónico cuántico, más bien existe una enorme degeneración de estados, lo que significa que para un nivel de energía le corresponden varios estados. Esto se puede notar fácilmente en que la energía depende de dos números cuánticos, uno discreto n y otro continuo K_z .

$$E_{n,K_z} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m}$$

- La degeneración de estados es notable también al realizar la interpretación probabilística, normalizando la función de onda, se observa que los valores exponenciales se anulan quedando solo el polinomio de Hermite en función de dos números cuánticos, n y k_y , por lo tanto, los niveles de Landau son infinitamente degenerados debido a que k_y puede tomar cualquier valor y la energía no cambia.

$$|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^* = AH_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega} \right) \right)$$

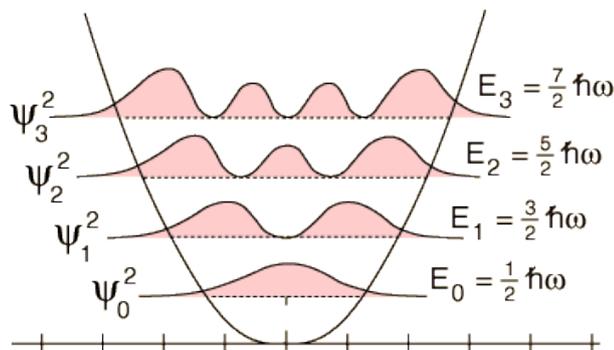


Gráfico 2-3: Distribuciones de probabilidad

Fuente: M Olmo R Nave, 2016

El gráfico (2-3) se interpreta de la siguiente manera: para el primer nivel de energía de Landau E_0 la probabilidad de encontrar es mayor en el centro, para el segundo nivel de energía de Landau E_1 la mayor probabilidad de encontrar es en los bordes, pero en el centro es nula y así con los demás niveles.

CONCLUSIONES

- Se utilizó el formalismo canónico mediante las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana para describir al electrón en un campo electromagnético, esto permitió encontrar la energía del sistema que viene a ser el Hamiltoniano para su posterior utilización dentro de la ecuación de Schrödinger, también cabe recalcar que el uso de los potenciales nos generó los campos para así conocer de manera más íntima la relación campo-partícula, además estos fueron necesarios para el tratamiento cuántico.
- La elección del calibre de Landau no influyó en las propiedades físicas del sistema, más bien el campo magnético en el eje z cuantizó el movimiento del electrón haciendo que este se mueva circularmente en el plano x - y y con la frecuencia angular que es la frecuencia del ciclotrón la responsable de proveer movimiento circular y que depende del campo magnético aplicado.
- Para el caso del electrón en un campo magnético homogéneo se resolvió la ecuación de Schrödinger Independiente del tiempo, encontrando los autovalores de energía, estos son los niveles de Landau que son conjunto de estados propios con el mismo nivel de energía, estos niveles están infinitamente degenerados debido a la dependencia de dos números cuánticos.

RECOMENDACIONES

- Es recomendable el uso de una sola notación durante toda la demostración de ecuaciones para evitar confusiones en términos, etc.
- A nivel experimental la observación de los niveles de Landau es muy complicado crear las condiciones y tener los instrumentos necesarios para realizar el experimento, si lo quisieran realizar el efecto hall cuántico requiere de campos magnéticos muy altos y bajas temperaturas.

BIBLIOGRAFÍA

ATICAS, M., et. al. *Estructura supersimetrica de los estados de landau en el grafeno*. S.l.: s.n, 2012. Disponible en: <http://www.ifm.umich.mx/~raya/tesis/Tesis-Alyabra.pdf>

BARCO RÍOS, H., et. al. *Física : principios de electricidad y magnetismo* [en línea], 2012. S.l.: s.n. ISBN 978-958-761-283-7. Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/45116/>.

ESTÉVEZ, J.,. *Niveles de Landau.* , 2017 [Consulta:20 de diciembre 2019] Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/317648304_Niveles_de_Landau

GRATTON, J.,. *Introducción a la Mecánica Cuántica. Instituto de Física del Plasma* [en línea], 2003. pp. 268. Disponible en: [http://www.lfp.uba.ar/es/notas de cursos/notasmecanicacuantica/Cuantica.pdf](http://www.lfp.uba.ar/es/notas_de_cursos/notasmecanicacuantica/Cuantica.pdf).

GRIFFITHS, D.J.,. *Introduction to Electrodynamics*, 1942. S.l.: s.n. ISBN 9780321856562.

HERNÁNDEZ, H. & NÚÑEZ, L. *Series de Polinomios Ortogonales. Tema 1: Series* [en línea], pp. 14. Disponible en: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/hector/prontuario/metodos2/S03_C07.pdf.

L FERRANTE, Jorge. *Solución De Ecuaciones Diferenciales Mediante Series De Potencias.* [en línea], 2014. Disponible en:http://www.edutecne.utn.edu.ar/solucion_ecuaciones/Solucion_Ecuac_Diferenciales_Ferrante.pdf.

MAÑA BAENAS, M. & ALONSO, L.M.,. *Mayéutica*, 1988. vol. 14, no. 37, pp. 351-353. DOI 10.5840/mayeutica19881437-3874.

MARTIN EISBERG, R. & RESNICK, R.,. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 1974 .2nd ed. S.l.: s.n. ISBN 0-471-23464-8.

MAYADO, M.,. *Electrodinámica Cuántica Bidimensional : Sobre la teoría del efecto Hall Cuántico.* [en línea], 2011 .pp. 320. Disponible en: <http://campus.usal.es/~mpg/General/TesisMarina.pdf>.

NUÑEZ, L.A., *Métodos Matemáticos de la Física V. Ecuaciones diferenciales ordinarias : métodos elementales de integración*, 2002., pp. 1-10.

PABLO, A. et. al. *Método de separación de variables.*, 2002. pp. 6-16. Disponible en: <http://ocw.uc3m.es/matematicas/ampliacion-de-matematicas-ii/material-de-clase-1/apuntes-edp-OCW-2.pdf>

RUZ, L.J.R. & CASTRO, D.A.C., *Ondas electromagnéticas. Teoría electromagnética para estudiantes de ingeniería Notas de clase*, 2018. pp. 77-100. DOI 10.2307/j.ctvvn8f6.8.

SÁNCHEZ, J., *Polinomios de Laguerre. Estudios filológicos* [en línea], 2000. no. 35. ISSN 0071-1713. DOI 10.4067/S0071-17132000003500023. Disponible en: http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S007117132000003500023&lng=en&nrm=iso&tlng=en.

SEARS, W. & ZEMANSKY, M.W., *Física Universitaria con física moderna. PEARSON EDUCACIÓN*, 2009. Disponible en: https://www.academia.edu/38420993/F%C3%ADsica_Universitaria_-_Sears_Zemansky_Volumen_2_-_12va_

SERWAY, R.A. & JOHN W. JEWETT, J., *Física para ciencias e ingenierías*, 2005. S.l.: s.n. ISBN 9786074813586.

TONG, D., Lectures on the Quantum Hall Effect. [en línea], 2016. no. January. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/1606.06687>.

VELASCO, E., *Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana.* , 2004. pp. 1-196. Disponible en: <http://casanchi.com/fis/mlagrangiana01.pdf>

VILLATORO, F.R., Observado el efecto Hall cuántico fraccionario en grafeno. [en línea], 2009. Disponible en: <https://francis.naukas.com/2009/11/16/observado-el-efecto-hall-cuantico-fraccionario-en-grafeno/>.

VON KLITZING, K., Quantized hall effect. *Physica B: Physics of Condensed Matter & C: Atomic, Molecular and Plasma Physics, Optics*, 1984. ISSN 01651757. DOI 10.1016/0378-4363(84)90170-0.

ZAMBRANO, D.E. et. al.. Invarianza Gauge.pdf. , 2003 .[Consulta: 19 de noviembre 2019].